В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

Методическое пособие
для учителя

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое руководство является составной частью учебно-методического комплекса по математике для 9 классов общеобразовательных учреждений.

Это пособие предназначено в помощь учителям, работающим по учебнику «Геометрия» для 9 классов общеобразовательных школ. Оно ориентирует учителя в его работе и позволит качественно спланировать процесс обучения геометрии девятиклассников.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) *в направлении личностного развития*:

– формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

– развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

– формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

– воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

– формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

– развитие интереса к математике;

– развитие математических способностей;

2) *в метапредметном направлении*:

– развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

– формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) *в предметном направлении*:

– овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

– создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

В пособие включено:

- примерное тематическое планирование в двух вариантах;
- методические рекомендации по решению задач повышенной трудности;
- самостоятельные работы;
- контрольные работы.

В конце пособия даны ответы к самостоятельным и контрольным работам, приведены решения задач повышенной трудности.

Приведённые решения задач не являются единственно возможными. Хорошо известно, что решение задач несколькими способами активизирует учебную познавательную деятельность обучающихся. Задачи, допускающие несколько решений, дают богатые возможности для развития и воспитания школьников.

Если в классе при решении некоторой задачи ребятами будет высказано несколько идей, этим моментом не следует пренебрегать и направлять их мысль на один путь.

При этом можно сразу обсудить достоинства каждого предложения и выбрать наиболее рациональный, а можно разрешить каждому учащемуся идти своим понравившимся ему путём. Затем сравнить различные решения и при выборе наилучшего из них руководствоваться принципами наибольшей простоты, наглядности, краткости, оригинальности, неожиданности, математической красоты и т. п. Конечно, работа с такими задачами требует больше внимания и самое главное времени, которого всегда не хватает.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
9 класс (2 часа в неделю, всего 68 часов за год)

Пункт	Тема	Кол-во часов	
		Вар. 1	Вар. 2
	ГЛАВА I. ПОДОБИЕ	**11**	**13**
1	Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников	2	3
2	Второй и третий признак подобия треугольников	2	3
3	Теоремы об отрезках	2	3
4	Подобие фигур	2	3
5*	Золотое отношение	2	
	Контрольная работа 1	1	1
	ГЛАВА II. ТРИГОНОМЕТРИЯ	**18**	**23**
6	Тригонометрические функции острого угла	2	3
7	Нахождение сторон прямоугольного треугольника	2	3
8	Тригонометрические тождества	2	3
9	Тригонометрические функции прямого и тупого углов	2	3
10	Скалярное произведение векторов	2	2
11	Теорема косинусов	2	3
12	Теорема синусов	2	2
13	Практические задачи на нахождение расстояний и углов	3	3
	Контрольная работа 2	1	1
	ГЛАВА III. КРИВЫЕ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ	**8**	**2**
14	Длина окружности	2	2
15*	Кривые постоянной ширины	2	
16*	Циклоида	2	
17*	Эпициклоиды и гипоциклоиды	2	
	ГЛАВА IV. ПЛОЩАДЬ	**10**	**10**
18	Площадь треугольника	2	3
19	Площадь четырёхугольника	2	3
20	Площадь круга	2	3
21*	Фракталы	2	
22*	Площади поверхностей цилиндра и конуса	1	
	Контрольная работа 3	1	1
	ГЛАВА V. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ	**11**	**10**
23	Прямоугольная система координат	2	2
24	Расстояние между точками. Уравнение окружности	2	3
25	Координаты вектора	2	2
26	Уравнение прямой	2	2
27*	Аналитическое задание фигур	2	
	Контрольная работа 4	1	1
	ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ	**10**	**12**
28	Утверждения	2	2
29	Углы	2	2
30	Длины	2	3
31	Площади	2	3
32	Координаты и векторы	2	2

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ГЛАВА I. ПОДОБИЕ

1. Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников

Цель обучения – познакомить учащихся с понятием подобия; сформулировать и доказать первый признак подобия треугольников; научить применять его при решении задач.

Рекомендации по решению задач

(нумерация задач и рисунков взята из учебника)

Задача 13. В треугольнике *ABC* (рис. 1.6) проведите отрезок *CD*, разбивающий этот треугольник на два подобных треугольника.

Решение. Из вершины *C* прямого угла треугольника *ABC* проведём высоту *CD* (рис. 1). У прямоугольных треугольников *ACD* и *CBD* угол *CAD* равен углу *BCD*, как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Следовательно, соответствующие углы этих треугольников равны. Значит, по первому признаку подобия треугольников, эти треугольники подобны.

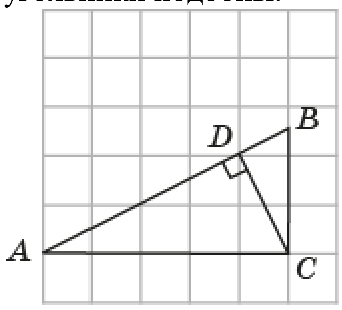

Рис. 1

2. Второй и третий признаки подобия треугольников

Цель обучения – сформулировать и доказать второй и третий признаки подобия треугольников; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 19. Докажите, что если для треугольников *ABC* и *DEF* угол *A* равен углу *D*, высоты BB_1, CC_1 треугольника *ABC* пропорциональны высотам EE_1, FF_1 треугольника *DEF* (рис. 2.14), то треугольники *ABC* и *DEF* подобны.

Решение. Пусть в треугольниках *ABC* и *DEF* $\angle A=\angle D$ и пропорциональны высоты $\frac{EE_1}{BB_1}=\frac{FF_1}{CC_1}$ (рис. 2).

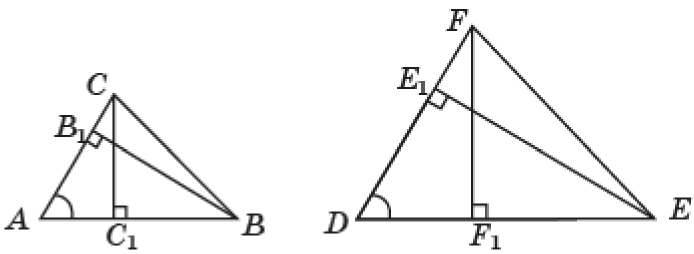

Рис. 2

Прямоугольные треугольники ABB_1 и DEE_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Следовательно, $\frac{DE}{AB}=\frac{EE_1}{BB_1}$. Прямоугольные треугольники ACC_1 и DFF_1 также подобны по первому признаку подобия треугольников. Следовательно, $\frac{DF}{AC}=\frac{FF_1}{CC_1}$.

Из равенства этих отношений следует равенство $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$, т. е. две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы, заключённые между этими сторонами, равны. Значит, по второму признаку подобия треугольников, эти треугольники подобны.

Задача 20. Докажите, что если медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC соответственно пропорциональны медианам DD_1, EE_1, FF_1 треугольника DEF (рис. 2.15), то треугольники ABC и DEF подобны.

Решение. Пусть M и M_1 точки пересечения медиан данных треугольников (рис. 3).

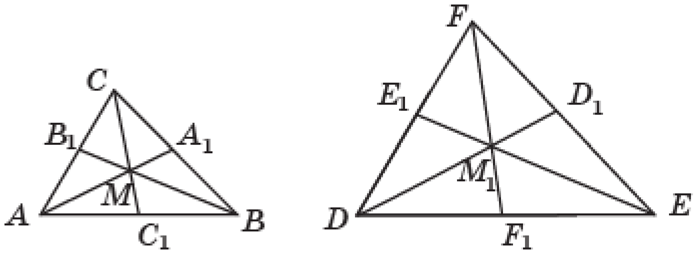

Рис. 3

Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника, то для треугольников ABM и DEM_1 имеют место равенство отношений

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DM_1}{AM} = \frac{EM_1}{BM}.$$

Аналогично, для треугольников ACM и DFM_1, BCM и EFM_1 имеют место равенства

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DM_1}{AM} = \frac{FM_1}{CM}, \quad \frac{EF}{BC} = \frac{EM_1}{BM} = \frac{FM_1}{CM}.$$

Из равенства этих равенств следует равенство

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC},$$

означающее, что соответствующие стороны данных треугольников пропорциональны. Значит, по третьему признаку подобия треугольников, эти треугольники подобны.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel DC$) проведены диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O, $AB = 6$, $CD = 2$, $CO = 2$, $DO = 3$. Найдите AO и BO.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) высота CD равна 6, отрезок AD равен 4. Найдите отрезок BD.

3. Человек ростом 1,6 м стоит на расстоянии 10 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна пяти шагам. На какой высоте расположен фонарь?

4*. Докажите, что если треугольники ABC и DEF подобны, то медианы CC_1 и EE_1 относятся как соответствующие стороны этих треугольников.

Вариант 2

1. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel DC$) проведены диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O, $AB = 8$, $CD = 4$, $AO = 6$, $BO = 5$. Найдите CO и DO.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) высота CD дели гипотенузу AB на отрезки $AD = 9$, $DB = 4$. Найдите высоту CD.

3. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,1 м. Найдите длину тени человека в метрах.

4*. Докажите, что если треугольники ABC и DEF подобны, то биссектрисы CC_1 и FF_1 относятся как соответствующие стороны этих треугольников.

3. Теоремы об отрезках

Цель обучения – установить соотношения между отрезками, связанными с окружностью и прямоугольным треугольником; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 13. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *BE*, пересекающиеся в точке *H*. Используя рисунок 3.8, докажите, что треугольники *ABC* и *DEC* подобны.

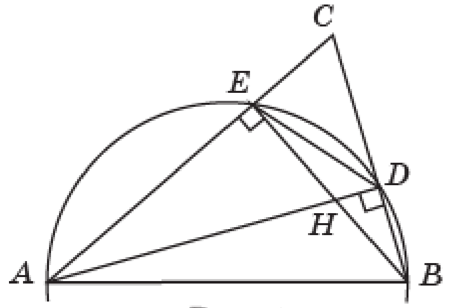

Рис. 4

Решение. На отрезке *AB*, как на диаметре, построим окружность. Тогда точки *D* и *E* будут ей принадлежать. Углы *ABE* и *ADE* равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $\overset{\frown}{AE}$ этой окружности (рис. 4). Углы *BAE* и *CDE* дополняют эти углы до прямого угла, следовательно, они равны. Таким образом, в треугольниках *ABC* и *DEC* угол *C* общий и углы *BAE* и *CDE* равны. Значит, эти треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников.

Задача 14. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *BE*, пересекающиеся в точке *H* (рис. 3.8). Докажите, что треугольники *ABH* и *EDH* подобны.

Решение. Как было доказано в предыдущей задаче, углы *ABH* и *EDH* равны. Следовательно, треугольники *ABH* и *EDH* подобны по первому признаку подобия треугольников.

Задача 15. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AD*, *BE* и *CF*, пересекающиеся в точке *H* (рис. 3.9). Докажите, что эти высоты содержат биссектрисы треугольника *DEF*.

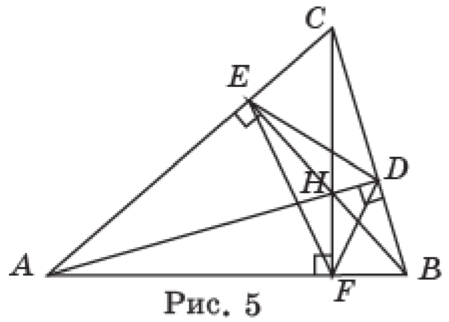

Рис. 5

Решение. Как было доказано в решении задачи 13, угол *CDE* равен углу *A* треугольника *ABC* (рис. 5). Аналогично доказывается, что угол *BDF* равен этому же углу *A*. Следовательно, углы *ADE* и *ADF* равны. Значит, высота *AD* содержит биссектрису треугольника *DEF*, проведённую из вершины *D*. Аналогично доказывается, что остальные высоты треугольника *ABC* содержат соответствующие биссектрисы треугольника *DEF*.

Задача 16. С помощью циркуля и линейки постройте среднее геометрическое двух данных отрезков.

Решение. Пусть даны два отрезка *AB* и *BC* Построим на отрезке *AC* = *AB*+*BC*, как на диаметре, окружность (рис. 6).

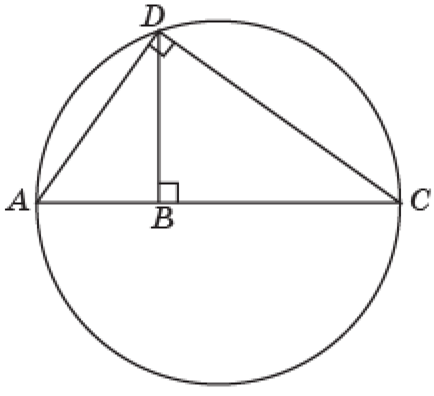

Рис. 6

Через точку B проведём перпендикуляр к диаметру AC и обозначим D точку его пересечения с окружностью. Треугольники ABD и DBC подобны по первому признаку подобия треугольников. Следовательно, имеем равенство отношений $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$, из которого следует равенство $BD = \sqrt{AB \cdot BC}$, означающее, что отрезок BD является средним геометрическим отрезков AB и BC.

4. Подобие фигур

Цель обучения – определить понятие подобия фигур; рассмотреть свойства подобия; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 6. Трапеция разделена средней линией на две трапеции (рис. 4.5). Будут ли они подобны?

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и EF – её средняя линия. У трапеций $ABFE$ и $EFCD$ равны соответствующие углы и равны соответствующие стороны AE и ED (рис. 7). Если бы эти трапеции были подобны, то у них должны были быть равны и остальные соответствующие стороны. Однако из неравенства сторон AB и CD следует неравенство сторон AD и BC. Значит, эти трапеции не являются подобными.

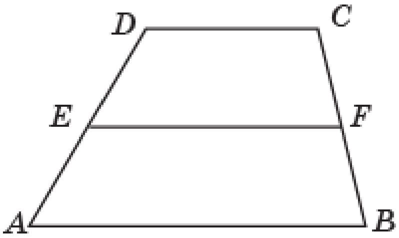

Рис. 7

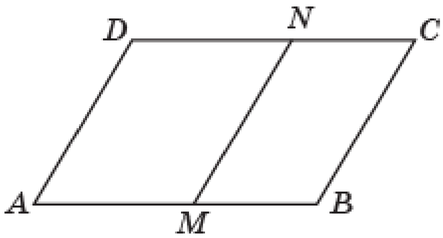

Рис. 8

Задача 7. На рисунке 4.6 изображён параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=a$, $BC=b$, от которого отсечён другой параллелограмм $MBCN$, подобный данному. Каким должен быть отрезок MB?

Решение. Из подобия параллелограммов $ABCD$ и $MBCN$ следует равенство отношений соответствующих сторон $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{MB}$ (рис. 8). Откуда находим $MB = \frac{b^2}{a}$.

Задача 16*. Докажите, что любые два правильных многоугольника с одним и тем же числом сторон подобны.

Решение. Пусть даны два правильных n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ (рис. 9). Напомним, что у правильных n-угольников равны соответствующие углы. Следовательно, существует движение, переводящее правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ в правильный n-угольник так, что вершина A_1 перейдёт в вершину B_1, а вершины A_2, A_n перейдут в вершины, принадлежащие лучам соответственно B_1B_2, B_1B_n. Обозначим полученный правильный n-угольник $B_1A'_2\ldots A'_n$. Из равенства соответствующих углов n-угольников

$B_1B_2…B_n$ и $B_1A'_2…A'_n$ следует параллельность их соответствующих сторон. Проведём диагонали B_1B_3, … B_1B_{n-1}. Они разобьют эти n-угольники на треугольники. Из равенства углов этих треугольников вытекает их подобие с одним и тем же коэффициентом подобия. Следовательно, гомотетия с центром B_1 и коэффициентом, равным коэффициенту подобия треугольников, переводит n-угольник $B_1A'_2…A'_n$ в n-угольник $B_1B_2…B_n$. Значит, n-угольники $A_1A_2…A_n$ и $B_1B_2…B_n$ подобны.

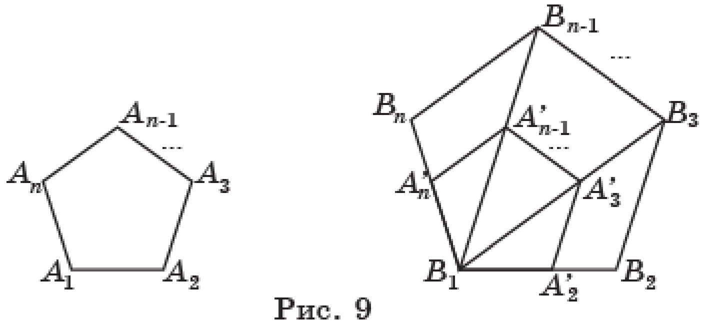

Рис. 9

Задача 17. Докажите, что периметры правильных многоугольников с одним и тем же числом сторон относятся как радиусы описанных окружностей.

Решение. Обозначим O и P центры окружностей описанных соответственно около правильных n-угольников $A_1A_2…A_n$ и $B_1B_2…B_n$ (рис. 10).

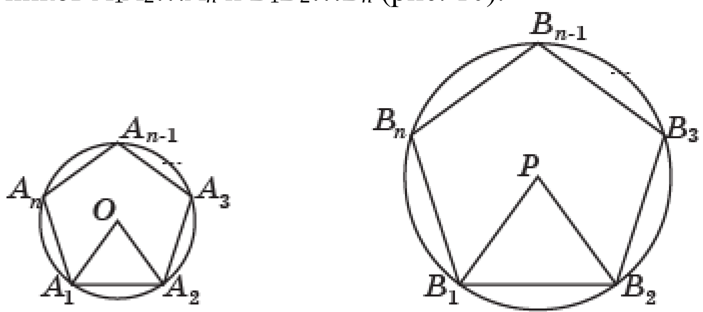

Рис. 10

Из равенства углов правильных n-угольников вытекает подобие треугольников A_1A_2O и B_1B_2P. Следовательно, их соответствующие стороны относятся как радиусы описанных окружностей. Значит, и периметры этих n-угольников относятся как радиусы описанных окружностей.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. Верно ли, что любые два ромба подобны?

2. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, $AE = 3$, $BE = 2$, $CE = 4$. Найдите DE.

3. Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами соответственно 2, 5 касаются внутренним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности в точках соответственно A_1, A_2. Найдите AA_2, если $AA_1 = 3$.

4*. Придумайте признак подобия двух прямоугольников.

Вариант 2

1. Верно ли, что любые два прямоугольника подобны?

2. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке F, $AF = 4$, $CF = 6$, $DF = 2$. Найдите BF.

3. Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами соответственно 3, 4 касаются внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности в точках соответственно A_1, A_2. Найдите AA_1, если $AA_2 = 6$.

4*. Придумайте признак подобия двух ромбов.

5*. Золотое отношение

Цель обучения – познакомить учащихся с золотым отношением и его использованием в живописи, скульптуре, архитектуре; привести примеры использования золотого отношения для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 3. Докажите, что все золотые прямоугольники подобны.

Решение. Пусть *ABCD* и *EFGH* – золотые прямоугольники (рис. 11).

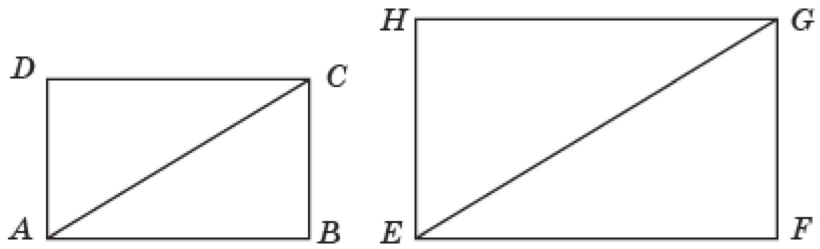

Рис. 11

Так как смежные стороны золотых прямоугольников находятся в золотом отношении, то треугольники *ABC* и *EFG* подобны, т. е. существует преобразование подобия, переводящее треугольник *ABC* в треугольник *EFG*. Так как подобие сохраняет углы, то это преобразование переводит точку *D* в точку *H*. Значит, оно переводит прямоугольник *ABCD* в прямоугольник *EFGH*, т. е. прямоугольники *ABCD* и *EFGH* подобны.

Задача 4. Докажите, что если от золотого прямоугольника *ABCD* отрезать квадрат *AEFD* со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник *BCFE* (рис. 5.5).

Решение. Для золотого прямоугольника *ABCD* и квадрата *AEFD* (рис. 12) имеем:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AB - AE}{BC} = \frac{AB - BC}{BC} = \frac{AB}{BC} - 1 = \frac{1}{\varphi} - 1 = \frac{1 - \varphi}{\varphi} = \varphi.$$

Следовательно, прямоугольник *BCFE* золотой.

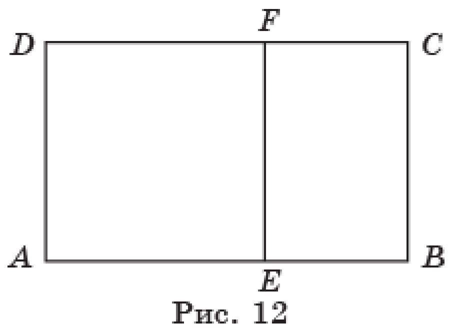

Рис. 12

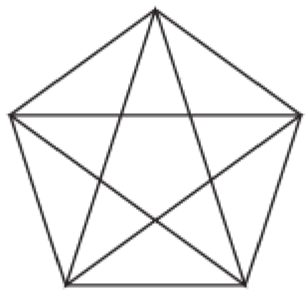

Рис. 13

Задача 5. Докажите, что в правильном пятиугольнике с проведёнными диагоналями (рис. 5.6), все треугольники золотые.

Решение. В таком пятиугольнике все треугольники равнобедренные с углами при вершинах, противолежащих основаниям, 36^{o} или 108^{o}. Такие треугольники являются золотыми.

Задача 11. В прямоугольном треугольнике *ABC* катет *AB* в два раза больше катета *BC* (рис. 5.8). Докажите, что точка *E* делит отрезок *AB* в золотом отношении.

Решение. В прямоугольном треугольнике *ABC* *AB* = 2, *BC* = 1 (рис. 14).

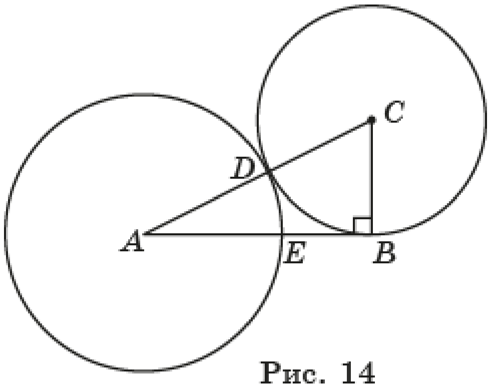

Рис. 14

Тогда $AC = \sqrt{5}$, $CD = CB = 1$, $AE = AD = \sqrt{5} - 1$. Следовательно,

$$\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi.$$

Задача 12. В полукруг с диаметром AB вписан квадрат $CDEF$ (рис. 5.9). Докажите, что отрезок AC и сторона квадрата CD образуют золотое сечение.

Решение. Пусть сторона квадрата $CDEF$, вписанного в полукруг с диаметром AB, равна 1 (рис. 15).

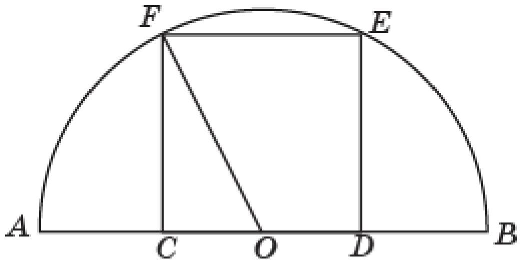

Рис. 15

Обозначим O середину диаметра AB. Тогда $CO = \frac{1}{2}$, $OA = OF = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $AC = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$. Следовательно, $\frac{AC}{CD} = \varphi$.

Задача 13. Используя рисунок 5.8, укажите способ деления данного отрезка в золотом отношении с помощью циркуля и линейки.

Решение. Пусть дан отрезок AB (рис. 14). Через точку B проведём прямую, перпендикулярную прямой AB, и отложим на ней отрезок BC, равный половине отрезка AB. Проведём отрезок AC. С центром в точке C и радиусом CB проведём окружность. Обозначим D точку её пересечения с отрезком AC. С центром в точке A и радиусом AD проведём окружность. Обозначим E точку её пересечения с отрезком AB. Эта точка и будет искомой точкой, делящей отрезок AB в золотом отношении.

Задача 14. С помощью циркуля и линейки постройте тупоугольный равнобедренный золотой треугольник с данным основанием.

Решение. Для данного отрезка AB построим отрезок AC, для которого $\frac{AC}{AB} = \varphi$ (Задача 13). После этого строим равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и боковой стороной AC.

Задача 15. С помощью циркуля и линейки постройте остроугольный равнобедренный золотой треугольник с данным основанием.

Решение. Сначала для данного отрезка AB построим отрезок AE, для которого $\frac{AB}{AE} = \varphi$. Для этого построим прямоугольный треугольник ABC, для которого $\angle B = 90°$, $BC = \frac{1}{2}AB$ (рис. 16). С центром в точке C и радиусом CB проведём окружность. Обозначим D точку её пересечения с продолжением отрезка AC. С центром в точке A и радиусом AD проведём окружность. Обозначим E точку её пересечения с продолжением отрезка AB.

Отрезок *AE* и будет искомым. После этого строим равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AB* и боковой стороной *AE*.

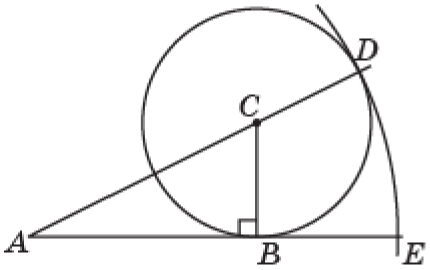

Рис. 16

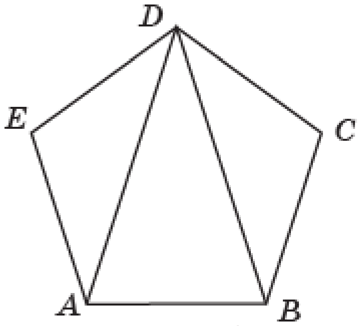

Рис. 17

Задача 16. С помощью циркуля и линейки постройте правильный пятиугольник с данной стороной.

Решение. Сначала строим остроугольный равнобедренный золотой треугольник *ABD* с данным основанием *AB*. Затем на его боковых сторонах *AD* и *BD*, как на основаниях, строим тупоугольные равнобедренные золотые треугольники *BDC* и *ADE*. В результате получаем правильный пятиугольник *ABCDE* (рис. 17).

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Стороны одного треугольника равны 4 см, 5 см и 8 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного первому, равна 8 см. Найдите другие стороны второго треугольника.

2. В треугольнике *ABC* точка *D* принадлежит стороне *AB*, *AB* = 5, *AC* = 4, *CD* = 3, угол *BAC* равен углу *BCD*. Найдите *BC*.

3. Хорды *AB* и *CD* окружности пересекаются в точке *E*, *AE* = 3, *BE* = 4, *CE* = 2. Найдите *DE*.

4. Через точку *A*, расположенную вне окружности, проведена прямая, пересекающая окружность в точках *B* и *C*. Найдите отрезок *AD* касательной, проведённой к этой окружности, если *AB* = 4, *AC* = 9.

5*. В правильном пятиугольнике *ABCDE* со стороной 1 проведены все диагонали. Найдите сторону правильного пятиугольника *A'B'C'D'E'* (рис. 18), ограниченного этими диагоналями.

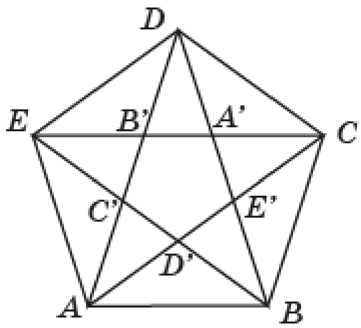

Рис. 18

Вариант 2

1. Стороны треугольника 9 м, 8 м и 6 м. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его большая сторона равна меньшей стороне данного треугольника.

2. В треугольнике *ABC* точка *D* принадлежит стороне *BC*, *BC* = 5, *AC* = 6, *AB* = 4, угол *ACB* равен углу *BAD*. Найдите *AD*.

3. Хорды *AB* и *CD* окружности пересекаются в точке *F*, *AF* = 4, *BF* = 6, *DF* = 8. Найдите *CF*.

4. Через точку *E*, расположенную вне окружности, проведена прямая, пересекающая окружность в точках *G* и *H*. Найдите отрезок *EF* касательной, проведённой к этой окружности, если *EG* = 2, *EH* = 8.

5*. От золотого прямоугольника *ABCD* отрезаны квадраты *AEFD* и *GHCF* (рис. 19). Найдите сторону *BH*, если сторона *AB* равна 1.

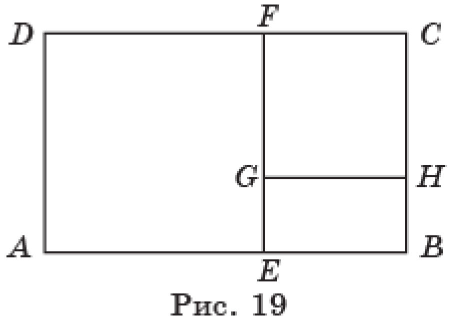

Рис. 19

ГЛАВА II. ТРИГОНОМЕТРИЯ

6. Тригонометрические функции острого угла

Цель обучения – определить тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника; привести примеры вычисления тригонометрических функций; научить находить значения тригонометрических функций.

Рекомендации по решению задач

Задача 13. Используя «золотые треугольники», найдите: а) sin 18º; б) cos 36º.

Решение. а) Рассмотрим золотой треугольник ABC, у которого $AC = BC = 1$, $\angle C = 36°$ (рис. 20, а).

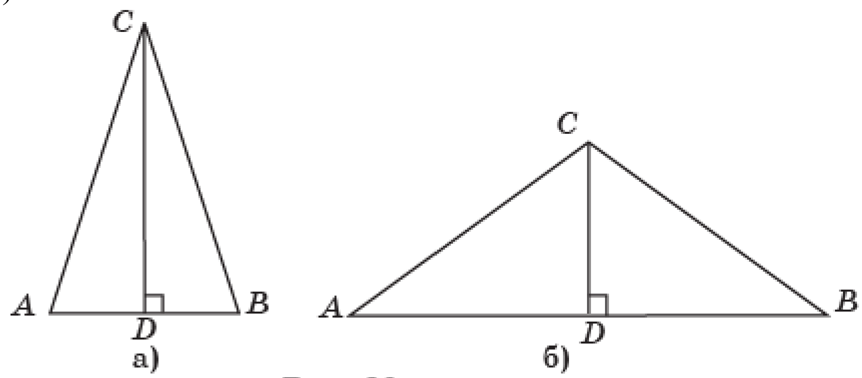

Рис. 20

Проведём высоту CD. В прямоугольном треугольнике ACD имеем: $\angle ACD = 18°$, $AC = 1$, $AD = \frac{\varphi}{2}$. Значит, $\sin 18° = \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

б) Рассмотрим золотой треугольник ABC, у которого $AB = 1$, $\angle C = 108°$ (рис. 20, б). Проведём высоту CD. В прямоугольном треугольнике ACD имеем: $\angle CAD = 36°$, $AC = \varphi$, $AD = \frac{1}{2}$. Значит, $\cos 36° = \frac{1}{2\varphi} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Задача 14. Используя «золотые треугольники», найдите: а) cos 72º; б) sin 54º.

Решение. а) Рассмотрим золотой треугольник ABC, у которого $AC = BC = 1$, $\angle C = 36°$ (рис. 20, а). Проведём высоту CD. В прямоугольном треугольнике ACD имеем: $\angle CAD = 72°$, $AC = 1$, $AD = \frac{\varphi}{2}$. Значит, $\cos 72° = \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

б) Рассмотрим золотой треугольник ABC, у которого $AB = 1$, $\angle C = 108°$ (рис. 20, б). Проведём высоту CD. В прямоугольном треугольнике ACD имеем: $\angle ACD = 54°$, $AC = \varphi$, $AD = \frac{1}{2}$. Значит, $\sin 54° = \frac{1}{2\varphi} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

7. Нахождение сторон прямоугольного треугольника

Цель обучения – научить находить стороны прямоугольных треугольников, используя тригонометрические функции.

Рекомендации по решению задач

Задача 20. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 120º. Найдите высоту AH.

Решение. В прямоугольном треугольнике ACH имеем: $AC = 2$, $\angle ACH = 60°$ (рис. 21). Следовательно, $AH = \sqrt{3}$.

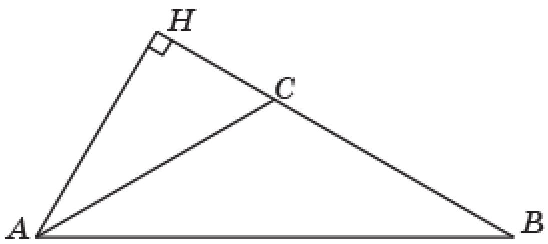

Рис. 21

Задача 21. В треугольнике ABC $AC = BC =2$, угол C равен 135º. Найдите высоту AH.

Решение аналогично решению задачи 20. В прямоугольном треугольнике ACH имеем: $AC = 2$, $\angle ACH = 45°$. Следовательно, $AH = \sqrt{2}$.

Задача 22. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 150º. Найдите высоту AH.

Решение аналогично решению задачи 20. В прямоугольном треугольнике ACH имеем: $AC = 2$, $\angle ACH = 30°$. Следовательно, $AH = 1$.

Задача 23. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 126º. Найдите высоту AH.

Решение аналогично решению задачи 20. В прямоугольном треугольнике ACH имеем: $AC = 2$, $\angle ACH = 54°$. Следовательно, $AH = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Задача 24. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 162º. Найдите высоту AH.

Решение аналогично решению задачи 20. В прямоугольном треугольнике ACH имеем: $AC = 2$, $\angle ACH = 18°$. Следовательно, $AH = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. Может ли тангенс острого угла равняться синусу этого угла?
2. Для треугольника *ABC*, изображённого на рисунке 22, найдите косинус угла *A*.

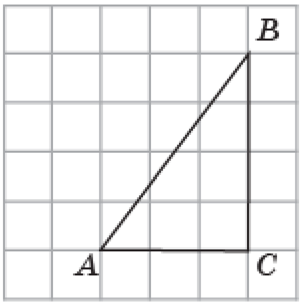

Рис. 22

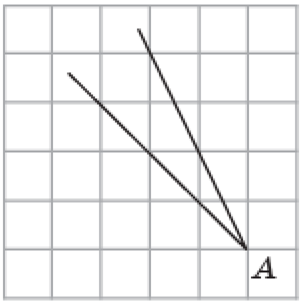

Рис. 23

3. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90º, $\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 4$. Найдите *AB*.
4*. Найдите тангенс угла *A*, изображённого на рисунке 23.

Вариант 2

1. Может ли котангенс острого угла равняться косинусу этого угла?
2. Для треугольника *ABC*, изображённого на рисунке 24, найдите синус угла *A*.

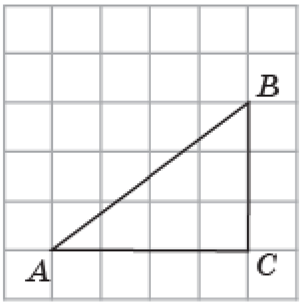

Рис. 24

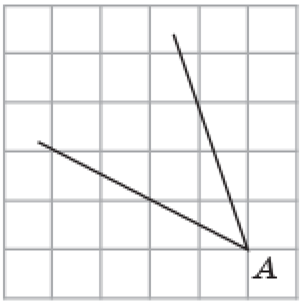

Рис. 25

3. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90º, $\cos A = \frac{4}{5}$, $BC = 3$. Найдите *AB*.
4*. Найдите котангенс угла *A*, изображённого на рисунке 25.

8. Тригонометрические тождества

Цель обучения – доказать тождества, связывающие различные тригонометрические функции; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. Докажите тождество $1 + \mathrm{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.

Решение. Разделим обе части основного тригонометрического тождества $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ на $\sin^2 A$ и воспользуемся равенством $\mathrm{ctg}\, A = \frac{\cos A}{\sin A}$. Получим равенство,

$$1 + \mathrm{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

Задача 14. Докажите, тождество $\mathrm{tg}\, A \cdot \mathrm{ctg}\, A = 1$.

Решение. Воспользуемся равенствами $\mathrm{tg}\, A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\mathrm{ctg}\, A = \frac{\cos A}{\sin A}$. Перемножая эти равенства, получим требуемое равенство.

9. Тригонометрические функции прямого и тупого углов

Цель обучения – распространить определения тригонометрических функций на прямые и тупые углы; рассмотреть их свойства; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 17. Докажите, что для тупых углов A имеют место равенства:

$$\mathrm{tg}\, A = -\mathrm{tg}(180^\circ - A)\ ;\ \mathrm{ctg}\, A = -\mathrm{ctg}(180^\circ - A).$$

Решение. Воспользуемся равенствами

$$\sin A = \sin(180^\circ - A),\ \cos A = -\cos(180^\circ - A).$$

Учитывая, что синус и косинус тупого угла A отличен от нуля, разделим почленно одно из этих равенств на другое, получим требуемые равенства.

Задача 18. Докажите, что для острых углов A имеют место равенства:

$$\sin(90^\circ + A) = \cos A,\ \cos(90^\circ + A) = -\sin A.$$

Решение. Так как $90^\circ + A$ является тупым углом, то

$$\sin(90^\circ + A) = \sin(180^\circ - (90^\circ + A)) = \sin(90^\circ - A) = \cos A.$$

Аналогично,

$$\cos(90^\circ + A) = -\cos(180^\circ - (90^\circ + A)) = -\cos(90^\circ - A) = -\sin A.$$

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. Найдите sin *A*, если cos *A*= $\frac{3}{5}$.
2. Найдите ctg *A*, если sin *A* = $\frac{4}{5}$.
3. Какой из углов больше *A* или *B*, если tg *A* = 3, tg *B* = 4.

4*. Упростите выражение $\frac{1}{\mathrm{ctg}^2 A+1}$.

Вариант 2

1. Найдите cos *A*, если sin *A*= $\frac{4}{5}$.
2. Найдите tg *A*, если cos *A* = $\frac{3}{5}$.
3. Какой из углов больше *A* или *B*, если ctg *A* = 2, ctg *B* = 3.

4*. Упростите выражение $\frac{1}{\mathrm{tg}^2 A+1}$.

10. Скалярное произведение векторов

Цель обучения – определить понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. Докажите, что каковы бы ни были число t и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы следующие равенства: $t(\vec{a}\ \cdot \vec{b}) = (t\vec{a}) \cdot \vec{b}$; $\vec{a}\ \cdot \vec{b} = \vec{b}\ \cdot \vec{a}$.

Решение. Докажем равенство $\vec{a}\ \cdot \vec{b} = \vec{b}\ \cdot \vec{a}$. Так как скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними, а произведение чисел не зависит от их порядка, то имеет место равенство $\vec{a}\ \cdot \vec{b} = \vec{b}\ \cdot \vec{a}$.

Докажем равенство $t(\vec{a}\ \cdot \vec{b}) = (t\vec{a}) \cdot \vec{b}$. Если $t = 0$, то равенство очевидно. Если $t > 0$, то угол между векторами $t\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен углу φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, $t(\vec{a}\ \cdot \vec{b}) = t(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi) = |t\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = (t\vec{a}) \cdot \vec{b}$. Если $t < 0$, то угол между векторами $t\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен углу $180° - \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Учитывая, что $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, получаем $t(\vec{a}\ \cdot \vec{b}) = t(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi) = -|t\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |t\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180° - \varphi) = (t\vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Задача 9. Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а их длины равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

Решение. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от точки O. Получим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 26).

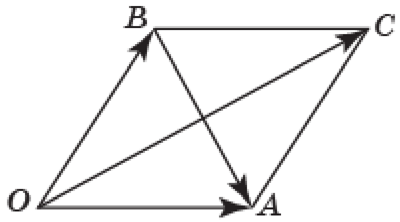

Рис. 26

Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ равен вектору $\overrightarrow{OC}$, образованному диагональю OC параллелограмма $OACB$. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$ равен вектору $\overrightarrow{BA}$, образованному диагональю BA этого параллелограмма. Так как длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то данный параллелограмм является ромбом. Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, то и векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

11. Теорема косинусов

Цель обучения – сформулировать и доказать теорему косинусов; научить применять её при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 15. В треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 11.4). Докажите, что для медианы m_c, проведённой из вершины C, имеет место формула

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Решение. Применим теорему косинусов к треугольникам ACD и BCD (рис. 27). Получим

$$b^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2m_c\frac{c}{2}\cos\angle ADC,$$

$$a^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2m_c\frac{c}{2}\cos\angle BDC.$$

Сложим эти равенства и учтём, что $\cos\angle ADC = -\cos\angle BDC$. Получим

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}.$$

Откуда следует требуемая формула.

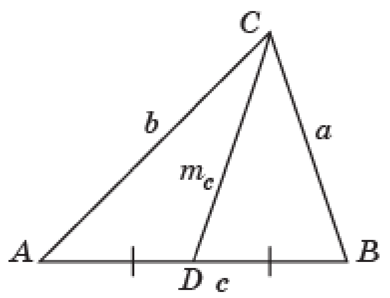

Рис. 27

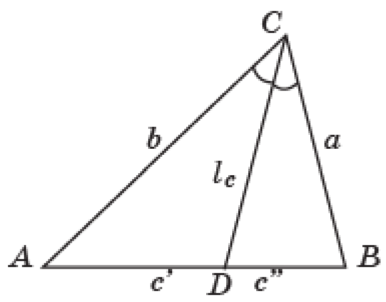

Рис. 28

Задача 17. В треугольнике *ABC* $AC = b$, $BC = a$. Докажите, что для биссектрисы l_c, проведённой из вершины *C*, имеет место формула

$$l_c = \sqrt{ab - c'c''},$$

где *c'*, *c''* – отрезки, на которые биссектриса делит сторону *AB* (рис. 11.5).

Решение. Применим теорему косинусов к треугольникам *ACD* и *BCD* (рис. 28). Получим

$$c'^2 = b^2 + l_c^2 - 2bl_c\cos\angle ACD,$$
$$c''^2 = a^2 + l_c^2 - 2al_c\cos\angle BCD.$$

Выражая из этих равенств $\cos\angle ACD, \cos\angle BCD$ и учитывая, что они равны, получим требуемую формулу.

12. Теорема синусов

Цель обучения – сформулировать и доказать теорему синусов; научить применять её при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. В треугольнике *ABC* проведена медиана *CD*. Докажите, что *AC* : *BC* = sin ∠*DCB* : sin ∠*DCA*.

Решение. Применим теорему синусов к треугольникам *ACD* и *BCD*. Получим

$$\frac{AD}{\sin\angle DCA} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}, \; \frac{BD}{\sin\angle DCB} = \frac{BC}{\sin\angle BDC}.$$

Учитывая, что *AD* = *BD* и $\sin\angle ADC = \sin\angle BDC$, получаем равенство

$$AC\cdot\sin\angle DCA = BC\cdot\sin\angle DCB,$$

из которого непосредственно следует требуемое равенство.

Задача 10. Диагональ параллелограмма равна *c* и образует со сторонами этого параллелограмма углы φ и ψ. Выразите стороны параллелограмма через *c*, φ и ψ.

Решение. Пусть *ABCD* – параллелограмм, *AC* = *c*, $\angle BAC = \varphi$, $\angle DAC = \psi$ (рис. 29).

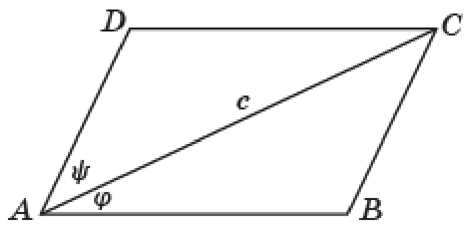

Рис. 29

Применим теорему синусов к треугольнику ABC и учтём, что $\angle ACB = \psi$, $\angle ABC = 180° - (\varphi + \psi)$. Получим

$$\frac{AB}{\sin\psi} = \frac{AC}{\sin(\varphi + \psi)}, \frac{BC}{\sin\varphi} = \frac{AC}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Следовательно,

$$BC = \frac{c \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, AB = \frac{c \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $AB = 6$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2. В треугольнике ABC $AC = 2$, $BC = 1$, угол C равен 30°. Найдите AB.

3. Стороны параллелограмма равны 3 и 4. Один из его углов равен 45°. Найдите диагонали этого параллелограмма.

4*. В треугольнике ABC $AB = 6$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 105^\circ$. Найдите радиус описанной окружности.

Вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 4$, $BC = 3$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2. В треугольнике ABC $AC = 1$, $BC = 2$, угол C равен 45°. Найдите AB.

3. Стороны параллелограмма равны 6 и 8. Один из его углов равен 30°. Найдите диагонали этого параллелограмма.

4*. В треугольнике ABC $AC = 4$, $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. Найдите радиус описанной окружности.

13. Практические задачи на нахождение расстояний и углов

Цель обучения – научить решать практические задачи на нахождение расстояний и углов.

Рекомендации по решению задач

Задача 10. Из некоторой точки вершина горы видна под углом 30°. При приближении к горе на 800 м вершина стала видна под углом 45°. Найдите приближённую высоту горы (рис. 13.10). В ответе укажите целое число метров.

Решение. Применим теорему синусов к треугольнику *ABC* (рис. 30).

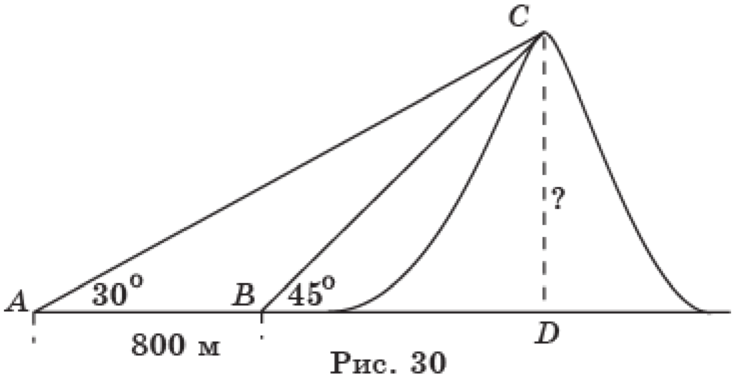

Рис. 30

Имеем:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Следовательно, $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C}$. Используя таблицу тригонометрических функций, найдём $\sin B = \sin 45° \approx 0{,}71$, $\sin C = \sin 15° \approx 0{,}26$. Значит, *AC* ≈ 2184 м. В прямоугольном треугольнике *ACD* катет *CD* лежит против угла в 30°. Следовательно, *CD* = 1092 м.

Задача 11. Используя данные, указанные на рисунке 13.11, найдите расстояние от корабля *K* до берега *AB*. В ответе укажите целое число метров.

Решение. Применим теорему синусов к треугольнику *ABK* (рис. 31).

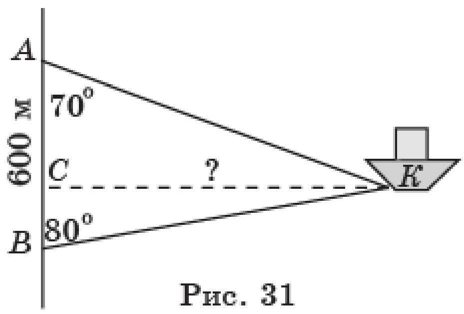

Рис. 31

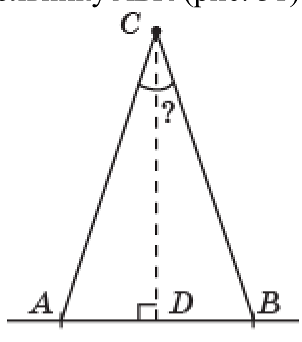

Рис. 32

Имеем:

$$\frac{AB}{\sin K} = \frac{AK}{\sin B}.$$

Следовательно, $AK = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin K}$. Используя таблицу тригонометрических функций, найдём $\sin B = \sin 80° \approx 0{,}98$, $\sin K = \sin 30° = 0{,}5$. Значит, *AK* ≈ 1176 м. В прямоугольном треугольнике *AKC* имеем *KC* = *AK*· $\sin 70° \approx$ 1105 м.

Задача 12. Ширина *AB* футбольных ворот равна 8 ярдам. Расстояние от 11-метровой отметки *C* до линии ворот равно 12 ярдам (рис. 13.12). Найдите угол *ACB*, под которым видны ворота с 11-метровой отметки. В ответе укажите целое число градусов.

Решение. В прямоугольном треугольнике *ACD* (рис. 32) *AD* = 4, *CD* = 12. Используя таблицу тригонометрических функций, найдём $\angle ACD \approx 18{,}5°$. Следовательно, $\angle ACD \approx 37°$.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Найдите косинус угла A, изображённого на рисунке 33.

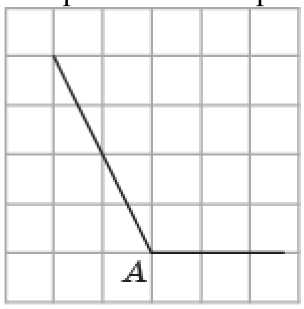

Рис. 33

2. Найдите $\sin A$, если $\operatorname{ctg} A = 3$;

3. Диагонали параллелограмма равны 6 и 8. Угол между ними равен 30°. Найдите стороны этого параллелограмма.

4. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$.

5*. Стороны параллелограмма равны 4 и 6, одна диагональ 4. Найдите другую диагональ.

Вариант 2

1. Найдите синус угла A, изображённого на рисунке 34.

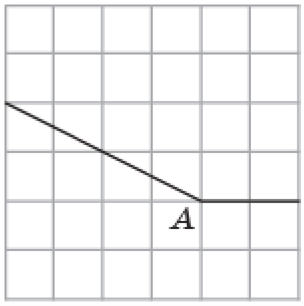

Рис. 34

2. Найдите $\cos A$, если $\operatorname{tg} A = 3$;

3. Диагонали параллелограмма равны 4 и 6. Угол между ними равен 45°. Найдите стороны этого параллелограмма.

4. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AF}$.

5*. Диагонали параллелограмма равны 10 и 12, одна сторона равна 8. Найдите смежную с ней сторону.

ГЛАВА III. КРИВЫЕ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

14. Длина окружности

Цель обучения – Определить понятия длины окружности и длины дуги окружности; познакомить с историческим материалом о длине окружности; научить решать задачи, связанные с длиной окружности.

Более подробно с историческим материалом о длине окружности можно познакомиться в книге:

Г.И. Глейзер. История математики в школе: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982.

15*. Кривые постоянной ширины

Цель обучения – познакомить учащихся с понятием ширины замкнутой кривой; рассмотреть примеры кривых постоянной ширины; научить решать задачи, связанные с длиной дуги окружности.

Более подробно с кривыми постоянной ширины можно познакомиться на сайте www.etudes.ru

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Найдите углы треугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах (рис. 15.6).

Решение. Искомый угол *DBE* равен сумме углов *DBA*, *ABC* и *CBE* (рис. 35). Угол *ABC* равен 60°. Углы *DBA* и *CBE* измеряются половинами дуг соответственно $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$, центральные углы которых равны 60°. Следовательно, сами углы *DBA* и *CBE* равны 30°. Значит, угол *DBE* равен 120°.

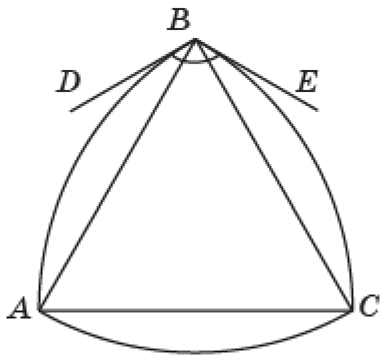

Рис. 35

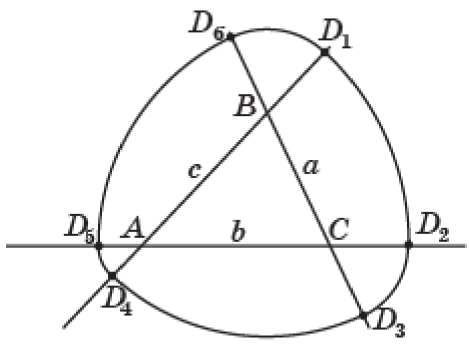

Рис. 36

Задача 2. Докажите, что полученная кривая, изображённая на рисунке 15.3, имеет постоянную ширину. Найдите её выражение через *a*, *b*, *c* и *r*.

Решение. Имеем: $AD_1 = AD_2 = r$, $CD_2 = CD_3 = r - b$, $BD_3 = BD_4 = a + r - b$, $AD_4 = AD_5 = a + r - b - c$, $CD_5 = CD_6 = a + r - c$, $BD_6 = BD_1 = r - c$ (рис. 36). Из этих равенств следует, что ширина h кривой по всем направлениям равна $2r + a - b - c$.

Задача 3. Докажите, что длина кривой, изображённой на рисунке 15.3, равна длине окружности с диаметром, равным ширине h кривой.

Решение. Имеем: $\widetilde{D_1D_2} = \angle A \cdot r$, $\widetilde{D_4D_5} = \angle A \cdot (a + r - b - c)$ (рис. 36). Следовательно, $\widetilde{D_1D_2} + \widetilde{D_4D_5} = \angle A \cdot h$, где h – ширина кривой. Аналогично доказывается, что $\widetilde{D_2D_3} + \widetilde{D_5D_6} = \angle C \cdot h$, $\widetilde{D_3D_4} + \widetilde{D_6D_1} = \angle B \cdot h$. Складывая эти равенства, получим, что длина кривой равна $(\angle A + \angle B + \angle C) \cdot h = \pi \cdot h$, т. е. равна длине окружности с диаметром, равным ширине h кривой.

Задача 4. Сторона правильного пятиугольника равна 1. Найдите ширину соответствующего пятиугольника Рело (рис. 15.4, а).

Решение. Ширина данного пятиугольника Рело равна диагонали этого пятиугольника, т. е. равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 5. Найдите углы пятиугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах (рис. 15.7).

Решение. Искомый угол *DBE* равен сумме углов *DBA*, *ABC* и *CBE* (рис. 37). Угол *ABC* равен 108º. Углы *DBA* и *CBE* измеряются половинами дуг соответственно $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$, центральные углы которых равны 36º. Следовательно, сами углы *DBA* и *CBE* равны 18º. Значит, угол *DBE* равен 144º.

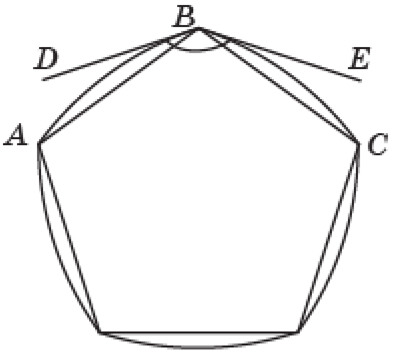

Рис. 37

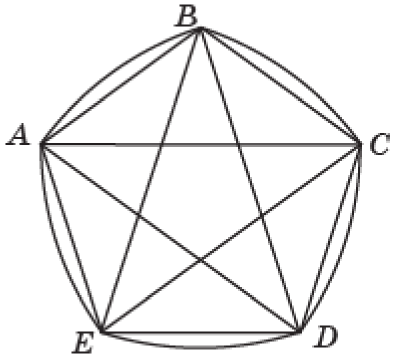

Рис. 38

Задача 6. Докажите, что периметр пятиугольника Рело (рис. 15.7) равен длине окружности, диаметр которой равен диагонали соответствующего правильного пятиугольника.

Решение. Обозначим *d* диагональ правильного пятиугольника (рис. 38). Дуги, стягиваемые сторонами этого пятиугольника, равны $\frac{\pi}{10} \cdot d$. Их сумма равна $\pi \cdot d$, т. е. равна длине окружности, диаметр которой равен d.

Задача 7. Для прямых, изображённых на рисунке 15.8, постройте треугольник Рело.

Решение. С центром в точке *A* и радиусом AE_1 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_1E_2}$. С центром в точке *C* и радиусом CE_2 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_2E_3}$. С центром в точке *B* и радиусом BE_3 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_3E_4}$. С центром в точке *A* и радиусом AE_4 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_4E_5}$. С центром в точке *C* и радиусом CE_5 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_5E_6}$. С центром в точке *B* и радиусом BE_6 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_6E_1}$.Искомый треугольник Рело показан на рисунке 39.

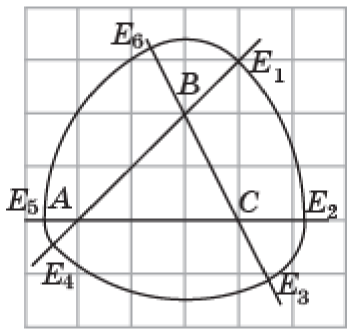

Рис. 39

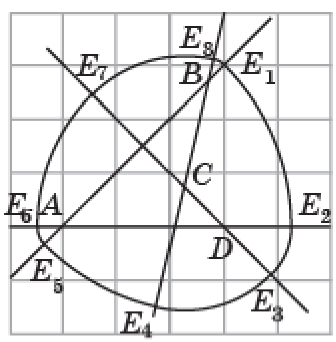

Рис. 40

Задача 8. Для прямых, изображённых на рисунке 15.9, продолжите построение кривой постоянной ширины.

Решение. С центром в точке *D* и радиусом DE_2 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_2E_3}$. С центром в точке *C* и радиусом CE_3 проводим дугу окружности $\overset{\frown}{E_3E_4}$. С центром в точке *B* и радиусом BE_4 проводим дугу окружности $\widetilde{E_4E_5}$. С центром в точке A и радиусом AE_5 проводим дугу окружности $\widetilde{E_5E_6}$. С центром в точке D и радиусом DE_6 проводим дугу окружности $\widetilde{E_6E_7}$. С центром в точке C и радиусом CE_7 проводим дугу окружности $\widetilde{E_7E_8}$. С центром в точке B и радиусом BE_8 проводим дугу окружности $\widetilde{E_8E_1}$. Искомая кривая показана на рисунке 40.

16*. Циклоида

Цель обучения – познакомить учащихся с понятием траектории движения точки; рассмотреть примеры; научить распознавать и изображать такие кривые.

Более подробно с кривыми постоянной ширины можно познакомиться по книге:
Берман Г.Н. Циклоида. – М.: Наука, 1980, а также
на сайте www.etudes.ru

Рекомендации по решению задач

Задача 4. Нарисуйте кривую, которую будет описывать точка A', закреплённая на радиусе окружности, катящейся по прямой (рис. 16.3). Эта кривая называется ***укороченной циклоидой***.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 41.

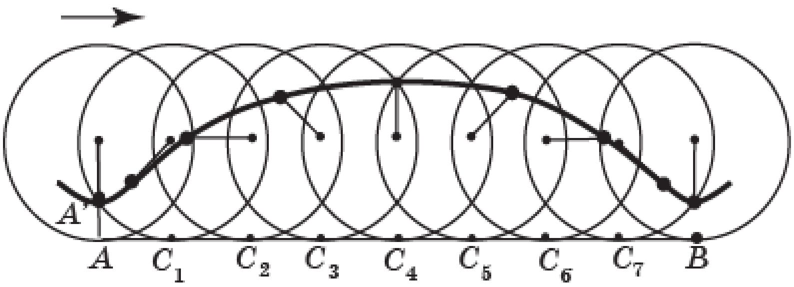

Рис. 41

Задача 5. Нарисуйте кривую, которую будет описывать точка A'', закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой (рис. 16.4). Эта кривая называется ***удлинённой циклоидой***.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 42.

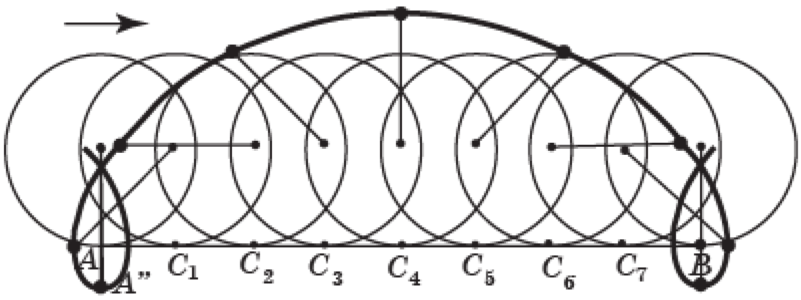

Рис. 42

Задача 6. Нарисуйте траекторию движения вершины равнобедренного треугольника, катящегося по прямой (рис. 16.5). Имеет ли полученная кривая: а) оси симметрии; б) центр симметрии? Найдите длину части этой кривой, полученной в результате поворота треугольника на 360^o (сторона треугольника равна 1).

Решение. Часть искомой кривой изображена на рисунке 43.

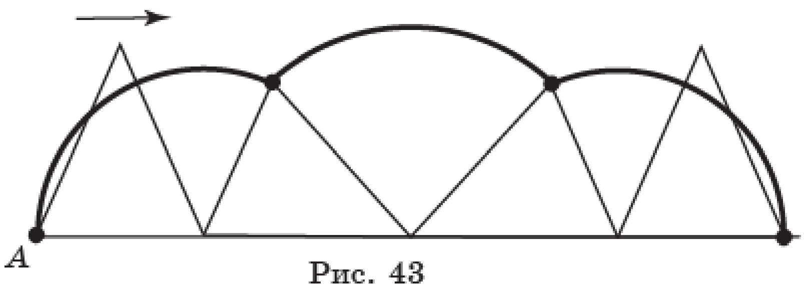

Рис. 43

Задача 7. Нарисуйте траекторию движения вершины квадрата, катящегося по прямой (рис. 16.6). Имеет ли полученная кривая: а) оси симметрии; б) центр симметрии? Найдите длину части этой кривой, полученной в результате поворота квадрата на 360° (сторона квадрата равна 1).

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 44.

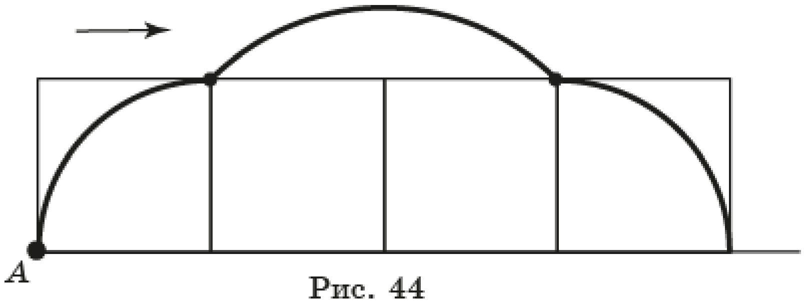

Рис. 44

Задача 8. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного шестиугольника, катящегося по прямой (рис. 16.7). Имеет ли полученная кривая: а) оси симметрии; б) центр симметрии? Найдите длину части этой кривой, полученной в результате поворота правильного шестиугольника на 360° (сторона шестиугольника равна 1).

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 45.

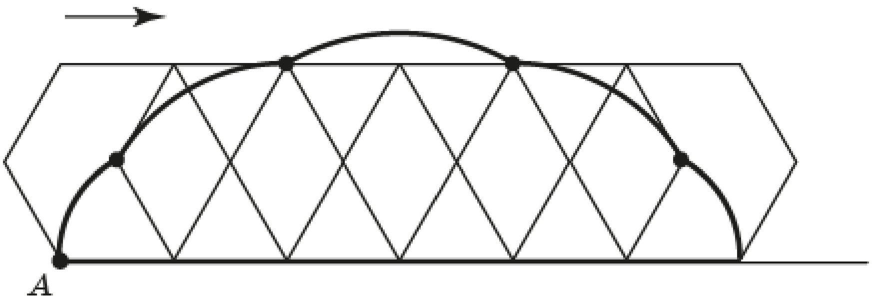

Рис. 45

17*. Эпициклоиды и гипоциклоиды

Цель обучения – продолжить знакомство учащихся с траекториями движения точки; рассмотреть примеры; научить распознавать и изображать такие кривые.

Более подробно с кривыми постоянной ширины можно познакомиться на сайте www.etudes.ru

Рекомендации по решению задач

Задача 3. Нарисуйте кривую, которую будет описывать точка *A′*, закреплённая на радиусе окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса (рис. 17.4). Эта кривая называется ***укороченной кардиоидой***.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 46.

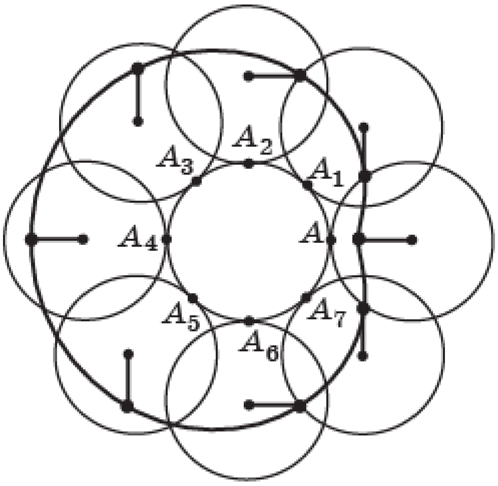

Рис. 46

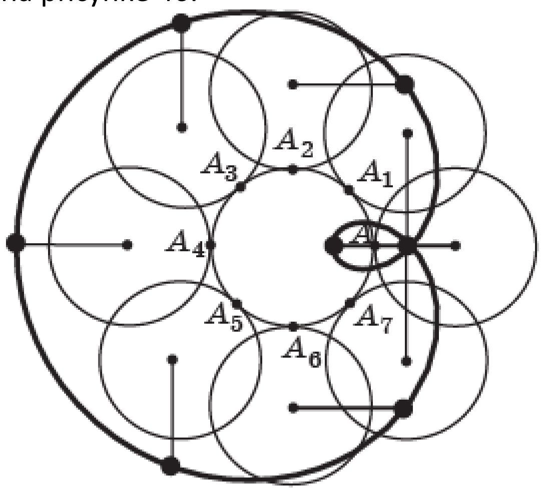

Рис. 47

Задача 4. Нарисуйте кривую, которую будет описывать точка *A”*, закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса (рис. 17.5). Эта кривая называется ***удлинённой кардиоидой***.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 47.

Задача 5. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закреплённой на окружности радиуса 1 см, катящейся с внешней стороны по окружности радиуса: а) 2 см; б) 3 см; в) 5 см.

Решение. а) Искомая кривая изображена на рисунке 48.

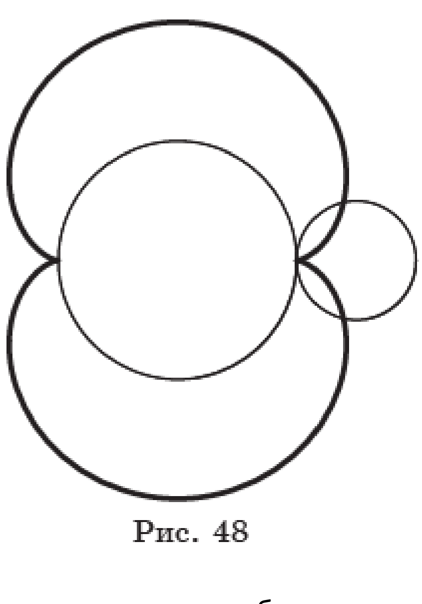

Рис. 48

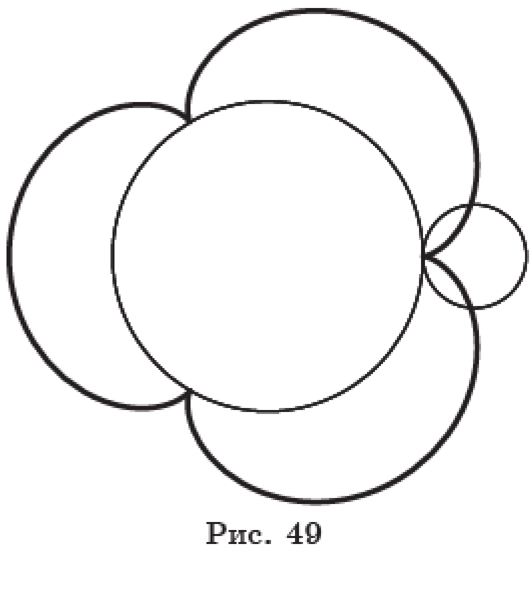

Рис. 49

б) Искомая кривая изображена на рисунке 49.

в) Искомая кривая изображена на рисунке 50.

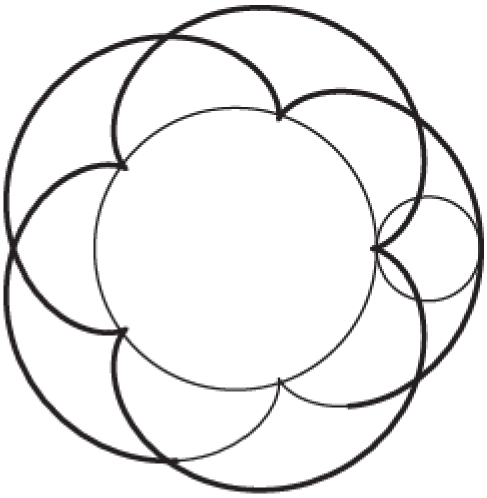

Рис. 50

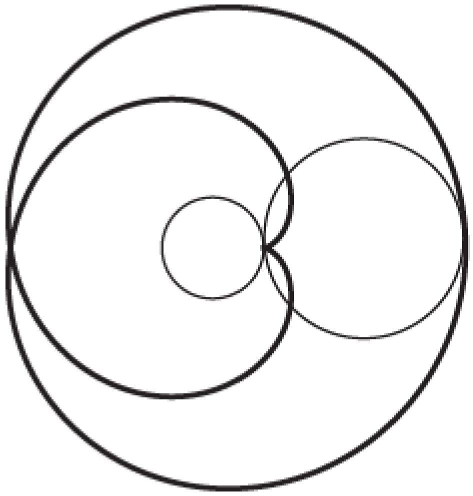

Рис. 51

Задача 6. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закреплённой на окружности радиуса 2 см, катящейся с внешней стороны по окружности радиуса: а) 1 см; б) 3 см; в) 5 см.

Решение. а) Искомая кривая изображена на рисунке 51.

б) Искомая кривая изображена на рисунке 52.

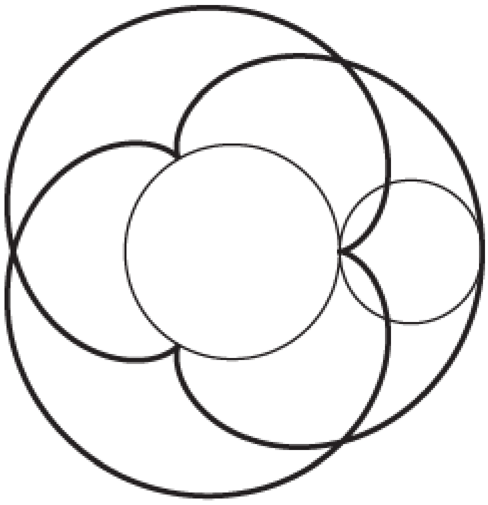

Рис. 52

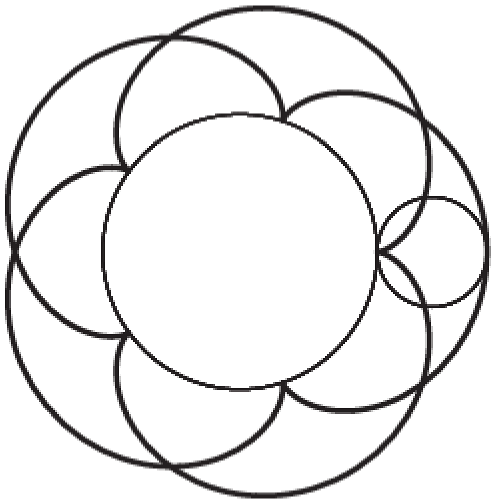

Рис. 53

в) Искомая кривая изображена на рисунке 53.

Задача 7. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закреплённой на окружности радиуса 1 см, катящейся с внутренней стороны по окружности радиуса: а) 2 см; б) 3 см; в) 5 см.

Решение. а) Искомая кривая изображена на рисунке 54.

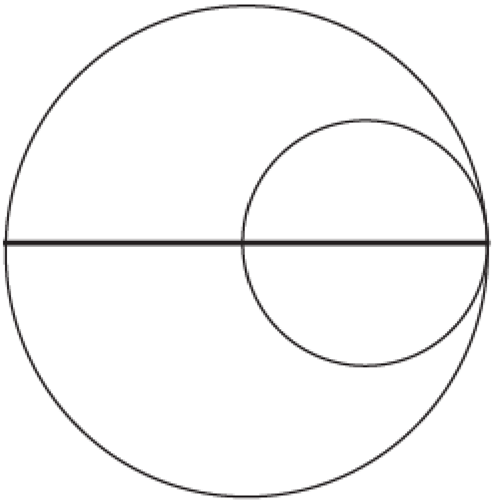

Рис. 54

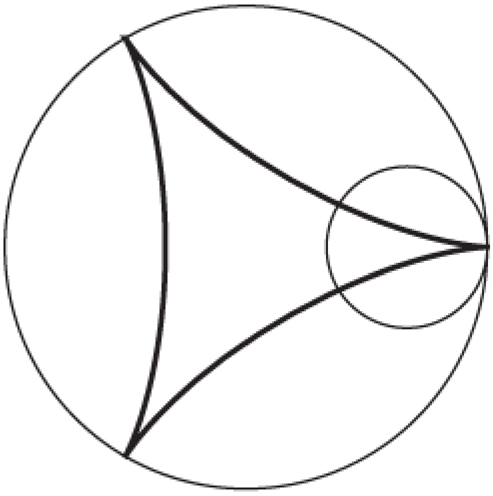

Рис. 55

б) Искомая кривая изображена на рисунке 55.

в) Искомая кривая изображена на рисунке 56.

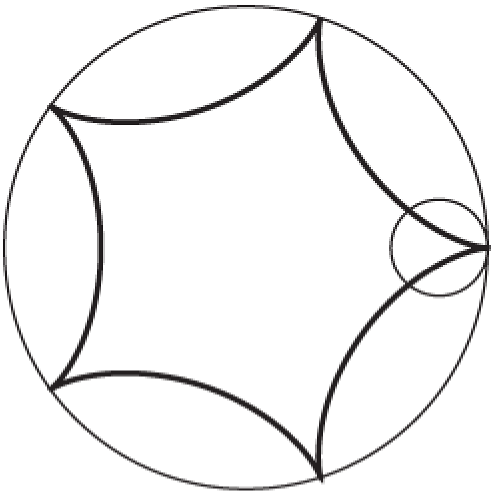

Рис. 56

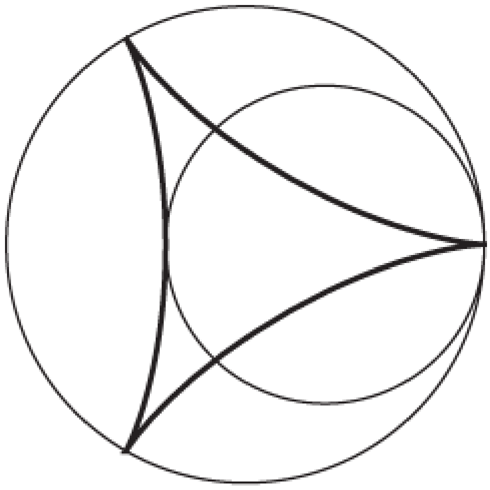

Рис. 57

Задача 8. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закреплённой на окружности радиуса 2 см, катящейся с внутренней стороны по окружности радиуса: а) 3 см; б) 5 см.

Решение. а) Искомая кривая изображена на рисунке 57.

б) Искомая кривая изображена на рисунке 58.

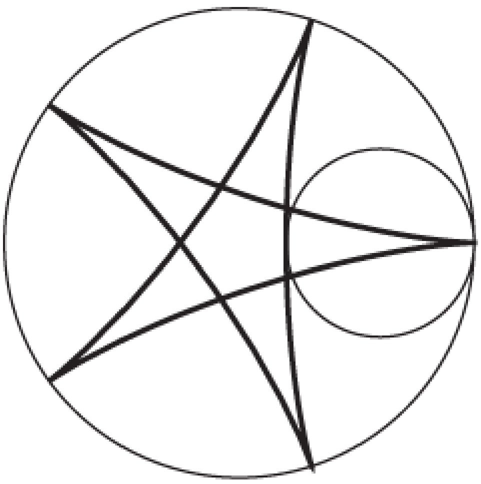

Рис. 58

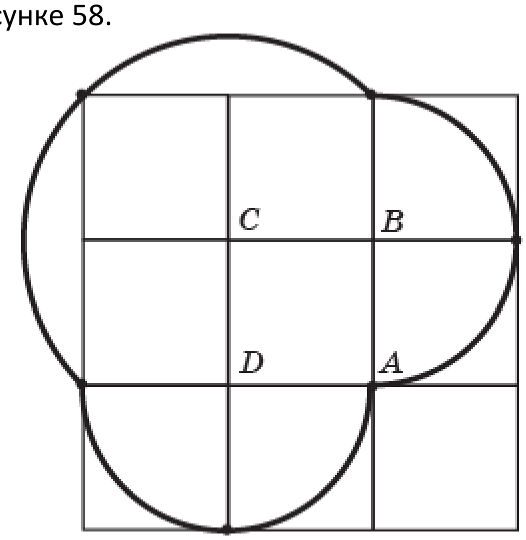

Рис. 59

Задача 9. Нарисуйте траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату (рис. 17.6). Имеет ли полученная кривая: а) оси симметрии; б) центр симметрии? Найдите длину этой кривой, если сторона квадрата равна 1.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 59.

Задача 10. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного шестиугольника, катящегося по другому правильному шестиугольнику (рис. 17.7). Имеет ли полученная кривая: а) оси симметрии; б) центр симметрии? Найдите длину этой кривой, если сторона шестиугольника равна 1.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 60.

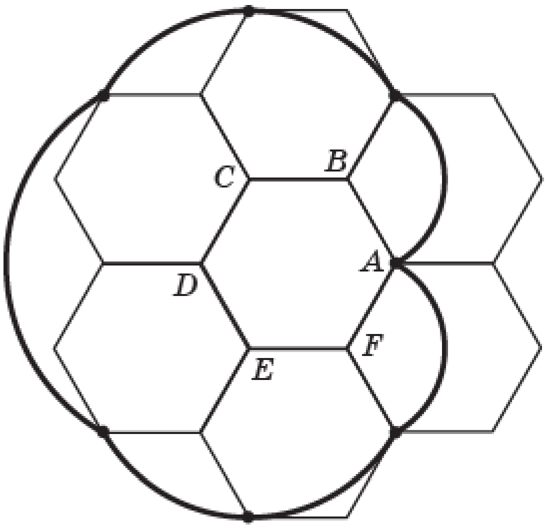

Рис. 60

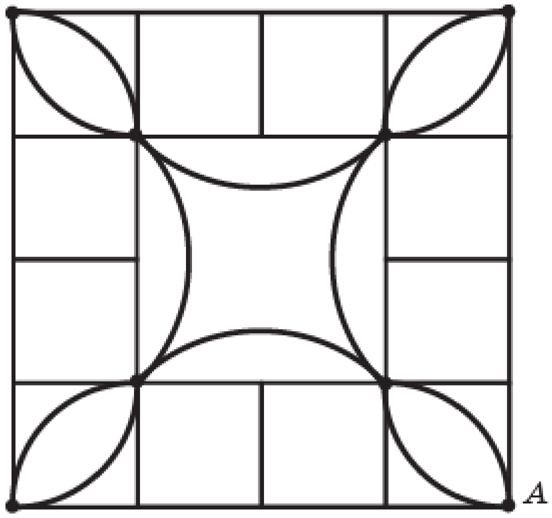

Рис. 61

Задача 11. Нарисуйте траекторию движения вершины квадрата со стороной 1, катящегося с внутренней стороны по другому квадрату со стороной 4 (рис. 17.8). Имеет ли полученная кривая: а) оси симметрии; б) центр симметрии? Найдите длину этой кривой, если сторона квадрата равна 1.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 61.

ГЛАВА IV. ПЛОЩАДЬ

18. Площадь треугольника

Цель обучения – продолжить изучение понятия площади; сформулировать и доказать дополнительные теоремы о площади треугольника; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 6. Докажите, что если два треугольника имеют по две равные стороны, а углы, заключённые между ними, в сумме составляют 180°, то эти треугольники равновелики.

Решение. Воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Так как $\sin(180° - \angle C) = \sin C$, то площади указанных треугольников равны.

Задача 7. Докажите, что если два треугольника имеют по равному углу, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

Решение. Воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Если в треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ угол C_1 равен углу C_2, то $\sin C_1 = \sin C_2$. Следовательно, их площади S_1 и S_2 относятся как $a_1b_1 : a_2b_2$, т. е. как произведения сторон, заключающих эти углы.

Задача 8. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях соответственно 3 : 2 и 2 : 1, считая от вершины C. Найдите площадь треугольника A_1B_1C, если площадь треугольника ABC равна 15.

Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$. Тогда $A_1C = \frac{3}{5}a$, $B_1C = \frac{2}{3}b$. Площадь S треугольника ABC равна $\frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Площадь S_1 треугольника A_1B_1C равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}a \cdot \frac{2}{3}b \cdot \sin C = \frac{2}{5}S = 6$.

Задача 9. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, стороны которого равны 1.

Решение. Воспользуемся формулой радиуса описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ и тем, что площадь данного треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Получим $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 10. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, стороны которого равны 5, 5, 6.

Решение. Воспользуемся формулой радиуса описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ и тем, что площадь данного треугольника равна 12. Получим $R = 3\frac{1}{8}$.

Задача 11. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 4, 5, 6.

Решение. Воспользуемся формулой Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Получим $S = \frac{15\sqrt{7}}{4}$.

Задача 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 4, 5, 6.

Решение. Воспользуемся формулой радиуса описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ и тем, что площадь данного треугольника равна $\frac{15\sqrt{7}}{4}$. Получим $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$.

Задача 13. Найдите синусы углов треугольника, стороны которого равны 4, 5, 6.

Решение. Воспользуемся теоремой синусов $\frac{a}{sin\,A} = \frac{b}{sin\,B} = \frac{c}{sin\,C} = 2R$ и тем, что $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$. Получим, что синусы углов этого треугольника равны соответственно $\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{5\sqrt{7}}{16}$, $\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

19. Площадь четырёхугольника

Цель обучения – продолжить изучение понятия площади; сформулировать и доказать дополнительные теоремы о площади четырёхугольника; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 13. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 8 и 10. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырёхугольник?

Решение. Воспользуемся тем, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. При заданных диагоналях площадь зависит только от синуса угла между ними. Наибольшее значение синуса равно 1 и принимается в случае, если угол равен 90^o. Следовательно, площадь выпуклого четырёхугольника будет наибольшей, если его диагонали перпендикулярны. В случае, если диагонали равны 8 и 10, наибольшая площадь четырёхугольника равна 40.

Задача 14. Докажите, что из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник, вписанный в данную окружность. Воспользуемся тем, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. Диагонали четырёхугольника, вписанного в окружность, будут наибольшими, если они являются диаметрами окружности, синус угла между диагоналями будет наибольшим, если диагонали перпендикулярны. Четырёхугольник, вписанный в окружность, у которого диагоналями являются перпендикулярные диаметры, является квадратом. Таким образом, из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 5 и 6, а угол между ними равен 30°.

2. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 3 см и 4 см, а угол между ними равен 120°.

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 7 и 8, угол между ними равен 45°. Найдите площадь этого четырёхугольника.

4*. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 5, 6, 7.

Вариант 2

1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 7 и 8, а угол между ними равен 150°

2. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 5 см и 6 см, а угол между ними равен 45°.

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 3 и 4, угол между ними равен 60°. Найдите площадь этого четырёхугольника.

4*. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 7, 8, 9.

20. Площадь круга

Цель обучения – определить понятие площади круга; вывести формулы площади круга, сектора, сегмента; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 20. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 20.9), равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Площади полукругов, построенных на катетах AC и BC, как на диаметрах, равны соответственно $\frac{\pi b^2}{8}$ и $\frac{\pi a^2}{8}$. Площадь полукруга, построенного на гипотенузе AC, как на диаметре, равна $\frac{\pi c^2}{8}$. По теореме Пифагора имеет место равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8}$, означающее, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

21*. Фракталы

Цель обучения – познакомить учащихся с понятием фрактала; привести примеры фракталов; научить решать задачи на нахождение их периметров и площадей.

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Докажите, что периметр звезды Коха, к которому стремятся периметры многоугольников, участвующих в её построении, равен бесконечности.

Решение. Рассмотрим правильный треугольник со стороной 1. На первом шаге каждая сторона треугольника заменяется на ломаную, состоящую из четырех отрезков длины $\frac{1}{3}$. Таким образом, длина ломаной увеличивается в $\frac{4}{3}$ раза и равна 4. То же самое происходит на следующих шагах. Каждый раз длина ломаной увеличивается в $\frac{4}{3}$ раза. Так как последовательность $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ стремится к бесконечности, то и длина кривой Коха равна бесконечности.

Задача 2. Найдите площадь звезды Коха, считая площадь исходного равностороннего треугольника равной 1.

Решение. На первом шаге построения звезды Коха мы добавляем три равносторонних треугольника, со сторонами в три раза меньшими исходных. Площадь каждого такого треугольника равна $\frac{1}{9}$. Следовательно, площадь правильного звездчатого шестиугольника равна $1 + \frac{3}{9} = \frac{4}{3}$. На следующем шаге добавляется двенадцать треугольников, суммарной площадью $\frac{12}{81}$. Поскольку длины сторон треугольников на каждом шаге уменьшаются в три раза, то их площадь уменьшается в девять раз. Число добавляемых треугольников равно числу сторон многоугольника и на каждом шаге увеличивается в четыре раза. Поэтому площадь S звезды Коха представляет собой площадь исходного треугольника плюс сумма геометрической прогрессии с начальным членом $\frac{3}{9}$ и знаменателем $\frac{4}{9}$. По формуле суммы геометрической прогрессии находим $S = 1 + \frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$.

Задача 3. Найдите площадь ковра Серпинского, считая стороны исходного квадрата равными 1.

Решение. Для нахождения площади квадрата Серпинского достаточно вычислить площадь вырезаемых квадратов. На первом шаге вырезается квадрат площадью $\frac{1}{9}$. На втором шаге вырезается восемь квадратов, каждый из которых имеет площадь $\frac{1}{81}$. На каждом следующем шаге число вырезаемых квадратов увеличивается в восемь раз, а площадь каждого из них уменьшается в девять раз. Таким образом, общая площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальном членом $\frac{1}{9}$ и знаменателем $\frac{8}{9}$. По формуле суммы геометрической прогрессии находим, что это число равно единице. Следовательно, площадь ковра Серпинского равна нулю.

Задача 4. Найдите площадь салфетки Серпинского, считая площадь исходного правильного треугольника равной 1.

Решение. Решение аналогично решению предыдущей задачи. Для нахождения площади салфетки Серпинского достаточно вычислить площадь вырезаемых треугольников. На первом шаге вырезается треугольник площадью $\frac{1}{4}$. На втором шаге вырезается три треугольника, каждый из которых имеет площадь $\frac{1}{16}$. На каждом следующем шаге число вырезаемых треугольников увеличивается в три раза, а площадь каждого из них уменьшается в четыре раз. Таким образом, общая площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальном членом $\frac{1}{4}$ и знаменателем $\frac{3}{4}$. По формуле суммы геометрической прогрессии находим, что это число равно единице. Следовательно, площадь салфетки Серпинского равна нулю.

22*. Площади поверхностей цилиндра и конуса

Цель обучения – познакомить учащихся с понятием площади поверхности; вывести формулы площадей поверхностей цилиндра и конуса; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 12. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности цилиндра из точки A в противоположную точку C (рис. 22.7). Радиус основания цилиндра равен 1, образующая равна 2.

Решение. Развёртка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами 2π и 2 (рис. 62).

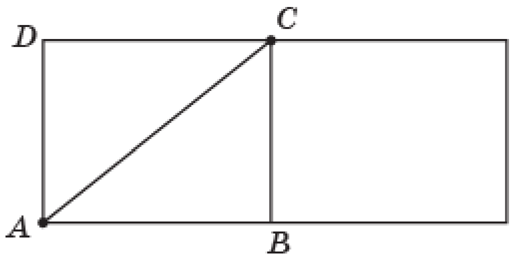

Рис. 62

Кратчайшим путём из точки A в точку C является отрезок AC. В прямоугольном треугольнике ABC AB = π, BC = 2. Следовательно, $AC = \sqrt{\pi^2 + 4}$.

Задача 13. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности конуса из точки A в точку C, являющуюся серединой образующей SB (рис. 22.8). Радиус основания конуса равен 1, образующая равна 2.

Решение. Развёрткой боковой поверхности конуса является полукруг радиуса 2 (рис. 63). Кратчайшим путём из точки A в точку C является отрезок AC. В прямоугольном треугольнике ASC AS = 2, SC = 1. Следовательно, $AC = \sqrt{5}$.

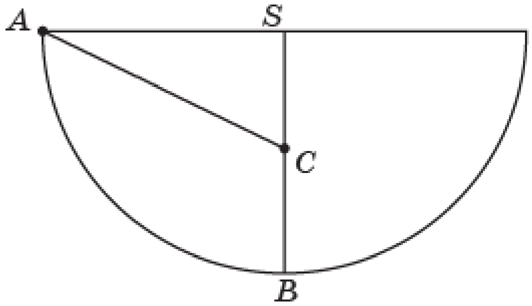

Рис. 63

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. Две стороны треугольника равны 2 см и 3 см. Какую наибольшую площадь может иметь этот треугольник?

2. Найдите площадь ромба, стороны которого равны 1, а угол, образованный двумя соседними сторонами, равен 45^{o}.

3*. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, стороны которого равны 2, 3, 3.

4. Найдите площадь сегмента круга радиуса 1, дуга которого составляет четверть окружности этого круга.

5*. Радиус основания цилиндра равен 3 м, образующая – 4 м. Найдите площадь поверхности цилиндра.

Вариант 2

1. Стороны ромба равны 3 см. Какую наибольшую площадь может иметь этот ромб?

2. Найдите площадь прямоугольника, диагонали которого равны 2, а угол между ними равен 30^{o}.

3*. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, стороны которого равны 4, 5, 5.

4. Найдите площадь сегмента круга радиуса 2, дуга которого составляет одну шестую часть окружности этого круга.

5*. Радиус основания конуса равен 5 м, образующая – 6 м. Найдите площадь поверхности конуса.

ГЛАВА V. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

23. Прямоугольная система координат

Цель обучения – определить понятие прямоугольной системы координат на плоскости; познакомить с историческим материалом о Р. Декарте; вывести формулы расстояния между точкам, уравнения окружности и прямой; научить находить их уравнения.

Более подробно с историческим материалом о Р. Декарте можно познакомиться в книге:

Глейзер Г.И. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1982.

Рекомендации по решению задач

Задача 18. Нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (1, 0), (2, 1), (1, 3), (2, 4), (1, 4,5), (1, 6), (1,5, 5,5), (2,5, 5,5), (3, 6), (3, 4,5), (2, 4), (3, 3), (4,5, 2,5), (4,5 0), (5, 2,5), (5, 0). Очертания какого животного она напоминает?

Решение. Искомая ломаная изображена на рисунке 64. Она напоминает кошку.

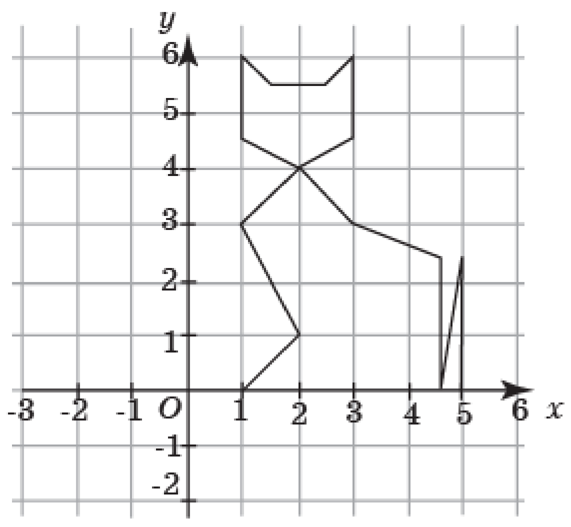

Рис. 64

Задача 19. Нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (4, 0), (3, 1,5), (1, 2), (–1, 2), (–4, 0,5), (–6, 2), (–5,5, 0), (–6, –2), (–4, –0,5), (–1, –2), (1, –2), (3, –1,5), (4, 0). Очертания кого она напоминает?

Решение. Искомая ломаная изображена на рисунке 65. Она напоминает рыбу.

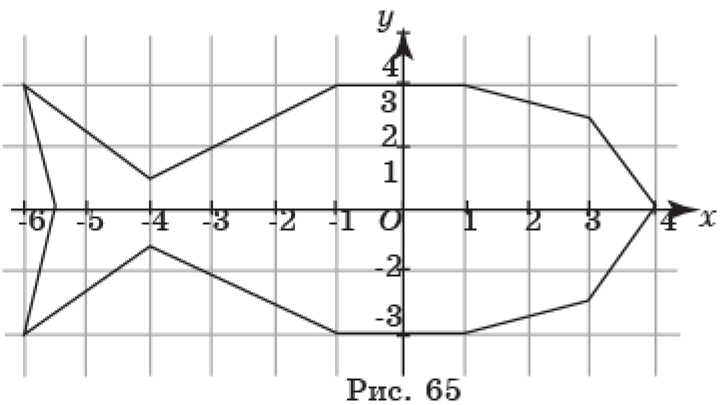

Рис. 65

Задача 20. Нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (–5, 1), (–6, 0,5), (–7, 1), (–4,5, 2,5), (–3,5, 2,5), (–4,5, 1), (5,5, 1), (5,5, –0,5), (4,5, –1,5), (4,5, –1), (5, –0,5), (5, 0,5), (4, 0,5), (4,5, 0), (3,5, –2), (3, –2), (3, –1), (2, –0,5), (–2, –0,5), (–3,5, –1), (–4,5, –2),

(–5,5, –2), (–5, –1), (–4,5, –1), (–4,5, 2), (–5, 1), (–5,5, –1), (–5, –1). Очертания какой породы собак она напоминает?

Решение. Искомая ломаная изображена на рисунке 66. Она напоминает таксу.

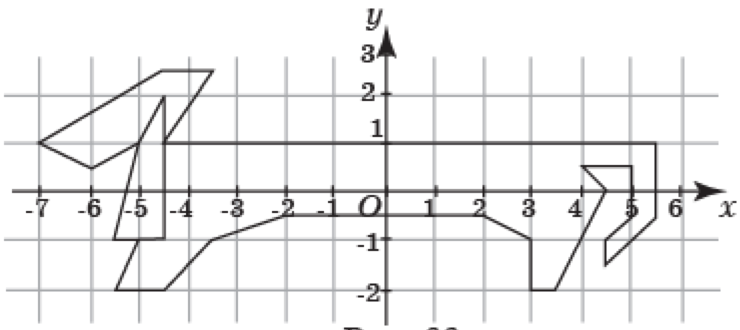

Рис. 66

Задача 21. Нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (0, 0), (–1, 1), (–3, 1), (–2, 3), (–3, 3), (–4, 6), (0, 8), (2, 5), (2, 11), (6, 10), (3, 9), (4, 5), (3, 0), (2, 0), (1, –7), (3, –8), (0, –8), (0, 0). Очертания какой птицы она напоминает?

Решение. Искомая ломаная изображена на рисунке 67. Она напоминает страуса.

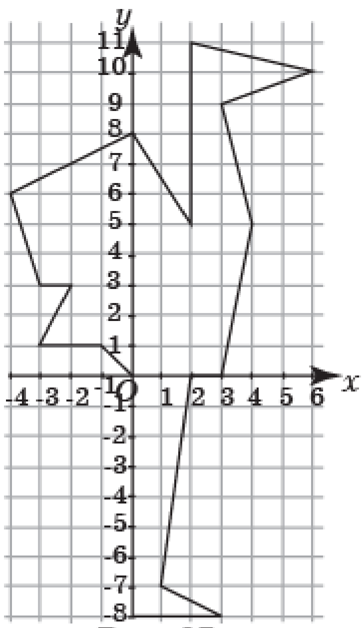

Рис. 67

24. Расстояние между точками. Уравнение окружности

Цель обучения – Вывести формулу расстояния между точками и уравнение окружности; научить находить расстояния между точками с заданными координатами; устанавливать уравнения окружностей и распознавать их взаимное расположение.

Рекомендации по решению задач

В качестве дополнительной задачи учащимся можно предложить следующую задачу.

Задача. Изобразите кривую, заданную уравнением $x^2 + 4y^2 = 16$.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 68. Она получается сжатием окружности в направлении оси *Oy* в два раза.

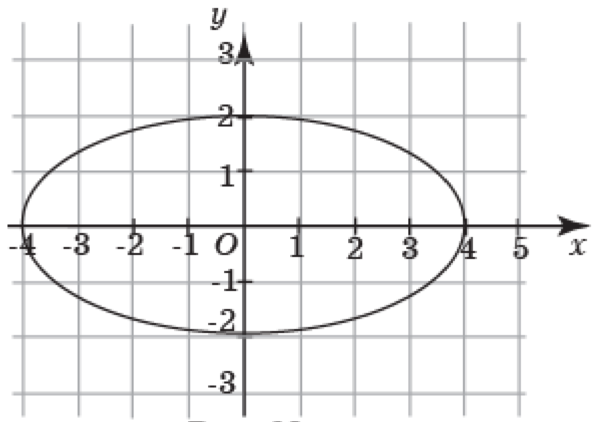

Рис. 68

Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1. Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(-5, 8)$ и $D(13, -12)$.
2. Найдите длину отрезка OA, если O – начало координат, и $A(-9, 3)$.
3. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(-1, 2)$ и радиусом 3.

4*. Найдите координаты центра окружности и её радиус, если она задана уравнением $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 57 = 0$.

Вариант 2

1. Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(6, -7)$ и $D(-2, 3)$.
2. Найдите длину отрезка OB, если O – начало координат, и $B(8, -4)$.
3. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(-2, 1)$ и радиусом 5.

4*. Найдите координаты центра окружности и её радиус, если она задана уравнением $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 = 0$.

25. Координаты вектора

Цель обучения – определить понятие координат вектора; сформулировать и доказать свойства векторов, связанных с координатами; вывести формулу скалярного произведения векторов; научить изображать векторы с заданными координатами; находить координаты векторов, длины, углы и скалярное произведение векторов.

Рекомендации по решению задач

Задача 15. Найдите угол A треугольника с вершинами $A(\sqrt{3}, -1)$, $B(-\sqrt{3}, 1)$, $C(\sqrt{3}, 1)$.

Решение. Угол A треугольника ABC равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Вычислим скалярное произведения этих векторов. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\left(-2\sqrt{3}, 2\right)$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет координаты (0, 2). Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно 4. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 4. Длина вектора $\overrightarrow{AC}$ равна 2. Следовательно, косинус угла между этими векторами равен 0,5. Значит, угол A данного треугольника равен 60°.

26. Уравнение прямой

Цель обучения – вывести уравнение прямой; научить находить уравнения прямых; изображать прямые с заданными уравнениями и устанавливать их взаимное расположение.

Рекомендации по решению задач

Задача 17. Треугольник задан своими вершинами $A(3, 1)$, $B(0, 3)$, $C(2, 4)$. Найдите: а) уравнения высот этого треугольника и координаты их точки пересечения; б) координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

Решение. а) Прямая AB задаётся уравнением $2x + 3y - 9 = 0$. Прямая, проходящая через точку C и содержащая высоту h_c, задаётся уравнением $3x - 2y + 2 = 0$. Аналогично, прямая, проходящая через точку A и содержащая высоту h_a, задаётся уравнением $2x + y - 7 = 0$. Прямая, проходящая через точку B и содержащая высоту h_b, задаётся уравнением $x - y + 9 = 0$. Их точка пересечения имеет координаты $\left(1\frac{5}{7},\ 3\frac{4}{7}\right)$.

б) Середина D отрезка AB имеет координаты (1,5, 2). Точка M пересечения медиан делит отрезок CD в отношении 2 : 1, считая от вершины C. Следовательно, она имеет координаты $\left(1\frac{2}{3},\ 2\frac{2}{3}\right)$.

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

2. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ (2, 1) и $\vec{b}$ (1, 2).

3. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(1, -2)$ и $N(3, 0)$.

4*. Найдите координаты точки пересечения прямых $x - y - 10 = 0$ и $6x + 7y - 21 = 0$.

Вариант 2

1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

2. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ (3, 1) и $\vec{b}$ (1, 3).

3. Запишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $P(-8, 12)$.

4*. Найдите координаты точки пересечения прямых $4x - 3y + 24 = 0$ и $2x + 3y - 6 = 0$.

27*. Аналитическое задание фигур

Цель обучения – познакомить учащихся с аналитическим заданием фигур на плоскости; привести примеры; научить аналитически задавать фигуры и изображать аналитически заданные фигуры на плоскости.

Рекомендации по решению задач

В качестве дополнительной задачи учащимся можно предложить следующую задачу.

Задача. Изобразите фигуру, заданную неравенством $x^2 + 4y^2 \leq 16$.

Решение. Искомая кривая изображена на рисунке 69.

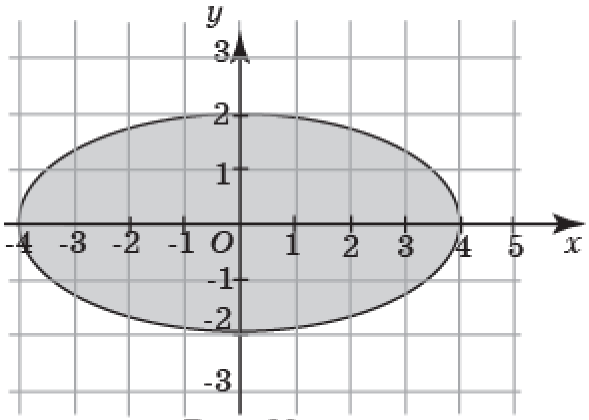

Рис. 69

Контрольная работа 4

Вариант 1

1. Найдите длину отрезка CD, если $C(1, -2)$, $D(-5, 6)$.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 2)$, с вектором нормали $\vec{n}(3, -4)$.

3. Найдите радиус и координаты центра окружности $x^2 + y^2 + 14y - 18x + 105 = 0$.

4. Найдите на оси абсцисс точку одинаково удалённую от точек $E(-2, 1)$ и $F(3, -4)$.

5*. Изобразите ГМТ координатной плоскости, для которых $|x - 1| \leq 2$, $|y + 2| \leq 1$.

Вариант 2

1. Найдите длину отрезка EF, если $E(-1, 1)$, $F(5, -7)$.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, -2)$, с вектором нормали $\vec{n}(2, -1)$.

3. Найдите радиус и координаты центра окружности $y^2 + x^2 - 22y + 10x + 130 = 0$.

4. Найдите на оси ординат точку одинаково удалённую от точек $G(3, 5)$ и $H(-1, -3)$.

5*. Изобразите ГМТ координатной плоскости, для которых $|x + 1| \leq 2$, $|y - 2| \leq 1$.

ОТВЕТЫ

Самостоятельные работы

1

Вариант 1

1. 1, $\frac{2}{3}$. **2.** 9. **3.** 4,8 м. **4.** Обозначим k коэффициент подобия данных треугольников. Тогда $DE : AB = k$. Так как C_1 и F_1 середины сторон соответственно AB и DE, то $DF_1 : AC_1 = k$. Треугольники ACC_1 и DFF_1 подобны по второму признаку подобия треугольников. Следовательно, $CC_1 : FF_1 = k$.

Вариант 2

1. 3, 2,5. **2.** 6. **3.** 4 м. **4.** Обозначим k коэффициент подобия данных треугольников. Тогда $DF : AC = k$. Так как CC_1 и FF_1 биссектрисы этих треугольников, то $\angle ACC_1 = \angle DFF_1$. Треугольники ACC_1 и DFF_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Следовательно, $CC_1 : FF_1 = k$.

2

Вариант 1

1. Нет. **2.** 1,5. **3.** 7,5. **4.** Если две соседние стороны одного прямоугольника пропорциональны двум соседним сторонам другого прямоугольника, то такие прямоугольники подобны.

Вариант 2

1. Нет. **2.** 3. **3.** 4,5. **4.** Если один угол одного ромба равен углу другого ромба, то такие ромбы подобны.

3

Вариант 1

1. Нет. **2.** 0,6. **3.** 5. **4.** $\frac{1}{3}$.

Вариант 2

1. Нет. **2.** 0,6. **3.** 5. **4.** 1.

4

Вариант 1

1. 0,8. **2.** 0,75. **3.** B. **4.** $\sin^2 A$.

Вариант 2

1. 0,6. **2.** $1\frac{1}{3}$. **3.** A. **4.** $\cos^2 A$.

5

Вариант 1

1. 18. **2.** $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$. **3.** $\sqrt{25 \pm 12\sqrt{2}}$. **4.** 6.

Вариант 2

1. 16. **2.** $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$. **3.** $\sqrt{100 \pm 48\sqrt{3}}$. **4.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

6

Вариант 1

1. 7,5. **2.** $6\sqrt{3}$ см^2. **3.** $14\sqrt{2}$. **4.** $6\sqrt{6}$.

Вариант 2

1. 14. **2.** $15\sqrt{2}$ см^2. **3.** $3\sqrt{3}$. **4.** $24\sqrt{170}$.

7

Вариант 1

1. (4, –2). **2.** $3\sqrt{10}$. **3.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. **4.** (–3, 8), 4.

Вариант 2

1. (2, –2). **2.** $4\sqrt{5}$. **3.** $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. **4.** (2, –3), $\sqrt{6}$.

8

Вариант 1

1. (3, –2). **2.** 0,8. **3.** $x - y - 3 = 0$. **4.** (7, –3).

Вариант 2

1. (–2, 3). **2.** 0,6. **3.** $3x + 2y = 0$. **4.** (–3, 4).

Контрольные работы

1

Вариант 1

1. 10 см и 16 см. **2.** 3,75. **3.** 6. **4.** 6. **5.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Вариант 2

1. $5\frac{1}{3}$ см и 4 см. **2.** 4,8. **3.** 3. **4.** 4. **5.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2

Вариант 1

1. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **2.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **3.** $\sqrt{25 \pm 12\sqrt{3}}$. **4.** 2. **5.** $2\sqrt{22}$.

Вариант 2

1. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **2.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **3.** $\sqrt{13 \pm 6\sqrt{2}}$. **4.** 0,5. **5.** $\sqrt{58}$.

3

Вариант 1

1. 3 см^2. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{9\sqrt{2}}{8}$. **4.** $\frac{\pi-2}{4}$. **5.** 42π.

Вариант 2

1. 9 см^2. **2.** 1. **3.** $\frac{25\sqrt{21}}{42}$. **4.** $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$. **5.** 55π.

4

Вариант 1

1. 10. **2.** $3x - 4y + 11 = 0$. **3.** (9, –7), 5. **4.** (2, 0). **5.** Искомое ГМТ показано на рисунке 70.

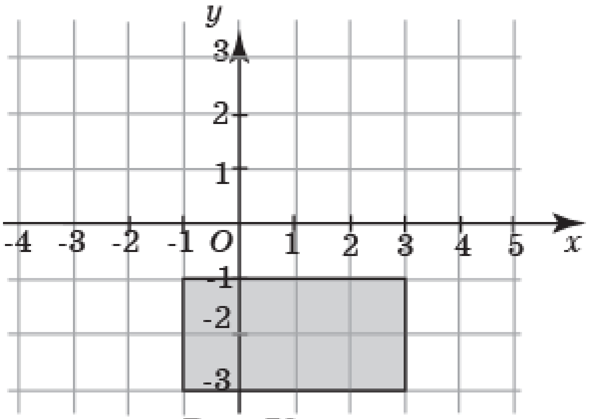

Рис. 70

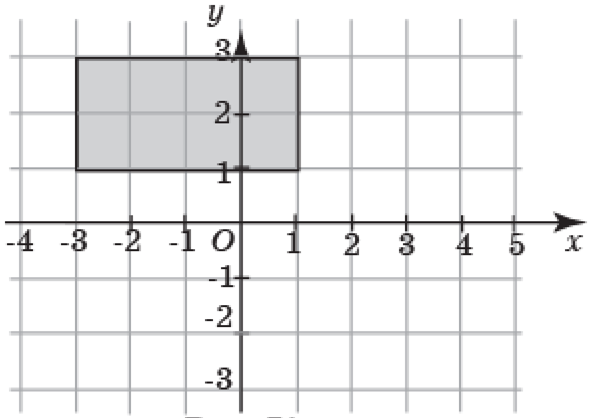

Рис. 71

Вариант 2

1. 10. **2.** $2x - y - 8 = 0$. **3.** (–5, 11), 4. **4.** (0, 1,5). **5.** Искомое ГМТ показано на рисунке 71.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ………………………………………………………………..................…… 2
Примерное тематическое планирование …………………..................……4
Методические рекомендации ………………………………………..................5
Глава I. Подобие ....…………………….........................5
Самостоятельная работа 1 7
Самостоятельная работа 2 11
Контрольная работа 1 15
Глава II. Тригонометрия 16
Самостоятельная работа 3 18
Самостоятельная работа 4 20
Самостоятельная работа 5 24
Контрольная работа 2 26
Глава III. Кривые, связанные с окружностью..........…………….........................27
Глава IV. Площадь ....………….........................35
Самостоятельная работа 6 37
Контрольная работа 3 41
Глава V. Координаты и векторы.. ……….........................42
Самостоятельная работа 7 45
Самостоятельная работа 8 47
Контрольная работа 4 49
Ответы 50