

Глава 1

Язык и логика

§ 1. Искусство математических рассуждений

1. Искусство задавать вопросы



*Открытия в математике – это всегда озарения.
Ответ надо звать, и он приходит.*

Жак Адамар (1865–1963),
французский математик

В решении любой математической задачи присутствует частица открытия. Новая нестандартная задача заставляет перепробовать множество самых разных способов, а часто и придумывать новые. Задача, открывающая свою тайну только после многократных попыток ее решения, запоминается надолго, а сам процесс решения приносит огромное удовольствие. А значит, чем больше задач будет решено самостоятельно, тем больше занятия математикой будут приносить удовольствие.

Важную роль при построении математических рассуждений играет умение задавать «правильные» вопросы, то есть те вопросы, ответы на которые помогают продвигаться в поисках решения задачи.

Какие же вопросы могут помочь при решении задачи?

Одним из них является вопрос, помогающий определить конечную цель:

Что требуется найти в задаче?

При этом важно не только ответить на этот вопрос, но и понять, что представляет собой искомая величина, какие значения она может принимать.

После того как мы четко определили нашу цель, надо выяснить, какие данные у нас имеются, то есть ответить на вопрос:

Что нам дано?

Разобравшись с данными и разъяснив суть каждого используемого понятия, мы можем двигаться дальше.

Решение каждой задачи основывается на накопленном опыте и на тех знаниях о способах решения задач, которые были получены ранее, поэтому следующим вопросом, на который нужно найти ответ, будет вопрос:

Не была ли нами уже решена ранее задача с подобными неизвестными и исходными данными?

Ответ на данный вопрос поможет вспомнить все уже изученные ранее способы решения подобных задач и если для их решения раньше был уже придуман общий метод, то им можно воспользоваться опять.

Если задачи подобного типа еще не рассматривались и не удастся найти ответ на предыдущий вопрос, то бывает полезно задать себе следующий вопрос:

Какие данные нужны, для того чтобы найти неизвестное?

Отвечая на этот вопрос, мы исходное неизвестное заменяем на новые неизвестные, для поиска которых возможным окажется применение уже известных методов.

На следующем этапе важно провести анализ данных, то есть ответить на вопрос:

Для чего могут понадобиться исходные данные?

Данный вопрос позволит понять, что может быть определено по известным данным. Проанализировав известное, нам будет легче установить взаимосвязи между известным и неизвестным.

Нестандартная задача может быть сформулирована таким образом, что разобраться в ее условиях бывает достаточно непросто. Если условие громоздкое и запутанное, то полезно ответить на следующий вопрос:

Можно ли переформулировать исходную задачу?

Порой после переформулировки сложная, на первый взгляд, задача превращается в весьма простую.

Иногда сложную задачу можно разбить на несколько более простых, поэтому важно также ответить на вопрос:

Нельзя ли исходную задачу свести к решению нескольких более простых?

Приведенный список вопросов является лишь некоторой схемой, которая помогает только наметить план решения. Сам процесс решения может потребовать ответа на множество других вопросов. Но для того, чтобы начать решать задачу, полезным бывает составить первоначальный план действий, руководствуясь указанными вопросами. Возможно, первичный план поможет найти решение задачи на каком-то из его этапов. А возможно, предприняв все указанные попытки, мы так и не найдем решения задачи. Тогда нам надо будет задавать новые вопросы и искать новые пути решения. Но главное – начать действовать, так как именно в процессе действия рождаются новые идеи решения. А план нам поможет начать думать над задачей.

Итак, на основе рассмотренных вопросов мы можем составить следующий первоначальный план решения задачи.

Первоначальный план решения нестандартной задачи

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина и какие значения она может принимать.
2. Определить, что известно.
3. Попытаться найти аналогию между решенными ранее задачами и новой задачей, а затем использовать уже известный способ решения.
4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.
5. Провести анализ данных: определить, что может быть определено по известным данным.
6. Попытаться переформулировать исходную задачу, сделав ее более понятной.
7. Попытаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счете, приведет к решению исходной задачи.

Рассмотрим на примерах, как при решении задач могут быть использованы идеи данного плана.

Задача 1.

Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шел со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с.

Когда Миша и Маша выходили навстречу друг другу, их собака Тузик побежала от Миши к Маше. Добежав до Маши, она развернулась и побежала к Мише, и так она бегала, не останавливаясь, со скоростью 6 м/с от одного из них к другому, пока Миша не встретился с Машей. Сколько метров пробежала собака?

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Надо найти, сколько метров пробежала собака. Искомая величина – расстояние, положительная величина.

2. Определить, что известно.

Известно, что Миша и Маша вышли одновременно навстречу друг другу и прошли вместе расстояние 2500 м. Известны скорости их движения и скорость движения собаки. Известно, что собака бегала все время от начала движения детей и до их встречи.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решенными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Миша и Маша вышли одновременно и двигались навстречу друг другу. Их движение может быть описано известными формулами встречного одновременного движения. Так как собака двигалась с постоянной скоростью, то ее движение описывается также известной нам формулой движения $S = vt$, где S – путь, пройденный собакой, v – скорость движения собаки, а t – время ее движения.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Для того чтобы найти путь, который пробежала собака, нам достаточно определить время ее движения, так как ее скорость нам известна. Собака двигалась все время, пока Миша и Маша шли навстречу друг другу. Значит, время движения собаки равно времени движения детей. Найдя время движения детей, мы сможем найти время движения собаки, а значит, и путь, который она пробежала.

5. Провести анализ данных: определить, что может быть определено по известным данным.

Зная скорости движения детей и расстояние, которое они прошли при встречном одновременном движении, мы можем вычислить время их движения

$$t = \frac{2500}{1,6 + 0,9}.$$

6. Попытаться переформулировать исходную задачу, сделав ее более понятной.

Для того чтобы сделать задачу более простой, ее можно сформулировать, например, следующим образом:

«Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шел со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с. Все то время, что дети шли навстречу друг другу, их собака Тузик бегала со скоростью 6 м/с. Сколько метров пробежала собака?»

7. Попытаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счете, приведет к решению исходной задачи.

Решая нашу задачу, мы разбили ее на две более простые:
нахождение времени движения детей при встречном одновременном движении;
нахождение расстояния, пройденного собакой при движении с постоянной скоростью.
Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

$$1) \frac{2500}{1,6+0,9} = 1000 \text{ (с)} - \text{ время движения детей и собаки,}$$

$$2) 6 \cdot 1000 = 6000 \text{ (м)} = 6 \text{ (км)} - \text{ путь, который пробежала собака.}$$

Ответ: собака пробежала 6 км.

Задача 2.

Решите уравнение: $\frac{10x}{x+3} + \frac{11x}{x+3} = 7$.

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Нам надо найти все значения неизвестного x , при которых данное равенство превращается в истинное высказывание. Так как выражение $x + 3$ стоит в знаменателе дроби, то $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

2. Определить, что известно.

Нам известно, что x удовлетворяет указанному уравнению.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решенными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Мы уже умеем решать линейные уравнения вида $kx = c$, где k и c – некоторые рациональные числа. Заметим, что если мы обозначим $y = \frac{x}{x+3}$, то сможем записать уравнение в виде $10y + 11y = 7 \Leftrightarrow 21y = 7$.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Найдя y из линейного уравнения $21y = 7$, мы затем сможем найти x из равенства $y = \frac{x}{x+3}$, используя основное свойство пропорции.

Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

$$21y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x + 3 \text{ (} x \neq -3 \text{)} \Leftrightarrow 2x = 3 \text{ (} x \neq -3 \text{)} \Leftrightarrow x = 1,5 \text{ (} 1,5 \neq -3 \text{)}.$$

Ответ: {1,5}.

К

1

Сравните задачи. Наметьте план решения каждой из них. Что вы замечаете?

1) Из пунктов A и B одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени был в пути каждый из этих автомобилей?

2) Из пунктов A и B , расстояние между которыми 360 км, одновременно выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Через сколько времени они встретились, если первый затратил на весь путь 4 часа, а второй 12 часов?

3) Из пунктов A и B , расстояние между которыми 360 км, одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени после их встречи двигался каждый автомобиль до пункта назначения?

Как более простые задачи помогут в решении последней задачи? Сформулируйте идею, которая может пригодиться для решения сложных задач.

2

1) Проанализируйте уравнение:

$$\frac{2x-3}{x-6} = \frac{2x-1}{x-2}.$$

Алгоритм решения подобных уравнений вам еще неизвестен. Аналогия с каким из предложенных ниже уравнений поможет решить данное уравнение?

а) $\frac{5x-1}{x-2} = 0$; б) $\frac{2x}{5} = \frac{x-1}{3}$; в) $x-2 = 5$; г) $2x-3 = 2x-1$.

2) Сформулируйте идею, которая может пригодиться при выполнении «новых» заданий.

3

Сопоставьте идеи, сформулированные вами при выполнении заданий № 1 и № 2 с алгоритмом на стр. 4. Какие из шагов алгоритма вам удалось сформулировать самостоятельно?

4

Проанализируйте задачу:

«Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они встретились через 2 часа после выезда, а через 1 час после встречи первый велосипедист приехал в конечный пункт. Сколько времени понадобилось на весь путь второму велосипедисту?»

Аналогия с какой из приведенных ниже задач поможет решить эту задачу?

А) Мастер и ученик, работая вместе, делают всю работу за 2 часа. Мастер, работая один, будет выполнять эту работу на час дольше. За сколько времени эту работу выполнит ученик, если производительность каждого из них не меняется?

Б) Из пунктов A и B , расстояние между которыми составляет 243 км, навстречу друг другу выехали мотоциклисты. Скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости второго. С какой скоростью двигался каждый из них, если известно, что через 1 ч 48 минут они встретились?

Решите задачу с помощью найденной аналогии.

5

Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\frac{2x-5}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$; б) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-2} = 1$; в) $x^5 - x^3 = 0$; г) $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

6

Решите задачу И. Ньютона.

Купец ежегодно расходует 100 фунтов стерлингов на содержание семьи и приумножает остальной капитал на одну треть. Через три года он стал вдвое богаче. Как велик стал его капитал?

π

7

Решите задачу:

а) Один насос наполнил бассейн, а другой за это же время наполнил бассейн объемом на 600 м^3 больше. Определите объемы бассейнов, если один из насосов накачивает 70 м^3 в час, другой – 120 м^3 .

б) Ученики седьмых и восьмых классов получили в библиотеке 286 учебников, причем восьмиклассники получили на 20% больше, чем семиклассники. Сколько учебников получили восьмиклассники?

8

Является ли данное предложение высказыванием? Если является, то сформулируйте его отрицание. Какое из этих высказываний истинно?

- 1) Существуют числа, не являющиеся рациональными.
- 2) В прямоугольном треугольнике гипотенуза короче катета.
- 3) Л. Н. Толстой родился в 1828 году.
- 4) Если бы можно было не ходить в школу!
- 5) Для любого натурального числа n верно, что число $n^3 - n$ делится на 6.
- 6) Для любого натурального числа n число $n^3 - n$ делится на 5.
- 7) И. Ньютон сформулировал три фундаментальных закона механики.
- 8) Я учусь в восьмом классе.
- 9) Если бы я родился на год позже, то я бы сейчас учился в седьмом классе.
- 10) Через пять лет я буду учиться в институте.
- 11) Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой.
- 12) Вопросительное предложение не является высказыванием.

9

Для двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{\bar{B}} \Rightarrow \bar{\bar{A}}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

- 1) A : квадрат натурального числа n делится на 7;
 B : натуральное число n делится на 7.
- 2) A : квадрат натурального числа n при делении на 3 дает остаток 1;
 B : натуральное число n при делении на 3 дает остаток 1.
- 3) A : квадрат натурального числа n при делении на 7 дает остаток 2;
 B : натуральное число n при делении на 7 дает остаток 4.
- 4) A : число $n!$ делится на 13;
 B : натуральное число n больше 11.

10

Вычислите устно:

а) $0,6 \cdot \frac{2}{3}$	б) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$	в) $-0,25 \cdot \frac{4}{7}$	г) $(0,6)^2$
$: (-0,08)$	$: (-1,2)$	$-2\frac{6}{7}$	$: 0,04$
$+ 3\frac{12}{17}$	$-(-7\frac{1}{5})$	$: 0,02$	$-\frac{3}{5}$
$\cdot \left(-3\frac{1}{11}\right)$	$-11,8$	$+155$	$-4,4$
$?$	$?$	$?$	$?$

11

Найдите значение выражения:

- а) $3 \cdot 0,8 \cdot 0,0005$;
- б) $1,2 \cdot 0,07 \cdot 0,5$;
- в) $-0,4 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$;
- г) $1\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{6}\right) \cdot (-0,6)$;

д) $\left(-3\frac{5}{6}\right) \cdot 0,4 \cdot 1\frac{1}{23};$

е) $0,3 \cdot \left(-7\frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{19};$

ж) $\frac{7}{9} + \frac{2}{9} \cdot 0,9;$

з) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0,6;$

и) $4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 3 - 9\frac{1}{6};$

к) $\frac{13}{15} - 2\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2\frac{2}{5};$

л) $2\frac{3}{4} + \left(3\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10}\right) \cdot 1\frac{1}{4};$

м) $\left(2,125 \cdot 1\frac{15}{17} - 1\frac{7}{12}\right) : 7,25.$

12 Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{x}{\left(7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : 1\frac{4}{5}\right) : 0,35} = \frac{\left(-6\frac{7}{8} + 1,375 - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73\right) : (-1,73)}{7\frac{1}{5} : 2,4}.$$

13 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $1\frac{1}{3};$ в) $-2\frac{2}{3};$ д) $3\frac{5}{6};$ ж) $4\frac{4}{5};$

б) $1\frac{44}{45};$ г) $2\frac{61}{90};$ е) $-17\frac{28}{225};$ з) $-5\frac{15}{22}.$

14 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 3,(6); в) 94,32(1); д) -7,2(72);
б) 0,(13); г) -7,0(7); е) 17,01(32).

15 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является значение выражения:

а) $-5 \cdot 7^{24};$ б) $(-5 \cdot 7)^{18};$ в) $5 \cdot (-7)^7;$ г) $-(5 \cdot 7)^8.$

16 Расположите числа в порядке возрастания и расшифруйте фамилию автора высказывания: «Счастье не в том, чтобы делать всегда, что хочешь, а в том, чтобы всегда хотеть того, что делаешь».

О $\left(\frac{1}{8}\right)^{100};$ **С** $3,5^0;$ **Т** $-7^{22};$ **Л** $(-1)^{73};$ **Й** $(-8)^{30};$ **О** $(-2)^{19};$ **Т** $\left(\frac{1}{8}\right)^{101}.$

Как вы понимаете это высказывание, согласны ли вы с ним?

17 Во сколько раз изменится объем куба, если его ребро увеличить:

а) в два раза; б) в три раза; в) в четыре раза; г) в пять раз?

18 Найдите значение выражения:

а) $(-3)^3 - (-1)^6 + 5^2 + 7;$ б) $(0,125)^6 \cdot 8^8;$ в) $\frac{4^3 \cdot 2^5}{8^3};$

г) $(-1)^9 - (-1)^5 - (-1)^4;$ д) $\frac{(0,1)^3 \cdot (0,1)^8}{(0,1)^9};$ е) $\frac{18^{15}}{9^{14} \cdot 2^{16}};$

ж) $2^5 \cdot (0,5)^3$;

з) $\frac{(5^2)^3 \cdot 5^{10}}{(5^3)^5}$;

и) $\frac{2^n \cdot 7^n}{14 \cdot 14^n}$;

к) $(0,25)^3 \cdot 4^3$;

л) $\frac{7^9 \cdot 49^3}{7^{14}}$;

м) $\frac{10^{n+1}}{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}$.

19

Найдите значение выражения:

$$\frac{(36^2 : 6^3) \cdot 5^{15} \cdot 2^7 \cdot (2^9)^2 \cdot \left(\frac{35^{36}}{35^{30}}\right)}{14^5 \cdot (3^{20} : 3^{17}) \cdot 5^{20} \cdot 2^{23}} + (11,1)^0.$$

20

Эстафета. Выполнение заданий начинается с первого номера, верный ответ каждого задания показывает номер задания, которое надо выполнить следующим. Посоревнуйте со своим соседом по парте. В эстафете выигрывает тот, кто первым называет правильный ответ последнего задания.

1. Решить уравнение: $(x+1)^3 = 64$.

2. Вычислить: $\frac{(5^8)^3 \cdot 5^5}{(5^2)^{10} \cdot (5^4)^2}$.

3. Решить уравнение: $5^{2n} = 625$.

4. Вычислить: $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^6$.

5. Вычислить: $-5^2 + (-5)^2 + 4$.

D

21 Решите задачу:

«Для трех кроликов на 2 дня накопили 12 кг травы. Сколько травы нужно заготовить на 3 дня для 7 кроликов, если каждый кролик в день съедает одинаковое количество сена?».

Какой из шагов плана решения нестандартной задачи подал вам основную идею для ее решения?

22

Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^2} = -4$;

б) $x^3 + 8x^2 + 15x = 0$.

23

Решите задачу:

а) Моторная лодка развивает скорость в стоячей воде 15 км/ч. Рыбак проплыл на ней против течения реки 30 ч, а затем вернулся на прежнее место за 20 ч. Какова скорость течения реки?

б) В цехе поставили автоматический станок, производительность которого выше производительности рабочего на 95 деталей в час. За 18 минут автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

в) Морской круизный лайнер должен был преодолеть расстояние между портами за 10 ч. Спустя 8 часов после отправления он увеличил скорость на 5 км/ч, поэтому в порт пришел раньше на 15 минут. С какой скоростью должен был плыть лайнер?

24

Из двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

1) A : квадрат натурального числа n делится на 5;

B : натуральное число n делится на 5.

2) A : квадрат натурального числа n при делении на 5 дает остаток 1;

B : натуральное число n при делении на 5 дает остаток 1.

3) A : натуральное число n больше 10;

B : число $n!$ делится на 3.

4) A : числа m и n целые;

B : сумма чисел m и n — целое число.

25

Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \left(3,6 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0,6;$$

$$\text{в) } (3,4 \cdot 2,8 - 7,15) : 0,01;$$

$$\text{б) } 12\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3} \cdot \left(3,2 - \frac{1}{5}\right);$$

$$\text{г) } 7\frac{3}{4} \cdot \left(-2\frac{2}{31}\right) - \left(-5\frac{1}{6}\right) : 2\frac{7}{12}.$$

26

Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{12\frac{4}{5} \cdot 3,75 - 6\frac{2}{5} \cdot 3,125}{x} = \frac{3\frac{3}{5} : \frac{3}{45}}{7,2 + 0,8 \left(5,5 - 3\frac{1}{4}\right)}.$$

27

Запишите периодические десятичные дроби в виде обыкновенной:

$$\text{а) } -10,(27); \quad \text{б) } 1,0(27).$$

28

Вычислите:

$$\text{а) } (-5+3)^3;$$

$$\text{б) } (-5)^3 + 3^3;$$

$$\text{в) } 0,25^6 \cdot 4^8;$$

$$\text{г) } \frac{2^6 \cdot (2^3)^3}{2^{15}}.$$

29

Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \left(-0,2^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \cdot (8 - (-4)^3)\right) : (-0,1)^2;$$

$$\text{б) } \frac{55^4 \cdot (3^3)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 11}{(11^5)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (6:11)^5 \cdot 10^4}.$$

с

30* Прочитайте предложения:

A : Натуральное число n не делится на 7;

B : В представлении рационального числа $\frac{n}{7}$, где n — натуральное число, десятичной дробью имеется период из шести цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Из этих предложений сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Проведите доказательство методом от противного.

2. Необходимость и достаточность



*Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит.*

Михаил Ломоносов (1711–1765)
русский ученый-естествоиспытатель,
основатель Московского университета

Понятиями важными не только для грамотного проведения математических рассуждений, но и для построения любых рассуждений являются понятия «*необходимости*» и «*достаточности*».

В повседневной жизни мы часто используем слова «необходимо» и «достаточно». Например, «мне необходимо сделать домашнее задание» или «мне этого достаточно». При этом эти слова иногда употребляются в разных смыслах. Так, когда вы говорите, что для того чтобы дойти из дома до школы, вам необходимо 20 минут, то, скорее всего, вы имеете в виду, что за это время вы успеете дойти до школы. На самом деле вы хотите сказать, что на путь из дома до школы вам достаточно 20 минут. А когда вы говорите, что для того чтобы поехать во Францию вам нужна виза, вы имеете в виду, что без визы вас во Францию не пустят и здесь слово «необходимо» употребляется уже в другом смысле.

Так как математика не допускает нескольких различных толкований одного и того же понятия, нам важно разобраться с математическим смыслом этих слов.

Для этого рассмотрим следующее высказывание:

«Если Миша умеет читать по-английски, то он знает буквы английского алфавита». Это высказывание можно записать в виде $A \Rightarrow B$, где

- предложение A : «Миша умеет читать по-английски»,
- предложение B : «Миша знает буквы английского алфавита».

Данное высказывание можно переформулировать следующим образом: «Из того, что Миша умеет читать по-английски, следует, что он знает буквы английского алфавита». Это высказывание истинное.

А вот обратное высказывание: «Из того, что Миша знает буквы английского алфавита, следует, что он умеет читать по-английски» ложно.

Какое же условие является здесь необходимым, а какое достаточным?

Определение. Если высказывание $A \Rightarrow B$ истинно, то A называется **достаточным условием** для B , а B – **необходимым условием** для A .

Итак,

$A \Rightarrow B$ – истинное
 A достаточное условие для B
 B необходимое условие для A

В нашем случае истинно высказывание: «Из того, что Миша умеет читать, следует, что он знает буквы». Значит, *знание букв* – необходимо для *умения читать*, а *умение читать* – достаточно для *знания букв*.

Другими словами:

- для того чтобы Миша умел читать по-английски, необходимо, чтобы он знал буквы английского алфавита;
- для того чтобы Миша знал буквы английского алфавита, достаточно, чтобы он умел читать по-английски.

* * *

Чтобы определить, необходимым или достаточным является то или другое условие, мы можем использовать также диаграммы Эйлера–Венна. В качестве примера рассмотрим следующее высказывание: «Если натуральное число делится на 4, то оно делится на 2». Обозначим:

предложение A : «Натуральное число x делится на 4»,

предложение B : «Натуральное число x делится на 2».

Натуральное число, которое делится на 4, можно записать в виде произведения $4n = 2 \cdot 2n$, откуда ясно, что оно делится на 2. Значит, из предложения A следует предложение B ($A \Rightarrow B$), то есть условие B является необходимым условием для A , а A – достаточным условием для B .

Обозначим I_A множество всех x , при которых предложение A становится истинным высказыванием. Это *множество истинности* предложения A – множество натуральных чисел, кратных 4.

Обозначим I_B множество всех x , для которых предложение B становится истинным высказыванием. Это *множество истинности* предложения B – множество натуральных чисел, кратных 2.

Изобразим множества I_A и I_B на диаграмме Эйлера–Венна. Множество I_A является подмножеством множества I_B , так как есть числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 4, например, 6. При этом все числа, делящиеся на 4, делятся на 2 (рис. 1).

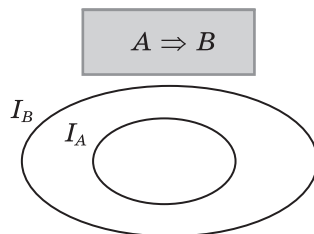


Рис. 1

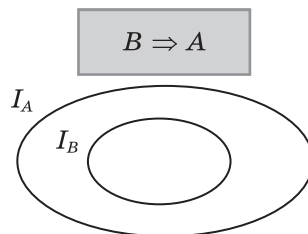


Рис. 2

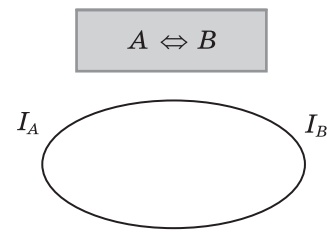


Рис. 3

На рисунке 2, наоборот, множество I_B является подмножеством множества I_A ($I_B \subset I_A$), тогда A будет необходимым условием для B , а B – достаточным для A : $B \Rightarrow A$.

В каких же случаях условие A будет необходимым и достаточным для B ?

Согласно нашему определению, для этого нужно, чтобы были истинными оба следствия: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. При этом, если A является необходимым и достаточным условием для B , то и B является необходимым и достаточным условием для A , а множества их истинности совпадают (рис. 3).

Как мы уже знаем, в этом случае говорят, что такие предложения *равносильны*, то есть $A \Leftrightarrow B$ ¹. Другими словами, можно сказать, что для того чтобы выполнялось A , *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялось B .

Таким образом,

A является достаточным условием для B , если $I_A \subset I_B$;

A является необходимым условием для B , если $I_B \subset I_A$;

A является необходимым и достаточным условием для B , если $I_A = I_B$.

¹ *Равносильные* предложения называются также *эквивалентными*; применяется обозначение $A \sim B$.

Рассмотрим еще несколько примеров для того, чтобы разобраться, какие условия являются необходимыми, какие достаточными, а какие необходимыми и достаточными.

Пример 1.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того что бы сумма двух целых чисел была четным числом, ..., чтобы каждое слагаемое было четным числом».

Решение:

Исходное высказывание состоит из двух предложений A и B , где:

A : «Сумма двух целых чисел четное число»,

B : «Каждое слагаемое четное число».

Определим истинность высказываний $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

$A \Rightarrow B$: Высказывание ложно, так как из того, что сумма двух целых чисел число четное, не следует, что каждое слагаемое число четное. Например, сумма двух нечетных чисел также число четное.

$B \Rightarrow A$: Высказывание истинно, так как по свойству делимости, если слагаемые четные, то и их сумма число четное.

Согласно определению необходимости и достаточности условий: A – является необходимым условием для B , а B – достаточным для A . Поэтому верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы сумма двух целых чисел была четным числом, достаточно, чтобы каждое слагаемое было четным числом».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить слово «достаточно».

* * *

Пример 2.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того чтобы число делилось на 9, ..., чтобы оно делилось на 3».

Решение:

Исходное высказывание состоит из двух предложений C и D , где:

C : Число делится на 9;

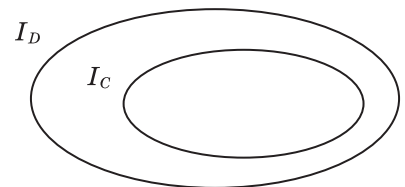
D : Число делится на 3.

Нарисуем диаграмму Эйлера–Венна для множеств истинности I_C предложения C (множество всех чисел, кратных 9) и I_D предложения D (множество всех чисел, кратных 3).

Множество всех чисел, кратных 9, является подмножеством множества всех чисел, кратных 3: $I_C \subset I_D$. Значит, D – необходимое условие для C . Поэтому верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы число делилось на 9, необходимо, чтобы оно делилось на 3».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить слово «необходимо».



Пример 3.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того чтобы было истинно равенство $x + 3 = 5$, ..., чтобы x равнялось 2».

Решение:

Исходное предложение состоит из двух предложений P и Q , где:

P : «Сумма $x + 3$ равна 5»,

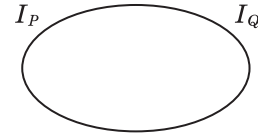
Q : « x равен 2».

Нарисуем диаграмму Эйлера–Венна для множеств истинности I_P предложения P (множество решений уравнения $x + 3 = 5$) и I_Q предложения Q (множество решений уравнения $x = 2$).

Уравнение $x + 3 = 5$ имеет единственный корень $x = 2$. Поэтому множества истинности высказываний P и Q совпадают. Значит, верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы было истинно равенство $x + 3 = 5$, необходимо и достаточно, чтобы x равнялось 2».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить словосочетание «необходимо и достаточно».



К

31

Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте.

а) A : Натуральное число n при делении на 3 дает остаток 1.

B : Квадрат натурального числа n при делении на 3 дает остаток 1.

б) Пусть n – натуральное число.

A : n – четное число;

B : $n^3 - n$ делится на 6.

в) A : Сумма цифр натурального числа n делится на 3.

B : Натуральное число n четно.

г) A : Натуральное число a четно.

B : Натуральное число a является квадратом четного числа.

д) A : Натуральное число n больше, чем 5.

B : Для натурального числа n произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ больше, чем 1000.

32

1) Является ли верным высказывание: «Если на улице листопад, то сейчас осень»?

2) Переформулируйте это высказывание:

а) с помощью слова «необходимо»,

б) с помощью слова «достаточно».

Можете ли вы обосновать свои варианты?

3) Найдите в тексте учебника определение, с помощью которого можно выполнить данное задание. Оказались ли верными предложенные вами варианты?

33

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы целое число a являлось квадратом четного числа, ..., чтобы целое число a делилось на 4.

б) Для того чтобы целые числа a и b были равны, ..., чтобы квадраты целых чисел a и b были равны.

в) Для того чтобы натуральное число n делилось на 3, ..., чтобы натуральное число n делилось на 21.

г) Для того чтобы разность двух целых чисел a и b делилась на 5, ..., чтобы каждое из чисел a и b делилось на 5.

 π

34 Возведите в степень:

а) $(t-1)^2$; б) $(y^2+5x^2)^2$; в) $(t+1)^3$; г) $(y^2-5x^2)^3$.

35

Используя формулы сокращенного умножения, вычислите:

а) $91 \cdot 89$; г) 61^2 ; ж) $\left(2\frac{13}{15}\right)^3 + 3 \cdot \left(2\frac{13}{15}\right)^2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot 2\frac{13}{15} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^3$;
 б) $48 \cdot 52$; д) 39^2 ; з) 21^3 ; к) $(4-0,1)(4^2+4 \cdot 0,1+0,1^2)$;
 в) $73 \cdot 67$; е) $\left(29\frac{29}{30}\right)^2$; и) 19^3 ; л) $11^3 - 1$.

36

Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $5k(k+3)(3-k)$; г) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}n-h\right) \left(\frac{1}{2}n+h\right) \cdot \left(\frac{1}{4}n^2-h^2\right)$;
 б) $(a+4)(-a-4) \cdot \frac{1}{16}a$; д) $3d \cdot \left(\frac{2}{3}d-3\right) \left(\frac{4}{9}d^2+2d+9\right)$;
 в) $(m+2)(-m-2)^2$; е) $1000000 \cdot (0,1-q)(0,1+q)(q^4+0,01q^2+0,0001)$.

37

Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{100d^6-t^2}{t-10d^3}$; д) $\frac{8k^3-125l^3}{25l^2+10kl+4k^2}$;
 б) $\frac{625x^4-y^4}{(y^2-25x^2)^2}$; е) $\frac{0,064q^3+0,216r^6}{0,16q^2-0,36r^4}$;
 в) $\frac{9a^2+16b^2-24ab}{4b-3a}$; ж) $\frac{7c-z}{343c^3-147c^2z+21cz^2-z^3}$;
 г) $\frac{\frac{1}{16}n^{10}+25m^4+2,5m^2n^5}{25m^4-\frac{1}{16}n^{10}}$; з) $\frac{81s^2+36sv+4v^2}{729s^3+486s^2v+108sv^2+8v^3}$.

38

Разложите на множители многочлен:

а) $15a-15b+a^2-ab$; д) $m^3n^6+6m^2n^4p^3+12mn^2p^6+8p^9$;
 б) $a^2(c+1)+4a(c+1)+4c+4$; е) $144a^2b^4-289p^6q^8$;
 в) $5s^2c+c^3+5sc^2+s^3$; ж) $64x^3+0,001y^{15}$;
 г) $48x^4m^5-72x^2y^3m^5+27y^6m^5$; з) $512m^6-8n^9$.

39

Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $a^2 - 10a + 9$;

б) $b^2 - 12b + 11$;

в) $c^2 + \frac{1}{2}c - 3$.

D

40

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы сумма цифр натурального числа n делилась на 3, ..., чтобы число n делилось на 9.

б) Для того чтобы целые числа a и b были нечетными, ..., чтобы сумма целых чисел a и b являлась четной.

в) Для того чтобы одно из натуральных чисел a и b равнялось 1, ..., чтобы их наибольший общий делитель равнялся 1.

г) Для того чтобы натуральное число n делилось на 2 и на 3, ..., чтобы это число делилось на 6.

41

Используя формулы сокращенного умножения, вычислите:

а) $32 \cdot 28$;

б) 99^2 ;

в) 101^3 ;

г) $(11^2 - 0,5 \cdot 11 + 0,5^2) \cdot (11 + 0,5)$.

42

Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $a^2(a + 0,2)(0,2 - a)$;

в) $(d^3 + 2p^2)^2$;

д) $(a - 2b)^3$;

б) $(b^3 + 3c^2)(b^3 - 3c^2)$;

г) $\left(-q^4 + \frac{3}{4}r^2\right)^2$;

е) $\left(5s^3 + \frac{1}{5}z^2\right)^3$.

43

Упростите:

а) $(v^2 + 6k^3) \cdot (v^4 - 6v^2k^3 + 36k^6) - v^3 - 216k^9$;

б) $m^3 - \frac{1}{5}m - \left(m - \frac{1}{5}n\right) \cdot \left(m^2 + \frac{1}{5}mn + \frac{1}{25}n^2\right)$;

в) $(x^2 - 0,3y) \cdot (0,3y - x^2)^2 + 0,027y^3$.

44

Разложите на множители многочлен:

а) $3d^3 - 27d$;

г) $m^3 + 10m^2p^2 + 25mp^4$;

б) $z^3 - z^2 - 36z + 36$;

д) $343a^3q^6 - 125n^9l^3$;

в) $v^2 - h^2 + 8v - 8h$;

е) $b^{12} - b^8k + \frac{1}{3}b^4k^2 - \frac{1}{27}k^3$.

45

Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $k^2 + 6k - 40$;

б) $25b^2 - 10bt - 8t^2$.

46

Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{x^{26}y^{30} + x^{15}y^{48}}{x^{25}y^{28} + x^{14}y^{46}}$;

б) $\frac{8q^3 + 0,001m^9}{4q^2 - 0,01m^6}$;

$$в) \frac{25x^{16} - 25y^{10}}{(y^5 - x^8)^2};$$

$$г) \frac{\frac{1}{9}c + 9x}{\frac{1}{729}c^3 + \frac{1}{3}c^2x + 27cx^2 + 729x^3}.$$

С

47*

Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какие из них верные, а какие – ложные? Ответ обоснуйте.

а) А: Квадрат целого числа n отрицателен.

В: Целое число n делится на 3.

б) А: Квадрат целого числа n отрицателен.

В: Квадрат целого числа n – простое число.

в) А: Натуральное число n больше, чем 3.

В: Для натурального числа n числа n , $n + 2$, $n + 4$ – простые.

г) А: Целые числа x , y , z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^2$.

В: Целое число y равно 1.

д) А: Уравнение $ax = b$, где a и b – целые числа, имеет не менее двух целочисленных решений.

В: Целое число a равно 0.

е) А: Натуральное число n больше, чем 1.

В: Для натурального числа n число $n!$ нечетно.

3. Свойства и признаки. Критерии



Именно математика дает надежнейшие правила: кто им следует – тому не опасен обман чувств.

Леонард Эйлер (1707–1783),
выдающийся швейцарский математик

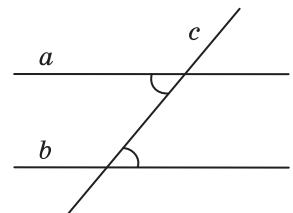
В предыдущем пункте мы учились проводить математические рассуждения, знакомясь с различными формулировками логического следования. Подобные логические формы крайне важны, потому что помогают развиваться математике, как науке, а нам помогают продвигаться в изучении этой науки.

В этом пункте мы продолжим разбираться с формой $A \Rightarrow B$. Эта работа поможет вам логически грамотно рассуждать, лучше понимать друг друга, а значит, быстрее и надежнее получать намеченный результат.

Рассмотрим два предложения:

А: Прямые a и b параллельны, прямая c не параллельна прямым a и b .

В: Внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c , равны.



Из курса геометрии мы знаем, что из предложения A следует предложение B , и эта теорема называется **свойством** параллельных прямых. Вспомним, как формулируется это свойство.

$$A \Rightarrow B$$

«Если прямые a и b параллельны, то внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c , равны».

Чтобы получить обратную теорему, поменяем условие и заключение местами: то есть из предложения B следует предложение A . Из курса геометрии мы знаем, что эта теорема тоже верна.

$$B \Rightarrow A$$

«Если внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c , равны, то прямые a и b параллельны».

Эта теорема называется **признаком** параллельности прямых.

Различие в названиях этих теорем объясняется тем, что **свойство** – это верное высказывание (или утверждение) об объектах, принадлежащих некоторому множеству. А **признак** позволяет установить принадлежность объектов к этому множеству. В геометрии свойства и признаки формулируются для различных фигур, в алгебре – для чисел, а в жизни – для решения практических, жизненно важных проблем.

В нашем случае свойство параллельных прямых утверждает, что для любых двух элементов (обозначим их m_1 и m_2), принадлежащих множеству параллельных прямых (обозначим его M), справедливо утверждение B .

Таким образом,

Свойством элемента $m \in M$ называют высказывание вида «Для каждого элемента t из множества M выполняется утверждение B »:

$$m \in M \Rightarrow B$$

Для чего нужны свойства? Установив, что некоторый элемент принадлежит определенному множеству, мы можем утверждать, что для него будет выполняться свойство, присущее *всем* элементам этого множества. Так, установив, что прямые параллельны, можно не мерить каждый раз внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении этих прямых третьей, а смело утверждать, что эти углы равны.

Признак параллельности прямых утверждает, что два элемента m_1 и m_2 , для которых справедливо утверждение B , будут принадлежать множеству параллельных прямых M .

Признаком принадлежности элемента t множеству M называют высказывание вида «Каждый элемент t , для которого выполняется утверждение B , принадлежит множеству M »:

$$B \Rightarrow t \in M$$

В отличие от свойств, признаки нужны для того чтобы устанавливать принадлежность объекта множеству. Это позволяет трудные или даже невыполнимые задачи сводить к легким. Так, в нашем примере, невозможно провести непосредственную проверку параллельности двух прямых – мы не можем продолжить их до бесконечности, чтобы установить, пересекаются они или нет. В признаке параллельности прямых эта неосуществимая на практике работа заменяется проверкой равенства двух определенных углов.

В алгебре признаки используются с той же самой целью. Например, чтобы выяс-

нить, является ли число 123456789101112...99100 четным, нужно разделить его на 2 и установить, что остаток от деления равен нулю. Пользуясь признаком делимости на 2, мы заменяем этот трудоемкий процесс простой проверкой четности его последней цифры. Таким образом, признаки позволяют установить принадлежность объектов определенному множеству путем всего лишь проверки некоторого условия.

Из определений свойства и признака ясно, что на математическом языке их можно записать в виде следования.

Свойство элементов множества M	$m \in M \Rightarrow B(m)$ – истинно
Признак принадлежности элементов множеству M	$B(m)$ – истинно $\Rightarrow m \in M$

Эта форма позволяет лучше разобраться в смысле утверждений, а, значит, облегчает их доказательство и применение. Однако предложения в форме следования нередко бывают неудобными для практического использования. В этом случае их заменяют более простыми красивыми формулировками.

Например, свойство равнобедренного треугольника, представленное в форме следования, позволяет легко понять, где условие теоремы (то есть, что дано), а где – заключение (что требуется доказать):

«Если треугольник принадлежит множеству треугольников с равными боковыми сторонами², то углы при его основании равны»

Однако это предложение звучит несколько громоздко. Поэтому обычно свойство равнобедренного треугольника формулируется кратко:

«В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Очевидно, что при работе с теоремами важно уметь переходить не только от развернутой формы к краткой, но и от краткой формы к развернутой «Если..., то...», а затем – и к математической записи теорем, используя введение обозначений. В следующей таблице представлены несколько примеров такого перехода.

Краткая форма	Развернутая форма	Математический язык
Вертикальные углы равны.	Если два угла принадлежат множеству пар вертикальных углов, то эти два угла равны.	$\angle A$ и $\angle B$ – вертикальные $\Rightarrow \angle A = \angle B$
Натуральное число, оканчивающееся на 0 или на 5, делится на 5.	Если натуральное число оканчивается на 5 или на 0, то оно принадлежит множеству чисел, которые делятся на 5.	n оканчивается на 0 или 5 $(n \in N) \Rightarrow n : 5$
Железные предметы притягиваются магнитом.	Если предмет принадлежит множеству железных предметов, то он притягивается магнитом.	$p \in M \Rightarrow p$ – притягивается магнитом (M – множество железных предметов)

² Здесь и далее под равенством отрезков понимается равенство их длин.

Развернутая форма записи позволяет легко установить, что в первом и третьем примерах приведены *свойства* (соответственно, вертикальных углов и железных предметов), а во второй строке – *признак* (делимости на 5). Математический язык облегчает не только понимание смысла теорем, но и построение теорем, обратных данным.

Теорема, обратная свойству вертикальных углов (первая строка таблицы), неверна, так как для утверждения «Равные углы вертикальны» легко подобрать контрпример. Точно так же неверна обратная теорема и для свойства железных предметов: например, магнитом притягиваются никель и кобальт (третья строка).

А вот теорема, обратная признаку делимости на 5 (то есть свойство делимости на 5), как мы знаем, верна: «Число, делящееся на 5, оканчивается на 0 или 5». На математическом языке это свойство можно записать так:

$$n : 5 \Rightarrow n \text{ оканчивается на } 0 \text{ или } 5 \ (n \in \mathbb{N})$$

Значит, имеет место равносильность условий:

$$n : 5 \Leftrightarrow n \text{ оканчивается на } 0 \text{ или } 5 \ (n \in \mathbb{N})$$



Таким образом, условие «натуральное число оканчивается на 0 или на 5» является своеобразной меркой, инструментом, средством, помогающим выявить *все без исключения* элементы, принадлежащие множеству чисел, кратных 5, и *только их!* Поэтому такие утверждения в математике называют *критериями* (от др.греч. κριτήριον – способность различения, средство суждения, мерило).

Критериями пользуются и в жизни. Так, например, знакомые вам критерии выставления отметок за проверочную работу однозначно определяют условия начисления того или иного балла.

Мы уже знаем, что знак $\Leftrightarrow$ переводится на русский язык с помощью оборотов «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «если и только если», «необходимо и достаточно». Поэтому признак (а точнее сказать, критерий) делимости числа на 5 мы формулировали так: «Натуральное число делится на 5 *тогда и только тогда*, когда оно оканчивается на 5 или 0» (но его можно формулировать и с любыми другими перечисленными выше оборотами).

Критерием принадлежности элемента t к множеству M называют высказывание вида «Элемент t принадлежит множеству M в том и только в том случае, когда для t выполняется условие B ».

$$t \in M \Leftrightarrow B$$

Ясно, что в любом свойстве условие B является *необходимым* условием для того, чтобы t принадлежал множеству M , в признаке – *достаточным*, а в критерии – *необходимым и достаточным*:

Свойство	Признак	Критерий
$t \in M \Rightarrow B$	$B \Rightarrow t \in M$	$t \in M \Leftrightarrow B$

Следовательно, не любое свойство или признак являются критериями. Так, приведенные выше свойства вертикальных углов и железных предметов, как уже было показано, критериями не являются. А вот равенство двух внутренних накрест лежащих углов, напротив, является критерием параллельности прямых, который можно сформулировать, например, так: «Чтобы две прямые a и b были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении этих прямых третьей прямой c , были равны».

Пример 1.

Даны высказывания:

A : Сумма двух целых чисел a и b четна.

B : Разность двух целых чисел a и b четна.

Докажите верность критерия $A \Leftrightarrow B$.

Доказательство:

1) Сформулируем критерий: «Чтобы сумма двух целых чисел a и b была четна, необходимо и достаточно, чтобы разность этих чисел была четна».

Чтобы доказать верность критерия, нужно убедиться в равносильности высказываний A и B , то есть доказать, что верны обе теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

2) Сформулируем теорему $A \Rightarrow B$: «Если сумма двух целых чисел a и b четна, то и разность чисел a и b будет четной».

Докажем эту теорему.

Разность $a - b$ можем представить в виде: $a - b - b + b = (a + b) - 2b$.

Сумма $a + b$ четна (по условию), тогда разность $(a + b) - 2b$ будет четной как разность двух четных чисел $a + b$ и $2b$. Теорема доказана.

3) Сформулируем теорему $B \Rightarrow A$: «Если разность двух целых чисел a и b четна, то и сумма чисел a и b будет четной».

Докажем эту теорему.

Сумму $a + b$ можем представить в виде: $a + b - b + b = (a - b) + 2b$.

Разность $a - b$ четна (по условию), тогда сумма $(a - b) + 2b$ будет четной как сумма двух четных чисел $a - b$ и $2b$. Теорема доказана.

К**48**

Сформулируйте утверждения, обратные данным.

а) Если $a : c$ и $b : c$, то $(a + b) : c$.

б) Если $a : c$ и $b : c$, то $ab : c$.

в) Если прямая линия является графиком прямой пропорциональности, то она проходит через начало координат.

г) Если два числа противоположны, то их квадраты равны.

д) Если число делится на 24, то оно делится на 6 и на 4.

Являются ли они верными?

49

Сравните утверждения:

A : Если число делится на 15, то оно делится на 3 и на 5.

B : Если число делится на 3 и на 5, то оно делится на 15.

Какое из этих утверждений можно назвать свойством делимости на 15, а какое признаком делимости на 15?

Объедините оба утверждения в одно. Как можно назвать полученное утверждение? Сопоставьте свои предположения с определениями на стр. 19–21.

50

Докажите, что предложения A и B равносильны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

а) A : Целые числа a и b дают одинаковые остатки при делении на натуральное число m .

B : Разность двух целых чисел a и b делится на натуральное число m .

б) A : Натуральные числа a и b взаимно просты.

B : Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b равно произведению ab .

в) А: Сумма цифр натурального числа n делится на 3.

В: Натуральное число n делится на 3.

г) А: Натуральное число n делится на 11.

В: Сумма цифр натурального числа n , стоящих на четных местах (считая от первой), отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, делящееся на 11.

π

51 Решите уравнение:

а) $0,9(v+1)=0,2(v-6)$;

д) $\frac{5a+3}{6}=\frac{8a-5}{11}$;

б) $6(x-1)+12(3-2x)=45-17x$;

е) $\frac{m-4}{3}+\frac{m-8}{9}=1-\frac{m+1}{6}$;

в) $1=20y+15(3-y)-5(y+11)$;

ж) $(2z-3)(2z+3)-4z(z-5)=1$;

г) $12(1-z)-4=2(4z-3)-9z+14$;

з) $(t-5)^2+(11+t)(11-t)=3+t$.

52

Решите уравнение, раскладывая на множители многочлен:

а) $d^3-15d^2-4d+60=0$;

в) $k^2+11k+18=0$;

б) $x^3-8x^2-16x+128=0$;

г) $b^2-8b+15=0$.

53

Решите уравнение, содержащее модуль:

а) $|x+7|=15$;

д) $\left|\frac{1}{4}m-6\right|=0$;

б) $|2y+5|=-3$;

е) $|5t-4|=|8-t|$;

в) $-|1,5z+3|=-9$;

ж) $-|2x-4|=-|5-x|$;

г) $|16-3k|=-|2k+1|$;

з) $|3x+12|=|8x+3-10x-7|$.

54

На числовой прямой Ox изобразите следующие числовые промежутки, назовите их и запишите их обозначения:

а) $x \geq -8$;

в) $-5 < x < -1$;

д) $-7 < x \leq 2$;

б) $x < 3,8$;

г) $0 \leq x \leq 9,1$;

е) $\frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{2}$.

55

Запишите множество целочисленных решений неравенства:

а) $-8 < x < 1$;

б) $-8 \leq x \leq -1$

в) $0 < x \leq 8,7$;

г) $0 \leq x < 8,7$.

56

Решите неравенство:

а) $0,4x \geq -0,12$;

е) $4x+6(x-1) < 6x+4(2x-3)-8(0,5x+1)$;

б) $-\frac{2}{3}y \leq -\frac{5}{12}$;

ж) $\frac{2}{5}y-(0,8y-7) \geq 2(1,2y-1)-(2,8y+8)$;

в) $-10m+3,2 < -4,8$;

з) $-3a-0,3(a-5)+2 \geq 4,8(a+5)+6,5$;

г) $7a \geq 19a+6$;

и) $\frac{z}{8}-0,3 > 0,5$;

д) $2(3c+2)-4 \leq -5c-6(2c-0,5)$;

к) $-\frac{3s}{4}+3 < -\frac{s}{6}+\frac{2}{3}$.

Д

57 Докажите, что высказывания A и B равносильны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

а) A : Две последние цифры натурального числа n образуют двузначное число, делящееся на 25.

B : Натуральное число n делится на 25.

б) A : Натуральное число n четно.

B : Квадрат натурального числа n делится на 4.

58

Решите уравнение:

а) $3\left(3\frac{5}{6}q - \frac{2}{3}\right) + 7 - 2,5q = 6\left(\frac{3}{4} - q\right);$

е) $|6t - 2,4| = 1,2;$

б) $17 - (2z + 5) - 5z = 19 - 7\left(2\frac{2}{7} - z\right);$

ж) $|5x - 1,2| = -\frac{1}{4};$

в) $63d + 4(0,125 - 15d) = 0,5(1 + 6d);$

з) $|0,8 - 4x| = 0;$

г) $\frac{r - 7,6}{4} = \frac{4,5 + r}{5};$

и) $|2c - 6| = |4 - 3c + 2 - c|;$

д) $(k - 1)^2 + (5 - 2k)^2 - 5(3 + k)(k - 3) = -26;$

к) $-|3x + 6| = -|-7 + 4x + 2|.$

59

Решите уравнение, раскладывая на множители многочлен:

а) $a^3 + 7a^2 - 9a - 63 = 0;$

в) $h^2 - 8h + 12 = 0;$

б) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0;$

г) $c^2 + 9c + 18 = 0.$

60

Решите неравенство:

а) $14x - 7 \leq 0;$

е) $1,3q + 3\left(\frac{2}{3} - 0,6q\right) > 22 + 5(0,02q - 1);$

б) $-5y + 0,25 > 0;$

ж) $5 - \frac{0,75d + 1}{6} < -\frac{d}{8} + 1;$

в) $-2,4b + 3 > 10,2;$

з) $-\frac{a}{5} - 3 < \frac{a}{7} + 6;$

г) $-3 < 6(h - 9) + 27;$

и) $\frac{5 - 2b}{4} > 3b - \frac{9 - b}{6};$

д) $3t - (0,8 - 0,6t) + 1,5(7t - 8) \leq 1,2 - 0,9t;$

к) $\frac{3x + 7}{3} - 12 \geq \frac{2x + 5}{2} - 7.$

С

61* Докажите, что высказывания A и B эквивалентны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

A : Уравнение $ax + by = c$, где a, b, c — целые числа, причем $a \neq 0, b \neq 0$, имеет целочисленные решения x, y .

B : Целое число c делится на наибольший общий делитель чисел $|a|$ и $|b|$, где a, b — целые числа, $a \neq 0, b \neq 0$.