Глава 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

§ 17

Некоторые сведения из теории множеств

17.1. Понятие множества

С понятием множества вы познакомились на уроках математики ещё в начальной школе, а затем работали с ним при изучении математики и информатики в основной школе.

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Примерами множеств могут служить: множество всех учеников вашего класса, множество всех жителей Санкт-Петербурга, множество всех натуральных чисел, множество всех решений некоторого уравнения и т. п.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, ...). Объекты, входящие в состав множества, называются его элементами.

Множество можно задать следующими способами:

1) перечислением всех его элементов;
2) характеристическим свойством его элементов.

В первом случае внутри фигурных скобок перечисляются все объекты, составляющие множество. Каждый объект, входящий в множество, указывается в фигурных скобках лишь один раз.

Например, запись $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ означает, что множество M состоит из чисел 1, 3, 5, 7 и 9. Точно такой же смысл будет иметь запись $M = \{3, 1, 5, 9, 7\}$. Иначе говоря, порядок расположения элементов в фигурных скобках значения не имеет. Важно точно указать, какие именно объекты являются элементами множества.

Например:

- число 5 является элементом множества M: $5 \in M$[1];
- число 4 не является элементом множества M: $4 \notin M$.

Это же множество можно задать с помощью характеристического свойства образующих его элементов — такого свойства, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. В нашем примере можно говорить о множестве натуральных однозначных нечётных чисел.

В рассматриваемом множестве M содержится 5 элементов. Это обозначают так: $|M| = 5$. Можно составить множество, содержащее любое число элементов. Например, множество всех корней уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$ конечно (два элемента), а множество всех точек прямой бесконечно. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Первый способ задания множеств применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Вторым способом можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

Из некоторых элементов множества M можно составить новое множество, например P: $P = \{1, 3, 5\}$.

Если каждый элемент множества P принадлежит множеству M, то говорят, что P есть **подмножество** M, и записывают: $P \subset M$.

Само множество M является своим подмножеством, т. к. каждый элемент M принадлежит множеству M. Пустое множество также является подмножеством M.

Работая с объектами какой-то определённой природы, всегда можно выделить «самое большое» или универсальное множество, содержащее все возможные подмножества. Пусть A — множество чётных чисел, B — множество натуральных чисел, C — множество чисел, кратных пяти. Тогда самым большим множеством, содержащим в себе множества A, B и C, а также другие подобные множества, будет множество целых чисел. Универсальное множество будем обозначать буквой U.

Для наглядного изображения множеств используются круги Эйлера (рис. 4.1). Точки внутри круга считаются элементами множества.

[1] Символ $\in$ называется знаком принадлежности.

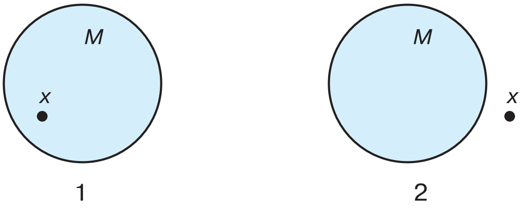


Рис. 4.1. Графическое изображение множеств: 1) $x \in M$, 2) $x \notin M$

17.2. Операции над множествами

Над множествами, как и над числами, производят некоторые операции.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Пересечение множеств обозначают с помощью знака $\cap$: $X \cap Y$. На рисунке 4.2 закрашено множество $X \cap Y$.

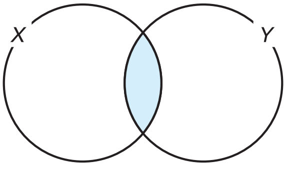


Рис. 4.2. Графическое изображение множества $X \cap Y$

Пусть множества X и Y состоят из букв:

$$X = \{ш,\ к,\ о,\ л,\ а\};$$
$$Y = \{у,\ р,\ о,\ к\}.$$

Эти множества имеют общие элементы: к, о.

$$X \cap Y = \{к,\ о\}.$$

Множества M и X не имеют общих элементов, их пересечение — пустое множество:

$$M \cap X = \varnothing.$$

Пересечение множеств M и P есть множество P, а пересечение множеств M и M есть множество M:

$$M \cap P = P;$$
$$M \cap M = M.$$

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Объединение множеств обозначают с помощью знака $\cup$: $X \cup Y$.

На рисунке 4.3 закрашено множество $X \cup Y$.

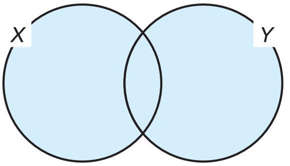


Рис. 4.3. Графическое изображение множества $X \cup Y$

Для наших примеров:

$$X \cup Y = \{\text{ш, к, о, л, а, у, р}\};$$
$$M \cup X = \{1, 3, 5, 7, 9, \text{ш, к, о, л, а}\};$$
$$M \cup P = M; \quad M \cup M = M.$$

Подумайте, возможно ли равенство: $A \cup B = A \cap B$.

Пересечение и объединение выполняются для любой пары множеств. Третья операция — дополнение — имеет смысл не для всех множеств, а только тогда, когда второе множество является подмножеством первого.

Пусть множество P является подмножеством множества M. **Дополнением** P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

Дополнение P до M обозначают $\overline{P}$: $\overline{P} = \{7, 9\}$.

Дополнение M до M есть пустое множество, дополнение пустого множества до M есть M: $\overline{M} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = M$.

Особый интерес представляет дополнение некоторого множества B до универсального множества U. Например, если B — это множество точек, принадлежащих некоторому отрезку, то его дополнением $\overline{B}$ до универсального множества U, которым в данном случае является множество всех точек числовой прямой, является множество точек, не принадлежащих данному отрезку.

В общем случае можем записать: $B \cup \overline{B} = U$ (рис. 4.4)

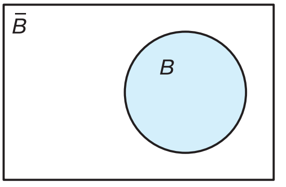


Рис. 4.4. Дополнение множества B до универсального множества

На рисунке 4.5 видно, что множество $A \cup B$ будет совпадать с универсальным, если A будет совпадать с множеством $\overline{B}$ или содержать его в качестве подмножества. В первом случае, т. е. при $A = \overline{B}$, мы имеем дело с минимальным множеством A, таким что $A \cup B = U$.

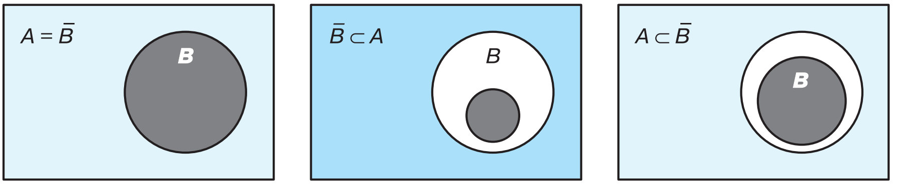


Рис. 4.5. Выбор такого множества A, что $A \cup B = U$

Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $\overline{A} \cup B$ совпадало с универсальным множеством?

Для ответа на этот вопрос воспользуйтесь рисунком 4.6.

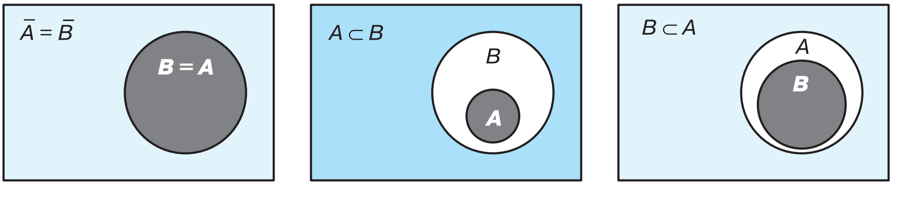


Рис. 4.6. Выбор такого множества A, что $\overline{A} \cup B = U$

17.3. Мощность множества

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Мощность множества X обозначается $|X|$.

В рассмотренных выше примерах $|X| = 5$, $|M| = 5$.

Число элементов объединения двух непересекающихся множеств равно сумме чисел элементов этих множеств. Так, в объединении множеств M и X содержится 10 элементов: $|M \cup X| = 10$.

Если же множества пересекаются, то число элементов объединения находится сложнее. Так, X состоит из 5 элементов, множество Y — из 4, а их объединение — из 7. Сложение чисел 5 и 4 даёт нам число 9. Но в эту сумму дважды вошло число элементов пересечения. Чтобы получить правильный результат, надо к числу элементов X прибавить число элементов Y и из суммы вычесть число элементов пересечения. Полученная формула подходит для любых двух множеств: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. Это частный случай так называемого принципа включений-исключений.

Принципом включений-исключений называется формула, позволяющая вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

Для случая объединения трёх множеств формула имеет вид:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Аналогичные формулы справедливы и для пересечения множеств:

$$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|;$$

$$|X \cap Y \cap Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |X \cup Z| - |Y \cup Z| + |X \cup Y \cup Z|.$$

Пример. В зимний оздоровительный лагерь отправляется 100 старшеклассников. Почти все они увлекаются сноубордом, коньками или лыжами. При этом многие из них занимаются не одним, а двумя и даже тремя видами спорта. Организаторы выяснили, что всего кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на лыжах — 28, на коньках — 42. Всего умением кататься на лыжах и сноуборде из них могут похвастаться 8 ребят, на лыжах и коньках — 10, на сноуборде и коньках — 5, но только трое из них владеют всеми тремя видами спорта. Сколько ребят не умеет кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках?

Обозначим через S, L и K множества сноубордистов, лыжников и любителей коньков соответственно. Тогда $|S| = 30$, $|L| = 28$ и $|K| = 42$. При этом $|S \cap L| = 8$, $|K \cap L| = 10$, $|S \cap K| = 5$, $|S \cap L \cap K| = 3$.

Объединение множеств S, L и K — это множество ребят, увлекающихся хотя бы каким-то видом спорта.

По формуле включений-исключений находим:

$$|S \cup L \cup K| = 30 + 28 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80.$$

Таким образом, из 100 старшеклассников 20 не умеют кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Пусть множество P является подмножеством множества M. Дополнением P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

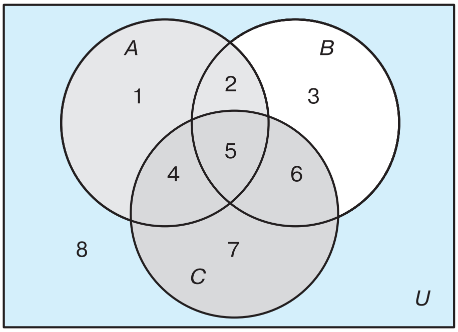
Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Формула включений-исключений позволяет вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

Вопросы и задания

1. Если множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 2, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 3, то что будет:
   1) пересечением этих множеств;
   2) объединением этих множеств?

2. Пусть множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 18, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 14. Укажите наименьшее число, входящее:
   1) в пересечение этих множеств;
   2) в объединение этих множеств?
3. Пусть A, B и C — некоторые множества, обозначенные кругами, U — универсальное множество.



   С помощью операций объединения, пересечения и дополнения до универсального множества выразите через A, B и C следующие множества:
   1) $1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6$;
   2) $2 \cup 5$;
   3) 5;
   4) $2 \cup 4 \cup 5 \cup 6$;
   5) $1 \cup 2 \cup 3$;
   6) 8.
4. В первую смену в лагере «Дубки» отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. При этом 10 человек были и отличниками, и победителями олимпиад, 5 — отличниками и спортсменами, 8 — спортсменами и победителями олимпиад, 3 — и отличниками, и спортсменами, и победителями олимпиад. Сколько ребят отдыхало в лагере?
5. Старшеклассники заполняли анкету с вопросами об экзаменах по выбору. Оказалось, что выбрали они информатику, физику и обществознание. В классе 38 учеников. Обществознание выбрал 21 ученик, причём трое из них выбрали ещё и информатику, а шестеро — ещё и физику. Один ученик выбрал все три предмета. Всего информатику выбрали 13 учеников, пятеро из которых указали в анкете два предмета. Надо определить, сколько же учеников выбрали физику.

*6. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 — испанский, 75 — немецкий. Сколько человек знают все три языка?

§ 18
Алгебра логики

Из курса информатики основной школы вы знаете, что для компьютерных наук большое значение имеет математическая логика, а точнее, её часть, называемая алгеброй логики.

Алгебра логики — раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые с точки зрения их логических значений (истинности или ложности), и логические операции над ними.

Джордж Буль (1815–1864) — английский математик, основоположник алгебры логики. Дж. Буль изучал логику мышления математическими методами и разработал алгебраические методы решения традиционных логических задач. В 1854 году он опубликовал работу, в которой изложил суть алгебры логики, основанной на трёх операциях: and, or, not. Долгое время алгебра логики была известна достаточно узкому классу специалистов. В 1938 году Клод Шеннон применил алгебру логики для описания процесса функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

18.1. Логические высказывания и переменные

Высказывание — это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Например, высказывание «Джордж Буль — основоположник алгебры логики» истинно, а высказывание «2 + 2 = 5» ложно.

Что вы можете сказать об истинности или ложности предложения «Данное высказывание — ложь»?

Из имеющихся высказываний можно строить новые высказывания. Для этого используются логические связки — слова и словосочетания «не», «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда» и др.

Высказывания, образованные из других высказываний, называются составными (сложными). Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется элементарным (простым).

Например, из двух простых высказываний «Алгебра логики является основой строения логических схем компьютеров» и «Алгебра логики служит математической основой решения сложных логических задач» можно получить составное высказывание «Алгебра логики является основой строения логических схем компьютеров и служит математической основой решения сложных логических задач».

Обоснование истинности или ложности элементарных высказываний не является задачей алгебры логики. Эти вопросы решаются теми науками, к сфере которых относятся элементарные высказывания. Такое сужение интересов позволяет обозначать высказывания символическими именами (например, A, B, C). Так, если обозначить элементарное высказывание «Джордж Буль — основоположник алгебры логики» именем A, а элементарное высказывание «$2 + 2 = 5$» именем B, то составное высказывание «Джордж Буль — основоположник алгебры логики, и $2 + 2 = 5$» можно записать как «A и B». Здесь A, B — логические переменные, «и» — логическая связка.

Логическая переменная — это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Для логических значений «истина» и «ложь» могут использоваться следующие обозначения:

Истина	Ложь
И	Л
true	false
да	нет
1	0

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

18.2. Логические операции

Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Из курса информатики основной школы вам известны логические операции отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. Их таблицы истинности представлены ниже.

Конъюнкция

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

A	A	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Отрицание

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны, называется **конъюнкцией** или **логическим умножением**.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны, называется **дизъюнкцией** или **логическим сложением**.

Логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному, называется **отрицанием** или **инверсией**.

При построении отрицания простого высказывания:

- используется оборот «неверно, что» или к сказуемому добавляется частица «не»;
- в высказывании, содержащем слово «все», это слово заменяется на «некоторые» и наоборот.

Рассмотрим несколько новых логических операций.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся ложным тогда и только тогда, когда первое высказывание (посылка) истинно, а второе (следствие) — ложно, называется **импликацией** или **логическим следованием**.

Операция импликации обозначается символом $\to$ и задаётся следующей таблицей истинности:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В разговорной речи импликации соответствуют предложения, содержащие связку «если ..., то». Эту связку мы используем тогда, когда хотим показать наличие причинно-следственной связи, иначе говоря, зависимость одного события от другого. Например, пусть некоторый человек сказал: «Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять». Ясно, что человек окажется лжецом лишь в том случае, если погода действительно будет хорошей, а гулять он не пойдёт. Если же погода будет плохой, то, независимо от того, пойдёт он гулять или нет, во лжи его нельзя обвинить: обещание пойти гулять он давал лишь при условии, что погода будет хорошей.

Результат операции импликации, как и других логических операций, определяется истинностью или ложностью логических переменных, а не наличием причинно-следственных связей между высказываниями. Например, абсурдное с житейской точки зрения высказывание «Если $2 > 3$, то существуют ведьмы» является истинным с точки зрения алгебры логики.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся истинным тогда и только тогда, когда только одно из двух высказываний истинно, называется **строгой** (**исключающей**) **дизъюнкцией**.

Строгая дизъюнкция обозначается символом $\oplus$ и задаётся следующей таблицей истинности:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

В русском языке строгой (разделительной) дизъюнкции соответствует связка «либо». В отличие от обычной дизъюнкции (связка «или») в высказывании, содержащем строгую дизъюнкцию, мы утверждаем, что произойдёт только одно событие.

Например, высказывая утверждение «На сегодняшнем матче Петя сидит на трибуне А либо на трибуне Б», мы считаем, что Петя сидит либо только на трибуне А, либо только на трибуне Б, и что сидеть одновременно на двух трибунах Петя не может.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся истинным, когда оба исходных высказывания истинны или оба исходных высказывания ложны, называется **эквиваленцией** или **равнозначностью**.

В логике эквиваленция обозначается символом $\leftrightarrow$ и задаётся следующей таблицей истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В разговорной речи для выражения взаимной обусловленности используется связка «тогда и только тогда, когда», а в математике — «необходимо и достаточно».

Рассмотрим высказывание «Денис пойдёт в бассейн тогда и только тогда, когда он выучит уроки».

Это высказывание истинно (договорённость соблюдается), если истинны оба элементарных высказывания («Денис пойдёт в бассейн», «Денис выучит уроки»). Высказывание истинно (договорённость не нарушается) и в том случае, если оба элементарных высказывания ложны («Денис не пойдёт в бассейн», «Денис не выучит уроки»). Если же одно из двух высказываний ложно («Денис пойдёт в бассейн, хотя и не выучит уроки», «Денис выучит уроки, но не пойдёт в бассейн»), то договорённость нарушается, и составное высказывание становится ложным.

А сейчас посмотрите внимательно на таблицы истинности строгой дизъюнкции и эквиваленции: если на некотором наборе логических переменных результатом строгой дизъюнкции является истина, то на этом же наборе результатом эквиваленции всегда будет ложь, и наоборот. Можно сделать выводы:

- операция эквиваленции есть отрицание операции строгой дизъюнкции ($A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B}$);
- операция строгой дизъюнкции есть отрицание операции эквиваленции ($A \oplus \mathrm{B} = \overline{A \leftrightarrow B}$).

На сегодняшний день в алгебре логики не существует унифицированной символики для обозначения логических операций. В таблице 4.1 представлены логические операции и их наиболее распространённые обозначения, используемые как в алгебре логики, так и в некоторых языках программирования. Здесь же приведены речевые обороты, соответствующие логическим операциям.

Таблица 4.1

Логические операции и их обозначения

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Отрицание (инверсия, логическое НЕ)	$\neg A$, $\overline{A}$, НЕ A, not A	«Не», «неверно, что»
Конъюнкция (логическое умножение, логическое И)	$A \wedge B$, $A \,\&\, B$, $A \cdot B$, AB, A И B, A and B	«И», «как ..., так и», «вместе с», «но», «хотя», «а»
Дизъюнкция (логическое сложение, логическое ИЛИ)	$A \vee B$, $A + B$, $A \mid B$, A ИЛИ B, A or B	«Или», «или ..., или ..., или оба вместе»

Окончание табл. 4.1

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Строгая дизъюнкция (исключающая дизъюнкция, исключающее ИЛИ)	$A \oplus B$, A xor B	«Либо ..., либо», «только ... или только»
Импликация (логическое следование)	$A \to B$, $A \Rightarrow B$	«Если ..., то», «из ... следует», «влечёт»
Эквиваленция (эквивалентность, равнозначность)	$A \leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$	«Эквивалентно», «равносильно», «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда, когда»

Операция отрицания выполняется над одним операндом. Такие операции называются одноместными или унарными. Все остальные логические операции, представленные в таблице 4.1, выполняются над двумя операндами и называются двуместными или бинарными.

18.3. Логические выражения

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Для логического выражения справедливо:

1) всякая логическая переменная, а также логические константы (0, 1) есть логическое выражение;
2) если A — логическое выражение, то и $\overline{A}$ — логическое выражение;
3) если A и B — выражения, то, связанные любой бинарной операцией, они также представляют собой логическое выражение.

При преобразовании или вычислении значения логического выражения логические операции выполняются в соответствии с их приоритетом:

1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция, строгая дизъюнкция;
4) импликация, эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Как и в арифметике, скобки меняют порядок выполнения операций.

<u>**Пример 1.**</u> Выясним, какие из приведённых слов удовлетворяют логическому условию (первая буква согласная → вторая буква согласная) & (последняя буква гласная → предпоследняя буква гласная):

1) ОЗОН;
2) ИГРА;
3) МАФИЯ;
4) ТРЕНАЖ.

Вычислим значение логического выражения для каждого из данных слов:

1) $(0 \to 1)\ \&\ (0 \to 1) = 1\ \&\ 1 = 1$;
2) $(0 \to 1)\ \&\ (1 \to 0) = 1\ \&\ 0 = 0$;
3) $(1 \to 0)\ \&\ (1 \to 1) = 0\ \&\ 1 = 0$;
4) $(1 \to 1)\ \&\ (0 \to 1) = 1\ \&\ 1 = 1$.

Итак, заданному условию удовлетворяют первое и четвёртое слова.

Решение логического уравнения — это один или несколько наборов значений логических переменных, при которых логическое уравнение становится истинным выражением.

<u>**Пример 2.**</u> Решим логическое уравнение

$$(A \to C) \vee ((\overline{B \vee C})\ \&\ A) \vee D = 0.$$

Дизъюнкция ложна в том и только в том случае, когда ложно каждое из образующих её высказываний. Иными словами, наше уравнение соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} A \to C = 0; \\ (\overline{B \vee C})\ \&\ A = 0; \\ D = 0. \end{cases}$$

Таким образом, значение переменной D уже найдено.

Импликация равна нулю в единственном случае — когда из истины следует ложь. Иначе говоря, в нашем случае: $A = 1$ и $C = 0$.

Подставим найденные значения переменных в уравнение $(\overline{B \vee C})\ \&\ A = 0$. Получим: $(\overline{B \vee 0})\ \&\ 1 = 0$ или $\overline{B} = 0$, т. е. $B = 1$.

Ответ: $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$.

Логические уравнения могут иметь не одно, а несколько и даже очень много решений. Зачастую требуется, не выписывая все решения уравнения, указать их количество.

Пример 3. Выясним, сколько различных решений имеет логическое уравнение $(A \,\&\, B \,\&\, \overline{C}) \vee (\overline{B} \,\&\, C \,\&\, D) = 1$.

Дизъюнкция истинна, если истинно хотя бы одно из образующих её высказываний. Решение данного логического уравнения равносильно совокупности, состоящей из двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} = 1; \\ \overline{B} \,\&\, C \,\&\, D = 1. \end{array}\right.$$

Первое равенство будет выполняться только при $A = 1$, $B = 1$ и $C = 0$. Поскольку D в этом уравнении не задействовано, оно может принимать любое из двух значений (0 или 1). Таким образом, всего первое уравнение имеет два решения.

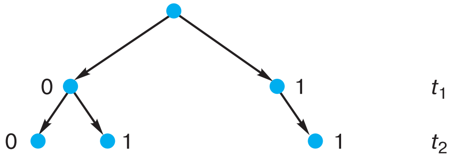
Самостоятельно выясните, сколько решений имеет второе уравнение (из совокупности двух уравнений).

Сколько решений имеет исходное уравнение?

Пример 4. Выясним, сколько решений имеет очень простое с виду логическое уравнение $x_1 \,\&\, x_2 \to x_3 \,\&\, x_4 = 1$.

Введём замену переменных. Пусть $t_1 = x_1 \,\&\, x_2$, $t_2 = x_3 \,\&\, x_4$. Тогда исходное уравнение примет вид: $t_1 \to t_2 = 1$.

На t_1 никаких ограничений нет, эта переменная может принимать значения 0 и 1. Импликация равна 0 только в случае, когда из истины (1) следует ложь (0). Исключим этот вариант. Построим дерево решений, представив на нём значения переменных t_1 и t_2, при которых $t_1 \to t_2 = 1$.



Получаем для t_1 и t_2 три набора значений: 00, 01, 11. Первая двоичная цифра в каждом из этих трёх наборов — результат выражения $x_1 \,\&\, x_2$, вторая — $x_3 \,\&\, x_4$. Рассмотрим первый набор: существует три набора x_1 и x_2 таких, что $x_1 \,\&\, x_2 = 0$, другими словами, первый 0 мы можем получить тремя способами. Второй 0 в этом наборе мы также можем получить тремя способами.

Из курсов информатики и математики основной школы вам известно одно из основных правил комбинаторики — правило умножения. Согласно ему, если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Согласно правилу умножения, пару 00 можно получить $3 \cdot 3 = 9$ способами.

Что касается пары 01, то первый 0 мы можем получить тремя способами, а для получения 1 существует единственный вариант (x_3 & $x_4 = 1$ при $x_3 = 1$ и $x_4 = 1$). Следовательно, есть ещё три набора переменных x_1, x_2, x_3, x_4, являющихся решением исходного уравнения.

Самостоятельно доведите решение этой задачи до конца.

18.4. Предикаты и их множества истинности

Равенства, неравенства и другие предложения, содержащие переменные, высказываниями не являются, но они становятся высказываниями при замене переменной каким-нибудь конкретным значением. Например, предложение $x < 12$ становится истинным высказыванием при $x = 5$ ($5 < 12$ — истина) и ложным при $x = 15$ ($15 < 12$ — ложь). Предложения такого рода называют высказывательными формами или предикатами.

Предика́т — это утверждение, содержащее одну или несколько переменных.

Выделим некоторый предикат $P(x)$ и рассмотрим множество всевозможных объектов I, к которым он относится, — область определения предиката. Можно выделить такое подмножество P множества I, что на всех его элементах предикат $P(x)$ будет превращаться в истинное высказывание. Определённое таким образом P называется множеством истинности предиката $P(x)$.

Рассмотрим множество учеников некоторого класса. Известно, что в этом классе два отличника — Иван и Саша. Предикат «Он отличник» будет истинным высказыванием только по отношению к этим двум ученикам и ложным по отношению ко всем остальным.

Предикаты позволяют задать множество, не перечисляя всех его элементов. Например, множество истинности предиката $P(x) = (x < 0)$ — множество отрицательных чисел; множество истинности предиката $P(x, y) = (x^2 + y^2 = 1)$ — множество точек окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Следует отметить, что многие задания, выполняемые вами на уроках математики, прямо связаны с предикатами. Например, стандартное задание «Решить квадратное уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$» фактически означает требование найти множество истинности предиката $P(x) = (x^2 - 3x + 2 = 0)$.

Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

Пусть A и B соответственно являются множествами истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$. Тогда пересечение множеств A и B будет являться множеством истинности для предиката $A(x)\ \&\ B(x)$, а объединение множеств A и B будет множеством истинности для предиката $A(x) \vee B(x)$.

Пример 5. Найдём все целые числа z, превращающие предикат

$$P(z) = (z > 5)\ \&\ (z - 2 < 15)$$

в истинное высказывание. Другими словами, требуется найти множество истинности предиката $P(z)$, заданного на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

Предикат $P(z)$ состоит из двух предикатов, соединённых операцией конъюнкции: $P(z) = A(z)\ \&\ B(z)$. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Множеством истинности предиката $A(z) = (z > 5)$ являются целые числа 6, 7, 8 и т. д. Множеством истинности предиката $B(z) = (z - 2 < 15)$ являются все целые числа, меньшие 17.

Множество истинности исходного предиката — пересечение (общие элементы) множеств истинности образующих его предикатов:

$$P = A \cap B = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16\}.$$

Его мощность $|P| = 11$.

Пример 6. Рассмотрим предикат $(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$, определённый на множестве целых чисел. Найдём множество истинности этого предиката.

Зачастую задания такого рода формулируют несколько иначе. Например, так: «Найдите все целые числа x, для которых истинно высказывание $(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$».

Проанализируем отдельно каждый из элементарных предикатов $(50 < x^2)$ и $(50 > (x + 1)^2)$, решив соответствующие неравенства:

$50 < x^2$ истинно для всех целых $x \in]-\infty; -8] \cup [8; +\infty[$;

$50 > (x + 1)^2$ истинно для всех целых $x \in [-8; 6]$.

Определим значение исходного предиката на каждом из полученных подмножеств, причём отдельно рассмотрим значение $x = -8$ (оно попадает в два подмножества) и значение $x = 7$ (оно не попадает ни в одно подмножество):

$x \in Z$	$50 < x^2$	$50 > (x + 1)^2$	$(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$
$]-\infty; -9]$	1	0	0
-8	1	1	1
$[-7; 6]$	0	1	1
7	0	0	1
$[8; +\infty[$	1	0	0

Итак, множеством истинности исходного предиката являются целые числа, принадлежащие отрезку $[-8; 7]$. Наименьшим элементом этого множества является число -8, наибольшим — число 7; мощность множества равна 16.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Высказывание — это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания, образованные из других высказываний, называются составными (сложными). Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется элементарным (простым). Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Логические переменные		**Логические операции**					
		Отрицание	**Конъюнкция**	**Дизъюнкция**	**Импликация**	**Строгая дизъюнкция**	**Эквиваленция**
A	B	$\overline{A}$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Логические операции имеют следующий приоритет:
1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция, строгая дизъюнкция;
4) импликация, эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Скобки меняют порядок выполнения операций.

Предика́т — это утверждение, содержащее одну или несколько переменных. Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

Вопросы и задания

1. Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями. Обоснуйте свой выбор.
   1) Как пройти в библиотеку?
   2) Коля спросил: «Который час?»
   3) Картины Пикассо слишком абстрактны.
   4) Компьютеры могут быть построены только на основе двоичной системы счисления.
2. Из каждых трёх выберите два высказывания, являющихся отрицаниями друг друга:
   1) «$1999 < 2000$», «$1999 > 2000$», «$1999 \le 2000$»;
   2) «Петя решил все задания контрольной работы», «Петя не решил все задания контрольной работы», «Петя решил не все задания контрольной работы»;
   3) «Луна — спутник Земли», «Неверно, что Луна — спутник Земли», «Неверно, что Луна не является спутником Земли»;
   4) «Прямая a не параллельна прямой c», «Прямая a перпендикулярна прямой c», «Прямые a и c не пересекаются» (считаем, что прямые a и c лежат в одной плоскости);
   5) «Мишень поражена первым выстрелом», «Мишень поражена не первым выстрелом», «Неверно, что мишень поражена не первым выстрелом».
3. Рассмотрите следующие элементарные высказывания: A = «Река Днепр впадает в Чёрное море», B = «45 — простое число», C = «Вена — столица Австрии», D = «0 — натуральное число».

   Определите, какие из них истинные, а какие ложные.

   Составьте сложные высказывания, применяя каждый раз только одну из пяти логических операций ($\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) к высказываниям A, B, C и D. Сколько новых высказываний можно получить с помощью отрицания (инверсии)? Конъюнкции? Дизъюнкции? Импликации? Эквиваленции?

   Сколько всего новых высказываний можно получить? Сколько среди них будет истинных?
4. Представьте каждую пословицу в виде сложного логического высказывания, построенного на основе простых высказываний. Ответ обоснуйте при помощи таблиц истинности.
   1) На вкус и цвет товарищей нет.
   2) Если долго мучиться, что-нибудь получится.

3) Не зная броду, не суйся в воду.
4) Тяжело в ученье, легко в бою.
5) То не беда, что во ржи лебеда, то беда, что ни ржи, ни лебеды.
6) Где тонко, там и рвётся.
7) Или грудь в крестах, или голова в кустах.
8) За двумя зайцами погонишься — ни одного не поймаешь.
9) И волки сыты, и овцы целы.

5. Подберите вместо A, B, C, D такие высказывания, чтобы полученные сложные высказывания имели смысл:
   1) если (A или B и C), то D;
   2) если (не A и не B), то (C или D);
   3) (A или B) тогда и только тогда, когда (C и не D).
6. Вычислите:
   1) $1 \vee X \& 0$;
   2) $X \& X \& 1$;
   3) $0 \& X \vee 0$;
   4) $0 \vee X \& X$.
7. Сколько из приведённых чисел Z удовлетворяют логическому условию: $((Z$ кратно $4) \vee (Z$ кратно $5)) \to (Z$ кратно $6)$?
   1) 4; 2) 6; 3) 7; 4) 12.
8. Найдите все целые числа Z, для которых истинно высказывание:
   1) $\overline{(Z>5)} \& (Z^2 < 100)$;
   2) $\overline{(Z > 5) \to (Z>10)}$.
9. Какие из высказываний A, B, C должны быть истинны и какие ложны, чтобы были ложны следующие высказывания?
   1) $((\overline{A} \vee B) \& B) \to C$;
   2) $\overline{A \& B} \leftrightarrow 1$.
10. Даны три числа в различных системах счисления:
    $A = 23_{10}$, $B = 23_8$, $C = 1A_{16}$.
    Переведите A, B и C в двоичную систему счисления и выполните поразрядно логические операции $(A \vee B) \& C$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.
11. Логическое отрицание восьмиразрядного двоичного числа, записанное в десятичной системе счисления, равно 217. Определите исходное число в десятичной системе счисления.
12. Определите логическое произведение и логическую сумму всех двоичных чисел в диапазоне от 16_{10} до 22_{10}, включая

границы. Ответ запишите в восьмеричной системе счисления.

13. Сколько различных решений имеет логическое уравнение?
    1) $(A \vee B \vee C)$ & $(\overline{B}$ & $\overline{C}$ & $D) = 1$;
    2) $(A \vee B \vee C) \vee (\overline{B}$ & C & $D) = 0$;
    3) $(A \to C) \vee (B$ & $A) \vee (D \to B$ & $C) = 0$;
    4) $(A$ & B & $C) \to (\overline{C}$ & $D) = 1$.
14. Сколько решений имеет логическое уравнение
    x_1 & $x_2 \vee x_3$ & $x_4 = 1$?
15. Изобразите в декартовой прямоугольной системе координат множества истинности для следующих предикатов:
    1) $P(x, y) = (y \geq x)$ & $(y + x \geq 0)$ & $(y \leq 1)$;
    2) $P(x, y) = (|x| \leq 1)$ & $(|y| \leq 1)$;
    3) $P(x, y) = (x^2 + y^2 \leq 4)$ & $(x^2 + y^2 \geq 1)$.
16. Предикат $((8x - 6) < 75) \to (x(x - 1) > 65)$ определён на множестве целых чисел. Найдите его множество истинности. Укажите наибольшее целое число x, при котором предикат превращается в ложное высказывание.

§ 19
Таблицы истинности

19.1. Построение таблиц истинности

Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют таблицей истинности логического выражения.

Для того чтобы построить таблицу истинности логического выражения, достаточно:

1) определить число строк таблицы $m = 2^n$, где n — число переменных в логическом выражении;
2) определить число столбцов таблицы как сумму чисел логических переменных и логических операций в логическом выражении;

3) установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов операций;
4) заполнить строку с заголовками столбцов таблицы истинности, занеся в неё имена логических переменных и номера выполняемых логических операций;
5) выписать наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой ряд целых n-разрядных двоичных чисел от 0 до $2^n - 1$;
6) провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции.

Пример 1. Построим таблицу истинности для логического выражения

$$A \mathbin{\&} B \vee \overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}.$$

В этом выражении две логические переменные и пять логических операций. Всего в таблице истинности будет пять строк (2^2 плюс строка заголовков) и 7 столбцов.

Начнём заполнять таблицу истинности с учётом следующего порядка выполнения логических операций: сначала выполняются операции отрицания (в порядке следования), затем операции конъюнкции (в порядке следования), последней выполняется дизъюнкция.

$$A \overset{\boxed{3}}{\mathbin{\&}} B \overset{\boxed{5}}{\vee} \overset{\boxed{1}}{\overline{A}} \overset{\boxed{4}}{\mathbin{\&}} \overset{\boxed{2}}{\overline{B}}$$

A	B	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

Обратите внимание на последний столбец, содержащий конечный результат. Какой из рассмотренных логических операций он соответствует?

Логические выражения, зависящие от одних и тех же логических переменных, называются равносильными или эквивалентными, если для всех наборов входящих в них переменных значения выражений в таблицах истинности совпадают.

Таблица истинности, построенная в предыдущем примере, доказывает равносильность выражений $A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B}$ и $A \leftrightarrow B$.

Можно записать: $A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B} = A \leftrightarrow B$.

С помощью таблиц истинности докажите равносильность выражений $A \to B$ и $\overline{A} \vee B$.

Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения — 0 и 1, называют **логической функцией**. Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.

19.2. Анализ таблиц истинности

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Известен фрагмент таблицы истинности для логического выражения F, содержащего логические переменные A, B и C.

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

1) $(A \vee C) \& B$;
2) $(A \vee B) \& (C \to A)$;
3) $(A \& B \vee C) \& (B \to A \& C)$;
4) $(A \to B) \vee (C \vee A \to B)$.

Ответить на поставленный вопрос можно, вычислив значение каждого логического выражения на каждом заданном наборе переменных и сравнив его с имеющимся значением F.

1) Логическое выражение $(A \vee C)$ & B соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	**B**	**C**	**(A ∨ C) & B**	**F**
1	0	1	$(1 \vee 1)$ & $0 = 1$ & $0 = 0$	0
1	1	0	$(1 \vee 0)$ & $1 = 1$ & $1 = 1$	1
1	1	1	$(1 \vee 1)$ & $1 = 1$ & $1 = 1$	1

2) Логическое выражение $(A \vee B)$ & $(C \to A)$ не соответствует данному фрагменту таблицы истинности, т. к. уже на первом наборе значение рассматриваемого логического выражения не совпадает со значением F. Проведение дальнейших вычислений не имеет смысла.

A	**B**	**C**	**(A ∨ B) & (C → A)**	**F**
1	0	1	$(1 \vee 0)$ & $(1 \to 1) = 1$ & $1 = 1$	0
1	1	0		1
1	1	1		1

3) Логическое выражение $(A$ & $B \vee C)$ & $(B \to A$ & $C)$ не соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	**B**	**C**	**(A & B ∨ C) & (B → A & C)**	**F**
1	0	1	$(1$ & $0 \vee 1)$ & $(0 \to 1$ & $1) = 1$ & $1 = 1$	0
1	1	0		1
1	1	1		1

4) Логическое выражение $(A \to B) \vee (C \vee A \to B)$ соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	**B**	**C**	**(A → B) ∨ (C ∨ A → B)**	**F**
1	0	1	$(1 \to 0) \vee (1 \vee 1 \to 0) = 0$	0
1	1	0	$(1 \to 1) \vee (0 \vee 1 \to 1) = 1$	1
1	1	1	$(1 \to 1) \vee (1 \vee 1 \to 1) = 1$	1

Итак, имеется два логических выражения, соответствующих заданному фрагменту таблицы истинности.

Можно ли утверждать, что в результате решения задачи мы нашли логическое выражение F?

Пример 3. Логическая функция F задаётся выражением:

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \,\&\, (\bar{x} \vee y).$$

Ниже приведён фрагмент таблицы истинности, содержащий все наборы переменных, на которых F истинна.

?	?	?	*F*
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Определим, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z.

В исходном логическом выражении задействовано три логические переменные. Полная таблица истинности для этого выражения должна состоять из 8 (2^3) строк.

Наборам переменных, на которых логическое выражение истинно, соответствуют десятичные числа 0, 2, 3, 4 и 7.

Следовательно, наборам переменных, на которых логическое выражение ложно, должны соответствовать десятичные числа 1, 5 и 6 (их двоичные коды 001, 101 и 110). Построим по этим данным вторую часть таблицы истинности:

?	?	?	*F*
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Теперь выясним, при каких значениях x, y, z логическое выражение ложно: $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \,\&\, (\bar{x} \vee y) = 0$. Логическое произведение ложно, если хотя бы один из операндов равен нулю. Таким образом, мы имеем две дизъюнкции, каждая из которых должна быть ложной. Это возможно только в случае равенства нулю каждого из операндов, входящих в дизъюнкцию. Подберём подходящие значения x, y и z, заполняя следующую таблицу:

	x	y	z	F
$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$				0
$\overline{x} \vee y$				0

Первая дизъюнкция равна нулю на наборе 011. Для равенства нулю второй дизъюнкции требуется, чтобы $x = 1$, $y = 0$, а z может быть и 0, и 1.

	x	y	z	F
$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	0	1	1	0
$\overline{x} \vee y$	1	0	0	0
	1	0	1	0

Сравним эту таблицу с восстановленным нами фрагментом исходной таблицы истинности, предварительно подсчитав, сколько раз каждая переменная принимает единичное значение.

Восстановленный фрагмент

?	?	?	F
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
2	1	2	

Таблица со значениями x, y и z

	x	y	z	F
$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	0	1	1	0
$\overline{x} \vee y$	1	0	0	0
	1	0	1	0
	2	1	2	

Переменная y принимает единичное значение только один раз. Следовательно, ей соответствует второй столбец исходной таблицы. Из таблицы со значениями x, y и z следует, что при $y = 1$: $x = 0$, а $z = 1$. Следовательно, переменной z соответствует первый столбец, а переменной x — третий столбец исходной таблицы.

Убедиться в правильности полученного ответа можно, полностью заполнив следующую таблицу:

z	y	x	$A = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	$B = \overline{x} \vee y$	$A \& B$	F
0	0	0	1	1	**1**	**1**
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	**1**	**1**
0	1	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	1	1	**1**	**1**
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	**1**	**1**

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют таблицей истинности логического выражения.

Истинность логического выражения можно доказать путём построения его таблицы истинности.

Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения — 0 и 1, называют логической функцией. Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.

Вопросы и задания

1. Что представляет собой таблица истинности?
2. Составлена таблица истинности для логического выражения, содержащего n переменных. Известно m — количество строк, в которых выражение принимает значение 0. Требуется выяснить, в скольких случаях логическое выражение примет значение 1 при следующих значениях n и m:
   1) $n = 6$, $m = 15$;
   2) $n = 7$, $m = 100$;
   3) $n = 10$, $m = 500$.

3. Постройте таблицы истинности для следующих логических выражений:
   1) $(A \to B) \leftrightarrow (A \& B)$;
   2) $(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})$;
   3) $(A \to (C \to B)) \to (B \vee C)$.
4. Рассмотрите два составных высказывания:
   - F_1 = «Если одно слагаемое делится на 3 и сумма делится на 3, то и другое слагаемое делится на 3»;
   - F_2 = «Если одно слагаемое делится на 3, а другое слагаемое не делится на 3, то сумма не делится на 3».

   Формализуйте эти высказывания, постройте таблицы истинности для каждого из полученных выражений и убедитесь, что результирующие столбцы совпадают.
5. Логическое выражение, являющееся истинным при любом наборе входящих в него переменных, называется тождественно истинным. Убедитесь, что следующие логические выражения являются тождественно истинными:
   1) $A \to (B \to A)$;
   2) $(A \to \overline{B}) \to (B \to \overline{A})$;
   3) $(A \& C \to B) \to (C \to (A \vee B \to B \& C))$.
6. Какое из приведённых логических выражений равносильно выражению $(A \to C) \& (B \to C)$?
   1) $A \& B \to C$;
   2) $A \to B \to C$;
   3) $A \vee B \to C$;
   4) $A \leftrightarrow B \to C$.
7. Известен фрагмент таблицы истинности для логического выражения F, содержащего логические переменные A, B и C.

A	**B**	**C**	**F**
0	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

   Какое из приведённых далее логических выражений соответствуют этому фрагменту?

1) $A \,\&\, C \vee (B \to A)$;
2) $(A \vee B) \,\&\, (C \to A)$;
3) $(A \,\&\, B \vee C) \,\&\, (B \to A \,\&\, C)$;
4) $(\overline{B \to A}) \vee (C \vee A \to B)$;
5) ни одна из указанных формул.

8. Логическая функция F задаётся выражением

$$(A \,\&\, B \,\&\, \overline{C}) \vee (A \,\&\, B \,\&\, C) \vee (A \,\&\, \overline{B} \,\&\, \overline{C}).$$

Ниже приведён фрагмент таблицы истинности, содержащий все наборы переменных, на которых F ложна.

?	?	?	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0

Какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных A, B, C?

§ 20
Преобразование логических выражений

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, т. к. за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики.

20.1. Основные законы алгебры логики

Приведём основные законы алгебры логики.

1. Переместительные (коммутативные) законы:
   $A \,\&\, B = B \,\&\, A$;
   $A \vee B = B \vee A$.
2. Сочетательные (ассоциативные) законы:
   $(A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, (B \,\&\, C)$;
   $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.
3. Распределительные (дистрибутивные) законы:
   $A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$;
   $A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$.
4. Законы идемпотентности (отсутствия степеней и коэффициентов):
   $A \,\&\, A = A$;
   $A \vee A = A$.
5. Закон противоречия:
   $A \,\&\, \overline{A} = 0$.
6. Закон исключённого третьего:
   $A \vee \overline{A} = 1$.
7. Закон двойного отрицания:
   $\overline{\overline{A}} = A$.
8. Законы работы с константами:
   $A \vee 1 = 1$; $A \vee 0 = A$;
   $A \,\&\, 1 = A$; $A \,\&\, 0 = 0$.
9. Законы де Моргана:
   $\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$;
   $\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$.
10. Законы поглощения:
   $A \,\&\, (A \vee B) = A$;
   $A \vee (A \,\&\, B) = A$.

Справедливость законов можно доказать построением таблиц истинности.

Пример 1. Упростим логическое выражение
$A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \overline{C}$.

Последовательно применим дистрибутивный закон и закон исключённого третьего:

$$A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} = A \,\&\, B \,\&\, (C \vee \overline{C}) = A \,\&\, B \,\&\, 1 = A \,\&\, B.$$

Пример 2. Упростим логическое выражение
$(A \vee B)\ \&\ (A \vee B \vee C)\ \&\ (A \vee B \vee \overline{C})$.

$$(A \vee B)\ \&\ (A \vee B \vee C)\ \&\ (A \vee B \vee \overline{C}) = (A \vee B)\ \&\ (0 \vee C \vee \overline{C}) =$$
$$= (A \vee B)\ \&\ 1 = A \vee B.$$

Аналогичные законы выполняются для операций объединения, пересечения и дополнения множеств. Например:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пробуйте самостоятельно доказать один из этих законов с помощью кругов Эйлера.

Пример 3. На числовой прямой даны отрезки $B = [2;\ 12]$ и $C = [7;\ 18]$. Каким должен быть отрезок A, чтобы предикат $(x \in A) \vee ((x \in B) \to (x \in C))$ становился истинным высказыванием при любых значениях x.

Преобразуем исходное выражение, избавившись от импликации:

$$(x \in A) \vee ((x \in B) \to (x \in C)) = (x \in A) \vee ((\overline{x \in B}) \vee (x \in C)) =$$
$$= (x \in A) \vee (\overline{x \in B}) \vee (x \in C).$$

A, B и C — множества. Для них можем записать:

$A \cup \overline{B} \cup C = U$.

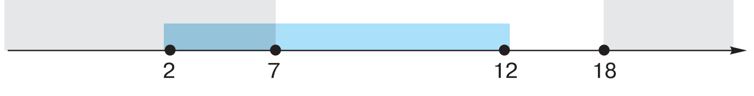
Известно, что $A \cup \overline{A} = U$.

Будем считать, что $\overline{A} = \overline{B} \cup C$. Тогда $A = \overline{\overline{B} \cup C} = B \cap \overline{C}$, причём это минимально возможное множество A.

Множество B — это отрезок $[2;\ 12]$.

Множество $\overline{C}$ — это промежутки $]-\infty;\ 7[$ и $]18;\ +\infty[$.

Изобразим это графически:



Пересечением этих множеств будет служить промежуток $[2;\ 7[$. В качестве ответа мы можем взять этот промежуток, а также любой другой, его включающий.

Чему равна минимальная длина отрезка A? Укажите ещё несколько вариантов множества A.

Пример 4. Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа a выражение

$$(x \mathbin{\&} 28 \neq 0 \vee x \mathbin{\&} 45 \neq 0) \to (x \mathbin{\&} 17 = 0 \to x \mathbin{\&} a \neq 0)$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x)? Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.

Прежде всего, вспомним, что представляет собой поразрядная конъюнкция двух целых десятичных чисел, например 27 и 22.

$27 = 11011_2$, $22 = 10110_2$.
$27 \mathbin{\&} 22 = 11011 \mathbin{\&} 10110 = 10010_2 = 18_{10}$.

$$\begin{array}{r} \& \begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array} \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

Обратите внимание на то, что если в некотором бите хотя бы одного сомножителя есть 0, то 0 есть и в этом бите результата, а 1 в результате получается только тогда, когда в соответствующих битах каждого сомножителя есть 1.

Введём обозначения:

$M(x) = (x \mathbin{\&} 28 \neq 0)$, $N(x) = (x \mathbin{\&} 45 \neq 0)$,
$K(x) = (x \mathbin{\&} 17 = 0)$, $A(x) = (x \mathbin{\&} a \neq 0)$.

Перепишем исходное выражение в наших обозначениях:

$$(M(x) \vee N(x)) \to (K(x) \to A(x)).$$

Преобразуем полученное выражение:

$$(M(x) \vee N(x)) \to (K(x) \to A(x)) = \overline{M(x) \vee N(x)} \vee \overline{K(x)} \vee A(x) =$$

$$= \overline{(M(x) \vee N(x)) \mathbin{\&} K(x)} \vee A(x).$$

Рассмотрим предикат $M(x) = (x \mathbin{\&} 28 \neq 0)$. В числе $28 = 11100_2$ 4-й, 3-й и 2-й биты содержат единицы, а 1-й и 0-й — нули. Следовательно, множеством истинности этого предиката являются такие числа x, у которых хотя бы один из битов с номерами 4, 3 или 2 содержит единицу. Если и 4-й, и 3-й, и 2-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \mathbin{\&} 28 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $N(x) = (x \mathbin{\&} 45 \neq 0)$. В числе $45 = 101101_2$ 5-й, 3-й, 2-й и 0-й биты содержат единицы, 4-й и 1-й — нули.

Следовательно, множеством истинности этого предиката являются такие числа x, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 3, 2 или 0 содержит единицу. Если и 5-й, и 3-й, и 2-й, и 0-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \mathbin{\&} 45 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $K(x) = (x \mathbin{\&} 17 = 0)$. В числе $17 = 10001_2$ 3-й, 2-й и 1-й биты содержат нули, 4-й и 0-й — единицы. Побитовая конъюнкция 17 и x будет равна нулю, если в числе x 4-й и 0-й биты будут содержать нули. Множество истинности этого предиката — все x с нулями в 4-м и 0-м битах.

По условию задачи надо, чтобы $\overline{(M(x) \vee N(x)) \mathbin{\&} K(x)} \vee A(x) = 1$. Запишем это выражение для рассмотренных множеств истинности:

$$\overline{(M \cup N) \cap K} \cup A = U.$$

Так как $A \cup \overline{A} = U$, примем $A = (M \cup N) \cap K$.

Объединением множеств M и N являются все двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 4, 3, 2, 0 содержит единицу. Пересечением этого множества с множеством K будут все двоичные числа, у которых биты с номерами 4 и 0 будут заняты нулями, т. е. такие двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 3, 2 содержит 1. Все эти числа образуют множество A.

Искомое число a должно быть таким, чтобы при любом неотрицательном целом значении переменной x: $x \mathbin{\&} a \neq 0$, и кроме того, оно должно быть минимальным из возможных. Этим условиям удовлетворяет число 101100_2. Действительно, единицы в нём стоят в тех и только в тех битах, которые нужны для выполнения условия $x \mathbin{\&} a \neq 0$.

Итак, требуемое число 101100_2 или 44_{10}.

Приведите пример такого десятичного числа a, что для него $x \mathbin{\&} a \neq 0$ при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x, но само число a не является минимально возможным.

Пример 5. Выясним, сколько решений имеет следующая система из двух уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2) \mathbin{\&} (x_2 \to x_3) \mathbin{\&} (x_3 \to x_4) = 1; \\ (\bar{y}_1 \vee y_2) \mathbin{\&} (\bar{y}_2 \vee y_3) \mathbin{\&} (\bar{y}_3 \vee y_4) = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

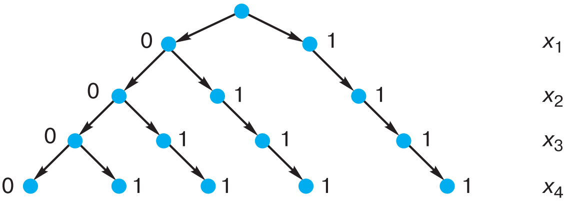
$(x_1 \to x_2)$ & $(x_2 \to x_3)$ & $(x_3 \to x_4) = 1$.

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все образующие её высказывания. Следовательно, каждая из трёх входящих в конъюнкцию импликаций должна быть равна 1.

Начнем строить дерево решений, представив на нём значения переменных x_1 и x_2 при которых $x_1 \to x_2 = 1$.

Продолжим строить дерево решений. Значения переменной x_3 будем выбирать такими, чтобы при имеющихся x_2 импликация $x_2 \to x_3$ оставалась истинной.

То же самое проделаем для переменной x_4.



На дереве видно, что рассматриваемое нами уравнение имеет 5 решений — 5 разных наборов значений логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, при которых выполняется равенство:

$$(x_1 \to x_2) \mathbin{\&} (x_2 \to x_3) \mathbin{\&} (x_3 \to x_4) = 1.$$

Так как $a \to b = \bar{a} \vee b$, второе уравнение системы:

$$(\bar{y}_1 \vee y_2) \mathbin{\&} (\bar{y}_2 \vee y_3) \mathbin{\&} (\bar{y}_3 \vee y_4) = 1$$

можно преобразовать к виду:

$$(y_1 \to y_2) \mathbin{\&} (y_2 \to y_3) \mathbin{\&} (y_3 \to y_4) = 1.$$

Следовательно, как и первое уравнение, это уравнение имеет 5 решений. Представим их в табличной форме:

y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Решение исходной системы логических уравнений — это множество различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 таких, что при подстановке каждого из них в систему оба уравнения превращаются в истинные равенства.

Начнём строить такие наборы или двоичные цепочки. Их началом может служить любой из пяти наборов — решений первого уравнения, а концом — любой из пяти наборов — решений второго уравнения. Например, на основе одного из решений первого уравнения можно построить следующие пять решений системы:

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	0	0	0	0
				0	0	0	1
				0	0	1	1
				0	1	1	1
				1	1	1	1

Всего мы можем построить $5 \cdot 5 = 25$ решений системы.

Вспомните, как называется теорема комбинаторики, которую мы применили для подсчёта количества решений системы.

20.2. Логические функции

Значение любого логического выражения определяется значениями входящих в него логических переменных. Тем самым логическое выражение может рассматриваться как способ задания логической функции.

Совокупность значений n аргументов удобно интерпретировать как строку нулей и единиц длины n. Существует ровно 2^n различных двоичных строк длины n. Так как на каждой такой строке некая функция может принимать значение 0 или 1, общее количество различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}.

Для $n = 2$ существует 16 различных логических функций.

Рассмотрим их подробнее.

A	B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$F_1(A, B) = 0$ — константа «ложь»;
$F_2(A, B) = A \mathbin{\&} B$ — конъюнкция;
$F_3(A, B) = \overline{A \to B}$ — отрицание импликации;
$F_4(A, B) = A$ — функция, равная первому аргументу;
$F_5(A, B) = \overline{B \to A}$ — отрицание обратной импликации;
$F_6(A, B) = B$ — функция, равная второму аргументу;
$F_7(A, B) = A \oplus B$ — строгая дизъюнкция;
$F_8(A, B) = A \vee B$ — дизъюнкция;
$F_9(A, B) = A \downarrow B$ — стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции, ИЛИ-НЕ);
$F_{10}(A, B) = A \leftrightarrow B$ — эквиваленция;
$F_{11}(A, B) = \overline{B}$ — отрицание второго аргумента;
$F_{12}(A, B) = B \to A$ — обратная импликация;
$F_{13}(A, B) = \overline{A}$ — отрицание первого аргумента;
$F_{14}(A, B) = A \to B$ — импликация;
$F_{15}(A, B) = A \mid B$ — штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, И-НЕ);
$F_{16}(A, B) = 1$ — константа «истина».

С увеличением числа аргументов количество логических функций резко возрастает. Так, для трёх переменных существует 256 различных логических функций! Но изучать их все нет никакой необходимости. Дело в том, что путём преобразований функция любого количества переменных может быть выражена через функции только двух переменных. Более того, можно использовать не все, а лишь некоторые логические функции двух переменных. Например:

1) F_2 и F_{11} (конъюнкция и отрицание второго аргумента);
2) F_8 и F_{13} (дизъюнкция и отрицание первого аргумента);
3) F_9 (стрелка Пирса, отрицание дизъюнкции);
4) F_{15} (штрих Шеффера, отрицание конъюнкции).

Два последних примера говорят о том, что при желании всю алгебру логики можно свести к одной функции! Но чаще всего логические функции записываются в виде логического выражения через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

20.3. Составление логического выражения по таблице истинности и его упрощение

Ранее мы выяснили, что для любого логического выражения можно составить таблицу истинности. Справедливо и обратное: для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.

Алгоритм составления логического выражения по таблице истинности достаточно прост. Для этого надо:

1) отметить в таблице истинности наборы переменных, при которых значение логического выражения равно единице;
2) для каждого отмеченного набора записать конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание;
3) все полученные конъюнкции связать операциями дизъюнкции.

Пример 6. Имеется следующая таблица истинности:

A	*B*	*C*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

После выполнения двух первых шагов алгоритма получим:

A	B	C	F	
0	1	0	1	$\overline{A} \& B \& \overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A} \& B \& C$
1	1	0	1	$A \& B \& \overline{C}$

После выполнения третьего шага получаем логическое выражение:

$$\overline{A} \& B \& \overline{C} \vee \overline{A} \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C}.$$

Попробуем упростить полученное логическое выражение. Прежде всего, вынесем за скобки B — общий сомножитель, имеющийся у всех трёх слагаемых, затем — сомножитель $\overline{A}$, а далее используем законы алгебры логики.

$$\begin{aligned}
&\overline{A} \& B \& \overline{C} \vee \overline{A} \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C} = \\
&= B \& (\overline{A} \& \overline{C} \vee \overline{A} \& C \vee A \& \overline{C}) = \\
&= B \& (\overline{A} \& (\overline{C} \vee C) \vee A \& \overline{C}) = B \& (\overline{A} \& 1 \vee A \& \overline{C}) = \\
&= B \& (\overline{A} \vee A \& \overline{C}) = B \& (\overline{A} \vee A) \& (\overline{A} \vee \overline{C}) = \\
&= B \& 1 \& (\overline{A} \vee \overline{C}) = B \& (\overline{A} \vee \overline{C}) = B \& \overline{A \& C}.
\end{aligned}$$

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, т. к. за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики. Аналогичные законы имеют место и в алгебре множеств.

Логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности или аналитически, т. е. с помощью логического выражения.

Для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.

Вопросы и задания

1. Какие из рассмотренных законов алгебры логики аналогичны законам алгебры чисел, а какие нет?
2. Докажите второй закон де Моргана с помощью таблиц истинности.
3. Путём преобразования докажите равносильность следующих высказываний:

   1) $\overline{(A \& \bar{B}) \vee (B \& \bar{C})}$ и $(\bar{A} \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& C) \vee (B \& C)$;

   2) $(A \& B) \vee \overline{(A \& \bar{C})}$ и $(A \& B) \vee A \vee \bar{C}$.
4. Упростите логические формулы:

   1) $(A \& B \& \bar{C}) \vee (A \& B \& C) \vee (A \& B)$;

   2) $(A \& B \vee A \& B \& \bar{C} \vee B \& \bar{C} \vee C) \& (\bar{C} \vee A \& C \vee \bar{A} \& B \& \bar{C})$.

*5. Найдите X, если $\overline{(X \vee A)} \vee \overline{(X \vee \bar{A})} = B$.

6. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10; 25]$ и $Q = [20; 55]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что выражение $(x \in A) \to ((x \in P) \vee (x \in Q))$ истинно при любом значении переменной x.
7. Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $Q = \{2, 6, 12, 18, 24\}$. Известно, что выражение $(x \in Q) \to ((\overline{x \in A}) \to (\overline{x \in P}))$ истинно при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное количество элементов множества A.

*8. На числовой прямой даны два отрезка: $M = [10; 60]$ и $N = [40; 80]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что выражение $(x \in M) \to (((x \in N) \& (\overline{x \in A})) \to$ $\to (\overline{x \in M}))$ истинно при любом значении переменной x.

9. Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа A формула $x \& 25 \neq 0 \to (x \& 17 = 0 \to x \& A \neq 0)$ тождественно истинна, т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x? (Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)

*10. Определите наибольшее натуральное десятичное число A, при котором выражение $((x \,\&\, 46 = 0) \vee (x \,\&\, 18 = 0)) \rightarrow$ $\rightarrow ((x \,\&\, 115 \neq 0) \vee (x \,\&\, A = 0))$ тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении десятичной переменной x. (Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)

11. Сколько различных решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3 \cdot x_4 = 1; \\ \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + x_5 \cdot x_6 = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 \cdot x_4 = 1; \\ \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + x_5 \cdot x_6 = 1; \\ \bar{x}_5 + \bar{x}_6 + x_7 \cdot x_8 = 1; \\ \bar{x}_7 + \bar{x}_8 + x_9 \cdot x_{10} = 1. \end{cases}$

12. Сколько существует различных логических функций от четырёх переменных?

13. По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1, F_2.

A	B	F_1	F_2
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

14. По известным таблицам истинности запишите аналитическое представление импликации, эквиваленции и строгой дизъюнкции.

15. Логические функции штрих Шеффера и стрелка Пирса названы так в честь математиков, исследовавших их свойства. Подготовьте краткую биографическую справку об одном из этих учёных.

16. По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1, F_2.

A	B	C	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

17. Запишите логическое выражение для логической функции $F(A, B, C)$, равной 1 на наборах 011, 101, 110, 111. Попытайтесь упростить полученное выражение.

§ 21
Элементы схемотехники. Логические схемы

Любое устройство компьютера, выполняющее арифметические или логические операции, может рассматриваться как преобразователь двоичной информации: значения входных переменных для него — последовательность нулей и единиц, а значение выходной функции — новая двоичная последовательность. Необходимые преобразования информации в блоках компьютера производятся логическими устройствами двух типов: комбинационными схемами и цифровыми автоматами с памятью.

В комбинационной схеме набор выходных сигналов в любой момент времени полностью определяется набором входных сигналов.

В цифровых автоматах с памятью набор выходных сигналов зависит не только от набора входных сигналов, но и от внутреннего состояния данного устройства. Такие устройства всегда имеют память.

Схемотехника — научно-техническое направление, занимающееся проектированием, созданием и отладкой электронных схем и электронных устройств различного назначения.

21.1. Логические элементы

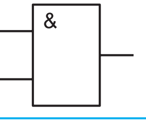
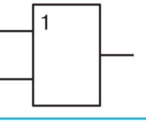
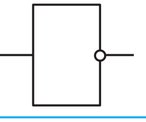
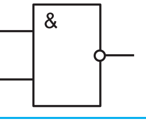
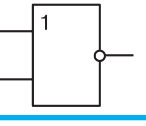
Логический элемент — это устройство с *n* входами и одним выходом, которое преобразует входные двоичные сигналы в двоичный сигнал на выходе.

Работу любого логического элемента математически удобно описать как логическую функцию, которая упорядоченному набору из нулей и единиц ставит в соответствие значение, также равное нулю или единице.

В схемотехнике широко используются логические элементы, представленные в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Условные обозначения типовых логических элементов

Наименование элемента	Условное обозначение	Название функции и её формула
И		Конъюнкция $F = A \,\&\, B$
ИЛИ		Дизъюнкция $F = A \vee B$
НЕ		Инверсия $F = \overline{A}$
И-НЕ		Штрих Шеффера $F = \overline{A \,\&\, B}$
ИЛИ-НЕ		Стрелка Пирса $F = \overline{A \vee B}$

Логический элемент И (конъюнктор) реализует операцию логического умножения. Единица на выходе этого элемента появится тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы.

Опишите подобным образом логические элементы ИЛИ (дизъюнктор), НЕ (инвертор), И-НЕ, ИЛИ-НЕ.

Однотипность сигналов на входах и выходах позволяет подавать сигнал, вырабатываемый одним элементом, на вход другого элемента. Это позволяет из двухвходовых элементов «собирать» многовходовые элементы (рис 4.7), а также синтезировать произвольные комбинационные схемы, соединяя в цепочки отдельные логические элементы.

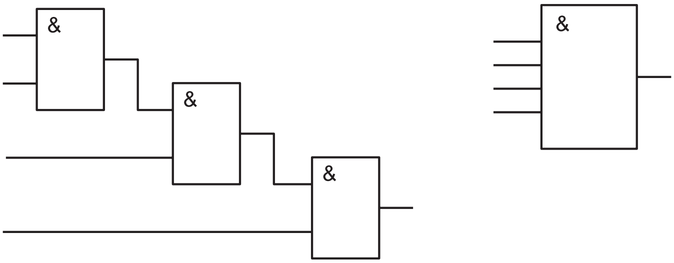


Рис. 4.7. Схема и обозначение четырёхвходового конъюнктора

Пример. По заданной логической функции $F(A, B) = \overline{A} \ \& \ B \vee A \ \& \ \overline{B}$ построим комбинационную схему (рис. 4.8).

Построение начнём с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе логической схемы должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые в свою очередь подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).

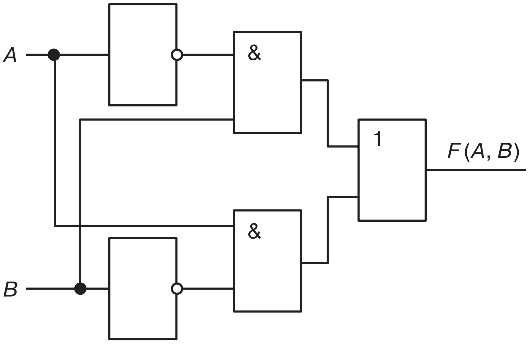


Рис. 4.8. Комбинационная схема функции $F(A, B) = \overline{A} \ \& \ B \vee A \ \& \ \overline{B}$

21.2. Сумматор

Из отдельных логических элементов можно составить устройства, производящие арифметические операции над двоичными числами.

Электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел, называется сумматором.

$$
\begin{array}{llllll}
 & & & p_{i+1} & p_i & \\
 & a = & a_n\ a_{n-1} & \dots & a_i & \dots a_1\, a_0 \\
+ & & & & & \\
 & b = & b_n\ b_{n-1} & \dots & b_i & \dots b_1\, b_0 \\
\hline
 & s_{n+1} & s_n\ s_{n-1} & \dots & s_i & \dots s_1\, s_0
\end{array}
$$

Рис. 4.9. Схема сложения двух n-разрядных двоичных чисел

Вспомним схему сложения двух n-разрядных двоичных чисел (рис. 4.9).

Заметим, что при сложении цифр в i-м разряде мы должны сложить цифру a_i числа a, цифру b_i числа b, а также p_i — перенос из $(i - 1)$-го разряда. В результате сложения должны получиться цифра результата s_i и цифра переноса (0 или 1) в следующий разряд p_{i+1}.

Основываясь на этих рассуждениях, построим таблицу истинности для функций, которые в зависимости от цифр a_i, b_i и p_i получают цифры s_i и p_{i+1}.

Входы			**Выходы**	
a_i	b_i	p_i	s_i	p_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Вам известен алгоритм построения логического выражения по таблице истинности. Воспользуемся им и запишем выражение для функции p_{i+1}:

$$p_{i+1} = \bar{a}_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i \vee a_i \ \& \ \bar{b}_i \ \& \ p_i \vee a_i \ \& \ b_i \ \& \ \bar{p}_i \vee a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i.$$

Попытаемся упростить это выражение, воспользовавшись тем, что $A \vee A = A$. Основываясь на этом законе, включим в имеющуюся дизъюнкцию ещё два слагаемых вида $a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i$, причём на основании коммутативного и ассоциативного законов преобразуем полученное выражение к виду:

$$p_{i+1} = (\bar{a}_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i \vee a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i) \vee (a_i \ \& \ \bar{b}_i \ \& \ p_i \vee a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i) \vee$$
$$\vee (a_i \ \& \ b_i \ \& \ \bar{p}_i \vee a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i) = [\text{по законам дистрибутивности}] =$$
$$= b_i \ \& \ p_i \ \& \ (\bar{a}_i \vee a_i) \vee a_i \ \& \ p_i \ \& \ (\bar{b}_i \vee b_i) \vee a_i \ \& \ b_i \ \& (\bar{p}_i \vee p_i) =$$
$$= [\text{по закону исключённого третьего}] = b_i \ \& \ p_i \vee a_i \ \& \ p_i \vee a_i \ \& \ b_i.$$

Полученное выражение означает, что функция p_{i+1} принимает значение 1 только для таких комбинаций входных переменных, когда хотя бы две переменные имеют единичные значения. Обратите внимание на то, что такой вывод можно сделать и в результате анализа таблицы истинности.

По таблице истинности можем записать выражение для s_i:

$$s_i = \bar{a}_i \ \& \ \bar{b}_i \ \& \ p_i \vee \bar{a}_i \ \& \ b_i \ \& \ \bar{p}_i \vee a_i \ \& \ \bar{b}_i \ \& \ \bar{p}_i \vee a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i.$$

Его также можно попытаться преобразовать к более короткому виду. Но можно пойти другим путём и провести более тщательный анализ таблицы истинности для функции s_i.

Из таблицы видно, что значение s_i равно 1, если все входные сигналы равны 1. Этому соответствует выражение $a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i = 1$.

Или значение s_i равно 1, если в комбинации входных сигналов есть единственная 1, т. е. единица среди переменных есть, но нет одновременно двух переменных, значения которых равны 1. Это можно записать так:

$$(a_i \vee b_i \vee p_i) \ \& \ \bar{p}_{i+1} = 1.$$

Следовательно, s_i можно записать так:

$$s_i = (a_i \vee b_i \vee p_i) \ \& \ \bar{p}_{i+1} \vee a_i \ \& \ b_i \ \& \ p_i.$$

?

Можно попытаться самостоятельно провести преобразование логического выражения, полученного по таблице истинности для s_i к итоговому виду. Но, чтобы убедиться в равносильности этих двух выражений, достаточно построить таблицу истинности для второго из них.

Полученные выражения позволяют реализовать одноразрядный двоичный сумматор схемой, представленной на рисунке 4.10.

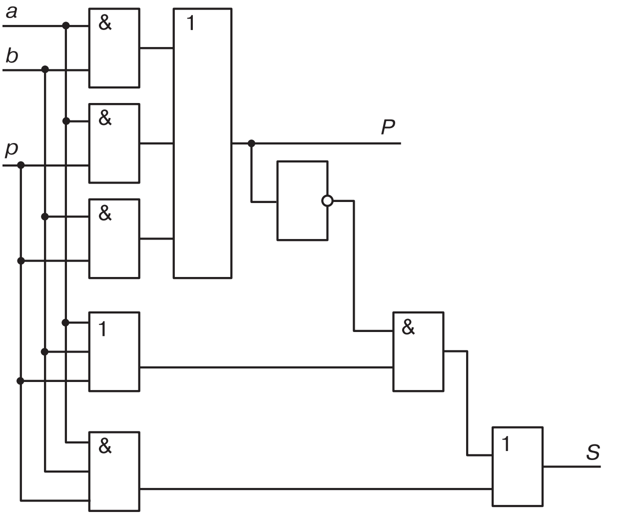
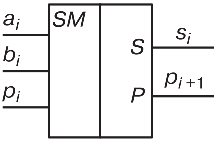


Рис. 4.10. Схема одноразрядного сумматора

Выразить s_i и p_{i+1} можно и другими формулами. Например, самое короткое выражение для s_i имеет вид: $s_i = a_i \oplus b_i \oplus p_i$, что позволяет построить сумматор, используя другие логические элементы.



Сложение n-разрядных двоичных чисел осуществляется с помощью комбинации одноразрядных сумматоров (условное обозначение одноразрядных сумматоров приведено на рисунке слева).

21.3. Триггер

Триггер (от англ. *trigger* — защёлка, спусковой крючок) — логический элемент, способный хранить один разряд двоичного числа.

Триггер был изобретён в 1918 году М. А. Бонч-Бруевичем.

Михаил Александрович Бонч-Бруевич (1988–1940) — русский и советский радиотехник, основатель отечественной радиоламповой промышленности. Работал в области радиовещания и дальней связи на коротких волнах. В 1918 году М. А. Бонч-Бруевич предложил схему переключающего устройства, имеющего два устойчивых рабочих состояния, под названием «катодное реле». Это устройство впоследствии было названо триггером.

Самый простой триггер — RS. Он состоит из двух логических элементов ИЛИ-НЕ, входы и выходы которых соединены кольцом: выход первого соединён со входом второго и выход второго — со входом первого. Схема RS-триггера представлена на рисунке 4.11.

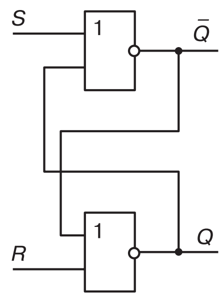


Рис. 4.11. Логическая схема RS-триггера

Триггер имеет два входа: *S* (от англ. *set* — установка) и *R* (от англ. *reset* — сброс) и два выхода: *Q* (прямой) и $\overline{Q}$ (инверсный). Принцип его работы иллюстрирует следующая таблица истинности:

Режим работы триггера	Входы		Состояние триггера *Q*
	R	***S***	
Хранение предыдущего состояния	0	0	*Q*
Установка триггера в 1	0	1	1
Установка триггера в 0	1	0	0
Запрещённое состояние	1	1	Недопустимо

Если на входы поступают сигналы $R = 0$ и $S = 0$, то триггер находится в режиме хранения — на выходах *Q* и $\overline{Q}$ сохраняются установленные ранее значения.

Если на установочный вход *S* на короткое время поступает сигнал 1, то триггер переходит в состояние 1 и после того, как сигнал на входе *S* станет равен 0, триггер будет сохранять это состояние, т. е. будет хранить 1.

При подаче 1 на вход *R* триггер перейдёт в состояние 0.

Подача на оба входа *S* и *R* логической единицы может привести к неоднозначному результату, поэтому такая комбинация входных сигналов запрещена.

Триггер используется для хранения информации в оперативной памяти компьютера, а также во внутренних регистрах процессора. Для хранения одного байта информации необходимо 8 триггеров, для килобайта — $8 \cdot 1024$ триггеров. Оперативная память современных компьютеров содержит миллионы триггеров.

В целом же компьютер состоит из огромного числа логических устройств, образующих все его узлы и память.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Необходимые преобразования информации в блоках компьютера производятся логическими устройствами двух типов: комбинационными схемами и цифровыми автоматами с памятью.

В комбинационной схеме набор выходных сигналов в любой момент времени полностью определяется набором входных сигналов. Дискретный преобразователь, который выдаёт после обработки двоичных сигналов значение одной из логических операций, называется логическим элементом. Электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел, называется сумматором.

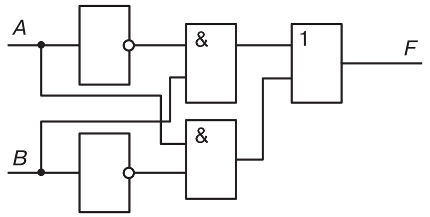
В цифровых автоматах с памятью набор выходных сигналов зависит не только от набора входных сигналов, но и от внутреннего состояния данного устройства. Такие устройства всегда имеют память. Триггер — логический элемент, способный хранить один разряд двоичного числа. Оперативная память современных компьютеров содержит миллионы триггеров.

В целом же компьютер состоит из огромного числа логических устройств, образующих все его узлы и память.

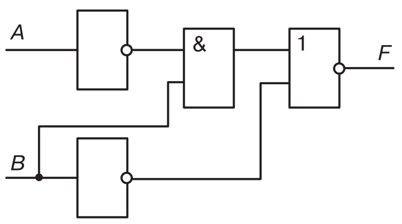
Вопросы и задания

1. Что такое логический элемент? Перечислите базовые логические элементы?
2. По логическому выражению $\overline{(A \vee \bar{B}) \& \bar{C}} \& \overline{(B \vee \bar{A}) \& \bar{C}}$ требуется разработать логическое устройство. Какие логические элементы необходимы для его создания?
3. Найдите значение выходного сигнала в приведенной схеме, если:

   1) $A = 0$ и $B = 0$; 3) $A = 1$ и $B = 0$;
   2) $A = 0$ и $B = 1$; 4) $A = 1$ и $B = 1$.



4. Определите логическое выражение преобразования, выполняемого схемой:



5. Постройте логические схемы для следующих функций:

1) $F = \overline{(A \,\&\, B \,\&\, C)} \lor B \,\&\, C \lor \overline{A}$;

2) $F = B \lor (C \,\&\, \overline{A}) \lor (A \,\&\, B)$.

6. Постройте схему устройства, выполняющего преобразование информации в соответствии с данной таблицей истинности:

A	**B**	**C**	**F**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

7. Пусть в некотором конкурсе вопрос о допуске того или иного участника к следующему туру решается тремя членами жюри: *A*, *B* и *C*. Решение положительно тогда и только тогда, когда хотя бы двое членов жюри высказываются за допуск, причём среди них обязательно должен быть председатель жюри *A*. Необходимо разработать устройство для голосования, в котором каждый член жюри нажимает на одну из двух кнопок — «За» или «Против», а результат голосования всех трёх членов жюри определяется по тому, загорится (участник допускается) или нет (участник не допускается) сигнальная лампочка. Составьте схему устройства, которое на выходе выдавало бы 1, если участник допускается к следующему туру, и 0, если не допускается.
8. Существует 16 логических устройств, имеющих два входа (16 логических функций от двух переменных). Реализуйте их комбинационные схемы с помощью логических элементов И, ИЛИ, НЕ.
9. Если при суммировании не учитывается признак переноса, то соответствующая логическая схема называется *полусумматором*. По имеющейся таблице истинности постройте логическую схему полусумматора.

Входы		Выходы	
a_i	b_i	s_i	p_{i+1}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

10. Что такое триггер? В чём основное отличие триггера от таких логических элементов, как инвертор или конъюнктор?
11. Подготовьте краткую биографическую справку о нашем выдающемся соотечественнике М. А. Бонч-Бруевиче. В чём заключается его вклад в развитие вычислительной техники?

§ 22
Логические задачи и способы их решения

Исходными данными в логических задачах являются высказывания. При этом высказывания и взаимосвязи между ними бывают так сложны, что разобраться в них без использования специальных методов бывает достаточно трудно.

22.1. Метод рассуждений

Основная идея этого метода состоит в том, чтобы последовательно анализировать всю информацию, имеющуюся в задаче, и делать на этой основе выводы.

Пример 1. На одной улице стоят в ряд 4 дома, в каждом из них живёт по одному человеку. Их зовут Василий, Семён, Геннадий и Иван. Известно, что все они имеют разные профессии: скрипач, столяр, охотник и врач. Известно, что:

1) столяр живёт правее охотника;
2) врач живёт левее охотника;
3) скрипач живёт с краю;
4) скрипач живёт рядом с врачом;
5) Семён не скрипач и не живёт рядом со скрипачом;
6) Иван живёт рядом с охотником;
7) Василий живёт правее врача;
8) Василий живёт через дом от Ивана.

Определим, кто где живёт.

Изобразим дома прямоугольниками и пронумеруем их:

1	2	3	4

Известно, что скрипач живёт с краю (3). Следовательно, он может жить в доме 1 или в доме 4.

1	2	3	4
скрипач?			скрипач?

Скрипач живёт рядом с врачом (4), т. е. врач может жить правее (дом 2) или левее (дом 3) скрипача.

1	2	3	4
скрипач?	врач?	врач?	скрипач?

Но врач живёт левее охотника (2), следовательно, скрипач не может жить в доме 4, т. к. в противном случае получится, что врач, живущий с ним рядом, живёт правее охотника, а это противоречит условию (2). Таким образом, скрипач живёт в доме 1, а врач — рядом с ним, в доме 2.

1	2	3	4
скрипач	врач		

Так как врач живёт левее охотника (2), а столяр — правее охотника (1), то охотнику достаётся дом 3, а столяру — дом 4.

1	2	3	4
скрипач	врач	охотник	столяр

Так как Семён не скрипач и не живёт рядом со скрипачом (5), то он может жить в доме 3 или в доме 4.

1	2	3	4
скрипач	врач	охотник	столяр
Не Семён	Не Семён	Семён?	Семён?

Так как Иван живёт рядом с охотником (6), то он может жить в доме 2 или 4.

1	2	3	4
скрипач	врач	охотник	столяр
Не Семён Не Иван	Не Семён Иван?	Семён? Не Иван	Семён? Иван?

Так как Василий живёт правее врача (7), то он может жить в доме 3 или 4.

1	2	3	4
скрипач	врач	охотник	столяр
Не Семён Не Иван Не Василий	Не Семён Иван? Не Василий	Семён? Не Иван Василий?	Семён? Иван? Василий?

Подводим итоги с учётом того, что Василий живёт через дом от Ивана (8): в доме 1 может жить только Геннадий, в доме 2 — Иван, в доме 4 — Василий, в доме 3 — Семён.

1	2	3	4
скрипач	врач	охотник	столяр
Геннадий	Иван	Семён	Василий

Как видите, далеко не самая сложная задача потребовала достаточно серьёзных рассуждений. Этот метод, как правило, применяется для решения простых задач.

22.2. Задачи о рыцарях и лжецах

Задачи о рыцарях и лжецах — это такой класс логических задач, в которых фигурируют персонажи:

- рыцарь — человек, всегда говорящий правду;
- лжец — человек, всегда говорящий ложь;
- обычный человек — человек, который в одних ситуациях может говорить правду, а в других — лгать.

Решение подобных задач сводится к перебору вариантов и исключению тех из них, которые приводят к противоречию.

Пример 2. Двое жителей острова *A* и *B* разговаривали между собой в саду. Проходивший мимо незнакомец спросил у *A*: «Вы рыцарь или лжец?». Тот ответил, но так неразборчиво, что незнакомец не смог ничего понять. Тогда незнакомец спросил у *B*: «Что сказал *A*?». «*A* сказал, что он лжец», — ответил *B*. Может ли незнакомец доверять ответу *B*? Мог ли *A* сказать, что он лжец?

Если A — рыцарь, то он скажет правду и сообщит, что он рыцарь.

Если A — лжец, то он скроет правду и сообщит, что он рыцарь.

Это значит, что B, утверждающий, что «A сказал, что он лжец» заведомо лжёт; он — лжец. Определить же, кем является A, в данной ситуации невозможно.

Пример 3. Рядом стоят два города: город Лжецов (Л) и город Правдивых (П). В городе Лжецов живут лжецы, а в городе Правдивых — правдивые люди. Лжецы всегда лгут, а правдивые — всегда говорят правду. Лжецы и правдивые ходят друг к другу в гости.

Вы попали в один из городов, а в какой не знаете. Вам нужно у первого встречного, задав простой вопрос, узнать, в каком вы городе. Ответом на вопрос может быть только «Да» или «Нет».

Нужен простой вопрос, ответ на который точно известен вашему респонденту. Например: «Вы находитесь в своём городе?».

Надо задать вопрос и проанализировать варианты ответов с учетом того, кто их мог дать.

Самостоятельно разберитесь с решением задачи, рассмотрев блок-схему на рис. 4.12.

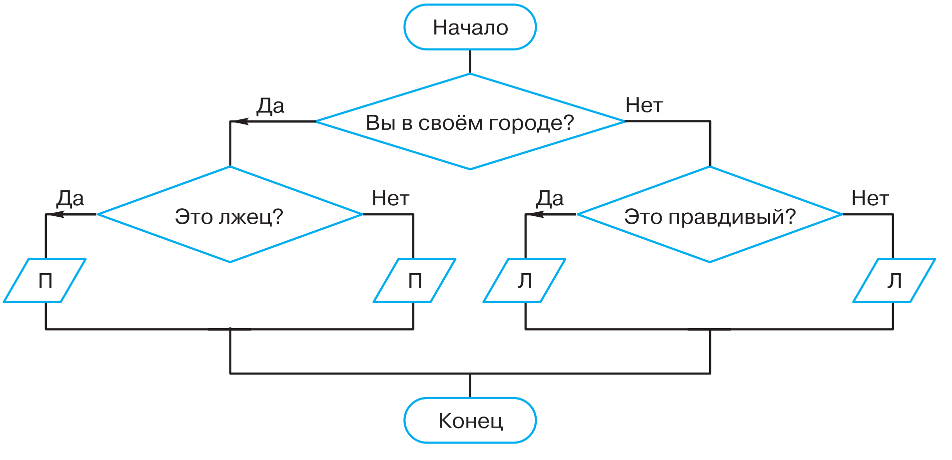


Рис. 4.12. Блок-схема для анализа ответов

Пример 4. Перед нами три человека: *A*, *B* и *C*. Один из них рыцарь, другой — лжец, третий — нормальный человек. При этом неизвестно, кто есть кто. Эти люди утверждают следующее:
1) *A*: я нормальный человек;
2) *B*: это правда;
3) *C*: я не нормальный человек.

Кто такие *A*, *B* и *C*?

Для решения этой задачи следует рассмотреть все возможные варианты распределения ролей.

Начнём с *A*. Он может быть рыцарем (Р), лжецом (Л) или нормальным человеком (Н). Если *A* — рыцарь, то *B* может быть лжецом или нормальным человеком и т. д. Представим все варианты распределения ролей в таблице:

A	*B*	*C*
Р	Л	Н
Р	Н	Л
Л	Р	Н
Л	Н	Р
Н	Р	Л
Н	Л	Р

Проанализируем имеющиеся три утверждения, считая, что роли между *A*, *B* и *C* распределены в соответствии с первой строкой таблицы.

Итак, *A* утверждает, что он нормальный человек (1). Но, согласно первой строке таблицы, — он рыцарь, который не может так о себе сказать. Получено противоречие. Следовательно, первая строка не удовлетворяет условию задачи.

Самостоятельно проанализируйте оставшиеся строки таблицы и дайте ответ на вопрос, поставленный в задаче.

22.3. Задачи на сопоставление. Табличный метод

Многие логические задачи связаны с рассмотрением нескольких конечных множеств и связей между их элементами. Для решения таких задач зачастую прибегают к помощи таблиц или графов. От того, насколько удачно выбрана их структура, во многом зависит успешность решения задачи.

Пример 5. В летнем лагере в одной палатке жили Алёша, Боря, Витя и Гриша. Все они разного возраста, учатся в разных классах (с 7-го по 10-й) и занимаются в разных кружках: математическом, авиамодельном, шахматном и фотокружке. Выяснилось, что фотограф старше Гриши, Алёша старше Вити, а шахматист старше Алёши. В воскресенье Алёша с фотографом играли в теннис, а Гриша в то же время проиграл авиамоделисту в городки.

Определим, кто в каком кружке занимается.

В этой задаче речь идёт о высказывательной форме (предикате) вида «Ученик x занимается в кружке y». Требуется определить такие значения x и y, чтобы высказывательная форма превратилась в истинное высказывание.

Составим таблицу:

y / x	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша				
Боря				
Витя				
Гриша				

Рассмотрим условия:

1) фотограф старше Гриши;
2) Алёша старше Вити, а шахматист старше Алёши;
3) в воскресенье Алёша с фотографом играли в теннис, а Гриша в то же время проиграл авиамоделисту в городки.

Можем сделать выводы: Гриша — не фотограф (1); шахматист — не Алёша и не Витя (2); Алёша — не фотограф и не авиамоделист, Гриша — не фотограф и не авиамоделист (3). Отметим это в таблице:

y / x	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша		0	0	0
Боря				
Витя			0	
Гриша		0		0

Имеющейся информации достаточно для того, чтобы утверждать, что Алёша занимается математикой, а Гриша — шахматами:

y / x	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша	1	0	0	0
Боря	0		0	
Витя	0		0	
Гриша	0	0	1	0

Из того, что Гриша — шахматист, и условий (1) и (2) следует, что мы можем расположить учеников по возрасту (в порядке возрастания): Витя — Алёша — шахматист Гриша — фотограф. Следовательно, Боря — фотограф. Этого достаточно, чтобы окончательно заполнить таблицу:

y / x	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша	1	0	0	0
Боря	0	0	0	1
Витя	0	1	0	0
Гриша	0	0	1	0

Итак, Алёша занимается в математическом кружке, Боря — в фотокружке, Витя — в авиамодельном кружке, Гриша — в шахматном кружке.

Самостоятельно сделайте вывод о том, кто из ребят в каком классе учится.

22.4. Использование таблиц истинности для решения логических задач

Аппарат алгебры логики позволяет применять к широкому классу логических задач универсальные методы, основанные на формализации условий задачи.

Одним из таких методов является построение таблицы истинности по условию задачи и её анализ. Для этого следует:

1) выделить из условия задачи элементарные (простые) высказывания и обозначить их буквами;
2) записать условие задачи на языке алгебры логики, соединив простые высказывания в составные с помощью логических операций;
3) построить таблицу истинности для полученных логических выражений;
4) выбрать решение — набор логических переменных (элементарных высказываний), при котором значения логических выражений соответствуют условиям задачи;
5) убедиться, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Пример 6. Три подразделения A, B, C торговой фирмы стремились получить по итогам года максимальную прибыль. Экономисты высказали следующие предположения:

1) если A получит максимальную прибыль, то максимальную прибыль получат B и C;
2) A и C получат или не получат максимальную прибыль одновременно;
3) необходимым условием получения максимальной прибыли подразделением C является получение максимальной прибыли подразделением B.

По завершении года оказалось, что одно из трёх предположений ложно, а остальные два истинны.

Выясним, какие из названных подразделений получили максимальную прибыль.

Рассмотрим элементарные высказывания:

- A — «A получит максимальную прибыль»;
- B — «B получит максимальную прибыль»;
- C — «C получит максимальную прибыль».

Запишем на языке алгебры логики прогнозы, высказанные экономистами:

1) $F_1 = A \to B \,\&\, C$;
2) $F_2 = A \,\&\, C \vee \overline{A} \,\&\, \overline{C}$;
3) $F_3 = C \to B$.

Составим таблицу истинности для F_1, F_2, F_3.

A	B	C	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

Теперь вспомним, что из трёх прогнозов F_1, F_2, F_3 один оказался ложным, а два других — истинными. Эта ситуация соответствует четвёртой строке таблицы.

Таким образом, максимальную прибыль получили подразделения B и C.

22.5. Решение логических задач путём упрощения логических выражений

Следующий формальный способ решения логических задач состоит в том, чтобы:

1) выделить из условия задачи элементарные (простые) высказывания и обозначить их буквами;
2) записать условие задачи на языке алгебры логики, соединив простые высказывания в составные с помощью логических операций;
3) составить единое логическое выражение, учитывающее все требования задачи;
4) используя законы алгебры логики, упростить полученное выражение и вычислить его значение;
5) выбрать решение — набор логических переменных (элементарных высказываний), при котором построенное логическое выражение является истинным;
6) убедиться, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Пример 7. На вопрос, кто из трёх учащихся изучал логику, был получен ответ: «Если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй». Кто из учащихся изучал логику?

Обозначим через A, B, C простые высказывания:

- A = «Первый ученик изучал логику»;
- B = «Второй ученик изучал логику»;
- C = «Третий ученик изучал логику».

Из условия задачи следует истинность высказывания:

$$(A \to B) \& \overline{(C \to B)}.$$

Упростим получившееся высказывание:

$$(A \to B) \& \overline{(C \to B)} = (\overline{A} \vee B) \& \overline{(\overline{C} \vee B)} =$$
$$= (\overline{A} \vee B) \& C \& \overline{B} = \overline{A} \& C \& \overline{B} \vee B \& C \& \overline{B} =$$
$$= \overline{A} \& C \& \overline{B}$$

Получившееся высказывание будет истинным только в случае, если C — истина, а A и B — ложь. А это значит, что логику изучал только третий ученик, а первый и второй не изучали.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Исходными данными в логических задачах являются высказывания. При этом высказывания и взаимосвязи между ними бывают так сложны, что разобраться в них без использования специальных методов бывает достаточно трудно.

Основная идея метода рассуждений состоит в том, чтобы последовательно анализировать всю информацию, имеющуюся в задаче, и делать на этой основе выводы.

Многие логические задачи связаны с рассмотрением нескольких конечных множеств и связей между их элементами. Для решения таких задач зачастую прибегают к помощи таблиц или графов. От того, насколько удачно выбрана их структура, во многом зависит успешность решения задачи.

Аппарат алгебры логики позволяет применять к широкому классу логических задач универсальные методы, основанные на формализации условий задачи. К ним относятся методы: 1) построения таблицы истинности по условию задачи и её анализ; 2) составления и упрощения логического выражения.

Вопросы и задания

1. Вы встретили 10 островитян, стоящих по кругу. Каждый из них произнёс фразу: «Следующие 4 человека, стоящие после меня по часовой стрелке, лжецы». Сколько среди них лжецов?
2. Однажды некий путешественник гостил на острове рыцарей и лжецов. Там ему встретились два местных жителя. Путешественник спросил одного из них: «Кто-нибудь из вас рыцарь?» Его вопрос не остался без ответа, и он узнал то, что хотел. Кем был островитянин, к которому путешественник обратился с вопросом, — рыцарем или лжецом? Кем был другой островитянин?
3. В старинном индийском храме восседали три богини: Правда, Ложь и Мудрость. Правда говорит только правду, Ложь всегда лжёт, а Мудрость может сказать правду или солгать. Паломник, посетивший храм, спросил у богини слева: «Кто сидит рядом с тобой?» «Правда», — ответила та. Тогда он спросил у средней: «Кто ты?» «Мудрость», — отвечала она. Наконец он спросил у той, что справа: «Кто твоя соседка?» «Ложь», — ответила богиня. И после этого паломник точно знал, кто есть кто. Определите, на каком месте сидит каждая из богинь.
4. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов — Борисова, Сергеева и Васечкина, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Каждый из музыкантов владеет двумя инструментами.

   Известно, что:
   1) Сергеев — самый высокий;
   2) играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
   3) играющие на скрипке и флейте и Борисов любят пиццу;
   4) когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Сергеев мирит их;
   5) Борисов не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

   Выясните, на каких инструментах играет каждый из музыкантов.
5. В педагогическом институте Аркадьева, Бабанова, Корсакова, Дашков, Ильин и Флёров преподают экономическую географию, английский язык, немецкий язык, историю, французский язык, математику.

Известно, что:

1) преподаватель немецкого языка и преподаватель математики в студенческие годы занимались художественной гимнастикой;
2) Ильин старше Флёрова, но стаж работы у него меньше, чем у преподавателя экономической географии;
3) будучи студентками, Аркадьева и Бабанова учились вместе в одном университете. Все остальные окончили педагогический институт;
4) Флёров — сын преподавателя французского языка, но студентом у него не был;
5) преподаватель французского языка — самый старший из всех по возрасту и у него самый большой стаж работы. Он работает в педагогическом институте с тех пор, как окончил его. Преподаватели математики и истории — его бывшие студенты;
6) Аркадьева старше преподавателя немецкого языка.

Кто какой предмет преподаёт?

6. На вопрос «Кто из девушек собирается прийти на день рождения к Саше?» был получен уклончивый ответ: «Если Марина придёт на день рождения, то Надя тоже придёт, а Таня не придёт. Если Надя придёт, то Таня придёт в том и только в том случае, если не придёт Марина». Можно ли по этой информации точно установить, кто из девушек придёт к Саше, а кто нет?

7. В бюро переводов приняли на работу троих сотрудников: Диму, Сашу и Юру. Каждый из них знает ровно два иностранных языка из следующего набора: немецкий, японский, шведский, китайский, французский и греческий.

Известно, что:

1) ни Дима, ни Юра не знают японского;
2) переводчик с шведского старше переводчика с немецкого;
3) переводчик с китайского, переводчик с французского и Саша родом из одного города;
4) переводчик с греческого, переводчик с немецкого и Юра учились втроём в одном институте;
5) Дима — самый молодой из всех троих, и он не знает греческого;
6) Юра знает два европейских языка.

Укажите имена переводчика с шведского языка и переводчика с китайского языка.

8. Ребята знали, что у четырёх подруг — Маши, Кати, Вали и Наташи — дни рождения приходятся на разное время года, но не могли точно вспомнить, у кого на какое. Попытка вспомнить закончилась следующими утверждениями:
   1) у Вали день рождения зимой, а у Кати — летом;
   2) у Кати день рождения осенью, а у Маши — весной;
   3) весной празднует день рождения Наташа, а Валя отмечает его летом.

   Позже выяснилось, что в каждом утверждении только одно из двух высказываний истинно. В какое время года день рождения у каждой из девушек?

9. В санатории на берегу моря отдыхают отец O, мать M, сын S и две дочери D_1 и D_2. До завтрака члены семьи часто купаются в море, причём известно, что если отец утром отправляется купаться, то с ним обязательно идут мать и сын; если сын идёт купаться, то его сестра D_1 отправляется вместе с ним; вторая дочь D_2 купается тогда и только тогда, когда купается мать; каждое утро купается по крайней мере один из родителей. Если в воскресенье утром купалась в море лишь одна из дочерей, то кто из членов семьи в это утро ходил на море?

10. В нарушении правил обмена валюты подозреваются четыре работника банка — Антипов (A), Борисов (B), Цветков (C) и Дмитриев (D). Известно, что:
   1) если A нарушил, то и B нарушил правила обмена валюты;
   2) если B нарушил, то и C нарушил или A не нарушал;
   3) если D не нарушал, то A нарушил, а C не нарушал;
   4) если D нарушил, то и A нарушил.

   Кто из подозреваемых нарушил правила обмена валюты?

Дополнительные материалы к главе смотрите в авторской мастерской.