А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

АЛГЕБРА

9 КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2020

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М79

М79 **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 9 класс. Методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 47 [1] с. : ил. — ISBN 978-5-9963-5333-0.

В пособии представлено примерное тематическое планирование учебного материала в 9-м классе, методические рекомендации ко всем главам учебника «Алгебра» для 9-го класса авторского коллектива под руководством А. Г. Мордковича, а также решения некоторых упражнений повышенной сложности и дополнительных упражнений.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Учебно-методическое издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

Алгебра
9 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Редактор *С. В. Бахтина.* Художественное оформление: *А. А. Павлов*
Внешнее оформление: *Н. А. Новак.* Корректор *С. О. Никулаев*
Компьютерная верстка: *А. А. Павлов*

Подписано в печать 24.03.20. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 2,79. Тираж 300. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3
тел. (495)181–53–44, e-mail: binom@blbz.ru, http://www.Lbz.ru

Приобрести книги издательства **«БИНОМ. Лаборатория знаний»** можно в магазине по адресу: Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181–60–77, e-mail: shop@blbz.ru
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются Коммерческим департаментом издательства: тел. (495)181–53–44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в

ISBN 978-5-9963-5333-0

Предисловие

Настоящее пособие предназначено тем учителям математики, которые в своей практической работе опираются на УМК, созданный авторским коллективом под руководством А. Г. Мордковича:

- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева*. Алгебра. 9 класс. **Учебник** для общеобразовательных организаций;
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова.* Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы. **Примерные рабочие программы;**
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов.* Алгебра. 9 класс. **Методическое пособие для учителя;**
- *М. В. Шуркова.* Алгебра. 9 класс. **Контрольные работы;**
- *М. В. Шуркова.* Алгебра. 9 класс. **Рабочая тетрадь.**

В первом разделе пособия представлено примерное тематическое планирование материала в 9-м классе; второй раздел посвящен методическим рекомендациям ко всем главам учебника «Алгебра. 9 класс». В третьей части рассмотрены решения некоторых упражнений повышенной сложности и дополнительных упражнений.

Примерное тематическое планирование

9 класс

(из расчета 3 ч в неделю, всего 102 ч)

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
	Глава 1. Системы уравнений (17 ч)	
1	Уравнения с двумя переменными	1
2	График уравнения с двумя переменными	2
3	Уравнение окружности на координатной плоскости	2
4	Основные понятия, связанные с системами двух уравнений с двумя переменными	2
5	Решение систем уравнений методом подстановки	2
6	Решение систем уравнений методом алгебраического сложения	2
7	Решение систем уравнений методом введения новых переменных	1
	Контрольная работа № 1	1
8	Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций	4
	Глава 2. Решение неравенств (21 ч)	
9	Решение квадратных неравенств	3
10	Решение неравенств методом интервалов (часть 1)	3
11	Решение неравенств методом интервалов (часть 2)	3
	Контрольная работа № 2	1
12	Системы и совокупности неравенств с одной переменной	3
13*	Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	2

Продолжение таблицы

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
14*	Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	2
15	Уравнения и неравенства с параметром	2
16	Неравенства и системы неравенств с двумя переменными	1
	Контрольная работа № 3	1
	Глава 3. Числовые функции (17 ч)	
17	Определение числовой функции	2
18	Способы задания функции	1
19	Свойства функций	1
20	Четные и нечетные функции	2
21	Исследование функций. Чтение графика функции	2
22	Функция $y = x^3$	2
23	Понятие корня n-й степени из действительного числа	2
24	Функция $y = \sqrt[3]{x}$	2
25*	Построение графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля	2
	Контрольная работа № 4	1
	Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии (19 ч)	
26	Числовые последовательности	2
27	Рекуррентный способ задания числовой последовательности	1
28	Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии	3
29	Характеристическое свойство арифметической прогрессии	1
30	Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии	2
	Контрольная работа № 5	1

Окончание таблицы

Параграф	Тема	Кол-во часов
31	Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии	3
32	Характеристическое свойство геометрической прогрессии	1
33	Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии	2
34*	Сумма бесконечной геометрической прогрессии	1
35	Прогрессии и банковские расчеты	1
	Контрольная работа № 6	1
Глава 5. Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул (15 ч)		
36	Правило умножения и основные комбинаторные формулы	4
37	Вероятность суммы двух событий. Независимые события	4
38	Испытания с двумя исходами и их независимые повторения	4
39	Простейшие случайные величины	2
	Контрольная работа № 7	1
	Итоговое повторение	13

Методические рекомендации по работе с учебником «Алгебра. 9 класс»

Глава 1. Системы уравнений

В первых трех параграфах этой главы вводится понятие уравнения с двумя переменными, его решения и графика (первые представления об этих понятиях у учащихся имеются: в 7-м классе они изучали линейное уравнение с двумя переменными). Выводится уравнение окружности радиусом r с центром в точке $(a; b)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Мы, как обычно, руководствуемся тезисом о равноправии аналитической и графической моделей: в системе упражнений имеются задания на переход от уравнения окружности к изображению окружности на координатной плоскости и обратный переход от заданной на координатной плоскости окружности к ее уравнению.

Почему в главе, посвященной решению систем уравнений, в первых трех параграфах о системах уравнений речь не идет? Выдерживается единая линия: и в учебнике для 7-го класса, и в учебнике для 8-го класса, начиная говорить о методах решения уравнений или систем уравнений, мы всегда первым упоминаем графический метод. Тому есть несколько причин: во-первых, графический метод является непосредственным олицетворением ведущей линии нашего курса — функционально-графической линии; во-вторых, графический метод культурен и эстетичен; в-третьих, графический метод ненадежен и, следовательно, создает проблемную ситуацию, требующую для своего разрешения получения точных алгоритмов решения уравнений или систем уравнений. Естественно, что в первом параграфе, посвященном решению систем уравнений (это § 4), графический метод решения — основной (и единственный). В частности, и уравнение окружности гармонично вписывается в систему упражнений.

Содержание § 5—7 — метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных — достаточно традиционно, особых комментариев тут не требуется.

В **§ 8** речь идет о решении текстовых задач. Подобные задачи встречались и в курсе алгебры 7—8-го классов; здесь добавляется лишь один тип задач — пресловутые задачи «на работу» и «бассейны». Сюжеты задач, приведенных с подробными решениями и включенных в систему упражнений, разнообразны: геометрические задачи, задачи на движение, на работу, на смеси и сплавы, финансовые задачи и т. д. Идеология решения задач не претерпевает изменений: оформление решения по-прежнему осуществляется в виде трех этапов математического моделирования: составление математической модели; работа с составленной математической моделью; ответ на вопрос задачи.

Глава 2. Решение неравенств

В **§ 9** речь идет о решении квадратных неравенств. В этом параграфе соединены две главные темы курса алгебры 8-го класса: решение квадратных уравнений и построение графика квадратичной функции. Здесь мы пока обходимся без метода интервалов, пытаясь довести до учащихся следующую мысль: решая неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, достаточно сделать схематический набросок графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, для чего требуется лишь найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ — точки пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью x — и определить, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы. Этот схематический набросок даст наглядное истолкование решению неравенства.

В **§ 10** речь идет о решении неравенств вида $p(x) > 0$ ($p(x) < 0$), где $p(x)$ — многочлен, а в **§ 11** речь идет о решении неравенств вида $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ $\left(\dfrac{p(x)}{q(x)} < 0\right)$, где $p(x)$, $q(x)$ — многочлены. Подробно излагается так называемый метод интервалов. При этом мы учитывали три обстоятельства.

1) Не стоит торопиться с введением механической «кривой знаков», более важно, чтобы учащиеся усвоили идею сохранения знака рациональной функции на интервалах между ее нулями (корнями числителя) и полюсами (корнями знаменателя) и научились устанавливать эти знаки методом пробных точек. Так мы действуем в § 10, а первое упоминание о кривой знаков появляется в § 11. На наш взгляд, нецелесообразно формализовать ситуацию до тех пор, пока у обучаемых не накопится некоторый содержательный опыт.

2) Мы неслучайно не использовали в примере 2 из § 11, где требуется решить неравенство $\frac{(x+2)^2(2x-1)^3}{(2x^2+x+3)(x-5)} \leqslant 0$, известный прием «двойных точек» для построения кривой знаков, усердно пропагандируемый в разных пособиях для поступающих в вузы, поскольку считаем, что в теме «Решение рациональных неравенств» овладение самой идеей знакопостоянства функции важнее овладения рутинной механической технологией решения неравенств. В сильном классе можно показать детям этот прием, но не в начале, а в конце изучения темы.

3) Мы советуем учителям не применять со своими учениками метод интервалов для решения квадратных неравенств (кроме «напрашивающихся» на метод интервалов неравенств типа $(x-a)(x-b)<0$). Опять-таки с идейной точки зрения более значим тот прием решения квадратного неравенства, который использовался в § 9. Особенно это целесообразно в случае «плохих» корней у квадратного трехчлена. Если, например, речь идет о решении неравенства $x^2-x-3<0$, то, отметив корни $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ на числовой прямой и построив (схематически) параболу $y=x^2-x-3$, ветви которой направлены вверх, выбираем промежуток, на котором парабола расположена под осью x, — это интервал $(x_1; x_2)$. Он и служит решением заданного неравенства. Использование же метода интервалов потребовало бы от нас в этом примере разложения на множители заданного квадратного трехчлена с «плохими» корнями; это разложение имеет весьма непрезентабельный вид: $\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. Его не слишком приятно записывать, не слишком приятно использовать, а главное, в нем нет никакой необходимости.

Глава 3. Числовые функции

Ключевое значение в этой главе имеет **§ 17**, где, проанализировав накопленный учащимися *опыт* в использовании понятия функции и в работе со свойствами функции в курсе алгебры 7—8-го классов, мы убеждаем учеников в том, что у них появилась и *потребность* в формальном определении понятия функции и соответствующих свойств функции. Содержание § 17 можно довести до учащихся на уроке в лекционной форме, но, на наш взгляд, предпочтительнее другая форма работы: до урока предложить учащимся в качестве домашнего задания прочитать материал параграфа, а затем в классе на уроке обсудить прочитанное в жанре беседы. Главное в § 17 — выделение двух обстоятельств, подводящих к определению функции (область определения и правило соответствия), и само определение функции. Обратим внимание на то, что в определении 1 (определение функции $y = f(x)$, $x \in X$) мы, говоря, что переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной, избегаем для y традиционного добавления «или функцией». На первых порах изучения функции есть смысл не отождествлять саму функцию — правило соответствия — и значение функции.

В многочисленных пособиях для средней школы встречается словосочетание «функция $f(x)$». Этот жаргон, понятный математикам, вреден, на наш взгляд, для правильного формирования у учащихся понятия функции. В учебнике написано: «Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X; пишут $y = f(x)$, $x \in X$». В определении подчеркивается, что, говоря о функции, надо одновременно использовать две переменные: x и y. Они же впоследствии указывают обозначения для координатной плоскости, на которой строится график функции. Наша точка зрения, выдержанная во всех наших учебниках для 7—11-го классов: $f(x)$ — это выражение с переменной, а не функция; функция всюду обозначается $y = f(x)$.

Коль скоро мы заговорили о принятых обозначениях, упомянем еще два: с нашей точки зрения, для обозначения области определения и области значений функции целесообразнее использовать символы $D(f)$ и $E(f)$, а не $D(y)$ и $E(y)$.

В нашем курсе, в отличие от традиционных школьных подходов, акцент сделан на *заданную*, а не на *естественную* область определения функции. Эта линия проводится, по сути дела, с 7-го класса, особенно в кусочных функциях. В традиционных курсах учащиеся в большинстве случаев работают с естественной областью определения, для них привычна запись «функция $y = 3x + 2$» и вызывает удивление запись $y = 3x + 2$, $x \in [1; 3]$. Они считают, что это одна и та же функция, но заданная на различных промежутках. Нужно приучать их к тому, что это — разные функции, поскольку определение функции включает в себя две позиции: область определения и правило соответствия.

В § 17 вводится понятие области значений функции, причем на первый план выдвигается графический прием отыскания области значений — с помощью построенного графика функции. Разумеется, это не основной путь в математике, но на первых порах более уместна опора на наглядность.

§ 19 называется «Свойства функций». Обратите внимание на следующее обстоятельство. В курсе алгебры 7-го класса учащиеся уже познакомились с понятиями возрастающей и убывающей функции, находили наименьшее и наибольшее значения линейной функции и функций $y = x^2$, $y = -x^2$ на заданном промежутке. При этом использовались только наглядные представления об указанных понятиях. В 8-м классе эти понятия перешли на рабочий уровень восприятия, равно как и новые для школьников понятия ограниченности функции снизу или сверху. Таким образом, учащиеся приобрели опыт работы с указанными понятиями на наглядном и рабочем уровнях, в результате чего подготовлена почва для перехода на формальный уровень. Именно это и сделано в § 19.

Вопреки сложившейся традиции, давая в **§ 20** определение четной и нечетной функции, мы не включаем в него требование симметричности области определения. В определении оно лишнее, это, по сути дела, необходимое условие четной и нечетной функций. В нашем курсе алгебры, повторим еще раз, одинаково значимы аналитические и геометрические модели. Поэтому вполне естественно, что появляется геометрическая интерпретация четности или нечетности функции, связанная с симметричностью ее графика. Скажем, делать вывод о четности функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, на наш взгляд, предпочтительнее по графику (где осевая симметрия полуокружности относительно оси y очевидна), а не ссылаясь на формальное определение.

Обратим внимание на одно принципиальное обстоятельство, которое впервые в нашем курсе алгебры используется в § 20. Речь идет о неявном приобщении школьников к законам формальной логики, согласно которым отрицание утверждения, содержащего квантор общности, приводит к утверждению, содержащему квантор существования, и обратно. Устанавливая факт четности или нечетности функции, нужно проверить, что равенство $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$ выполняется *для всех* значений x. Устанавливая же факт отсутствия как четности, так и нечетности, достаточно показать, что *существует хотя бы одно* x, для которого $f(-x) \neq f(x)$, и *хотя бы одно* x, для которого $f(-x) \neq -f(x)$.

В **§ 21** мы приходим к следующему порядку перечисления свойств функции при чтении ее графика:

1) область определения;
2) четность;
3) монотонность;
4) ограниченность снизу, сверху;
5) $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$;
6) непрерывность;
7) область значений;
8) выпуклость.

Почему выбран именно такой порядок ходов? Дело в том, что первые пять свойств «легитимны», в 9-м классе есть их формальные определения и, в принципе, любое из этих пяти свойств можно достаточно строго обосновать. А далее (позиции 6—8) мы снижаем уровень (по понятным причинам), нарушаем традиционный для математики путь «от свойств функции к ее графику», вынуждены идти в обратном направлении — «от графика функции к ее свойствам».

В **§ 21** по указанной схеме проводится исследование знакомых учащимся функций: $y = kx + m$, $y = kx^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$, а в **§ 22** и **24** — исследование новых функций: $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии

На наш взгляд, в курсе алгебры 9-го класса следовало бы обойтись без изучения числовых последовательностей и прогрессий. По большому счету тема «Прогрессии» в

9-м классе тупиковая, не имеющая связей с остальным материалом основной школы, а тупиковых тем в разумно и логично выстроенной программе быть не должно. «Последовательности» — тема математического анализа, и было бы логичнее начинать с нее изучение начал математического анализа в 11-м классе. А прогрессии — частные случаи последовательностей, искусственно вырывать их из общей темы в принципе нецелесообразно. Но поскольку в стандарте математического образования тема «Прогрессии» представлена в рамках основной школы, мы обязаны ее рассматривать в курсе алгебры 9-го класса, позаботившись о том, чтобы эта тема была органично связана с предыдущими разделами курса, не была тупиковой. Поскольку в нашем курсе приоритет отдается функциональной линии, то и последовательности подаются в том же ключе. Это функции, но несколько отличающиеся от того, к чему привыкли ученики: это функции натурального аргумента.

В **§ 26** на первый план выходит проблема мотивации: надо ли рассматривать функции натурального аргумента? Приводятся соответствующие практико-ориентированные примеры функций натурального аргумента. Кроме определения числовой последовательности и разных примеров последовательностей, речь в этом параграфе идет о двух способах задания последовательности (аналитическом и словесном) и о свойстве монотонности применительно к последовательностям. Заметим, что тема «Последовательности» в нашем курсе будет иметь продолжение: в 11-м классе будет добавлено свойство ограниченности последовательности и понятие предела последовательности. Отметим, что рекуррентный способ задания последовательности как наиболее трудный и непривычный вынесен в отдельный параграф — это **§ 27**.

Материал **§ 28—33**, в которых рассматриваются арифметическая и геометрическая прогрессии, более или менее традиционен. Следует обратить внимание лишь на несколько моментов.

Во-первых, в § 28 и 31 использован метод математической индукции для вывода формул n-го члена арифметической и геометрической прогрессий. Будет учитель показывать это доказательство учащимся или нет, зависит, естественно, от условий, в которых он работает.

Во-вторых, обращаем внимание на упоминание в § 31 термина «показательная функция». Это отражает общую тенденцию нашего курса на использование элементов опережающего обучения. Выход в зону ближайшего развития (термин классика психологии Л. С. Выготского) — составная часть всякого развития.

В-третьих, большое внимание в нашем учебнике уделяется характеристическим свойствам прогрессий — этому специально посвящены два параграфа — 30 и 32.

В-четвертых, на наглядно-интуитивном уровне дается в **§ 34** представление о сумме бесконечной убывающей прогрессии — это в определенном смысле некоторый эксперимент для основной школы. В 11-м классе будет дано соответствующее доказательство.

И, наконец, в-пятых, в **§ 35** речь идет о так называемой реальной математике, об использовании прогрессий в банковских расчетах.

Глава 5. Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул

Эта глава, завершающая и учебник 9-го класса, и изучение стохастической линии в курсе математики основной школы, состоит из четырех параграфов. Во всех, кроме последнего, материал представлен как своего рода концентрическое расширение и продолжение уже известных по учебнику 8-го класса сюжетов: в § 36 — правило умножения, в § 37 — «сложение вероятностей», в § 38 — независимые повторения испытаний с двумя исходами. В то же время в каждом из этих параграфов изложен и качественно новый материал. Общая учебная направленность этих параграфов, в целом одинакова: повторить уже известные вещи и показать, как они естественно продолжаются и расширяются далее. Несколько особняком выглядит последний § 39. В нем речь идет о действительно новых понятиях — о случайных величинах, подробнее см. ниже. По тематическому планированию на каждый из параграфов отводится 3 урока.

Начальный **§ 36** подчеркивает значимость комбинаторного правила умножения, которое работает не только при решении задач (как в 7-м и 8-м классах), но и в теоретическом плане. Именно и только на основе правила умножения выводятся формулы для числа A_n^k размещений, числа P_n перестановок и числа C_n^k сочетаний. Подчеркнем, что мы всюду стараемся обходиться без формального определения того, что такое размещение, перестановка или сочетание, а говорим только о *числах* размещений, перестановок и сочетаний. В принципе, по этим числам и формулам можно составить и отдельное пособие, и отдельный учебник, но цель этого параграфа более приземленная: показать силу правила умножения и дать формулы для подсчета числа комбинаций в более сложных, нежели в 8-м классе, задачах на нахождение вероятностей. По этой причине мы нигде не углубляемся в искусство манипулирования комбинаторными формулами, а ограничиваемся их приложениями к решению конкретных задач.

Кроме того, даже там, где формула быстро дает ответ, мы, наряду с проверкой по формуле, подчеркиваем сначала и ее комбинаторный смысл. Например, тождество $C_n^1 = n$ можно проверить по общей формуле, но предпочтительнее понимать ее основу: один элемент из, скажем, ста можно выбрать ста способами. То же относится и к тождеству $C_n^k = C_n^{n-k}$. Его можно проверить по общей формуле, но можно объяснить и комбинаторно: всякому выбору k элементов соответствует «антивыбор», т. е. выбор оставшихся $n - k$ элементов. Мы постоянно придерживаемся положения «*Математика в школе — не научный, а учебный предмет*». К примеру, многими любимый треугольник Паскаля в нашем УМК — просто удобная и красивая таблица для «хранения» чисел C_n^k, а многочисленные тождества и формулы, связанные с ним, — это уже углубленный уровень обучения. По этой причине треугольник Паскаля не включен в основной текст главы 5, а компактно размещен в серии дополнительных задач к главе. О нем всегда можно рассказать отдельно, если на это в конкретном классе остается время.

В целом взаимоотношения комбинаторики и теории вероятностей в школе, по нашему мнению, противоположны их взаимоотношениям в вузе. В вузе «комбинаторика — служанка теории вероятностей», т. е. комбинаторика появляется в тот момент, когда требуется решить ту или иную вероятностную задачу. В общеобразовательной школе, на наш взгляд, элементы теории вероятностей не должны главенствовать над развитием комбинаторных навыков, а, скорее, наоборот: интересно звучащие, «практико-ориентированные» вероятностные задачи образуют массив учебных задач, на которых повторяются и закрепляются основные комбинаторные умения и навыки. Идея о возможности формирования неких вероятностных компетенций, минуя достаточную комбинаторную базу подготовки учащихся, красива, но виртуальна: нет никаких примеров ее надежной реализации на практике. Мы полагаем, что в школьном образовании базовой, фундаментальной должна быть *комбинаторная составляющая*, которую мы вовсе не отождествляем с формульной комбинаторикой. Напротив, излишнее усердие и акцентирование обучения на числе размещений, сочетаний с повторениями или без них, замечательными тождествами и т. п., — это явный переход к жестким моделям обучения, который в заметной степени «сушит» обучение. В общем, комбинаторика «...представляет средство для одной из важнейших способностей ума — способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому...».[1]

Следующий **§ 37** начинается, разумеется, с двух примеров использования комбинаторных формул в задачах на нахождение вероятностей сложных (по сравнению с задачами для 8-го класса) случайных событий. Сложность состоит в том, что для вычислений по формуле $P(A)=\dfrac{N(A)}{N}$, как минимум, дважды приходится использовать числа C_n^k. Далее мы переходим к несколько иным «сложным» событиям: они сложены из других, более простых событий. Тем самым мы приходим и к сумме, и к произведению событий. Доказательство формулы $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ мы проводим только для равновозможных исходов и предваряем его, по существу, тем же рассуждением, но на текстовом, сюжетном уровне примера 4. Блок из примерно 10 задач, аналогичных примеру 4, имеется в § 2 учебника для 8-го класса. Разумеется, специально отмечаем, что уже известные по 8-му классу формулы $P(A+B)=P(A)+P(B)$ для несовместных событий и $P(A)+P(\bar{A})=1$ для противоположного события есть частные случаи общей формулы вероятности суммы.

Следующее тонкое, деликатное и, пожалуй, наиболее специфическое для всей теории вероятностей как отдельного предмета — это понятие *независимости* событий. Обсуждение его обоснований, трактовок, интерпретаций и т. п. может стать темой отдельного диссертационного исследования. Но мы приходим к нему с простой утилитарной точки

---

[1] Из доклада попечителя Московского учебного округа профессора П. А. Некрасова, 1899 г.

зрения: это именно тот случай, когда вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ суммы двух событий оказывается возможным вычислить, зная *только* вероятности $P(A)$, $P(B)$ слагаемых. В частности, мы не вводим условные вероятности, так как это понятие во-первых, не первостепенное для основ теории вероятностей и, во-вторых, оно при массовом обучении на школьном уровне явно выглядит тупиковым. Ведь если говорить об условных вероятностях, то тогда, для полноты, надо в дальнейшем работать и с тремя новыми формулами: вероятности произведения нескольких событий, полной вероятности, Байеса. А это уже никак не школьный уровень. Хотя попытки «протащить» их и в школу имеются в ПООП основной школы, но в проекте ФГОС 2019 г. об условных вероятностях не говорится.

Введение § 37 независимости событий «зацепляет» его со следующим **§ 38** «Испытания с двумя исходами и их независимые повторения». В новом параграфе мы начинаем с повторения материала 8-го класса. Сначала вспоминаем саму терминологию «успех-неудача». Затем через подробный разбор случаев двух и трех повторений приходим к многократным повторениям испытания с двумя исходами. В итоге приходим к формуле $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ Бернулли о подсчете вероятности наступления нужного количества «успехов». Поведение правой части этой формулы в зависимости от n и k — важный сюжет в теории вероятностей, а оценка вероятности погрешности в приближении $\frac{k}{n} \approx p$ составляет, пожалуй, самый важный момент в элементарной теории вероятностей (*закон больших чисел*). Все же, по нашему убеждению, рассматривать эти аспекты прямо тут, при первом же появлении самой формулы Бернулли, явно преждевременно: к этой формуле, ее использованию и «поведению» элементарно нужно время для привыкания. Отметим, что вычисления «руками» по этой формуле реально возможны только при небольших n, скажем, не более 5. Действительно, регулярные непосредственные вычисления числовых выражений типа $P_7(3) = 35 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^4$ на уроках в 9-м классе могут занять слишком много времени. Их можно отнести на самостоятельную работу или для проектной работы. В § 38 мы ограничиваемся только случаями $n \leqslant 5$. При этом случаи $n = 2$ и $n = 3$ уже рассматривались в 8-м классе. Резюмируя, в § 38 вводится сам термин «испытания Бернулли» и проводится первое знакомство с формулой

Бернулли. Ее более тщательное изучение и применение в законе больших чисел отложено до 10-го класса. Аналогично, и бином Ньютона можно было бы «с разбега» рассмотреть и здесь, но мы считаем это преждевременным.

Заключительный **§ 39** «Простейшие случайные величины» включен в учебник по довольно формальным аргументам, связанным с наличием нормативного документа ПООП ООО 2015 года и упоминанием случайных величин в ФГОС. Необходимость изучения случайных величин в основной, да и в старшей, школе не представляется нам очевидной, но из этих документов следует необходимость хотя бы минимального ознакомления со случайными величинами. Этим мы в основной школе и ограничиваемся.

При этом придерживаемся общего принципа обучения математике в школе: для введения нового понятия нужна подготовительная работа, нужен конкретный учебный опыт, подводящий к самой необходимости возникновения этого понятия. В самом начале параграфа мы начинаем с того, что соотношения между случайными величинами, случайными событиями и элементарными событиями (исходами испытания) очень похожи на соотношения между числовыми функциями, числовыми множествами и числами. Далее в примерах 1—6 подробно разобраны (рассказаны) несколько примеров случайных величин. В итоге мы подходим к общему определению случайной величины как числовой функции, которая каждому элементарному событию (исходу[1] испытания) ставит в соответствие некоторое число. В примерах 7—9 показано, как в конкретных случаях составляется таблица распределения значений случайной величины. Разумеется, тут мы используем и материал предыдущего параграфа. В качестве непосредственного применения таблиц распределения показываем, как с ее помощью может быть вычислено математическое ожидание случайной величины. Вычисляется математическое ожидание для числа «успехов» при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ повторениях либо в тексте, либо в упражнениях. Теорема о том, что математическое ожидание числа «успехов» в n испытаниях Бернулли равно np, где p — вероятность «успеха» в одном испытании, приводится как справочный факт. По рабочей программе всего курса алгебры этот параграф носит важный, но, скорее, ознакомительный характер. Более детальный разговор про с. в. — это, несомненно, старшая школа.

[1] Из конечного множества всех исходов.

Решение некоторых упражнений

1.7. е) Найдите целочисленные решения уравнения $5x + 7y = 3$.

Решение. Имеем: $x = \frac{3-7y}{5}$; значит, выражение $3 - 7y$ должно быть кратно числу 5. Для числа y имеется 5 возможностей по отношению к делению на 5: кратно 5, дает при делении на 5 остаток ±1, дает при делении на 5 остаток ±2. Рассмотрим каждую из этих возможностей по отдельности.

1) $y = 5n$. Тогда $3-7y=3-35n$; это число на 5 не делится.

2) $y = 5n + 1$. Тогда $3 - 7y = 3 - 7(5n + 1) = -4 - 35n$, это число на 5 не делится.

3) $y = 5n - 1$. Тогда $3 - 7y = 3 - 7(5n - 1) = 10 - 35n$, это число на 5 делится без остатка.

4) $y = 5n + 2$. Тогда $3 - 7y = 3 - 7(5n + 2) = -11 - 35n$, это число на 5 не делится.

5) $y = 5n - 2$. Тогда $3 - 7y = 3 - 7(5n - 2) = 17 - 35n$, это число на 5 не делится.

Итак, $y = 5n - 1$, тогда $x = \frac{3-7y}{5} = \frac{3-7(5n-1)}{5} = 2-7n$.

Ответ: $(2 - 7n;\ 5n - 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1.8. Найдите целочисленные решения уравнения:

д) $xy - 2y = 3x$; е) $3x^2 - 2xy = y^2 - 5$.

Решение. д) $y = \frac{3x}{x-2} = \frac{3x-6+6}{x-2} = \frac{6}{x-2} + 3$. Полученное выражение будет целым числом, если $x - 2 = \pm1$, ±2, ±3, ±6, т. е. если $x = 3, 1, 4, 0, 5, -1, 8, -4$. Для каждого из этих восьми целочисленных значений x получаем соответственно: $y = 9, -3, 6, 0, 5, 1, 4, 2$.

е)

$$3x^2 - 2xy - y^2 = 3x^2 - 3xy + xy - y^2 =$$
$$= 3x(x - y) + y(x - y) = (x - y)(3x + y).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде $(x - y)(3x + y) = -5$. Для множителей в левой части уравнения имеется четыре возможности: первый равен 1, второй равен -5; первый равен -1, второй равен 5; первый равен 5, второй равен -1; первый равен -5, второй равен 1. В итоге задача сводится к решению четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 3x + y = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1, \\ 3x + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 5, \\ 3x + y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -5, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

Ответ: д) (3; 9), (1; –3), (4; 6), (0; 0), (5; 5), (–1; 1), (8; 4), (–4; 2); е) (–1; –2), (1; 2), (1; –4), (–1; 4).

1.9. б) Найдите двузначное число, которое равно сумме утроенного числа цифры десятков и квадрата цифры единиц.

Решение. Если x — цифра десятков, а y — цифра единиц, то, согласно условию, $10x + y = 3x + y^2$, т. е. $7x = y(y - 1)$. Отсюда сразу следует, что $y = 7$, $x = 6$.

Ответ: 67.

3.20. При каком значении параметра p график уравнения $|x| + y + p = 0$ имеет с окружностью $x^2 + (y + 1)^2 = 4$:

а) единственную точку пересечения;

б) более двух точек пересечения?

Решение. На рисунке 1 изображена окружность $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ и график функции $y = -|x| - p$; на рисунке у этих линий нет точек пересечения.

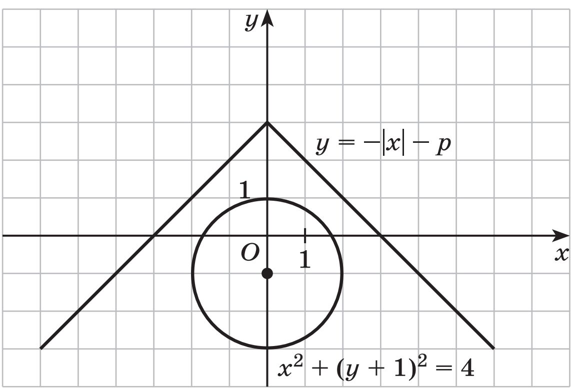

Рис. 1

Двигая ломаную вниз, мы получим сначала две общие точки с окружностью (когда ветви ломаной касаются окружности), четыре общие точки (пока вершина ломаной не дойдет до точки (0; 1)), три общие точки (когда вершина ломаной попадет в точку (0; 1)), две общие точки (когда вершина ломаной двигается до точки (0; –3)), одну общую точку (когда вершина ломаной попадет в точку (0; –3)); далее ломаная и окружность уже не пересекаются.

а) Мы уже отметили, что у построенных линий будет только одна общая точка, если вершина ломаной находится в точке (0; –3); это будет при $p = 3$.

б) Выясним, при каком значении параметра p ветви ломаной будут касательными к окружности. Рассмотрим для определенности левую ветвь $y = x - p$. Нас интересует тот случай, когда система уравнений $\begin{cases} y = x - p, \\ x^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Имеем:

$$x^2 + (x - p + 1)^2 = 4;$$
$$2x^2 - 2x(p - 1) + (p^2 - 2p - 3) = 0.$$

Дискриминант последнего квадратного уравнения равен нулю при $p = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Но нас интересует случай, когда $-p > 1$, т. е. $p < -1$. Значит, из двух найденных значений параметра выбираем значение $p = 1 - 2\sqrt{2}$.

Итак, если $p < 1 - 2\sqrt{2}$, графики не пересекаются; если $p = 1 - 2\sqrt{2}$, у графиков две общие точки; если $1 - 2\sqrt{2} < p < -1$, у графиков четыре общие точки; если $p = -1$, то три общие точки. В итоге получаем, что более двух точек пересечения у построенных линий будет при $1 - 2\sqrt{2} < p \leqslant -1$.

3.21. а) Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $O(0; 0)$, $P(4; 0)$ и $T(0; 3)$.

б) Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 0)$, $B(0; 3)$ и $C(4; -5)$.

Решение. а) На рисунке 2 изображен прямоугольный треугольник OPT. Центром описанной около него окружности является середина гипотенузы, т. е. точка (2; 1,5), а радиус окружности равен 2,5. Составляем уравнение окружности: $(x - 2)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 6{,}25$.

б) На рисунке 3 изображен треугольник ABC. Замечаем, что точка (4; 0) удалена от каждой из точек A, B, C на расстояние, равное 5. Значит, эта точка — центр окружности,

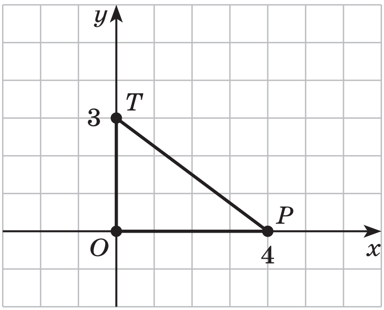

Рис. 2

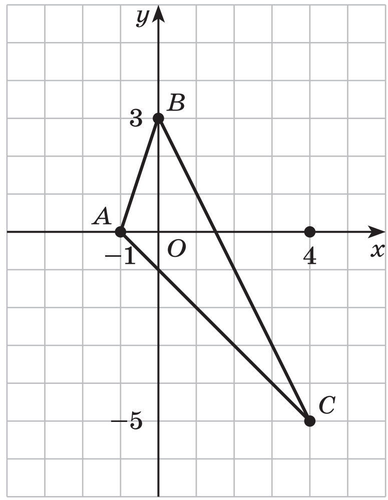

Рис. 3

описанной около треугольника ABC, а уравнение окружности таково: $(x-4)^2+y^2=25$.

8.14. а) Суммарный доход двух предприятий возрастет втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в 4 раза. Во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя неизменным доход второго, чтобы их суммарный доход вырос в 4 раза?

б) Торговая фирма получила две партии некоторого товара. Если продавать весь товар по цене 80 р. за 1 кг, то выручка от продажи будет на 15 % ниже выручки, которую фирма получила бы, продав первую партию по названной цене, а вторую — по цене, превышающей ее на 25 %. Какую часть по массе составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий?

Решение. Не забывайте при работе с учащимися, решая текстовые задачи, всегда оформлять решение в виде трех этапов математического моделирования (как это везде сделано в учебнике: составление математической модели; работа с составленной математической моделью; ответ на вопрос задачи). Но в данном пособии, ориентированном только на учителей, мы, ради краткости, позволяем себе не делать этого.

а) Пусть x — доход первого предприятия, y — доход второго предприятия и k — искомый коэффициент. Тогда $\begin{cases} x+4y=3(x+y), \\ kx+y=4(x+y). \end{cases}$ Из первого уравнения получаем $y = 2x$, тогда второе уравнение принимает вид $kx + 2x = 4(x + 2x)$, откуда следует, что $k = 10$.

б) Пусть x кг — масса первой партии товара, а y кг — масса второй партии. Из условия задачи следует, что $80(x + y) = 0{,}85(80x + 100y)$. После преобразований получаем $12x = 5y$. Нас спрашивают, какую часть по массе составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий, т. е. речь идет об отыскании значения дроби $\frac{x}{x+y}$. Поступим так: $\frac{x}{x+y}=\frac{12x}{12x+12y}=\frac{5y}{5y+12y}=\frac{5}{17}$.

8.15. а) Смешав 40%-ный, 60%-ный растворы соли и 5 л воды, получили 20%-ный раствор соли. Если бы вместо 5 л воды добавили 5 л 80%-ного раствора соли, то получился бы 70%-ный раствор соли. Сколько было 40%-ного и сколько 60%-ного растворов соли?

б) Имеется три слитка латуни. В каждом из первых двух слитков содержится 30 % меди. Масса первого слитка равна 5 кг, масса второго — 3 кг. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56 % меди. Если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60 % меди. Каким будет процентное содержание меди в сплаве всех трех слитков?

Решение. а) Пусть x л — масса первого раствора, y л — масса второго раствора. В первом растворе $0{,}4x$ л соли, во втором $0{,}6y$ л соли. После добавления 5 л воды получим раствор массой $x + y + 5$ л, в котором $0{,}2(x + y + 5)$ л соли. Значит, $0{,}4x + 0{,}6y = 0{,}2(x + y + 5)$.

Далее в 5 л 80%-ного раствора соли чистой соли содержится 4 л. Значит, $0{,}4x + 0{,}6y + 4 = 0{,}7(x + y + 5)$.

Получилась система из двух линейных уравнений с двумя переменными; решив систему, получим: $x = 1$, $y = 2$.

б) Пусть x кг — масса третьего слитка, в котором y % меди. В первом слитке 1,5 кг меди, во втором — 0,9 кг меди. Если сплавить первый и третий слиток, в которых соответственно 1,5 кг меди и $\frac{y}{100}x$ кг меди, то получим сплав массой $(5 + x)$ кг, в котором 56 % меди. Это значит, что

$$1{,}5+\frac{y}{100}x=0{,}56(5+x).$$

Далее, если сплавить второй и третий слиток, в которых соответственно 0,9 кг меди и $\frac{y}{100}x$ кг меди, то получим сплав массой $(3 + x)$ кг, в котором 60 % меди. Это значит, что $0{,}9+\frac{y}{100}x=0{,}6(3+x)$.

Вычтя второе уравнение из первого, получим $x = 10$. Подставив найденное значение x в любое из уравнений (например, в первое), получим $y = 69$.

Нас спрашивают, каким будет процентное содержание меди в сплаве всех трех слитков. Меди в них соответственно 1,5 кг, 0,9 кг и 6,9 кг, т. е. 9,3 кг; масса сплава из трех слитков равна 18 кг. Вычислим процентное содержание меди в этом сплаве: $\frac{9{,}3}{18}\cdot 100=51\frac{2}{3}$ %.

Ответ: а) 1 л, 2 л; б) $51\frac{2}{3}$ %.

9.21. а) Две группы туристов вышли с турбазы по направлениям, образующим прямой угол. Первая группа шла со скоростью 4 км/ч, а вторая — со скоростью 5 км/ч. Группы поддерживали связь по рации, причем переговариваться можно было на расстоянии не более 13 км. Какое время после выхода второй группы могли поддерживать между собой связь туристы, если известно, что вторая группа вышла на маршрут через 2 ч после первой?

Решение. Пусть x ч — время движения второй группы туристов, а первая группа находится в пути $(x + 2)$ ч. За указанные промежутки времени первая группа прошла путь $4(x + 2)$ км, а вторая — путь $5x$ км. Схема их движения представлена на рисунке 4.

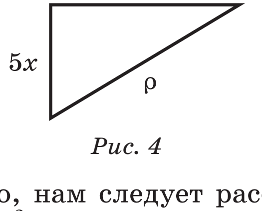

Рис. 4

Согласно условию, нам следует рассмотреть ситуацию, когда $\rho < 13$, т. е. $\rho^2 < 169$. Имеем: $\rho^2 = (8 + 4x)^2 + 25x^2$. Значит, математическая модель ситуации такова:

$$(8 + 4x)^2 + 25x^2 < 169.$$

Решив это неравенство, получим: $-\dfrac{101}{5} \leqslant x \leqslant 1.$

Ответ: не более часа.

13.8. а) Решите уравнение $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 3x + 2| = 0.$

Решение. Раскрывать модули здесь, разумеется, не нужно. Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое выражение равно нулю. В итоге получаем систему двух уравнений с одной переменной $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0. \end{cases}$ Речь идет об отыскании общих корней этих уравнений. Общий корень один — это число 1.

13.11. Решите уравнение:

г) $|x - 4| + |x + 5| = 9;$ е) $|x - 4| + |x + 5| = 11.$

Решение. В обоих случаях лучше обойтись без предварительного рутинного раскрытия модулей, опираясь на формулу расстояния между точками числовой прямой:

$$|x - a| = \rho(x; a).$$

г) На рисунке 5 изображен отрезок [–4; 5], его длина равна 9. Возьмем произвольную точку x этого отрезка. Имеем: $\rho(x; 4) + \rho(x; -5) = 9$. Это значит, что любая точка отрезка является решением данного уравнения. Поскольку любая точка, взятая за пределами отрезка, отстоит от одного из его концов далее, чем на 9, точки вне отрезка не удовлетворяют заданному уравнению.

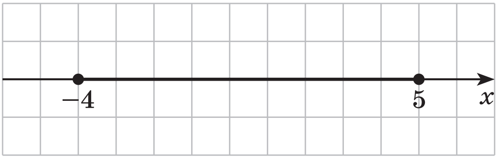

Рис. 5

е) Здесь нам нужно решить уравнение $\rho(x; 4) + \rho(x; -5) = 11$, т. е. сумма расстояний интересующей нас точки от концов отрезка больше длины отрезка. Значит, корни уравнения лежат за пределами отрезка.

Если $x < -5$, то заданное уравнение принимает вид $(-x - 5) + (-x + 4) = 11$, $x = -6$.

Если $x > 4$, то заданное уравнение принимает вид $(x + 5) + (x - 4) = 11$, $x = 5$.

Ответ: г) $-5 \leqslant x \leqslant 4$; е) –6; 5.

14.10. Решите неравенство:

г) $|x-2|+|x+4| \leqslant 4$;

д) $|x-2|+|x+4| \leqslant 6$;

е) $|x-2|+|x+4| \leqslant 8$.

Решение. г) Для любой точки x отрезка $[-4; 2]$ выполняется соотношение $\rho(x; -4)+\rho(x; 2)=6$, а для любой точки вне отрезка — соотношение $\rho(x; -4)+\rho(x; 2)>6$. Значит, заданное неравенство не имеет решений.

д) Выше мы отметили, что для любой точки x отрезка $[-4; 2]$ выполняется соотношение $\rho(x; -4)+\rho(x; 2)=6$, а следовательно, и соотношение $\rho(x; -4)+\rho(x; 2) \leqslant 6$. Вывод: решение заданного неравенства таково: $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

е) Все точки x отрезка $[-4; 2]$ удовлетворяют неравенству $|x-2|+|x+4| \leqslant 8$.

Если $x<-4$, то заданное неравенство принимает вид $(-x+2)+(-x-4) \leqslant 8$, откуда следует, что $x \geqslant -5$. Таким образом, получаем вторую часть решения: $-5 \leqslant x<-4$.

Если $x>2$, то заданное неравенство принимает вид $(x-2)+(x+4) \leqslant 8$, откуда следует, что $x \leqslant 3$. Таким образом, получаем третью часть решения: $2<x \leqslant 3$.

Объединив найденные части решения, получаем в итоге $-5 \leqslant x \leqslant 3$.

15.9. б) При каких значениях параметра p неравенство $(2x+5)(x-p)<0$ имеет ровно четыре натуральных решения?

Решение. На числовой прямой отмечаем две незакрашенные точки: $-2{,}5$ и p. Поскольку нас интересуют натуральные решения неравенства, точка p находится правее точки $-2{,}5$, где-то на положительном луче, а решение неравенства выглядит так: $-2{,}5<x<p$.

По условию в множество решений неравенства должны входить числа 1, 2, 3, 4 и не должно входить число 5. Это значит, что $4<p \leqslant 5$.

15.11. а) Найдите все значения параметра p, при которых в множестве решений неравенства $(p-2)x+2p-x^2 \geqslant 0$ содержатся ровно четыре целых числа.

Решение. Перепишем неравенство в более удобном виде: $x^2-(p-2)x-2p \leqslant 0$. Корни квадратного трехчлена здесь достаточно очевидны: -2 и p, а решение неравенства имеет либо вид $p \leqslant x \leqslant -2$, либо вид $-2 \leqslant x \leqslant p$. В первом случае четыре целых решения — это -2, -3, -4, -5. Значит, $-6<p \leqslant -5$. Во втором случае четыре целых решения — это -2, -1, 0, 1. Значит, $1 \leqslant p<2$.

15.12. Дано неравенство $(x+4)(x-p) \leqslant 0$. Найдите все значения параметра p, при которых:

а) отрезок $[-4;\ 7]$ является решением данного неравенства;

б) для всех точек отрезка $[-4;\ 7]$ выполняется данное неравенство;

в) данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки отрезка $[-4;\ 7]$;

г) на отрезке $[-4;\ 7]$ находятся все решения данного неравенства.

Решение. Задания нацелены на развитие логического мышления учащихся.

а) Отрезок $[-4;\ 7]$ является решением данного неравенства при $p = 7$.

б) Для всех точек отрезка $[-4;\ 7]$ выполняется данное неравенство — это значит, что указанный отрезок является подмножеством множества решений неравенства. Общий вид решения $[-4;\ p]$. Следовательно, должно выполняться соотношение $[-4;\ 7] \subset [-4;\ p]$. Оно выполняется при $p \geqslant 7$.

в) Данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки отрезка $[-4;\ 7]$ — это значит, что нас устроит и равенство $p = -4$ (тогда заданное неравенство выполняется только в одной точке $x = -4$), и тем более неравенство $p > -4$. Ответ: $p \geqslant -4$.

г) На отрезке $[-4;\ 7]$ находятся все решения данного неравенства — это значит, что множество решений заданного неравенства, т. е. $[-4;\ p]$, является частью отрезка $[-4;\ 7]$. Ответ: $-4 \leqslant p \leqslant 7$.

15.15. е) Решите неравенство с параметром p:

$$\frac{2x+p}{x^2+5x+6} < 0.$$

Решение. Имеем: $\dfrac{2(x+0{,}5p)}{(x+2)(x+3)} < 0$; дальнейшие рассуждения зависят от положения точки $-0{,}5p$ по отношению к точкам -2 и -3. Возможны пять случаев:

1) $-0{,}5p < -3$;
2) $-0{,}5p = -3$;
3) $-3 < -0{,}5p < -2$;
4) $-0{,}5p = -2$;
5) $-0{,}5p > -2$.

Если $-0{,}5p < -3$, т. е. $p > 6$, то, воспользовавшись методом интервалов, получим: $x < -0{,}5p$; $-3 < x < -2$.

Если $-0{,}5p = -3$, т. е. $p = 6$, то заданное неравенство принимает вид $\frac{2}{x+2} < 0$; получим $x < -3$, $-3 < x < -2$.

Если $-3 < -0{,}5p < -2$, т. е. $4 < p < 6$, то, воспользовавшись методом интервалов, получим: $x < -3$; $-0{,}5p < x < -2$. Если $-0{,}5p = -2$, т. е. $p = 4$, то заданное неравенство принимает вид $\frac{2}{x+3} < 0$, откуда находим $x < -3$.

Если $-0{,}5p > -2$, т. е. $p < 4$, то, воспользовавшись методом интервалов, получим: $x < -3$; $-2 < x < -0{,}5p$.

15.16. б) Найдите все значения параметра p, при каждом из которых неравенство $\frac{2x+p+5}{x-p-1} < 0$ выполняется при всех значениях x из интервала $(0; 1)$.

Решение. Имеем: $\frac{2(x+0{,}5(p+5))}{x-(p+2)} < 0$. Дальнейшие рассуждения зависят от взаимного расположения чисел $-0{,}5(p + 5)$ и $p + 2$.

1) $-0{,}5(p + 5) < p + 2$, т. е. $p > -3$. Решением заданного неравенства служит интервал $(-0{,}5(p + 5); p + 2)$. Нас интересует соотношение $(0; 1) \subset (-0{,}5(p + 5); p + 2)$. Оно имеет место тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств $\begin{cases} p > -3, \\ -0{,}5(p+5) \leqslant 0, \\ 1 \leqslant p+2. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $p \geqslant -1$.

2) $-0{,}5(p + 5) = p + 2$, т. е. $p = -3$. При этом значении параметра заданное неравенство принимает вид $\frac{2(x+1)}{(x+1)} < 0$; это неравенство не имеет решений.

3) $-0{,}5(p + 5) > p + 2$, т. е. $p < -3$. Решением заданного неравенства служит интервал $(p + 2; -0{,}5(p + 5))$. Нас интересует соотношение $(0; 1) \subset (p + 2; -0{,}5(p + 5))$. Оно имеет место тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств $\begin{cases} p < -3, \\ p+2 \leqslant 0, \\ 1 \leqslant -0{,}5(p+5). \end{cases}$ Решив эту систему, получим $p \leqslant -7$.

Ответ: $p \leqslant -7$; $p \geqslant -1$.

16.13. г) Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & -4 \leqslant x < 0; \\ 2x, & 0 \leqslant x < 1; \\ \dfrac{2}{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

При каких значениях x выполняется равенство $f(x) = f(x + 2)$?

Решение. График заданной кусочной функции изображен на рисунке 6.

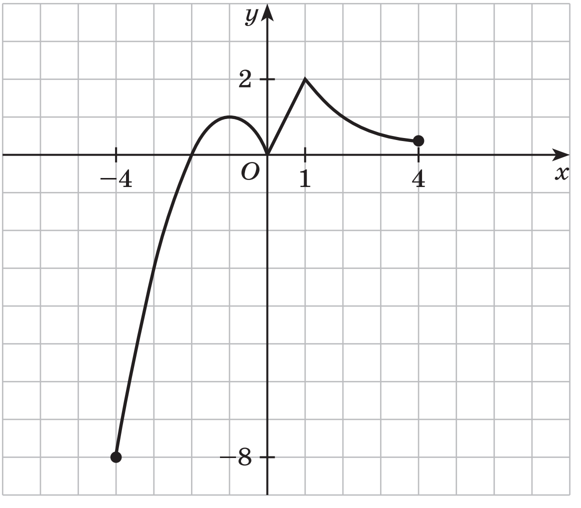

Рис. 6

Нас спрашивают, найдутся ли на графике две точки, у которых абсциссы отличаются друг от друга на 2 единицы, а ординаты равны. Одна пара таких точек очевидна: это точки (–2; 0) и (0; 0). А теперь возьмем точку x из полуинтервала [0; 1) и точку $x + 2$ из отрезка [1; 4]. Нам нужно решить уравнение $2x = \frac{2}{x+2}$. У этого уравнения два корня: $-1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$. Полуинтервалу [0; 1) принадлежит второй корень $\sqrt{2}-1$.

Ответ: -2, $\sqrt{2}-1$.

18.11. д) Постройте график функции: $y = [\sqrt{x}]$.

Решение. Область определения функции — луч $[0; +\infty)$.

Если $0 \leqslant \sqrt{x} < 1$, т. е. $0 \leqslant x < 1$, то целая часть числа $\sqrt{x}$ равна 0, $y = 0$.

Если $1 \leqslant \sqrt{x} < 2$, т. е. $1 \leqslant x < 4$, то целая часть числа $\sqrt{x}$ равна 1, $y = 1$.

Если $2 \leqslant \sqrt{x} < 3$, т. е. $4 \leqslant x < 9$, то целая часть числа $\sqrt{x}$ равна 2, $y = 2$ и т. д.

График функции представлен на рисунке 7.

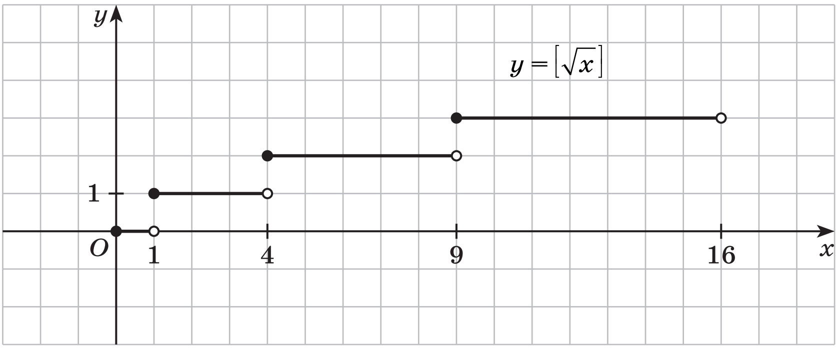

Рис. 7

19.21. а) Найдите натуральные значения параметра p, при которых в множестве решений неравенства

$$x^2 - (p + 7)x + 7p < 0$$

содержатся ровно три натуральных числа.

б) Найдите все значения параметра p, при которых в множестве решений неравенства $(p - 2)x + 2p - x^2 \geqslant 0$ не содержится ни одного натурального числа.

Решение. а) Корни квадратного трехчлена можно найти устно: p, 7. Далее надо рассмотреть по отдельности два возможных случая: $p < 7$, $p > 7$.

Если $p < 7$, то решение неравенства таково: $p < x < 7$. Этому множеству должны принадлежать ровно три натуральных числа — это числа 4, 5, 6; число 3 уже не должно быть решением неравенства. Значит, $3 \leqslant p < 4$.

Если $p > 7$, то решение неравенства таково: $7 < x < p$. Этому множеству должны принадлежать ровно три натуральных числа — это числа 8, 9, 10; число 11 уже не должно быть решением неравенства. Значит, $10 < p \leqslant 11$.

б) Есть смысл переписать заданное неравенство в более удобном виде: $x^2 - (p - 2)x - 2p \leqslant 0$. Корни квадратного трехчлена таковы: p, -2.

Если $p = -2$, то заданное неравенство принимает вид $(x + 2)^2 \leqslant 0$, натуральных решений оно не имеет, значение $p = -2$ следует включить в ответ.

Если $p < -2$, то решение заданного неравенства таково: $p \leqslant x \leqslant -2$, натуральных решений нет, значения $p < -2$ следует включить в ответ.

Если $p > -2$, то решение заданного неравенства таково: $-2 \leqslant x \leqslant p$, натуральных решений не будет, если $p < 1$.

Итак, $p = -2$, $p < -2$, $-2 < p < 1$.

В итоге получаем $p < 1$.

21.10. е) Постройте график функции $y = \dfrac{-6-3x}{x+3}$.

Решение. Имеем:

$$y = \frac{-6-3x}{x+3} = \frac{(-3x-9)+3}{x+3} = \frac{-3(x+3)+3}{x+3} = -3 + \frac{3}{x+3}.$$

Графиком функции $y = -3 + \dfrac{3}{x+3}$ является гипербола типа $y = \dfrac{3}{x}$, привязанная к вспомогательным осям, которыми служат прямые $x = -3$, $y = -3$.

21.13. б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{3x^2-27}{x^3-9x}$. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p^2 - 2p$ не имеет корней.

Решение. $f(x) = \dfrac{3(x^2-9)}{x(x^2-9)} = \dfrac{3}{x}$, $x \neq \pm 3$. Речь идет о решении уравнения $\dfrac{3}{x} = p^2 - 2p$, т. е. $x = \dfrac{3}{p(p-2)}$. Это уравнение не имеет корней при $p = 0$, $p = 2$, а также в тех случаях, когда $\dfrac{3}{p^2-2p} = 3$, $\dfrac{3}{p^2-2p} = -3$.

Ответ: $0, 1, 2, 1 \pm \sqrt{2}$.

25.17. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = |x| + |x - 5|$. При каких значения параметра p график функции $y = f(x)$ и прямая $y = p$:

а) имеют одну общую точку;

б) имеют две общие точки;

в) имеют одну или две общие точки;

г) не имеют общих точек;

д) имеют хотя бы одну общую точку;

е) имеют более двух общих точек?

Решение. Если $x < 0$, то $y = -x - x + 5 = 5 - 2x$; если $0 \leqslant x < 5$, то $y = x - x + 5 = 5$; если $x \geqslant 5$, то $y = x + x - 5 = 2x - 5$. Таким образом, речь идет о построении графика кусочной функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2x, \ x < 0, \\ 5, \ 0 \leqslant x < 5, \\ 2x - 5, \ x \geqslant 5. \end{cases}$$

График представлен на рисунке 8.

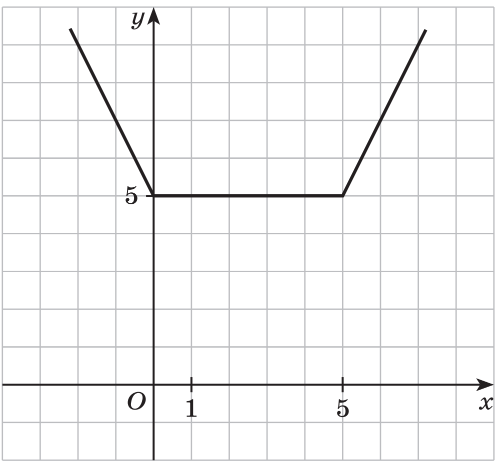

Рис. 8

С помощью графика отвечаем на вопросы задачи.

График функции $y = f(x)$ и прямая $y = p$:

а) ни при каких значениях p не имеют только одну общую точку;

б) имеют две общие точки при $p > 5$;

в) имеют одну или две общие точки при $p > 5$;

г) не имеют общих точек при $p < 5$;

д) имеют хотя бы одну общую точку при $p \geqslant 5$;

е) имеют более двух общих точек при $p = 5$ (бесконечное множество общих точек, расположенных на ветви графика, параллельной оси абсцисс).

27.10. Для последовательности Фибоначчи докажите, что: в) $y_{n+3} > 3y_n$, $n > 1$.

Решение. Последовательность Фибоначчи возрастает, значит,

$$y_{n+1} > y_n;\ y_{n+2} = y_{n+1} + y_n > y_n + y_n = 2y_n;$$
$$y_{n+3} = y_{n+2} + y_{n+1} > 2y_n + y_n = 3y_n.$$

29.10. Докажите, что если числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ в заданном порядке образуют конечную арифметическую прогрессию, то верно равенство:

а) $ab + bc + ac = 3ac$; б) $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$.

Решение. а) Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, для чисел $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ выполняется соотношение $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$. Отсюда следует, что $2ac = bc + ab$ и, соответственно, $3ac = bc + ab + ac$.

б) Поскольку $2ac = bc + ab$, то $\frac{ab}{ac} + \frac{bc}{ac} = \frac{2ac}{ac}$, т. е. $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$.

29.11. Докажите, что если числа $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b}$ в заданном порядке образуют конечную арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 также образуют конечную арифметическую прогрессию.

Решение. Имеем:

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b};$$
$$2(a + b)(c + b) = (a + c)(c + b) + (a + c)\,(a + b).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим: $a^2 + c^2 = 2b^2$, а это, согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, и означает, что числа a^2, b^2, c^2 образуют конечную арифметическую прогрессию.

31.26. В квадрат со стороной 32 см последовательно вписываются квадраты. Вершины каждого следующего квадрата являются серединами сторон предыдущего квадрата. Докажите, что периметры квадратов образуют геометрическую прогрессию. Запишите формулу n-го члена полученной прогрессии.

Решение. На рисунке 9 изображены исходный квадрат и первый вписанный в него квадрат.

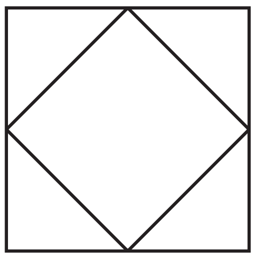

Рис. 9

Сторона внутреннего квадрата равна $16\sqrt{2}$ см, т. е. $\frac{32}{\sqrt{2}}$ см. Соответственно, и периметр внутреннего квадрата в $\sqrt{2}$ раз меньше периметра исходного квадрата. Та же ситуация сохранится и для второго вписанного квадрата по отношению к первому вписанному квадрату и т. д. Периметры образуют геометрическую прогрессию, у которой первый член равен 128, а знаменатель прогрессии равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Составим формулу n-го члена полученной прогрессии: $P_n = 128 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 2^{\frac{15-n}{2}}$.

31.27. В прямоугольник вписывается ромб, вершины которого являются серединами сторон прямоугольника. В полученный ромб аналогичным образом вписывается прямоугольник, а в него снова ромб и т. д. Докажите, что площади полученных фигур образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии.

Решение. На рисунке 10 изображены исходный прямоугольник со сторонами a и b, первый вписанный в него ромб и вписанный в ромб прямоугольник.

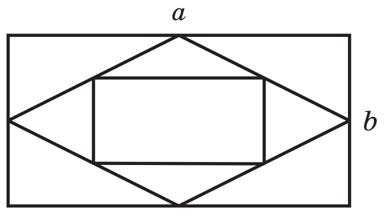

Рис. 10

Ромб получается из исходного прямоугольника отбрасыванием четырех прямоугольных треугольников с катетами $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, их суммарная площадь равна $\frac{ab}{2}$. Значит, площадь ромба вдвое меньше площади исходного прямоугольника.

Рассмотрим прямоугольник, вписанный в ромб, его стороны имеют длины $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, а площадь равна $\frac{ab}{4}$, она вдвое меньше площади ромба. Та же ситуация сохранится и для второго вписанного ромба по отношению к первому вписанному прямоугольнику и т. д.

Площади фигур образуют геометрическую прогрессию, у которой первый член равен ab, а знаменатель прогрессии равен $\frac{1}{2}$.

32.11. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если к первому из них прибавить 25, второе оставить без изменения, а третье разделить на 3, то получится конечная арифметическая прогрессия. Составьте геометрическую прогрессию, если второе число равно 60.

Решение. Три числа составляют геометрическую прогрессию b, 60, bq^2. По условию числа $b + 25$, 60, $\frac{bq^2}{3}$ составляют арифметическую прогрессию. Значит, задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} bq = 60, \\ b + 25 + \frac{bq^2}{3} = 120. \end{cases}$ Эта система имеет два решения: $b = 15$, $q = 4$; $b = 80$, $q = \frac{3}{4}$. Значит, искомые три числа таковы: 15, 60, 240 или 80, 60, 45.

32.12. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Если первое число удвоить, второе оставить без изменения, а третье увеличить на 6, то получится три последовательных члена геометрической прогрессии. Составьте арифметическую прогрессию, если второе число в 4 раза больше первого.

Решение. Три числа составляют арифметическую прогрессию a, $a + d$, $a + 2d$, причем $a + d = 4a$. По условию числа $2a$, $a + d$, $a + 2d + 6$ составляют геометрическую прогрессию. Значит, задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} a + d = 4a, \\ (a + d)^2 = 2a(a + 2d + 6). \end{cases}$ Эта система имеет два решения: $a = 0$, $d = 0$; $a = 6$, $d = 18$. Первая пара нас не устраивает, поскольку тогда в геометрической прогрессии будут члены, равные нулю, что противоречит определению геометрической прогрессии. Значит, искомые три числа таковы: 6, 24, 42.

32.13. Три числа, сумма которых равна 21, можно рассматривать как три последовательных члена некоторой геометрической прогрессии или как первый, второй и шестой члены некоторой арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

Решение. Пусть a — первый член арифметической прогрессии, о которой идет речь, а d — ее разность. По условию сумма первого, второго и седьмого членов этой прогрессии равна 21, это значит, что $a + (a + d) + (a + 5d) = 21$, т. е. $a + 2d = 7$. С другой стороны, числа a, $a + d$, $a + 5d$ образуют геометрическую прогрессию, значит, $(a + d)^2 = a(a + 5d)$. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} a + 2d = 7, \\ (a + d)^2 = a(a + 5d). \end{cases}$ Решив систему, получим $a = 1$, $d = 3$. Значит, первый, второй и шестой члены арифметической прогрессии таковы: 1, 4, 16, они и являются искомыми числами.

32.14. а) Числа x, y, z в указанном порядке образуют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии. Найдите эти числа.

б) Числа x, y, z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, а числа $x + y$, $y + z$, $z + x$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Решение. а) Поскольку числа x, y, z в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, выполняется соотношение $2z = x + y$. Поскольку числа x, y, z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, выполняется соотношение $y^2 = xz$. В итоге получаем систему уравнений $\begin{cases} 2y = x + z, \\ y^2 = xz. \end{cases}$

Имеем:

$$y = \frac{x+z}{2}, \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 = xz, (x + z)^2 = 4xz; x^2 - 2xz + z^2 = 0,$$
$$(x - z)^2 = 0, x = z.$$

Тогда и $y = x$.

Ответ: $x = y = z \neq 0$.

б) По условию числа $x + y$, $y + z$, $z + x$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, значит, $2(y + z) = (x + y) + (z + x)$, т. е. $y + z = 2x$. Далее числа x, y, z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, это значит, что $y = xq$, $z = xq^2$, где q — знаменатель прогрессии.

Разделив обе части уравнения $y + z = 2x$ почленно на x, получим $\frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 2$, т. е. $q + q^2 = 2$. Значит, либо $q = 1$, либо $q = -2$.

35.8. В июле клиент взял в банке кредит на сумму 100 000 р. под x % годовых. Условия погашения кредита таковы, что в конце очередного года начисляются проценты по кредиту, после этого выплачивается часть долга. Под какой процент был взят кредит, если известно, что он был полностью погашен за 2 года, причем в первый год было выплачено 65 000 р., а во второй 57 500 р.?

Решение. В конце первого года долг клиента составляет

$$\left(100\,000 + \frac{x}{100} \cdot 100\,000\right) \text{ р.}$$

65 000 р. он вернул, значит, в начале второго года он должен банку $(35\,000 + 1000x)$ р.

В конце второго года долг составил

$$(35\,000+1000x)+\frac{x}{100}(35\,000+1000x),$$

т. е. $(10x^2 + 1350x + 35\,000)$ р.

Клиент погасил долг, заплатив 57 500 р. Получили уравнение

$$10x^2 + 1350x + 35\,000 = 57\,500,$$
$$x^2 + 135x - 2250 = 0.$$

Нас интересует положительный корень этого уравнения, он равен 15.

Ответ: 15 %.

35.9. Клиент взял в банке кредит на сумму 11 млн р. под 20 % годовых. Условия погашения кредита таковы, что в конце года начисляются проценты по кредиту, после этого в течение месяца выплачивается часть долга. Сколько миллионов рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита, если кредит был полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за 2 года)? Какую сумму выплачивал клиент ежегодно?

Решение. В конце первого года долг клиента составил $11 + 0{,}2 \cdot 11 = 13{,}2$ млн р. Клиент вернул банку x млн р. и остался должен $(13{,}2 - x)$ млн р. В конце второго года после начисления процентов долг составил

$$13{,}2 - x + 0{,}2(13{,}2 - x) = (15{,}84 - 1{,}2x) \text{ млн р.}$$

В условии сказано, что клиент погасил долг, вернув во второй платеж банку ту же сумму, что и в первый раз. Таким образом, получаем уравнение $15{,}84 - 1{,}2x = x$, $x = 7{,}2$.

Ответ: общая сумма выплат составила 14,4 млн р.

Упражнения **36.1—36.15** — это упражнения на прямое использование факториалов и чисел C_n^k. Быть может, некоторое исключение составляет упражнение 36.9, иллюстрирующее пошаговый подход к решению классической олимпиадной задачи «Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 100?» (1940 г.).

36.9. На сколько нулей оканчивается число:

а) 5!;	в) 9!;	д) 15!;
б) 6!;	г) 10!;	е) 29! ?

Решение. За каждый из «последних» нулей числа отвечает пара 2 и 5 в разложении числа на простые множители. Ясно, что у числа $n!$ «двоек» в разложении на простые множители больше, чем «пятерок». Поэтому надо подсчитать число «пятерок». Для числа 29! получается по одной от множителя 5, от 10, от 15, от 20 и две «пятерки» от 25.

Ответ: 6.

37.14. В классе 22 красивых ученика, умных — 20 и из них половина — слишком умных, половина из которых к тому же и красивы. Всего в классе 30 учеников, и каждый из них или красивый, или умный (быть может, слишком). Какова вероятность того, что случайно вызванный по списку класса ученик:

а) и умный, и красивый;

б) умный, но не красивый;

в) красивый, но не умный;

г) и красивый, и слишком умный;

д) и красивый, и умный (но не слишком);

е) умен (но не слишком) и не красив?

Решение. Это упражнение на диаграммы Эйлера или же на формулу включений-исключений (8-й класс, § 2), которые и приводят к вероятности суммы событий.

а) Составим графическую модель с помощью кругов Эйлера. В «красном» круге — красивые, их 22. В «синем» круге — умные, их 20. В «сине-красном» пересечении кругов пусть будет z учеников. Тогда «красных, но не синих» учеников будет $22 - z$, а общее количество учеников равно $22 - z + 20$. По условию $22 - z + 20 = 30$, $z = 12$. Вероятность равна $\dfrac{12}{30} = 0{,}4$.

б) «Синих, но не красных» будет $20 - z = 8$. Вероятность равна $\dfrac{4}{15}$.

в) «Красных, но не синих» будет $22 - 12 = 10$. Вероятность равна $\dfrac{1}{3}$.

г) По условию есть 10 слишком умных, из которых 5 красивых. Вероятность $\dfrac{1}{6}$.

д) Уберем слишком умных. Останется $30 - 10 = 20$ учеников. Из них умных (но не слишком) — 10 и красивых, но не слишком умных — $22 - 5 = 17$. Значит, число красивых и при этом умных (но не слишком) равно $10 + 17 - 20 = 7$. Вероятность $\dfrac{7}{30}$.

е) Умных (но не слишком) и не красивых останется $10 - 7 = 3$. Вероятность 0,1.

38.12. В течение гонки биатлонист стреляет на четырех рубежах. На каждом из рубежей вероятность того, что он не промахнется ни разу, равна 0,8. Какова вероятность того, что он промахнется только на:

а) первом рубеже;
б) втором рубеже;
в) первом и втором рубежах;
г) одном рубеже;
д) двух рубежах;
е) трех рубежах?

Решение. «Успех» — отсутствие промахов на одном рубеже, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Имеется $n = 4$ повторения. Они по умолчанию *предполагаются* независимыми.

а) Р(НУУУ) = $0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}1024$.

б) Аналогично пункту а).

в) Р(ННУУ) = $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}0256$.

г) Речь о трех «успехах»,
$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 = 4 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$.

д) $P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 6 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}04 = 0{,}1536$.

е) $P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}008 = 0{,}0256$.

39.6. е) Рассмотрим случайную величину S — «число „орлов“, которые могут выпасть при трехкратном бросании монеты». Составьте таблицу распределения случайной величины $(2 - S)^2$.

Решение. С. в. S принимает каждое из значений 0 и 3 с вероятностью $\frac{1}{8}$ и принимает каждое из значений 1 и 2 с вероятностью $\frac{3}{8}$ (см. пример 7 из § 39). Так как

$$S = 0 \Rightarrow (2 - S)^2 = 4;$$
$$S = 1 \Rightarrow (2 - S)^2 = 1;$$
$$S = 2 \Rightarrow (2 - S)^2 = 0;$$
$$S = 3 \Rightarrow (2 - S)^2 = 1,$$

то с. в. $(2 - S)^2$ принимает значение 4 с вероятностью $\frac{1}{8}$, принимает значение 0 с вероятностью $\frac{3}{8}$ и принимает значение 1 с вероятностью $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 0{,}5$. Вот таблица:

0	1	4
0,375	0,5	0,125

39.7. е) Для с. в. из упражнения **39.6** «е» вычислите математическое ожидание.

Решение. Математическое ожидание равно

$$0 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}125 = 1.$$

39.10. е) Рассмотрим случайную величину T — «сумма очков, которые могут выпасть при двух бросаниях кубика». Составьте таблицу распределения случайной величины $|T - 3|$.

Решение. С. в. T — «сумма очков, которые могут выпасть при двух бросаниях кубика» имеет такую таблицу распределения (см. упражнение 39.10 «а»).

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Вычтем из чисел первой строки по 3, а затем возьмем модули этих разностей. Получим

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

При этом вторую строку мы не меняли. В первой и третьей клетках стоят 1. Их следует объединить в одну клетку, сложив во второй строке соответствующие вероятности $\frac{1}{36}$ и $\frac{3}{36}$. Больше никаких совпадений нет. Значит, для с. в. $|T - 3|$ получаем такую таблицу распределения.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

39.11. е) Для с. в. из упражнения **39.10** «е» вычислите математическое ожидание.

Решение. Математическое ожидание равно:

$$\frac{0\cdot2+1\cdot4+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+5\cdot5+6\cdot4+7\cdot3+8\cdot2+9\cdot1}{36} =$$

$$= \frac{146}{36} = 4{,}0(5).$$

Дополнительные задачи

К главе 1

8. Найдите двузначное число, при делении которого на произведение его цифр в частном получится:

г) 5, в остатке 1;

е) 3, а остатка не будет.

Решение. Пусть x и y — цифры десятков и единиц. Математическая модель задачи — деление $10x + y$ на xy.

г) $10x + y = 5xy + 1$, $y - 1 = 5x(y - 2)$. Если $y = 2$, то $y = 1$ — противоречие. Если $y \neq 2$, то $y - 1$ кратно 5, т. е. $y = 1$ или $y = 6$. Случай $y = 1$ невозможен — правая часть не равна нулю. При $y = 6$ получаем $5 = 20x$, чего не может быть: x — целое число.

е) $10x + y = 3xy$, $10x = y(3x - 1)$. Пусть y кратно 5. Тогда $y = 0$, $x = 0$ или $y = 5$, $x = 1$.

Пусть $3x - 1$ кратно 5, т. е. равно 0, 5, 10, 15, 20, 25. Возможны только случаи $3x - 1 = 5$, $x = 2$, $y = 4$ и $3x - 1 = 20$, $x = 7$, $y = 3{,}5$.

Ответ: г) нет решений; е) 15 и 24.

14. 1) Пусть $(x;\ y;\ z)$ — пифагорова тройка. Проверьте, что следующие тройки также являются пифагоровыми:

а) $(x - 2y + 2z;\ 2x - y + 2z;\ 2x - 2y + 3z)$;

б) $(x + 2y + 2z;\ 2x + y + 2z;\ 2x + 2y + 3z)$;

в) $(-x + 2y + 2z;\ -2x + y + 2z;\ -2x + 2y + 3z)$.

2) Найдите пифагоровы тройки, которые получены из тройки:

а) (3; 4; 5) по правилу из пункта 1 «а»;

б) (5; 12; 13) по правилу из пункта 1 «а»;

в) (8; 15; 17) по правилу из пункта 1 «в».

Решение. Пункты 1 «а»—«в» решаются прямой проверкой, а 2 «а»—«в» — прямой подстановкой. Поразительно, но из тройки (3; 4; 5), в произвольном порядке применяя преобразования 1 «а»—«в», можно получить *вообще* все пифагоровы тройки! (Это сложная теорема.)

Проверим, например, тождество 1 «в»:

$$(-x + 2y + 2z)^2 + (-2x + y + 2z)^2 = (-2x + 2y + 3z)^2.$$

Сравним коэффициенты при удвоенных произведениях и при квадратах переменных:

— при x^2, y^2, z^2 получаем соответственно $1 + 4$ и 4, $4 + 1$ и 4, $4 + 4$ и 9;

— при xy, yz, xz получаем соответственно $-4 - 4$ и -8, $8 + 4$ и 12, $-4 - 8$ и -12. После приведения подобных получится $x^2 + y^2 = z^2$, что и дано по условию.

К главе 2

5. е) Обозначим $m(x)$ — наименьшее из чисел $f(x)$ и $g(x)$, а $M(x)$ — наибольшее из них. Решите неравенство $M(x) < 0$, если $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = 6x - x^2 - 8$.

Решение. Оси симметрии парабол совпадают, это прямая $x = 3$. Первая парабола — ветви направлены вверх, пересекает ось Ox при $x = 0$ и $x = 6$. Вторая парабола — ветви направлены вниз, пересекает Ox при $x = 2$ и $x = 4$. Точки пересечения парабол лежат ниже оси Ox. Значит, график функции $y = M(x)$ расположен ниже оси Ox при $0 < x < 2$, $4 < x < 6$.

12. е) Найдите все значения c, при каждом из которых оба числа $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$ являются решениями квадратного неравенства $cx^2 + 4x < 3c$.

Решение. Следует относительно c решить систему неравенств:

$$\begin{cases} c\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) < 3c, \\ c\cdot 2^2 + 4\cdot 2 < 3c; \end{cases} \quad \begin{cases} 9c - 12 < 3c, \\ 4c + 8 < 3c; \end{cases} \quad \begin{cases} c < 2, \\ c < -8. \end{cases}$$

Ответ: $c < -8$.

К главе 3

10. 1) Дробно-линейная функция $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{x+b}{cx+d}$, не определена при $x = 1$, имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$, а ее значение при $x = 2$ равно 7. Задайте функцию аналитически.

Решение. Поскольку функция не определена при $x = 1$, то $c + d = 0$. Поскольку функция имеет асимптоту $y = 2$, то отношение коэффициентов при x равно 2. Кроме того, известно значение функции при $x = 2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} c + d = 0, \\ \dfrac{1}{c} = 2, \\ 7 = \dfrac{2+b}{2c+d}, \end{cases}$$

$$c=\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{2},\ b=7\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)-2=\frac{3}{2}.$$

Поэтому

$$y=\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}},\ y=\frac{2x+3}{x-1}.$$

11. е) Для функции из предыдущего упражнения нарисуйте эскиз графика функции $y=\omega(x)$, если $\omega(x)=f(|x|)$.

Решение. Действуем по алгоритму.

1. Строим гиперболу $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$, начиная с асимптот $x=1$ и $y=2$.

2. Часть гиперболы левее оси Oy нам далее не нужна.

3. Часть гиперболы правее оси Oy отражаем симметрично относительно оси Oy. Получаем график искомой четной функции (выделен жирно на рисунке 11).

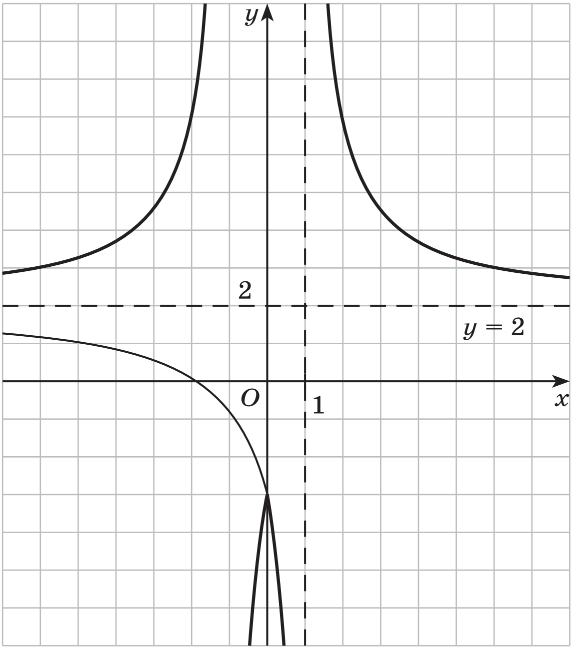

Рис. 11

К главе 4

4. Для последовательности $x_n = \left(n^{-1} - \sqrt{n^{-1} + n^{-2}}\right)^{-1}$ найдите:

д) n, если $x_n = -9$;

е) номер члена последовательности, который удален от числа $-3{,}5$ на наименьшее расстояние.

Решение. Начать следует с преобразований:

$$x_n = \left(\frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)^{-1} = \left(\frac{1 - \sqrt{n+1}}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{n}{1 - \sqrt{n+1}} \cdot \frac{1 + \sqrt{n+1}}{1 + \sqrt{n+1}} = \frac{n\left(1 + \sqrt{n+1}\right)}{1 - (n+1)} = -1 - \sqrt{n+1}.$$

д) $-1 - \sqrt{n+1} = -9$, $\sqrt{n+1} = 8$, $n = 63$.

е) Последовательность $\{x_n\} = \left\{-1 - \sqrt{n+1}\right\}$ убывает. Рассмотрим функцию $y = -1 - \sqrt{x+1}$. Ее значение равно $-3{,}5$ при $x = (3{,}5 - 1)^2 = 5{,}25$. Значит, к числу $-3{,}5$ ближе остальных членов последовательности расположены $x_6 = -1 - \sqrt{7} < -3{,}5$ и $x_5 = -1 - \sqrt{6} > -3{,}5$. Осталось выбрать из них, т. е. определить, что больше $-3{,}5 - x_6$ или $x_5 - (-3{,}5)$.

$$\sqrt{7} - 2{,}5 \vee 2{,}5 - \sqrt{6}$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{6} \vee 5$$

$$13 + 2\sqrt{42} \vee 25$$

$$\sqrt{42} > 6$$

Значит, x_5 ближе к $-3{,}5$, чем x_6 и остальные члены последовательности.

9. Восьмого марта Карл украл у Клары несколько кораллов. Кражи продолжались через три дня на четвертый, и каждый раз крали на 5 кораллов меньше, чем в предыдущий день. За март было украдено 195 кораллов. Найдите:

а) последний день в марте, когда произошла кража;

б) количество дней в марте, когда происходили кражи;

в) первый апрельский день кражи;

г) последний апрельский день кражи;

д) количество всех дней кражи;

е) общее количество украденных кораллов.

Решение. Пусть a — число кораллов, украденных Восьмого марта. Составим «график краж».

Дата	8.03	12.03	16.03	20.03	24.03
Кораллы	a	$a-5$	$a-10$	$a-15$	$a-20$

Дата	28.03	1.04	5.04	9.04
Кораллы	$a-25$	$a-30$	$a-35$	$a-40$

По условию

$$a+(a-5)+(a-10)+(a-15)+(a-20)+(a-25)=195,$$
$$6a=270,\ a=45.$$

Далее краж быть не могло, так как 13.04 надо было бы украсть $45-45=0$. Получаем ответы:

а) 28.03; б) 6; в) 1.04; г) 9.04; д) 9;

е) $225=45+40+35+30+25+20+15+10+5$.

К главе 5

9. На столе стоят одинаковые коробки. Среди них 5 пустых, 3 с призом и 2 с сюрпризом. Наудачу выбирают 3 коробки. Какова вероятность того, что:

а) все они пустые;

б) все они не пустые;

в) одна из них пустая, одна с призом и одна с сюрпризом;

г) две из них пустые, а одна с призом;

д) одна пустая и две с сюрпризом;

е) в них нет сюрприза?

Решение. Всего имеется $N=C_{10}^3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{6}=120$ элементарных событий (исходов).

а) Выбрать 3 коробки из пяти пустых можно $C_5^3=10$ способами. Вероятность равна $\dfrac{1}{12}$.

б) Так как не пустых коробок тоже 5, то и ответ тот же.

в) По правилу умножения число нужных э. с. равно $5\cdot 3\cdot 2=30$. Вероятность равна 0,25.

г) Выбрать 2 коробки из пяти пустых можно $C_5^2=10$ способами, а еще одну с призом — тремя способами. По правилу умножения $10\cdot 3=30$ э. с. Вероятность равна 0,25.

д) Для одной пустой коробки — 5 способов, для двух с сюрпризом — один. Вероятность равна $\dfrac{1}{24}$.

е) Событию «нет сюрприза» благоприятствуют все $C_8^3 = 56$ э. с., при которых выбирают 3 коробки из $10 - 2 = 8$. Вероятность равна $\frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

11. Для испытаний Бернулли из 4 повторений таблица распределения выглядит так.

4 «успеха»	3 «успеха»	2 «успеха»	1 «успех»	0 «успехов»
p^4	$4p^3q$	$6p^2q^2$	$4pq^3$	q^4

По этой таблице выразите через p и q вероятности событий:
а) более двух «успехов»;
б) менее двух «успехов»;
в) есть хотя бы один «успех»;
г) есть хотя бы одна «неудача»;
д) число «успехов» нечетно;
е) «неудач» больше, чем «успехов».

Решение. Во всех пунктах следует найти сумму соответствующих вероятностей из второй строки.

а) Событие «более двух успехов» есть сумма двух несовместных событий: «три успеха» и «четыре успеха». Вероятность суммы равна сумме вероятностей:

$$4p^3q + p^4 = p^3(4q + p).$$

Можно преобразовать и дальше, выразив ответ через p: $p^3(4 - 3p)$.

б) $4pq^3 + q^4 = q^3(4p + q)$.

в) Противоположное событие — это «нет ни одного успеха», т. е. 4 раза «неудача». Его вероятность равна q^4, а искомая вероятность соответственно равна $1 - q^4$.

г) Аналогично, $1 - p^4$.

д) $4pq^3 + 4p^3q = 4pq(p^2 + q^2)$ или $4pq(1 - 2pq)$.

е) Здесь другими словами описано событие из пункта «б».

14. е) Испытание с исходами «успех» и «неудача» повторяют 10 раз. Найдите вероятность «успеха» p, если математическое ожидание числа «неудач» равно $\sqrt{2}$.

Решение. По заключительной теореме в главе 5, математическое ожидание числа «неудач» равно nq. Значит,

$$\sqrt{2} = nq,\ \sqrt{2} = 10q,\ q = \frac{\sqrt{2}}{10},\ p = 1 - \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Содержание