А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

АЛГЕБРА

7

КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М79

Мордкович, Александр Григорьевич

М79 Алгебра : 7 класс : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.

ISBN 978-5-906939-67-8

В пособии представлено содержание курса алгебры 7-го класса, примерное планирование учебного материала и методические рекомендации по всем главам учебника алгебры для 7-го класса. Содержание методических рекомендаций не унифицировано и зависит от важности и трудности темы, её методической новизны. Для традиционных тем авторы ограничиваются отдельными замечаниями, в других случаях разговор идёт на более серьёзном методическом и психолого-педагогическом уровнях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-906939-67-8

Содержание курса алгебры. 7 класс

Математический язык. Математические модели

Числовые и буквенные выражения. Выражение с переменной. Значение выражения. Подстановка выражений вместо переменных. Допустимые и недопустимые значения переменных. Арифметические способы решения текстовых задач на зависимость трёх величин (задачи на движение, на работу, на покупки), задачи на проценты. Математические модели, виды математических моделей: аналитическая модель, графическая модель. Математические модели реальных ситуаций.

Понятие степени с натуральным показателем. Свойства степеней. Умножение и деление степеней с одинаковым показателем.

Линейное уравнение с одной переменной. Количество корней линейного уравнения. Линейное уравнение как математическая модель реальных ситуаций. Линейные уравнения с параметром.

Координатная прямая, координаты точки на прямой, расстояние между двумя точками координатной прямой. Числовые промежутки: аналитическая и геометрическая модели промежутков, их обозначение и название.

Линейная функция

Координатная плоскость, координатные углы, координаты точки на плоскости: абсцисса точки, ордината точки. Система координат, начало координат, ось абсцисс, ось ординат. Симметрия точек относительно координатных осей и начала координат. Уравнения прямых, параллельных координатным осям. Уравнения осей координат.

Линейные уравнения с двумя переменными, график линейного уравнения с двумя переменными. Линейная функция, график линейной функции, наименьшее и наибольшее значения функции, возрастание и убывание линейной функции. Прямая пропорциональность, её график. Изменение положения графика функции $y = kx$ с изменением значения коэффициента k. Угловой коэффициент прямой. Взаимное расположение графиков линейных функций. Графики реальных ситуаций.

Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Понятие системы уравнений. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Методы решения систем линейных уравнений: графический, метод подстановки, метод алгебраического сложения. Системы линейных уравнений как математические модели реальных ситуаций. Задачи на зависимость трёх величин, на смеси, растворы, сплавы, концентрации, проценты, отношения. Системы трёх линейных уравнений с тремя переменными. Системы уравнений с параметром.

Функция $y = x^2$

Функция $y = x^2$ и её график — парабола. Понятия «вершина параболы», «ветви параболы». Взаимное расположение графиков функций $y = x^2$ и $y = -x^2$. Область определения, область значений функции, наименьшее и наибольшее значения функции, возрастание и убывание. Графическое решение уравнений. Знакомство с функциональной символикой. Понятие кусочной функции. Построение графиков кусочных функций, чтение графиков (описание свойств функции по графику). Графическое исследование количества решений уравнения вида $f(x) = a$. *Построение графиков функций с выколотыми точками.*

Одночлены и многочлены

Понятие одночлена, стандартный вид одночлена. Сложение, вычитание, умножение одночленов, деление одночлена на одночлен, возведение одночлена в натуральную степень. Корректные и некорректные задания.

Понятие многочлена, стандартный вид многочлена, подобные члены многочлена, приведение подобных членов. Сложение и вычитание многочленов. Умножение многочлена на одночлен. Умножение многочлена на многочлен. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов, сумма и разность кубов. Деление многочлена на одночлен.

Разложение многочленов на множители

Разложение многочленов на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, способом группировки, с помощью формул сокращённого умножения, с помощью комбинации различных приёмов. Понятие алгебраической дроби, сокращение алгебраических дробей. Тождества, тождественные преобразования.

Описательная статистика

Ряды числовых данных. Упорядочение, группировка, таблицы. Ряды нечисловых данных. Таблицы распределения частот. Диаграммы распределений данных. Графическое представление данных. Столбчатые и круговые диаграммы. Числовые характеристики рядов данных. Паспорт данных: объём, размах, мода, медиана, среднее значение, дисперсия.

Итоговое повторение

Примерное поурочное планирование
(из расчёта 3 ч в неделю, 34 недели)

Параграф	Тема	Кол-во часов
Глава 1. Математический язык. Математические модели (17 ч)		
1	Числовые и алгебраические выражения	3
2	Понятие о математическом языке	2
3	Свойства степеней с натуральными показателями	3
4	Понятие о математических моделях	2
5	Линейные уравнения с одной переменной	3
6	Координатная прямая	1
7	Числовые промежутки на координатной прямой	2
	Контрольная работа № 1	1
Глава 2. Линейная функция (13 ч)		
8	Координатная плоскость. Координаты точки на плоскости	1
9	Координатная плоскость. Построение точки на плоскости по заданным координатам	1
10	Линейные уравнения с двумя переменными	1
11	График линейного уравнения с двумя переменными	3
12	Что такое линейная функция	2
13	Линейная функция $y = kx$	2

Продолжение таблицы

Параграф	Тема	Кол-во часов
14	Наименьшее и наибольшее значения линейной функции на заданном промежутке	1
15	Взаимное расположение графиков линейных функций	1
	Контрольная работа № 2	1
	Глава 3. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными (11 ч)	
16	Что такое система уравнений. Графический метод решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными	2
17	Решение систем линейных уравнений методом подстановки	3
18	Решение систем линейных уравнений методом алгебраического сложения	2
19	Системы линейных уравнений как математические модели реальных ситуаций	3
	Контрольная работа № 3	1
	Глава 4. Функция $y = x^2$ (8 ч)	
20	Парабола	3
21	Графическое решение уравнений	1
22	Что означает в математике запись $y = f(x)$	2
23	Познакомимся с кусочными функциями	2
	Глава 5. Одночлены и многочлены (17 ч)	
24	Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена	1

Продолжение таблицы

Параграф	Тема	Кол-во часов
25	Сложение и вычитание одночленов	1
26	Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень	1
27	Деление одночлена на одночлен	1
	Контрольная работа № 4	1
28	Понятие многочлена. Стандартный вид многочлена. Алгебраическая сумма многочленов	2
29	Умножение многочленов	3
30	Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности	2
31	Формулы сокращённого умножения: разность квадратов	2
32*	Формулы сокращённого умножения: разность кубов и сумма кубов	1
33	Деление многочлена на одночлен	1
	Контрольная работа № 5	1
Глава 6. Разложение многочленов на множители (11 ч)		
34	Разложение многочлена на множители методом вынесения общего множителя за скобки	2
35	Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения	3
36	Разложение многочлена на множители методом группировки	2

Окончание таблицы

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
37	Сокращение алгебраических дробей	2
38	Тождества и тождественные преобразования	1
	Контрольная работа № 6	1
Глава 7. Описательная статистика (13 ч)		
39	Ряды числовых данных. Упорядочение, группировка, таблицы	3
40	Ряды нечисловых данных. Таблицы распределения частот	3
41	Диаграммы распределений данных	3
42	Числовые характеристики рядов данных	3
	Контрольная работа № 7	1
Итоговое повторение		**12**

Методические особенности учебника «Алгебра. 7 класс»

Глава 1
Математический язык. Математические модели

Глава 1 занимает ключевое положение во всём курсе. От того, как учитель подаст её своим ученикам, во многом зависит их отношение к новому для них учебному предмету — алгебре. По большому счёту нельзя начинать изучение нового предмета, не упомянув его основную идею, на раскрытие которой фактически ориентирован весь курс. Поэтому учебник ориентирует учителя на то, чтобы спланировать уроки, отведённые на изучение главы 1, так, чтобы, повторяя материал курса математики 5—6-го классов, понемногу вводить новые термины «математический язык» и «математическая модель», не давая им, естественно, строгого истолкования (эти понятия будут постепенно уточняться и постоянно пополняться новым содержанием вплоть до 11-го класса). Главная забота учителя состоит в том, чтобы школьники привыкли к этим терминам и включили их в свой рабочий словарь.

В главе 1 появляется термин «алгоритм» как синоним понятий «программа действий» и «чётко определённый порядок ходов». При выработке алгоритмов полезно совместное творчество учителя и учащихся — в наших учебниках есть многочисленные образцы такой работы. Школьников следует постепенно и без нажима обучать схемам рассуждений, составлению и использованию алгоритмов, поскольку этим характеризуется современный стиль обучения математике практически на всех уровнях. Это не принижает творческой линии в математике и не делает менее значительным вклад математики в становление характера, мышления и общей культуры обучаемого, поскольку в типовых ситуациях поиск должен носить стандартизованный характер.

Согласно одному из положений теории поэтапного формирования умственных действий при выполнении любого умственного действия человек опирается на конкретную систему ориентиров, и одним из основных путей, которые психология рекомендует для формирования полноценного представления об изучаемом понятии, является вооружение детей ориентировочной основой действий с этим понятием для решения соответствующих задач.

Обучать составлению и применению алгоритмов можно в разных разделах школьного курса математики, при этом важно, чтобы была выдержана единая линия, чтобы учитель соблюдал и учитывал основные требования к алгоритмам как к программам действий для решения задач определённого типа:

• каждая такая программа должна состоять из конечного числа обязательных шагов (*детерминированность*), идущих в определённом порядке (*последовательность*), причём каждый шаг должен состоять из выполнимых операций (*реальность*);

• эта программа должна иметь чёткую ориентацию на вполне конкретный результат деятельности (*направленность*) и должна быть применима к любой задаче рассматриваемого типа (*массовость*).

В главе 1 многое учащимся уже известно из курса математики 5—6-х классов, но появляются и новые термины, символы, образы, делается методическая переоценка того, что было изучено в младших классах. Учащиеся вспоминают понятие координатной прямой, правило нахождения точки по заданной координате и правило отыскания координаты заданной точки. Расширяются представления учащихся о степени с натуральным показателем.

Несколько слов о § 3, посвящённом свойствам степеней с натуральными показателями. Учащиеся ещё не привыкли к таким терминам, как «определение», «теорема», «доказательство». Следовательно, от учителя требуются аккуратность, постепенность и определённая тактичность. Вряд ли целесообразно уже на этом этапе изучения курса требовать от всех учеников умения воспроизводить доказательства всех свойств. В то же время игнорировать эти доказательства не стоит, тактика учителя должна быть гибкой, а подход к учащимся — дифференцированным.

К числу новых терминов, символов, обозначений относятся виды числовых промежутков. Промежутки введены для того, чтобы в дальнейшем можно было работать с функциями на выбранной части области определения, например чтобы можно было корректно формулировать задание: найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке.

При работе с числовыми промежутками мы обращаем внимание на то, чтобы учащиеся непринуждённо связывали геометрическую и аналитическую модели промежутка, выбирали адекватное обозначение. От символической записи вида (3; 7) учащиеся должны уметь свободно перейти к геометрической модели — координатной прямой, на которой отмечены две светлые (незакрашенные) точки 3 и 7 и заштрихована часть прямой между ними, и к аналитической модели, т. е. к записи в виде двойного неравенства $3 < x < 7$. Точно так же от геометрической модели они должны уметь переходить к аналитической модели и к символической записи, а от аналитической модели — к геометрической модели и к символической записи. В учебнике имеется достаточное число примеров и упражнений на эту тему.

Глава 2
Линейная функция

В первых двух параграфах главы 2 идёт повторение всех терминов, связанных с декартовыми прямоугольными координатами на плоскости (абсцисса, ордината, ось абсцисс, ось ординат, начало координат, координатные углы). Известное учащимся правило отыскания координат точки на плоскости оформляется в виде алгоритма, при этом особо выделяются точки, лежащие на осях координат. Существенны два рассуждения, которые приводят к алгоритму отыскания точки по её координатам. Принципиально важно, чтобы ученики поняли, что точка $M(a; b)$ есть точка пересечения прямых $x = a$ и $y = b$.

Ключевым параграфом главы 2 является **§ 10** о линейном уравнении с двумя переменными. Это напрямую связано с идейным стержнем всего курса — с математическим моделированием реальных процессов. Всё-таки в действительности равномерные процессы чаще всего моделируются, выражаясь языком математического анализа, в неявном виде, т. е. в виде уравнения $ax + by + c = 0$, а не в явном виде, т. е. в виде линейной функции $y = kx + m$.

Поскольку определение функции будет дано только в 9-м классе, изменяется традиционная методика изложения темы «Линейная функция» — первой темы, связанной с понятием функции. Первой изучается тема «Линейные уравнения с двумя переменными» (**§ 10**). Рассматриваются задания следующего типа:

- найти какое-либо решение уравнения $ax + by = c$, например уравнения $2x + 3y = 5$;
- найти решение уравнения $2x + 3y + 5$, зная, что $x = 2$, или зная, что $y = 0$, и т. п.;
- построить график уравнения $x + y = 3$ и с помощью графика указать несколько решений этого уравнения.

В **§ 12** внимание учащихся обращается на то, что график линейного уравнения с двумя переменными проще строить, если уравнение преобразовано к виду $y = kx + m$, для которого употребляется термин «линейная функция».

Если тема «Линейные уравнения с двумя переменными» отработана достаточно надёжно, то с графиком линейной функции особых проблем не возникнет. Обратим внимание лишь на два обстоятельства. Первое обстоятельство — необходимость быстрого и уверенного перехода учеников от модели $ax + by + c = 0$ к модели $y = kx + m$. Второе обстоятельство связано с появлением терминов «наибольшее значение функции», «наименьшее значение функции», «возрастание-убывание». Как было отмечено в начале данного пособия, мы считаем не только возможным, но и полезным употребление школьниками начиная с 7-го класса некоторых терминов математического языка без знания строгих математических определений этих понятий. Например, учащимся предлагается построить график линейной функции $y = 2x + 4$, выделить его часть на отрезке $[1; 3]$, найти наибольшее и наименьшее значения линейной функции на этом отрезке. Примеры подобного рода позволят учителю решить сразу несколько проблем: во-первых, разнообразить систему упражнений; во-вторых, поставить учащихся в такие условия, когда построение графика является *не целью*, *а средством* для решения другой задачи, — такое смещение психологических акцентов способствует формированию навыков построения графика линейной функции; в-третьих, осуществить пропедевтику понятия наибольшего (наименьшего) значения функции. При этом надо видеть конечную цель: постепенно сформировать у учащихся понимание строгого определения указанного понятия (оно будет дано в 9-м классе), убедить их в том, что непрерывная функция на отрезке *всегда* достигает своего наибольшего и наименьшего значения (а на незамкнутом промежутке — не всегда).

Имеет смысл обратить внимание на одно принципиальное методическое обстоятельство. Учебник, о котором идёт речь, — это не пособие для самообразования, это, как всякий школьный учебник, книга, которую ученик читает вместе с учителем, а не вместо того, чтобы слушать преподавателя (ясно, что ни один учебник не может заменить живое слово учителя). Если бы это было пособие для самообразования, то авторам пришлось бы выстраивать в каждом параграфе достаточно объёмную систему примеров с решениями, полную как по охвату материала, так и по степени нарастания трудности. В данном случае этого нет, количество примеров с подробными решениями весьма ограниченно, причём большинство из них многофункционально. Значит, подход к разобранным в тексте примерам требует во многих случаях дополнительной подготовительной работы учителя. Во многих случаях примеры, разобранные в тексте того или иного параграфа учебника, задают ориентир, который определяет уровень обязательных результатов обучения.

Глава 3
Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

В наших учебниках первое представление о любом сколько-нибудь сложном понятии во многих случаях даётся задолго до того, как это понятие начинает систематически изучаться. Иногда систематическому изучению понятия предшествует не только первое, но и второе и даже третье представление о нём, т. е. понятие до своего определения диалектически развивается (точнее, не само понятие, а его восприятие учениками). В этом плане характерно начало главы 3. Кроме терминов «система уравнений» и, соответственно, «решение системы уравнений», учащимся к этому моменту всё известно, следовательно, и резкого «водораздела» между темами 2 и 3 здесь нет.

Весь **§ 16** строится как логическое следствие предшествующего изложения и как обоснование необходимости продвижения вперёд, поскольку старые знания в ряде случаев не обеспечивают успешного решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными. В остальном содержание главы 3 (метод подстановки, метод алгебраического сложения, задачи на составление систем двух линейных уравнений с двумя переменными) достаточно традиционно, хотя и не тождественно в методическом плане привычным способам подачи материала. В этом смысле следует обратить внимание:

- на равноправие трёх методов решения систем (графический метод, метод подстановки, метод алгебраического сложения);
- несколько упрощённую (по сравнению с другими школьными учебниками) методику изложения метода подстановки;
- стандартное (только для наших учебников) оформление решения текстовых задач в виде трёх этапов математического моделирования.

Глава 4
Функция $y = x^2$

Ранее мы уже отмечали, что основные математические модели курса алгебры 7-го класса — линейные уравнения с одной и двумя переменными и линейная функция, т. е. то, что связано с равномерными процессами. Поэтому появление в учебнике главы под названием «Функция $y = x^2$» требует комментариев.

Содержание этой главы включает в себя следующие темы:

- функция $y = x^2$ и её график;

- графическое решение уравнений;
- понятие о математической модели $y = f(x)$;
- кусочные функции.

Во-первых, функция $y = x^2$ изучается в 7-м классе для того, чтобы школьник, целый год изучавший курс алгебры, не закончил этот год с убеждением, что в природе существуют только линейные функции, надо приоткрыть ему двери в дальнейшие разделы математики.

Во-вторых, эта функция помогает более глубокому изучению линейной функции, вовлекая её в другие «игры»:

- графическое решение уравнений;
- построение графиков кусочных функций;
- функциональная символика;
- чтение графика.

В-третьих, изучение новых функций позволяет естественным образом подойти к одной из основных моделей всей математики — уравнению вида $y = f(x)$.

Обратим внимание на введение терминов «непрерывная функция» и «разрыв функции» в **§ 23**. В принципе свойство непрерывности функции в точке или на промежутке абсолютно понятно на наглядно-интуитивном уровне (график функции представляет собой сплошную линию). Поэтому представляется вполне оправданным употребление в 7-м классе термина «непрерывность» как эквивалента представления о сплошной линии, служащей графиком функции. На самом деле в математике всё обстоит, как говорится, с точностью до наоборот: график функции изображается в виде сплошной линии (без проколов и скачков) только тогда, когда доказана непрерывность функции; при этом определение непрерывности функции, достаточно сложное и тонкое, опирается на теорию пределов. Ни в 7-м, ни в 8-м, ни в 9-м классах ввести это определение не удастся, поэтому мы вынуждены опираться на наглядно-интуитивные представления. В учебном предмете это оправдано. Постепенно накапливающаяся информация подготовит учащихся к восприятию основного результата математического анализа о непрерывности любой элементарной функции во всех точках её области определения (но это произойдёт позднее, в 11-м классе).

В **§ 21** формулируется алгоритм графического решения уравнения. Конечно, желательно, чтобы этот алгоритм выработали сами учащиеся с минимальной помощью учителя. Такая работа полезна при оформлении любого алгоритма, поскольку позволяет ученику осознать этапы своей мыслительной деятельности, но следует считаться и с реалиями — не всегда эта работа пройдёт в классе успешно и спокойно. Однако в данном случае мы как раз сталкиваемся с такой ситуацией, когда можно надеяться на более или менее успешную совместную деятельность ученика и учителя, причём доля первого может преобладать.

Ключевое положение не только в главе 4, но и, пожалуй, во всём курсе алгебры основной школы занимает **§ 22**, где впервые появляется столь широко распространённая в математике запись $y = f(x)$. Изложение этого материала на уроках потребует от учителя значительных педагогических и методических усилий, поскольку в **§ 22** и **23** содержится по крайней мере пять моментов, важных как с методологической, так и с методической точки зрения: соотношение $y = f(x)$, примеры на функциональную символику, кусочные функции, первое представление об области определения функции и первое представление о чтении графика. Из списка свойств функций, которые изучаются в многолетнем школьном курсе алгебры, в течение первого года изучения курса упоминаются четыре свойства: область определения, непрерывность, наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке, монотонность, причём все четыре на наглядно-интуитивном уровне.

Область определения функции может быть естественной, и тогда она не указывается при задании функции; область определения функции может быть заданной, и тогда она указывается при задании функции. Первые функции, с которыми знакомятся учащиеся, — это функции $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$, рассматриваемые на всей числовой прямой. В этот момент говорить об области определения функции преждевременно. Представление о заданной (а не о естественной) области определения постепенно формируется с помощью рассмотрения кусочных функций, а также на основе задач об отыскании наибольших и наименьших значений функций на указанных промежутках. В соответствии с методическими особенностями реализации общей концепции нашего УМК понятие отдельно задаваемой области определения появится в нашем курсе вместе с определением понятия функции, т. е. в 9-м классе.

Завершая разговор о главе 4, отметим, что используемое в наших пособиях инвариантное ядро системы упражнений для изучения функций в школе (на весь период обучения) содержит шесть направлений:

- изучение кусочно-заданных функций;
- отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- графическое решение уравнений;
- чтение графика;
- функциональная символика;
- преобразование графиков.

В 7-м классе активно реализуются пять из указанных шести направлений (кроме преобразования графиков — это тема 8-го класса).

Глава 5
Одночлены и многочлены

В главе 1 мы объяснили учащимся, что математика занимается математическими моделями и что для их составления нужно овладеть математическим языком. Но изучение любого языка начинается с освоения простейших символов этого языка — букв; таковыми в математике являются числа, переменные и степени переменных. Затем идут слоги — таковыми в математике являются одночлены. Это преамбула к **§ 24—27**.

Мы иногда (например, в § 15 и 27) используем нетрадиционные для школы термины «корректное» и «некорректное» задание. Некорректное задание может быть двух видов. Первый — когда вопрос поставлен так, что на него в принципе нельзя дать ответ, т. е. когда задача в данной постановке вообще не решаема (например, задание найти точки пересечения прямых $y = 2x + 1$ и $y = 2x + 5$; в то же время вопрос, сколько точек пересечения имеют указанные прямые, вполне корректен). Второй вид — когда учащемуся предлагается задание, которое в данный момент не решаемо из-за недостатка знаний у того, кому предложено решить задачу. Задания второго вида, разумеется, неприемлемы, а вот наличие в процессе обучения некорректных заданий первого вида приносит несомненную пользу, так как у учащихся воспитывается способность критически анализировать ситуацию.

В **§ 27**, где изучается операция деления одночлена на одночлен, впервые упоминается (но не определяется) понятие алгебраической дроби (таких элементов опережающего обучения в наших учебниках, повторим ещё раз, довольно много).

Примеры, представленные в учебнике с решениями, в большинстве своём являются «примерами финиша», а не «примерами старта». Задача учителя — при необходимости дополнить систему обучающих упражнений «примерами старта».

Дальнейшие параграфы главы 5 посвящены изучению основных понятий, связанных с многочленами, и арифметическим операциям над многочленами. В **§ 28** вводится довольно много новых понятий: многочлен, его стандартный вид, приведение подобных членов. Существенную пропедевтическую роль играют обозначения типа $p(x)$, $p(x; y)$ — это пригодится позднее, при отработке функциональной символики.

В **§ 29—32*** изложение достаточно традиционно. Что касается **§ 33** «Деление многочлена на одночлен», то, если бы основное назначение курса «Алгебра-7» состояло только в сообщении учащимся определённого объёма информации, этот параграф был бы не нужен, поскольку все факты, изложенные в нём, с гораздо большим успехом могут быть получены в теме «Сокращение алгебраических дробей» после изучения темы «Разложение многочленов на множители». В концепции же развивающего обучения указанный параграф, напротив, очень важен и необходим именно в данном месте курса как пропедевтика темы «Разложение многочленов на множители» и как осознание проблемной ситуации, разрешение которой будет получено при изучении алгебраических дробей в 8-м классе.

Глава 6
Разложение многочленов на множители

Ученик должен постоянно осознавать структуру изложения материала, понимать, почему главы и параграфы идут именно в таком порядке, ощущать логику повествования. В этом ему должны помогать и учебник, и учитель. Именно поэтому важна вводная часть **§ 34**, где на первый план выходит мотивация — зачем нам нужно уметь раскладывать многочлен на множители, например для решения уравнений, для сокращения дробей, для рационализации вычислений. Мотивация, пропедевтика, проблемность — ключевые термины развивающего обучения.

В **§ 35** речь идёт о разложении многочлена на множители методом вынесения общего множителя за скобки. Этот материал не является абсолютно новым для учащихся, первое знакомство с ним состоялось в **§ 29**. В связи с этим имеет смысл упомянуть одно существенное психологическое обстоятельство, которое явно способствует успешности процесса обучения и которое, к сожалению, нередко игнорируется, особенно в процессе обучения математике.

Известно, что с психологической точки зрения успешнее изучается тот объект, о котором учащийся уже что-то слышал, о чём имеет хотя бы смутное представление. По отношению ко всякому абсолютно новому объекту у него, даже помимо его желания, возникает более или менее сильная реакция неприятия, а иногда и отторжения (психологи используют термин «стресс на новое»). Учитывая это, не следует опасаться пропедевтического (опережающего) упоминания терминов, приёмов, методов, которые на самом деле будут изучаться много позже. Во всяком случае к указанному положению психологии отношение в учебнике весьма уважительное: опережающим образом вводятся многие термины (например, разложение на множители, алгебраическая дробь, квадратное уравнение).

Поскольку понятие вынесения общего множителя за скобки уже знакомо учащимся, основное назначение примера 1 из **§ 34** — не столько демонстрация метода, сколько совместная разработка соответствующего алгоритма, правила вынесения общего множителя за скобки.

После выработки правила сразу иллюстрировать его на достаточно сложных примерах, таких как пример 2 из **§ 34**, нецелесообразно, сначала надо решить серию тривиальных подготовительных упражнений. Напомним ещё раз, что примеры, разобранные в тексте учебника, в большинстве случаев находятся на предельном уровне обязательных результатов обучения, т. е. на том уровне, к которому ученику придётся прийти по ступенькам, созданным учителем.

В **§ 36** речь идёт о методе группировки. Учащиеся должны понимать, что это скорее эвристический, чем алгоритмический, метод, т. е. удачную группировку нужно искать методом проб и ошибок. Естественно, что ошибок становится меньше и пробы осуществляются быстрее по мере накопления опыта. Далеко не всякая задача в математике решается с первого раза, надо учиться умению отказываться от неудачно выбранного способа решения. Именно в этом основная воспитательная ценность метода группировки.

Особо следует остановиться на появлении в § 36 примера решения квадратного уравнения (квадратные уравнения содержатся и в упражнениях). Конечно, квадратные уравнения не входят в обязательные результаты первого года изучения алгебры в школе, и учитель может все заготовки на перспективу опустить без ущерба для обучающей линии курса. Однако это обеднит эмоциональный фон курса, ослабит его развивающую линию. Раскроем указанное положение.

Известно, что вдохновляющим мотивом обучения является незатейливая педагогическая уловка, когда учитель говорит учащимся примерно следующее: то, что мы сегодня с вами изучали, — материал старшего класса, но смотрите, мы теперь иногда можем с этим материалом совладать. Это способствует развитию интереса к математике. Квадратные уравнения встречаются в учебнике несколько раз: в связи с разложением многочлена на множители и в главе 4, когда квадратные уравнения решаются графически (с помощью отыскания точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = kx + m$).

Несколько слов о **§ 37**. Почему параграф, посвящённый сокращению алгебраических дробей, помещён в учебнике для 7-го класса, тогда как вся тема «Алгебраические дроби» — тема 8-го класса? Имеется несколько причин.

Первая: понятие алгебраической дроби уже встретилось в учебнике в связи с проблемой деления многочленов.

Вторая: этот параграф важен в воспитательных целях, как явное выражение идей опережающего и развивающего обучения.

Третья (и, может быть, самая главная): одно дело, когда разложение на множители является *целью* решения примера, и совсем другое, когда разложение на множители является *средством* решения примера. Во втором случае происходит более полноценное усвоение, и в этом состоит психологическое значение примеров на сокращение алгебраических дробей именно в 7-м классе.

В **§ 38** впервые вводятся термины «тождество», «тождественно равные выражения», «тождественное преобразование выражения». Сначала тождество трактуется более узко, чем это традиционно принято в алгебре: оно определяется как равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных. Никакого упоминания о допустимых значениях переменных нет, поскольку для многочленов допустимыми являются любые значения переменных.

Существуют математические понятия разного уровня сложности. Самые простые из них обычно определяются «с первого захода», и на эти определения в дальнейшем никто уже не «покушается». Таковыми являются, например, понятия степени с натуральным показателем, одночлена, многочлена.

Более сложные понятия не удаётся определить сразу: это значит, что ранее введённое определение оказывается не приспособленным к новой ситуации, и такое определение приходится корректировать. А самые сложные понятия в математике до более или менее строгого определения «вызревают» довольно долго.

Понимая это, следует признать, что существенной ошибкой является стремление обучающего сразу дать обучаемому определение любого нового понятия в законченной формулировке. Ведь тогда, во-первых, обучаемый не ощущает диалектики математики, её жизненных соков; во-вторых, не учитывается исторический опыт: если человечество не сразу пришло к определению понятия, а двигалось по ступенькам, то и обучаемый должен пройти этот путь. Именно так обстоит дело с понятием тождества.

Здесь же (в § 38) после получения равенства $\frac{a(a+2)^2}{a^2(a-3)(a+2)} = \frac{a+2}{a(a-3)}$ обсуждается вопрос, является это равенство тождеством или нет. Введя выше термин «тождество», мы отметили, что тождество — это равенство, верное при любых значениях переменных. А про написанное выше равенство этого сказать нельзя, оно не имеет смысла при $a = 0$, при $a = 3$, при $a = -2$, т. е. оно верно уже не при любых значениях переменной a. Указанные выше значения переменной a не являются допустимыми для выражений, входящих в рассматриваемое равенство. Если же ограничиться только допустимыми значениями переменной, то при любых таких значениях приведённое равенство будет верным. Учитывая подобную ситуацию, математики и уточняют понятие тождества: тождеством называют равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в его состав переменных. В этом смысле написанное выше равенство является тождеством.

Глава 7
Описательная статистика

В этой главе начинается систематическое знакомство учеников с новой, стохастической, содержательной линией в обучении математике. Эта глава состоит из четырёх параграфов и краткого введения, в котором подчёркнуто общее представление об описательной статистике, состоящей из простейших приёмов обработки и представления информации; кратко — является дизайном информации.

Первый параграф главы 7 «Ряды числовых данных. Упорядочение, группировка, таблицы» **(§ 39)** знакомит с самой процедурой составления рядов данных, выписывания данных по порядку их получения. На наш взгляд, это отдельный шаг в обучении, необходимый для знакомства с материалом на наглядно-интуитивном уровне. Без него несколько «повисают в воздухе» дальнейшие вопросы упорядочения данных, табличного и графического представления информации. В разбираемых примерах предлагаются понятные и близкие школьникам сюжеты. Например, начинается всё с упорядочивания ответов школьников на тестировании — сюжет понятный и естественный для современных учеников. В заметной степени принципиальным для нас является пример 1. В нём новое понятие (ряд данных) возникает естественным образом в результате работы с ранее изученными понятиями и методами (решение линейных уравнений). Материал этого параграфа даёт первоначальный вербальный опыт общения с описательной статистикой, а решение предложенных задач подводит учеников к необходимости простейшей обработки данных.

Во избежание путаницы мы сознательно разделяем случай числовых данных (§ 39) и случай нечисловых (*номинативных*) данных (см. **§ 40** «Ряды нечисловых данных. Таблицы распределения частот»). Такое разделение позволяет сделать более плавным и спокойным переход от традиционных глав учебника по алгебре к новому учебному материалу. Кроме того, это разделение позволяет зафиксировать тот факт, что упорядочивать ряды данных «слева-направо» имеет смысл только для числовых данных, а для нечисловых данных подобная обработка данных имеет излишнюю долю произвола, и по этой причине, в частности, для них естественней другой тип обработки данных: сбор сведений о них в виде таблиц распределения. Начало § 40 запараллелено с началом § 39: во втором случае изменены «имена» оценок, от чисел произведён переход к символам (значкам). В итоге упорядочение ряда более наглядно, но удобно только для небольшого числа разных числовых данных (до 10), таблицы более абстрактны, зато работают они для нескольких десятков данных, причём не обязательно числовых.

Бо́льшую часть упражнений в § 40 составляют сюжетные задачи практико-ориентированного звучания. Хотя, конечно же, мы не забываем и о традиционных алгебраических объектах (см. упражнения 40.11 и 40.12), связанных с повторением свойств множества натуральных чисел. Отметим три последних упражнения (40.13—40.15), которые, по существу, являются темами мини-проектов по самостоятельному сбору и обработке данных. В каждом из них по четыре вопроса, всего 12 вопросов. Можно рекомендовать такой порядок работы с классом:

- разбить класс на группы по 2—3 ученика;
- каждой группе выдать список класса, над списком указать один из 12 вопросов;
- каждой группе поручить провести сбор данных по нужному вопросу;
- затем провести обработку данных и их представление в табличном виде.

В **§ 41** «Диаграммы распределений данных» мы продолжаем знакомство с типами обработки и представления данных. В параграфе рассказано о *визуальном* дизайне информации: рассмотрены разнообразные диаграммы и графики. В определённой степени последовательность ходов здесь повторяет общий подход к построению графиков функций в чисто алгебраических главах, когда от табличного или поточечного способа описания функции происходит переход к рисункам, чертежам, эскизам и графикам. Мы ограничиваемся, по существу, кратким перечислением способов визуализации, нужных терминов (столбиковые диаграммы, круговые диаграммы, многоугольники (полигоны) распределения) и способов перехода от одного типа дизайна к другому. Отметим, что различные диаграммы встречаются и в других учебных предметах: географии, истории, физике и т. п. и что в целом по визуализации информации и распределения данных можно было бы написать отдельную главу (или даже пособие) и составить курс по выбору. Да и проблема формирования компетенций в части «применения диаграмм и графиков для описания зависимостей реальных величин, извлечения информации из таблиц, диаграмм и графиков» действительно чрезвычайно важна. Последний тезис в заметной степени верен, по нашему мнению, применительно и к визуализации данных, и к статистике в целом. Несомненно, повышение статистической культуры учащихся — проблема крайне важная, а решение её социально необходимо. Но решать эту проблему следует комплексно, не в рамках одного предмета, а использовать для этого учебники и алгебры, и геометрии, и физики, и обществознания, и географии и т. п.

Заключительный **§ 42** «Числовые характеристики рядов данных» по содержанию довольно традиционен (для последних 10 лет) для основной школы. Здесь мы составляем «паспорт» данных, заменяя сами данные некоторыми обобщёнными числовыми показателями. Следует отчётливо понимать, что замена самих первоначальных данных набором их числовых характеристик — это ещё одна из форм дизайна информации. В ней практически всегда происходит существенное изменение, «огрубление» информации, аналогично тому, как сведения о гражданине в его паспорте лишь очень приблизительно характеризуют, описывают его как человека. Мы ограничиваемся наглядно-интуитивным уровнем в начале и описательным уровнем в конце изложения материала об объёме, размахе, моде или медиане. Ближе к концу параграфа при работе со средним значением и дисперсией приходится использовать и формальный уровень, т. е. выписывать нужные формулы и формулировать определения. Удобной оказывается формулировка в виде теорем двух правил подсчёта среднего с использованием таблиц распределения данных или их частот. Основной акцент сделан на изучении среднего значения, а изложение сведений о дисперсии — это, на самом деле, вынужденный шаг для соответствия примерной общей образовательной программе ООО. Наш прогноз на содержательное сохранение в курсе алгебры основной школы темы «Дисперсия», как минимум, не оптимистичен. Разумеется, это важная числовая характеристика, но существенна она при таких значениях n, при которых ручной подсчёт на уроках вряд ли реализуем. Более осмысленно было бы показать (на информатике или на ОБЖ), как вычисляется дисперсия в какой-либо программной среде на компьютере.

Содержание

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич
Семенов Павел Владимирович

Алгебра

7 класс

Методическое пособие для учителя

Редактор *С. В. Бахтина*
Внешнее оформление: *В. А. Андрианов*
Компьютерная вёрстка: *Н. П. Горлова*
Технический редактор *Л. В. Коновалова*
Корректоры *О. Ч. Кохановская*, *Ю. С. Борисенко*

Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 1,86

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru