А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

АЛГЕБРА

9

КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М79

Мордкович, Александр Григорьевич
М79 Алгебра : 9 класс : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.
ISBN 978-5-906939-69-2

В пособии представлено содержание курса алгебры 9-го класса, примерное планирование учебного материала и методические рекомендации по всем главам учебника алгебры для 9-го класса. Содержание методических рекомендаций не унифицировано и зависит от важности и трудности темы, её методической новизны. Для традиционных тем авторы ограничиваются отдельными замечаниями, в других случаях разговор идёт на более серьёзном методическом и психолого-педагогическом уровнях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-906939-69-2

Содержание курса алгебры. 9 класс

Системы уравнений

Понятие о рациональных уравнениях с двумя переменными. График уравнения с двумя переменными. Расстояние между двумя точками координатной плоскости. Уравнение окружности. Системы уравнений с двумя переменными. Графический и аналитический методы решения систем уравнений. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций.

Решение неравенств

Решение квадратных неравенств. Понятие о равносильных преобразованиях неравенства. Решение рациональных неравенств методом интервалов. Системы и совокупности неравенств с одной переменной.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Неравенства и системы неравенств с двумя переменными.

Числовые функции

Определение числовой функции. Способы задания функции. Свойства функции: область определения, область значений функции, монотонность, наименьшее и наибольшее значения функции, выпуклость, ограниченность. Нули функции, промежутки знакопостоянства. Чётные и нечётные функции. Функции $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, их свойства и графики. *Построение графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля.*

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Понятие числовой последовательности, способы задания числовых последовательностей. Арифметическая прогрессия, формула n-го члена арифметической прогрессии, характеристическое свойство арифметической прогрессии, формула суммы конечной арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия, формула n-го члена геометрической прогрессии, характеристическое свойство геометрической прогрессии, формула суммы конечной геометрической прогрессии. *Понятие о сумме бесконечной геометрической прогрессии*. Прогрессии и банковские расчёты.

Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул

Правило умножения и основные комбинаторные формулы. Числа размещений, перестановок, сочетаний. Факториал. *Треугольник Паскаля.* Сумма и произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимые события. Испытания с двумя исходами и их независимые повторения. Формула Бернулли. Простейшие случайные величины. Таблицы распределения. *Математическое ожидание.*

Итоговое повторение

Примерное поурочное планирование
(из расчёта 3 ч в неделю, 34 недели)

Параграф	**Тема**	**Кол-во часов**
	Глава 1. Системы уравнений (17 ч)	
1	Уравнения с двумя переменными	1
2	График уравнения с двумя переменными	2
3	Уравнение окружности на координатной плоскости	2
4	Основные понятия, связанные с системами уравнений с двумя переменными	2
5	Решение систем уравнений методом подстановки	2
6	Решение систем уравнений методом алгебраического сложения	2
7	Решение систем уравнений методом введения новых переменных	1
	Контрольная работа № 1	1
8	Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций	4
	Глава 2. Решение неравенств (21 ч)	
9	Квадратные неравенства	3
10	Решение неравенств методом интервалов	3
11	Решение неравенств методом интервалов (продолжение)	3
	Контрольная работа № 2	1

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
12	Системы и совокупности неравенств с одной переменной	3
13*	Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	2
14*	Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	2
15	Уравнения и неравенства с параметром	2
16	Неравенства и системы неравенств с двумя переменными	1
	Контрольная работа № 3	1
Глава 3. Числовые функции (17 ч)		
17	Определение числовой функции	2
18	Способы задания функции	1
19	Свойства функций	1
20	Чётные и нечётные функции	2
21	Исследование функций. Чтение графика функции	2
22	Функция $y = x^3$	2
23	Понятие корня n-й степени из действительного числа	2
24	Функция $y = \sqrt[3]{x}$	2
25*	Построение графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля	2
	Контрольная работа № 4	1

Продолжение таблицы

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
	Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии (19 ч)	
26	Числовые последовательности	2
27	Рекуррентный способ задания числовой последовательности	1
28	Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии	3
29	Характеристическое свойство арифметической прогрессии	1
30	Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии	2
	Контрольная работа № 5	1
31	Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии	3
32	Характеристическое свойство геометрической прогрессии	1
33	Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии	2
34*	Сумма бесконечной геометрической прогрессии	1
35	Прогрессии и банковские расчёты	1
	Контрольная работа № 6	1

Окончание таблицы

Параграф	Тема	Кол-во часов
Глава 5. Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул (15 ч)		
36	Правило умножения и основные комбинаторные формулы	4
37	Вероятность суммы двух событий. Независимые события	4
38	Испытания с двумя исходами и их независимые повторения	4
39	Простейшие случайные величины	2
	Контрольная работа № 7	1
Итоговое повторение		**13**

Методические особенности учебника «Алгебра. 9 класс»

Глава 1
Системы уравнений

В **§ 1** и **2** этой главы вводится понятие уравнения с двумя переменными, его решения и графика (первые представления об этих понятиях у учащихся имеются: в 7-м классе они изучали линейное уравнение с двумя переменными). В **§ 3** выводится уравнение окружности радиусом r с центром в точке $(a; b)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Таким образом, выдерживается единая линия: и в учебнике для 7-го класса, и в учебнике для 8-го класса, начиная говорить о методах решения уравнений или систем уравнений, мы всегда первым упоминаем графический метод. Тому есть несколько причин: во-первых, графический метод является непосредственным олицетворением ведущей линии нашего курса — функционально-графической; во-вторых, графический метод культурен и эстетичен; в-третьих, графический метод ненадёжен и, следовательно, создаёт проблемную ситуацию, требующую для своего разрешения получения точных алгоритмов решения уравнений или систем уравнений. Естественно, что в первом параграфе, посвящённом решению систем уравнений (это **§ 4**), графический метод решения — основной (и единственный), а тогда уравнение окружности гармонично вписывается в систему упражнений. Мы руководствуемся тезисом о равноправии аналитической и графической моделей: в системе упражнений имеются задания на переход от уравнения окружности к изображению окружности на координатной плоскости и обратный переход от заданной на координатной плоскости окружности к её уравнению.

Содержание **§ 5—7** — метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных — достаточно традиционно, хотя и не тождественно в методическом плане привычным способам подачи материала. Пока мы ограничиваемся перечисленными методами решения систем уравнений, откладывая до лучших времён знакомство с более тонкими методами. Например, с методом деления мы достаточно мягко познакомим учащихся в главе 4, когда речь пойдёт о решении задач на геометрическую прогрессию.

В **§ 8** речь идёт о решении текстовых задач. Подобные задачи встречались и в курсе алгебры 7—8-го классов. Здесь добавляется лишь один тип задач — пресловутые задачи «на работу» и «бассейны». Идеология решения задач не претерпевает изменений: оформление решения по-прежнему осуществляется в виде трёх этапов математического моделирования.

Глава 2
Решение неравенств

Этой главой завершается линия неравенств основной школы. Принципиально важен **§ 9**, в котором соединены две главные темы всего курса алгебры 8-го класса: решение квадратных уравнений и построение графика квадратичной функции. Здесь мы пока обходимся без метода интервалов, пытаясь довести до учащихся следующую мысль: решая неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, достаточно сделать схематический набросок графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, для чего требуется лишь найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ — точки пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью x и определить, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы. Этот схематический набросок даст наглядное истолкование решению неравенства.

В **§ 10** и **11** речь идёт о решении рациональных неравенств методом интервалов. При этом мы учитывали три обстоятельства.

1. Не стоит торопиться с введением механической кривой знаков, более важно, чтобы учащиеся усвоили идею сохранения знака рациональной функции на интервалах между её нулями (корнями числителя) и полюсами (корнями знаменателя) и научились устанавливать эти знаки методом пробных точек. Так мы действуем в целом ряде примеров в § 10, а упоминание о кривой знаков появляется в учебнике только в § 11. На наш взгляд, нецелесообразно

формализовать ситуацию до тех пор, пока у обучаемых не накопится некоторый содержательный опыт.

2. Кривая знаков используется в учебнике только для определения знаков функции вида $y = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-d)(x-k)(x-m)}$, где все множители попарно различны. Мы не случайно не использовали в примере 2 из § 10, где требуется решить неравенство $(x - 2{,}5)^2(3x + 4) < 0$, известный приём «двойных точек» для построения кривой знаков, усердно пропагандируемый в разных пособиях для поступающих в вузы, поскольку, повторимся, считаем, что в теме «Решение рациональных неравенств» овладение самой идеей знакопостоянства функции важнее овладения рутинной механической технологией решения неравенств.

3. На наш взгляд, нецелесообразно применять метод интервалов для решения квадратных неравенств (кроме «напрашивающихся» на метод интервалов неравенств типа $(x - a)(x - b) < 0$). Опять-таки с идейной точки зрения более значим приём решения квадратного неравенства, который используется в § 9. Особенно это целесообразно в случае «плохих» корней квадратного трёхчлена. Если, например, речь идёт о решении неравенства $x^2 - x - 3 < 0$, то, отметив корни $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ на числовой прямой и построив (схематически) параболу $y = x^2 - x - 3$, ветви которой направлены вверх, выбираем промежуток, на котором парабола расположена под осью x, — это интервал $(x_1;\ x_2)$. Он и служит решением заданного неравенства. Использование же метода интервалов потребовало бы от нас в этом примере разложения на множители заданного квадратного трёхчлена с «плохими» корнями; это разложение имеет весьма непрезентабельный вид: $\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. Его не слишком приятно записывать, не слишком приятно использовать, а главное, в нём нет никакой необходимости.

Глава 3
Числовые функции

Ключевое значение в этой главе имеют **§ 17** и **18**, где, проанализировав накопленный учащимися *опыт* в использовании понятия функции и в работе со свойствами функции в курсе алгебры 7—8-го классов, мы убеждаем учеников в том, что у них появилась *потребность* в формальном определении понятия функции и соответствующих свойств функции. Содержание § 17 можно довести до учащихся на уроке в лекционной форме, но, на наш взгляд, предпочтительнее другая форма работы: до урока предложить учащимся в качестве домашнего задания прочитать материал параграфа, а затем в классе на уроке обсудить прочитанное в жанре беседы. Главное в § 17 — выделение двух обстоятельств, подводящих к определению функции (область определения и правило соответствия), и само определение функции. Обратим внимание на то, что в определении 1 (определение функции $y = f(x)$, $x \in X$) мы, говоря, что переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной, избегаем для y традиционного добавления «или функцией». На первых порах при изучении функции есть смысл не отождествлять саму функцию — правило соответствия — и значение функции.

В многочисленных пособиях для средней школы встречается словосочетание «функция $f(x)$». Этот жаргон, понятный математикам, вреден, на наш взгляд, для правильного формирования у учащихся понятия функции. В учебнике написано: «Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определённое число y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X; пишут $y = f(x)$, $x \in X$». В определении подчёркивается, что, говоря о функции, надо одновременно использовать две переменные: x и y. Они же впоследствии указывают обозначения для координатной плоскости, на которой строится график функции. Наша точка зрения, выдержанная во всех учебниках для 7—11-го классов: $f(x)$ — это выражение с переменной, а не функция; функция всюду обозначается $y = f(x)$.

Коль скоро мы заговорили о принятых обозначениях, упомянем ещё два: с нашей точки зрения, для обозначения области определения и области значений функции целесообразнее использовать символы $D(f)$ и $E(f)$, а не $D(y)$ и $E(y)$.

В нашем курсе, в отличие от традиционных школьных подходов, акцент сделан на *заданной*, а не на *естественной* области определения функции. Эта линия проводится, по сути дела, с 7-го класса, особенно в кусочных функциях. В традиционных курсах учащиеся в большинстве случаев работают с естественной областью определения, для них привычна запись «функция $y = 3x + 2$» и вызывает удивление запись $y = 3x + 2$, $x \in [1; 3]$. Они считают, что это одна и та же функция, но заданная на различных промежутках. Нужно приучать их к тому, что это — разные функции, поскольку определение функции включает в себя две позиции: область определения и правило соответствия.

В **§ 19** вводится понятие области значений функции, причём на первый план выдвигается графический приём отыскания области значений — с помощью построенного графика функции. Разумеется, это не основной путь в математике, но на первых порах уместна опора на наглядность.

Вопреки сложившейся традиции, давая в **§ 20** определение чётной и нечётной функции, мы не включаем в него требование симметричности области определения. В определении оно лишнее, это, по сути дела, необходимое условие чётной и нечётной функций. В нашем курсе алгебры, повторим ещё раз, одинаково значимы аналитические и геометрические модели. Поэтому вполне естественно, что появляется геометрическая интерпретация чётности или нечётности функции, связанная с симметричностью её графика. Скажем, делать вывод о чётности функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, на наш взгляд, предпочтительнее по графику (где осевая симметрия полуокружности относительно оси Oy очевидна), а не ссылаясь на формальное определение.

Обратим внимание на одно принципиальное обстоятельство, которое впервые в нашем курсе алгебры используется в § 20. Речь идёт о неявном приобщении школьников к законам формальной логики, согласно которым отрицание утверждения, содержащего квантор общности, приводит к утверждению, содержащему квантор существования, и обратно. Устанавливая факт чётности или нечётности функции, нужно проверить, что равенство $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$ выполняется *для всех* значений x. Устанавливая же факт отсутствия как чётности, так и нечётности, достаточно показать, что *существует хотя бы одно* x, для которого $f(-x) \neq f(x)$, и *хотя бы одно* x, для которого $f(-x) \neq -f(x)$.

В **§ 21** мы приходим к следующему порядку перечисления свойств функции при чтении её графика:

1) область определения;
2) чётность;
3) монотонность;
4) ограниченность снизу, сверху;
5) $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$;
6) непрерывность;
7) область значений;
8) выпуклость.

Первые пять свойств «легитимны», в 9-м классе есть их формальные определения, и в принципе любое из этих пяти свойств можно достаточно строго обосновать. А далее (свойства 6—8) мы снижаем уровень строгости (по понятным причинам), нарушаем традиционный для математики путь «от свойств функции к её графику», вынуждены идти в обратном направлении — «от графика функции к её свойствам».

В главе 3 список функций, известных учащимся основной школы, пополняется двумя новыми функциями: $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ (**§ 22** и **24**). Последний параграф главы 3 (**§ 25***) посвящён изучению преобразований графиков, в нём речь идёт о построении графиков с модулями.

Глава 4
Арифметическая и геометрическая прогрессии

На наш взгляд, в курсе алгебры 9-го класса следовало бы обойтись без изучения числовых последовательностей и прогрессий. По большому счёту тема «Прогрессии» в 9-м классе тупиковая, не имеющая связей с остальным материалом основной школы, а тупиковых тем в разумно и логично выстроенной программе быть не должно. «Последовательности» — тема математического анализа, и было бы логичнее начинать с неё изучение начал математического анализа в 11-м классе. А прогрессии — частные случаи последовательностей, искусственно вырывать их из общей темы в принципе нецелесообразно. Но в стандарте математического образования тема «Прогрессии» представлена в рамках основной школы, значит, мы обязаны её рассматривать в курсе алгебры 9-го класса, позаботившись о том, чтобы эта тема была органично связана с предыдущими разделами курса, не была тупиковой. Поскольку в нашем курсе приоритет отдаётся функциональной линии, то и последовательности подаются в том же ключе. Это функции, но несколько отличающиеся от того, к чему привыкли ученики: это функции натурального аргумента.

В **§ 26** на первый план выходит проблема мотивации: надо ли рассматривать функции натурального аргумента? Приводятся соответствующие примеры. Кроме определения числовой последовательности и рассмотрения разных её примеров, речь идёт о двух способах задания последовательности (аналитическом и словесном) и о свойстве монотонности применительно к последовательностям. Рекуррентный способ задания последовательности, как наиболее трудный и непривычный, вынесен в отдельный параграф — это **§ 27**. Заметим, что тема «Последовательности» в нашем курсе будет иметь продолжение: в 11-м классе будет добавлено свойство ограниченности последовательности, изучено понятие предела последовательности.

Материал **§ 28—33**, в которых рассматриваются арифметическая и геометрическая прогрессии, более или менее традиционен. Следует обратить внимание лишь на несколько моментов.

Во-первых, в § 28 дан вывод формулы n-го члена арифметической прогрессии методом математической индукции, а в § 31 тем же методом дан вывод формулы n-го члена геометрической прогрессии. Будет учитель показывать это доказательство учащимся или нет, зависит, естественно, от условий, в которых он работает.

Во-вторых, обращаем внимание на упоминание в § 31 терминов «экспонента» и «показательная функция». Опережающее введение этих терминов отражает общую тенденцию нашего курса на использование элементов опережающего обучения. Выход в зону ближайшего развития (термин Л. С. Выготского) — составная часть всякого развития.

В-третьих, большое внимание в нашем учебнике уделяется характеристическим свойствам прогрессий, этому специально посвящены два параграфа — § 29 и 32.

В-четвёртых, на наглядно-интуитивном уровне в **§ 34*** даётся представление о сумме бесконечной убывающей прогрессии — это в определённом смысле некоторый эксперимент для основной школы.

И наконец, в-пятых, в **§ 35** речь идёт о так называемой реальной математике, об использовании прогрессий в банковских расчётах.

Глава 5
Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул

Эта глава завершает и учебник 9-го класса, и изучение стохастической линии в курсе математики основной школы. В ней происходит концентрическое возвращение к уже известным сюжетам: в § 36 — к правилу умножения, в § 37 — к «сложению вероятностей», в § 38 — к независимым повторениям. В то же время в каждом из этих параграфов изложен и качественно новый материал. Общая структура параграфов в целом одинакова: повторить уже известные вещи и показать, как они естественно продолжаются и расширяются далее. В рабочей программе на каждый из этих параграфов отводится по четыре урока.

В **§ 36** правило умножения работает не только в задачном, но и в «теоретическом» плане. Именно и только на его основе выводятся формулы для числа A_n^k размещений, числа P_n перестановок и числа C_n^k сочетаний. Подчеркнём, что мы всюду стараемся обходиться без формального определения того, что такое размещение, перестановка или сочетание, а говорим только о числах размещений, перестановок и сочетаний. В принципе по этим числам и формулам можно составить и отдельное пособие, и отдельный учебник, но цель этого параграфа более приземлённа: показать силу правила умножения и дать формулы для подсчёта числа комбинаций в более сложных, нежели в 8-м классе, задачах на нахождение вероятностей. По этой причине мы нигде не углубляемся в искусство манипулирования комбинаторными формулами, а ограничиваемся их приложениями к решению конкретных задач. Кроме того, даже там, где формула быстро даёт ответ, мы, наряду с проверкой по формуле, подчёркиваем и её комбинаторный смысл. Например, тождество $C_n^1 = n$ можно проверить по общей формуле, но предпочтительнее понимать её основу: один элемент из, скажем, ста можно выбрать ста способами. То же относится и к тождеству $C_n^k = C_n^{n-k}$. Его можно проверить по общей формуле, но можно объяснить и комбинаторно: всякому выбору k элементов из n соответствует «антивыбор», т. е. выбор оставшихся $n - k$ элементов. Мы постоянно придерживаемся положения *«Математика в школе — не научный, а учебный предмет»*. К примеру, всеми любимый треугольник Паскаля у нас в учебнике — просто удобная и красивая таблица для «хранения» чисел C_n^k, а многочисленные тождества и формулы, связанные с ним, — это уже углублённый уровень обучения. По этой причине треугольник Паскаля не включён в основной текст параграфа, а компактно размещён в серии дополнительных задач к главе. О нём всегда можно рассказать отдельно, если на это в конкретном классе остаётся время.

В целом, взаимоотношения комбинаторики и теории вероятностей в школе, по нашему мнению, противоположны их взаимоотношениям в вузе. В вузе комбинаторика — «служанка» теории вероятностей, т. е. комбинаторика появляется в тот момент, когда требуется решить ту или иную вероятностную задачу. В общеобразовательной школе, на наш взгляд, элементы теории вероятностей не должны главенствовать над развитием комбинаторных навыков, а, скорее, наоборот: интересно звучащие, практико-ориентированные вероятностные задачи образуют массив учебных задач, на которых повторяются и закрепляются основные комбинаторные умения и навыки. Идея о возможности формирования неких вероятностных компетенций, минуя достаточную комбинаторную базу подготовки учащихся, красива, но виртуальна: нет никаких примеров её надёжной реализации на практике. Мы полагаем, что в школьном образовании базовой, фундаментальной должна быть комбинаторная составляющая, которую мы вовсе не отождествляем с формульной комбинаторикой. Напротив, излишнее усердие и акцентирование внимания на числах размещений, сочетаний с повторениями или без них, замечательных тождествах и т. п. — это явный переход к жёстким моделям обучения, который в заметной степени «сушит» обучение. В общем, комбинаторика «представляет средство для одной из важнейших способностей ума — способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому».

§ 37 начинается, разумеется, с двух примеров использования комбинаторных формул в задачах на нахождение вероятностей «сложных» случайных событий. Далее мы переходим к несколько иным «сложным» событиям: они сложены из более простых. Таким образом, мы приходим и к сумме, и к произведению событий. Доказательство формулы $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ мы проводим только для равновозможных исходов и предваряем его, по существу, тем же рассуждением, но на текстовом, сюжетном уровне примера 4. Разумеется, специально отмечаем, что уже известные формулы $P(A + B) = P(A) + P(B)$ для несовместных событий и $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ для противоположного события есть частные случаи общей формулы вероятности суммы.

Следующее тонкое, деликатное и, пожалуй, самое специфическое для всей теории вероятностей как отдельного предмета понятие — понятие *независимости* событий. Обсуждение его обоснований, трактовок, интерпретаций и т. п. может стать темой отдельного диссертационного исследования. Но мы приходим к нему с чисто утилитарной точки зрения: это именно тот случай, когда вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ суммы оказывается возможным вычислить, зная *только* вероятности $P(A)$, $P(B)$ слагаемых. В частности, мы не вводим условные вероятности, так как это понятие, во-первых, не первостепенное для основ теории вероятностей и, во-вторых, при массовом обучении явно выглядит тупиковым. Многолетняя традиция вузовской математики по теме «Условная вероятность» в итоге ограничивается просто введением и изучением трёх дополнительных формул: вероятность произведения событий, формула полной вероятности и формула Байеса. Совершенно непонятно, к чему в основной школе изучать ещё и эти тонкости.

Введение в § 37 независимости событий «зацепляет» его со следующим **§ 38** «Испытания с двумя исходами и их независимые повторения». Новый параграф мы начинаем с повторения материала 8-го класса, вспоминаем саму терминологию «успех-неудача» и через подробный разбор случаев двух и трёх повторений приходим к многократным повторениям испытания с двумя исходами и в итоге к формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ о подсчёте вероятности наступления нужного количества «успехов». Поведение её правой части в зависимости от n и k — важный сюжет в теории вероятностей, а оценка вероятности погрешности в приближении $\frac{k}{n} \approx p$ составляет, пожалуй, самый важный момент в элементарной теории вероятностей (*закон больших чисел*). Всё же, по нашему убеждению, рассматривать эти аспекты здесь, при первом же появлении самой формулы Бернулли, явно преждевременно: к этой формуле, её использованию и «поведению» нужно привыкнуть, а для этого нужно время. Отметим, что вычисления «руками» по этой формуле реально возможны только при небольших n, скажем не более 5. Действительно, регулярные непосредственные вычисления числовых выражений типа $P_7(3) = 35 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^4$ на уроках в 9-м классе могут занять слишком много времени. Их можно использовать на самостоятельной или на проектной работе. В § 38 мы ограничиваемся случаем $n = 5$.

Заключительный **§ 39** «Простейшие случайные величины» включён в учебник по довольно формальным аргументам, связанным с наличием Примерной основной образовательной программы основного общего образования. Необходимость изучения случайных величин в основной, да и в старшей, школе не представляется нам очевидной, но из этого документа следует необходимость хотя бы минимального ознакомления со случайными величинами. Этим мы и ограничиваемся. В самом начале параграфа отмечаем, что соотношения между случайными величинами, случайными событиями и элементарными событиями (исходами испытания) очень похожи на соотношения между числовыми функциями, числовыми множествами и числами. Далее в примерах 1—6 подробно разобраны несколько случайных величин. В итоге мы подходим к общему определению случайной величины как числовой функции, которая каждому элементарному событию (исходу испытания из конечного множества всех исходов) ставит в соответствие некоторое число. В примерах 7—9 показано, как в конкретных случаях составляется таблица распределения значений случайной величины. Разумеется, здесь мы используем и материал предыдущего параграфа. В качестве непосредственного применения таблицы распределения показываем, как с её помощью может быть вычислено математическое ожидание случайной величины. Вычисляется математическое ожидание для числа «успехов» при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ повторениях либо в тексте, либо в упражнениях. Теорема о том, что математическое ожидание числа «успехов» в n испытаниях Бернулли равно np, где p — вероятность «успеха» в одном испытании, приводится как справочный факт. В рабочей программе этот параграф (2 ч) носит важный, но, скорее, ознакомительный характер. Более детальный разговор о случайных величинах будет идти в старшей школе.

Содержание

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич
Семенов Павел Владимирович

Алгебра

9 класс

Методическое пособие для учителя

Редактор *С. В. Бахтина*
Внешнее оформление: *В. А. Андрианов*
Компьютерная вёрстка: *Н. П. Горлова*
Технический редактор *Л. В. Коновалова*
Корректоры *О. Ч. Кохановская*, *Ю. С. Борисенко*

Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 1,4

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru