§ 4. Понятие о математических моделях

Рассмотрим такую ситуацию. Имеется 4 корзины с фруктами. В первой корзине — 24 яблока и 16 груш, во второй — 20 яблок и 20 груш, в третьей — 18 яблок и 17 груш, в четвёртой — 18 яблок и 26 груш. Если нужно ответить на вопрос, сколько фруктов в каждой корзине, придётся 4 раза выполнять операцию сложения: в первой корзине $24 + 16 = 40$ фруктов, во второй $20 + 20 = 40$ фруктов, в третьей $18 + 17 = 35$ фруктов, в четвёртой $18 + 26 = 44$ фрукта. Используя математический язык, ситуацию можно обобщить: в корзине a яблок и b груш, всего фруктов $a + b$. Такова *математическая модель* данной ситуации.

Алгебра, в частности, занимается тем, что описывает различные реальные ситуации на математическом языке в виде математических моделей (уравнений, неравенств и т. д.). Затем, используя разные математические правила, свойства, законы, эту математическую модель решают.

Ниже приведены различные реальные ситуации (связанные с упомянутыми выше четырьмя корзинами с яблоками и грушами) и их математические модели (a — число яблок в корзине, b — число груш).

1. Число яблок в корзине в 1,5 раза больше, чем груш (первая корзина).
   Математическая модель: $a = 1{,}5b$.
2. Яблок и груш в корзине поровну (вторая корзина).
   Математическая модель: $a = b$.
3. Число яблок в корзине на 1 больше, чем груш (третья корзина).
   Математическая модель: $a - b = 1$.
4. Яблок на 8 меньше, чем груш (четвёртая корзина).
   Математическая модель: $a = b - 8$.

Во всех четырёх случаях мы шли от реальной ситуации к её математической модели. Но надо уметь двигаться и в обратном направлении, т. е. по заданной математической модели описывать словами реальную ситуацию. Например, что означает (при тех же обозначениях) такая математическая модель: $a - 6 = b + 2$? Она означает, что если из корзины забрать 6 яблок и добавить 2 груши, то яблок и груш в корзине станет поровну. Так обстоит дело с первой корзиной (проверьте!).

Пример 1 В одной корзине имеются яблоки, в другой — груши. Число яблок в два раза больше числа груш. Когда из первой корзины взяли 2 яблока, а во вторую корзину добавили 7 груш, яблок и груш стало поровну. Сколько всего фруктов было в корзинах вначале?

Решение. Пусть x — число груш во второй корзине, тогда $2x$ — число яблок.

Если взять 2 яблока, то в первой корзине останется $(2x - 2)$ яблока. Если добавить 7 груш, то во второй корзине станет $(x + 7)$ груш. По условию после этого яблок и груш будет поровну; на математическом языке это записывается так:

$$2x - 2 = x + 7.$$

Это уравнение — математическая модель задачи. Решим уравнение:

$$(2x - 2) - (x + 7) = 0;$$
$$2x - 2 - x - 7 = 0;$$
$$x - 9 = 0;$$
$$x = 9.$$

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи. Груш было 9, а значит, яблок (их вдвое больше) было 18. А всего фруктов в обеих корзинах было 27 штук.

Обратите внимание: в ходе решения было чёткое разделение рассуждений на три этапа. ***На первом этапе***, введя переменную x и переведя текст задачи на математический язык, мы составили математическую модель в виде уравнения $2x - 2 = x + 7$.

На втором этапе мы не вспоминали ни про яблоки, ни про груши. Если можно так сказать, мы занимались «чистой» математикой, работали с составленной математической моделью.

На третьем этапе мы использовали полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи. На этом этапе мы снова вернулись к яблокам, грушам и обеим корзинам.

Таким образом, в процессе решения задачи были чётко выделены три этапа.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Второй этап. *Работа с составленной математической моделью.*

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Решение следующей задачи мы оформим в виде этих трёх этапов.

Пример 2 Теплоход шёл из пункта A в пункт B 2 ч по озеру, а потом 3 ч по течению реки, вытекающей из озера. Пройденный путь составил 128 км. С какой скоростью теплоход, возвращаясь из B в A, будет двигаться по реке, если скорость течения реки 1 км/ч?

Решение. ***Первый этап.*** *Составление математической модели.*

Обозначим собственную скорость теплохода (т. е. скорость в стоячей воде) x км/ч (в подобных задачах ситуация идеализируется, т. е. предполагается, что на всём пути собственная скорость теплохода постоянна). Тогда по течению реки он будет двигаться со скоростью $(x + 1)$ км/ч. Внесём данные условия задачи в таблицу.

Движение	Время	Скорость	Пройденный путь
По озеру	2 ч	x км/ч	$2x$ км
По течению реки	3 ч	$(x + 1)$ км/ч	$3(x + 1)$ км

Всего по озеру и по течению реки теплоход прошёл 128 км. Математической моделью задачи служит уравнение $2x + 3(x + 1) = 128$.

Второй этап. *Работа с составленной математической моделью.*

Имеем: $2x + 3x + 3 = 128$; $5x + 3 = 128$; $5x = 125$; $x = 25$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Поскольку собственная скорость теплохода равна 25 км/ч, а на обратном пути он будет двигаться по реке против течения, то скорость его движения составит 24 км/ч.

Ответ: 24 км/ч.

Упражнения

Составьте математическую модель данной ситуации.

4.1. Первое число x, второе в 1,5 раза больше. Сумма этих чисел 30,6.

4.2. Цена за 1 кг яблок одного сорта x р., а другого — y р. Для детского праздника купили 5 кг одного сорта и 6 кг другого. При этом оказалось, что за яблоки разных сортов заплатили поровну.

4.3. В первом букете n роз, а во втором — в 4 раза больше, чем в первом. Когда к первому букету прибавили 15 роз, а ко второму — 3 розы, в обоих букетах роз стало поровну.

4.4. Из пункта A одновременно в противоположных направлениях выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля v км/ч, а скорость второго — на 5 км/ч больше. Через 3 ч расстояние между автомобилями стало 375 км.

4.5. Теплоход шёл по реке от пристани A до пристани B, находящейся от A на расстоянии 135 км, и вернулся обратно на пристань A, затратив на обратный путь на 1 ч больше времени. Собственная скорость теплохода v_1 км/ч, скорость течения реки v_2 км/ч.

4.6. На банковский депозит положили a р. под 6 % годовых. Через год на счёте стало 150 000 р.

4.7. На банковский депозит положили a р. под 6 % годовых. Через 2 года на счёте стало 168 540 р.

4.8. Цена на хрустальную люстру a р. Из-за смены тарифов на энергоносители цена выросла на 45 %, а после увеличения арендной платы в магазине ещё на 20 %. Какова новая цена люстры?

4.9. Двое рабочих выполняют задание. Если всё задание будет выполнять более опытный рабочий, то он выполнит всё задание за t_1 ч. Если же всё задание будет выполнять менее опытный рабочий, то он выполнит его за t_2 ч, затратив времени на 3 ч больше, чем более опытный.

4.10. Для населения сельской местности с 1 июля по 31 декабря 2017 г. были установлены следующие цены на электроэнергию.

	Однотарифный режим	**Двухтарифный режим**
Цена за 1 кВт	3,18 р.	День — x р. Ночь — на 2,44 р. дешевле
Энергия, потребляемая за месяц	y кВт · ч	День — 180 кВт · ч Ночь — 70 кВт · ч
Стоимость		

При этом стоимость электроэнергии за август 2017 г. у двух соседей, один из которых использует однотарифный режим, а другой — двухтарифный режим, оказалась одинаковой.

4.11. Автобус проехал часть пути по шоссе и часть по просёлочной дороге. При этом путь по шоссе составил x км, а по просёлочной дороге — y км.

а) Сколько всего километров проехал автобус?

б) Во сколько раз путь по шоссе оказался длиннее пути по просёлочной дороге?

в) На сколько километров больше проехал автобус по шоссе, чем по просёлочной дороге?

г) Какое время затратил автобус на весь путь, если по шоссе он ехал со скоростью 55 км/ч, а по просёлочной дороге — 30 км/ч?

4.12. Пригородный автобус едет часть пути по городу и часть пути по автостраде. По городу автобус двигается со скоростью x км/ч, а по автостраде — y км/ч. По городу он двигается 1 ч, а по автостраде — 2 ч.

а) Сколько километров автобус проедет по городу?

б) Сколько километров автобус проедет по автостраде?

в) Чему равен весь путь автобуса?

г) На сколько больше километров автобус проехал по автостраде, чем по городу?

4.13. Из пункта A одновременно в противоположных направлениях выехали автомобиль со скоростью x км/ч и мотоцикл со скоростью y км/ч.

а) Чему равна скорость удаления автомобиля от мотоцикла?

б) На каком расстоянии от пункта A окажутся автомобиль и мотоцикл через t ч?

в) На сколько дальше через t ч от пункта A окажется мотоцикл, чем автомобиль?

г) Какое расстояние будет между ними через t ч?

4.14. Из пункта A одновременно в одном направлении выехали автомобиль со скоростью x км/ч и грузовик со скоростью y км/ч.

а) Чему равна скорость удаления автомобиля от грузовика?

б) На каком расстоянии от пункта A окажутся автомобиль и грузовик через t ч?

в) На сколько дальше через t ч от пункта A окажется автомобиль, чем грузовик?

г) Какое расстояние будет между ними через t ч?

4.15. Из пункта A выехал автомобиль со скоростью x км/ч. Одновременно навстречу ему из пункта B, удалённого от A на 300 км, выехал автобус со скоростью y км/ч.

а) Чему равна скорость сближения автомобиля и автобуса?
б) Через сколько времени произойдёт их встреча?
в) На каком расстоянии от пункта A произойдёт встреча автомобиля и автобуса?
г) Какое расстояние будет между автобусом и автомобилем через t ч?

4.16. Из пункта A выехал автомобиль со скоростью v_1 км/ч. Через 1 ч навстречу ему из пункта B, удалённого от A на 450 км, выехал мотоцикл со скоростью v_2 км/ч.
а) Чему равна скорость сближения автомобиля и мотоцикла?
б) Через сколько времени после начала движения автомобиля произойдёт их встреча?
в) На каком расстоянии от пункта A произойдёт встреча автомобиля и мотоцикла?
г) Какое расстояние будет между автомобилем и мотоциклом через t ч после начала движения автомобиля?

4.17. Клиент положил 1 000 000 р. на депозит поровну в два банка под p % и q % соответственно. Доход начисляется ежегодно. По условиям договора в каждом банке, если клиент не снимает все деньги и не закрывает счёт, то договор пролонгируется ещё на год автоматически.
а) Сколько денег окажется на депозитном счёте в первом банке через год?
б) Сколько денег окажется на депозитном счёте во втором банке через 2 года?
в) Сколько денег может получить клиент через 2 года, сняв все деньги в обоих банках?
г) Какую прибыль получит клиент в первом банке через 3 года?

4.18. Введите переменную и составьте математическую модель данной ситуации.
а) В магазин завезли красных футболок в 2 раза больше, чем синих. Сколько всего футболок завезли в магазин?
б) За выходные дни было продано 12 футболок. Сколько футболок осталось?
в) Цена на футболку была снижена на 5 %. Сколько стала стоить футболка?
г) Для выполнения задания одному рабочему требуется на 2 ч больше, чем другому. Какую часть задания выполнят за 1 ч оба рабочих, работая вместе?

4.19. Две бригады работали на уборке урожая. Первая бригада убрала урожай с 5 га по x ц с 1 га, а вторая — с 6 га, убирая с каждого гектара на 10 ц меньше.

а) Сколько центнеров с 1 га убирала вторая бригада?
б) Сколько всего центнеров убрала первая бригада?
в) Сколько всего центнеров убрала вторая бригада?
г) Сколько центнеров убрали обе бригады вместе?

Решите задачу, выделяя три этапа математического моделирования.

4.20. Два рыбака поймали 15 рыб. Первому повезло больше — он поймал на 3 рыбы больше, чем второй. Сколько рыб поймал каждый рыбак?

4.21. В школе проходили олимпиады по физике и математике. На олимпиаде по математике участников оказалось на 13 человек больше, чем на олимпиаде по физике. Сколько было участников каждой олимпиады, если всего в мероприятии приняли участие 143 школьника?

4.22. В трёх школах 3210 учащихся. Во второй школе на 120 учащихся больше, чем в первой, и на 210 меньше, чем в третьей. Сколько учащихся в каждой школе?

4.23. С двух участков собрано 43,7 т зерна. Сколько тонн зерна собрали с каждого участка, если с первого участка собрали в 1,3 раза больше, чем со второго?

4.24. а) Периметр прямоугольника равен 118 см. Чему равна длина прямоугольника, если она больше ширины в 4 раза?
б) Периметр прямоугольника равен 80 см. Чему равна длина прямоугольника, если она больше ширины на 5 см?

4.25. Из пункта A в пункт B со скоростью 200 м/мин выбежал пёс Бобик. Одновременно с ним из пункта B выбежал в том же направлении со скоростью 160 м/мин пёс Барбос. Через какое время Бобик догонит Барбоса, если расстояние от A до B Бобик пробегает на 3 мин 45 с быстрее Барбоса?

4.26. Дополните условие и решите полученную задачу, выделяя три этапа математического моделирования.

а) Сумма двух натуральных чисел равна 127. Найдите эти числа, если...
б) Найдите три последовательных трёхзначных числа, если...