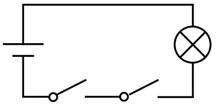

Глава 3

ЛОГИКА И ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРА

3.1. Алгебра логики

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные древнегреческими мыслителями. Основы формальной логики заложил Аристотель, который впервые отделил логические формы мышления (речи) от его содержания.

Логика — это наука о формах и способах мышления.

Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира. Логика позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.

Алгебра в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над различными математическими объектами (алгебра переменных и функций, алгебра векторов, алгебра множеств и т. д.). Объектами алгебры логики являются высказывания.

Высказывания — это повествовательные предложения, о которых можно однозначно сказать, истинны они или ложны.

Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Ее интересует только один факт — истинно или ложно данное высказывание, что дает возможность определять истинность или ложность составных (составленных из простых) высказываний алгебраическими методами.

Логические переменные. Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами — именами **логических переменных.** Высказывания могут быть истинными или ложными. Истинному высказыванию соответствует значение логической переменной 1, а ложному — значение 0.

В алгебре логики высказывания обозначаются **именами логических переменных**, которые могут принимать лишь два значения: «истина» (1) и «ложь» (0).

Рассмотрим два простых высказывания:
A — {Два умножить на два равно четырем}.
B — {Два умножить на два равно пяти}.
Первое высказывание истинно ($A = 1$), а второе ложно ($B = 0$).

Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью связок «и», «или», «не», которые в алгебре логики заменяются на **логические операции.** Рассмотрим базовые логические операции.

Логическое умножение (конъюнкция). Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «и» называется операцией логического умножения или конъюнкцией.

Составное высказывание, образованное в результате **операции логического умножения (конъюнкции)**, истинно тогда и только тогда, когда истинны входящие в него простые высказывания.

Из приведенных ниже четырех составных высказываний, образованных с помощью операции логического умножения, истинно только четвертое, так как в первых трех составных высказываниях хотя бы одно из простых высказываний ложно:

(1) «$2 \times 2 = 5$ и $3 \times 3 = 10$»
(2) «$2 \times 2 = 5$ и $3 \times 3 = 9$»
(3) «$2 \times 2 = 4$ и $3 \times 3 = 10$»
(4) «$2 \times 2 = 4$ и $3 \times 3 = 9$»

Перейдем теперь от записи высказываний на естественном языке к их записи на формальном языке алгебры логики.

Операцию логического умножения (конъюнкцию) принято обозначать значком &. Операция логического умножения, аргументами которой являются логические переменные A и B, записывается следующей формулой

$$A \mathbin{\&} B. \tag{3.1}$$

Значение операции логического умножения задается с помощью таблицы истинности. **Таблица истинности** показывает, какие значения дает логическая операция при всех возможных наборах ее аргументов. Результатом операции логического умножения является значение «истина» (1) тогда и только тогда, когда оба аргумента принимают значения «истина» (1) (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Таблица истинности конъюнкции (логического умножения)

A	B	$A \mathbin{\&} B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности задает **логическую функцию**, аргументы которой — логические переменные (принимают значение либо 0, либо 1), а значение функции — результат логической операции над этими переменными (тоже значение либо 0, либо 1).

По таблице истинности легко определить истинность составного высказывания, образованного с помощью операции логического умножения. Рассмотрим, например, составное высказывание

«$2 \times 2 = 4$ и $3 \times 3 = 10$».

Первое простое высказывание истинно ($A = 1$), а второе высказывание ложно ($B = 0$), по таблице истинности логического умножения определяем, что данное составное высказывание ложно.

Логическое сложение (дизъюнкция). Объединение двух (или нескольких) высказываний с помощью союза «или» называется операцией логического сложения или дизъюнкцией.

Составное высказывание, образованное в результате **логического сложения (дизъюнкции)**, истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

Так, из приведенных ниже четырех составных высказываний, образованных с помощью операции логического сложения, ложно только первое, так как в последних трех составных высказываниях хотя бы одно из простых высказываний истинно:

(1) «$2 \times 2 = 5$ или $3 \times 3 = 10$»
(2) «$2 \times 2 = 5$ или $3 \times 3 = 9$»
(3) «$2 \times 2 = 4$ или $3 \times 3 = 10$»
(4) «$2 \times 2 = 4$ или $3 \times 3 = 9$»

Запишем теперь операцию логического сложения на формальном языке алгебры логики. Операцию логического сложения (дизъюнкцию) принято обозначать значком $\vee$. Операция логического сложения, аргументами которой являются логические переменные A и B, записывается следующей формулой:

$$A \vee B. \tag{3.2}$$

Значение операции логического сложения задается с помощью таблицы истинности. Результатом операции логического сложения является значение «ложь» (0) тогда и только тогда, когда оба аргумента принимают значения «ложь» (0) (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Таблица истинности дизъюнкции (логического сложения)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

По таблице истинности легко определить истинность составного высказывания, образованного с помощью операции логического сложения. Рассмотрим, например, составное высказывание «$2 \times 2 = 4$ или $3 \times 3 = 10$».

Первое простое высказывание истинно ($A = 1$), а второе высказывание ложно ($B = 0$); с помощью таблицы истинности логического сложения определяем, что данное составное высказывание истинно.

Логическое отрицание (инверсия). Присоединение частицы «не» к высказыванию называется **операцией логического отрицания** или **инверсией.**

Логическое отрицание (инверсия) делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное — истинным.

Высказывание «Два умножить на два равно четырем» истинно, а высказывание, образованное с помощью операции логического отрицания, «Два умножить на два не равно четырем», — ложно.

Запишем теперь операцию логического отрицания на формальном языке алгебры логики. Операцию логического отрицания (инверсию) над логическим высказыванием A принято обозначать $\overline{A}$ или $\neg A$. Операция логического отрицания, аргументом которой является логическая переменная A, записывается следующей формулой:

$$\overline{A}. \tag{3.3}$$

Значение логической операции отрицания задается с помощью таблицы истинности. Результатом операции логического отрицания является значение «истина» (1), когда аргумент принимает значение «ложь» (0), и значение «ложь» (0), когда аргумент принимает значение «истина» (1) (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Таблица истинности инверсии (логического отрицания)

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Истинность высказывания, образованного с помощью операции логического отрицания, можно легко определить с помощью таблицы истинности. Например, высказывание «Два умножить на два не равно четырем» ложно ($A = 0$), а полученное из него в результате логического отрицания высказывание «Два умножить на два равно четырем» истинно ($\overline{A} = 1$).

При вычислении логических выражений следует учитывать **приоритет логических операций:**

1) действия в скобках;
2) инверсия ($\neg$);
3) конъюнкция (&);
4) дизъюнкция ($\vee$).

Вычислим значение логического выражения $(X \vee Y) \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y})$ при $X = 1$ и $Y = 1$.

1. Найдем значение выражения $(X \vee Y)$: $1 \vee 1 = 1$.
2. Найдем значение выражения $\overline{X}$: $\overline{1} = 0$.
3. Найдем значение выражения $\overline{Y}$: $\overline{1} = 0$.
4. Найдем значение выражения $(\overline{X} \vee \overline{Y})$: $0 \vee 0 = 0$.
5. Найдем значение выражения $(X \vee Y) \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y})$: $1 \,\&\, 0 = 0$.

Результат равен 0.

Контрольные вопросы

1. Что изучает наука логика?
2. Что такое высказывание?
3. Что такое логические переменные и какие значения они принимают?
4. Какие логические операции вы знаете? Как обозначаются логические операции в высказываниях на естественном языке и на языке алгебры логики?
5. Что такое таблица истинности?
6. Определите истинность логического выражения $(X \vee Y) \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y})$ при:
   а) $X = 1$ и $Y = 0$; б) $X = 0$ и $Y = 1$; в) $X = 0$ и $Y = 0$.

3.2. Алгебра множеств

Множество — рассматриваемый как единое целое набор (совокупность) объектов, обладающих некоторым общим свойством. Объекты, составляющие данное множество, называются его **элементами**. Множества обозначают заглавными буквами, а элементы — строчными. Основное отношение между элементом a и содержащим его множеством A обозначается $a \in A$ (a принадлежит A, A содержит a). Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ (a не входит в A, A не содержит a).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Множество U называется **универсальным** для системы множеств A, B, C, если каждое множество системы является подмножеством U, т. е. $A \in U$, $B \in U$, $C \in U$.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

1) $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
2) $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
3) $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
4) $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Существует два способа задания множества.

1. Можно указать все элементы множества в фигурных скобках. Запись $\{a; b; c\}$ обозначает множество трех элементов. Запись $\{2; 4; 6; ...\}$ обозначает множество четных чисел («...» — читается как «и так далее»).

2. Множество можно задать, указав признак, характеризующий все элементы множества, и только эти элементы. Такой способ задания множества называется неявным или описательным. Этот способ заключается в том, что мы формулируем некоторое высказывание и отбираем те, и только те, элементы основного множества, которые этому высказыванию удовлетворяют. Описательный способ задания множества связывает алгебру множеств с учением о высказываниях. Например, запись $\{x \mid 0 < x < 100\}$ обозначает множество всех чисел, которые больше 0 и меньше 100 («|» — читается как «таких, что»). Запись $\{x \mid a \le x \le b\}$ обозначает $[a; b]$ — отрезок с концами a и b, а запись $\{x \mid x < a\}$ обозначает $(-\infty; a)$, т. е. открытый луч с концом в точке a.

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \,\&\, (x \in B)\}.$$

Пересечению множеств принадлежат только те элементы, которые одновременно принадлежат как множеству A, так и множеству B. Например, даны множества $A = \{1; 3; 8\}$, $B = \{1; 3; 8; 11\}$, $C = \{5; 11\}$. Тогда $A \cap B = \{1; 3; 8\}$; $A \cap C = \varnothing$; $C \cap B = \{11\}$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Объединению множеств принадлежат те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. Например, даны множества: $A = \{1; 3; 8\}$, $B = \{1; 3; 8; 12\}$, $C = \{5; 12\}$. Тогда $A \cup B = \{1; 3; 8; 12\}$; $A \cup C = \{1; 3; 5; 8; 12\}$; $C \cup B = \{1; 3; 5; 8; 12\}$.

Разность множеств A и B — множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B:

$$A \backslash B = \{x \mid (x \in A) \ \& \ (x \notin B)\}.$$

Дополнением множества A называется множество элементов, которые не содержатся в множестве A:

$$\overline{A} = \{x \mid (x \notin A)\}.$$

Наглядно отношения между подмножествами можно изобразить с помощью геометрических схем — **кругов Эйлера** (иногда их называют диаграммами Эйлера–Венна) (рис. 3.1, 3.2).

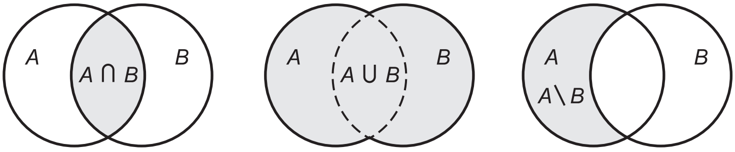

Рис. 3.1. Пересечение, объединение и разность множеств A и B

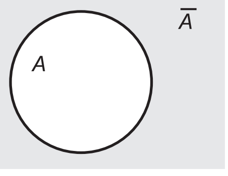

Рис. 3.2. Дополнение множества A

Можно провести аналогию между логическими операциями и операциями над множествами:

Логическая операция	Операция над множествами
Конъюнкция &	Пересечение $\cap$
Дизъюнкция $\vee$	Объединение $\cup$
Инверсия $\overline{}$	Дополнение $\overline{}$

Контрольные вопросы

1. Что такое пустое множество?
2. Как можно задать множество?
3. Какие операции над множествами вы знаете? Как они обозначаются?
4. Даны множества, содержащие латинские буквы: $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{c; d; e; f\}$, $C = \{c; e; g; k\}$. Найдите $(A \cap B) \cap C$.
5. Даны множества: A — множество всех натуральных чисел, кратных 5; $B = \{1; 2; 3; ...; 21\}$. Найдите $A \cap B$.
6. Даны множества, содержащие латинские буквы: $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{c; d; e; f\}$, $C = \{c; e; g; k\}$. Найдите $(A \cup B) \cup C$.

3.3. Логические основы устройства компьютера

3.3.1. Базовые логические элементы

Дискретный преобразователь, который после обработки входных двоичных сигналов выдает на выходе сигнал, являющийся значением одной из логических операций, называется **логическим элементом.** Базовые логические элементы реализуют три базовые логические операции:

- логический элемент «И» (конъюнктор) — логическое умножение;
- логический элемент «ИЛИ» (дизъюнктор) — логическое сложение;
- логический элемент «НЕ» (инвертор) — инверсию.

Любая логическая операция может быть представлена в виде комбинации трех базовых, поэтому любые устройства компьютера, производящие обработку или хранение информации (сумматоры в процессоре, ячейки памяти в оперативной памяти и др.), могут быть собраны из базовых логических элементов.

Логические элементы компьютера оперируют с сигналами, представляющими собой электрические импульсы. Есть импульс — логическое значение сигнала 1, нет импульса — значение 0. На входы логических элементов поступают сигналы-аргументы, на выходе появляется сигнал — значение функции.

Преобразование сигнала логическим элементом задается таблицей состояния, которая фактически является таблицей истинности, соответствующей логической функции.

Логический элемент «И» — конъюнктор (рис. 3.3). На входы *A* и *B* логического элемента последовательно подадим четыре пары сигналов, на выходе получим последовательность из четырех сигналов, значения которых определяются в соответствии с таблицей истинности операции логического умножения.

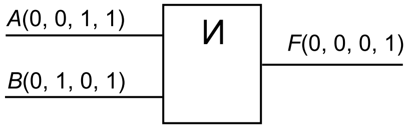

Рис. 3.3. Логический элемент «И» — конъюнктор

Простейшей моделью логического элемента «И» может быть электрическая схема, состоящая из источника тока, лампочки и двух выключателей (рис. 3.4). Данную схему можно собрать из реальных электрических элементов или с использованием компьютерного конструктора «Начала электроники».

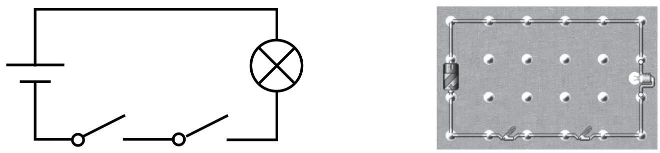

Рис. 3.4. Электрическая схема модели логического элемента «И» и ее реализация в компьютерном конструкторе «Начала электроники»

Из схемы видно, что если оба выключателя замкнуты (на обоих входах 1), по цепи идет ток и лампочка горит (на выходе 1).

Логический элемент «ИЛИ» — дизъюнктор (рис. 3.5). На входы *A* и *B* логического элемента последовательно подадим четыре пары сигналов, а на выходе получим последовательность из четырех сигналов, значения которых определяются в соответствии с таблицей истинности операции логического сложения.

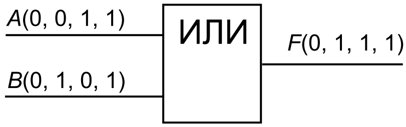

Рис. 3.5. Логический элемент «ИЛИ» — дизъюнктор

Простейшей моделью логического элемента «ИЛИ» может быть электрическая схема, которую можно собрать из реальных электрических элементов или с использованием компьютерного конструктора «Начала электроники» (рис. 3.6).

Рис. 3.6. Электрическая схема модели логического элемента «ИЛИ» и ее реализация в компьютерном конструкторе «Начала электроники»

Из схемы видно, что, если хотя бы один выключатель замкнут (на входе 1), по цепи идет ток и лампочка горит (на выходе 1).

Логический элемент «НЕ» — инвертор (рис. 3.7). На вход A логического элемента последовательно подадим два сигнала, на выходе получим последовательность из двух сигналов, значения которых определяются в соответствии с таблицей истинности логической инверсии.

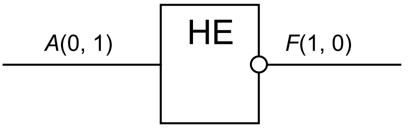

Рис. 3.7. Логический элемент «НЕ»

Простейшей моделью логического элемента «НЕ» может быть электрическая схема, которую можно собрать из реальных электрических элементов или с использованием компьютерного конструктора «Начала электроники» (рис. 3.8).

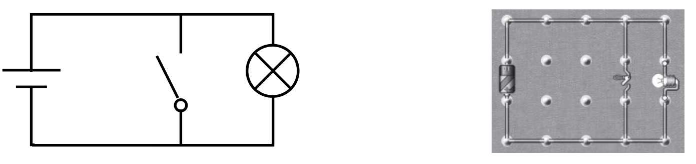

Рис. 3.8. Электрическая схема модели логического элемента «НЕ» и ее реализация в компьютерном конструкторе «Начала электроники»

Из схемы инвертора видно, что, когда переключатель не замкнут (на входе 0), лампочка горит (на выходе 1). Наоборот, когда кнопку переключателя замыкают (на входе 1), лампочка гаснет (на выходе 0).

Контрольные вопросы

1. Объясните действие электрических схем, реализующих модели логических элементов, с точки зрения законов постоянного тока.

3.3.2. Сумматор двоичных чисел

В целях максимального упрощения работы компьютера всё многообразие математических операций в процессоре сводится к сложению двоичных чисел. Поэтому главной частью процессора является сумматор, который как раз и обеспечивает такое сложение. Сумматор составляется из базовых логических элементов.

Полусумматор. При сложении двоичных чисел образуется сумма в данном разряде, при этом возможен перенос в старший разряд. Обозначим слагаемые — A и B, перенос — P и сумму — S. Таблица сложения одноразрядных двоичных чисел с учетом переноса в старший разряд выглядит следующим образом (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Таблица сложения одноразрядных двоичных чисел

Слагаемые		Перенос	Сумма
A	***B***	***P***	***S***
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Из этой таблицы видно, что перенос можно реализовать с помощью операции логического умножения:

$$P = A \;\&\; B.$$

Получим теперь формулу для вычисления суммы. Значения суммы более всего совпадают с результатом операции логического сложения (кроме случая, когда на входы подаются две единицы, а на выходе должен получиться ноль).

Нужный результат достигается, если результат логического сложения умножить на инвертированный перенос. Таким образом, для определения суммы можно применить следующую логическую функцию:

$$S = (A \vee B) \; \& \; \overline{(A \; \& \; B)}.$$

Построим таблицу истинности для данной логической функции и убедимся в правильности нашего предположения (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Таблица истинности логической функции $S = (A \vee B) \; \& \; \overline{(A \; \& \; B)}$

A	B	$A \vee B$	$A \; \& \; B$	$\overline{(A \; \& \; B)}$	$(A \vee B) \; \& \; \overline{(A \; \& \; B)}$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Теперь на основе полученных логических формул можно построить из базовых логических элементов схему сложения одноразрядных двоичных чисел.

По логической формуле переноса можно определить, что для получения переноса необходимо использовать логический элемент «И».

Анализ логической формулы для суммы показывает, что на выходе должен стоять элемент логического умножения «И», который имеет два входа. На один из входов подается результат логического сложения исходных величин $A \vee B$, т. е. на него должен подаваться сигнал с элемента логического сложения «ИЛИ».

На второй вход требуется подать результат инвертированного логического умножения исходных сигналов $\overline{A \; \& \; B}$, т. е. на второй вход подается сигнал с элемента «НЕ», на вход которого поступает сигнал с элемента логического умножения «И» (рис. 3.9).

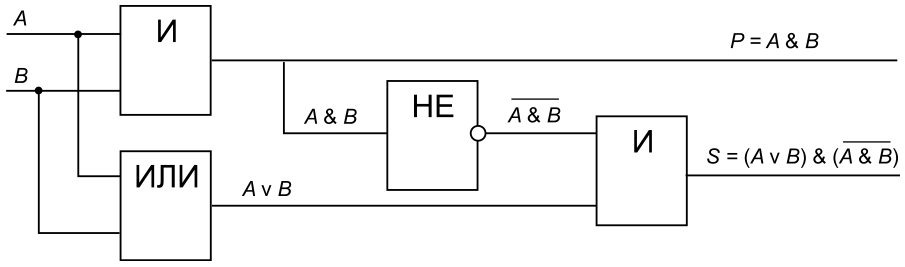

Рис. 3.9. Полусумматор двоичных чисел

Данная схема называется **полусумматором**, так как реализует суммирование одноразрядных двоичных чисел A и B без учета переноса из младшего разряда.

Для сложения многоразрядных двоичных чисел служит **сумматор**, который составляется из полусумматоров.

Контрольные вопросы

1. Какие значения будут иметь перенос и сумма при суммировании одноразрядных двоичных чисел, равных 1, и переноса из младшего разряда?