Дом Севастьянова.
Екатеринбург

# Глава 3

# Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратных корней

## § 19. Функция $y = \sqrt{x}$, её график и свойства

В главе 1 вы познакомились с новой операцией над числами — извлечением квадратного корня из неотрицательного числа. Напомним, что квадратным корнем из неотрицательного числа $x$ называют такое неотрицательное число $x$, квадрат которого равен $x$.

При изменении неотрицательного числа $x$ будет меняться и $\sqrt{x}$. А как сравнить эти изменения, понять, как именно квадратный корень из числа зависит от самого числа? Мы приходим к необходимости изучения новой числовой функции $y = \sqrt{x}$.

Для построения графика функции $y = \sqrt{x}$ будем действовать, как обычно, а именно начнём с построения нескольких точек графика. Для этого возьмём несколько конкретных значений $x$ и по формуле $y = \sqrt{x}$ вычислим значения $y$:

если $x = 0$, то $y = \sqrt{0} = 0$;
если $x = 0{,}25$, то $y = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$;
если $x = 1$, то $y = \sqrt{1} = 1$;
если $x = 2{,}25$, то $y = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$;
если $x = 4$, то $y = \sqrt{4} = 2$;
если $x = 6{,}25$, то $y = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$;
если $x = 9$, то $y = \sqrt{9} = 3$.

Полученные сведения можно собрать в таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$:

| $x$ | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |

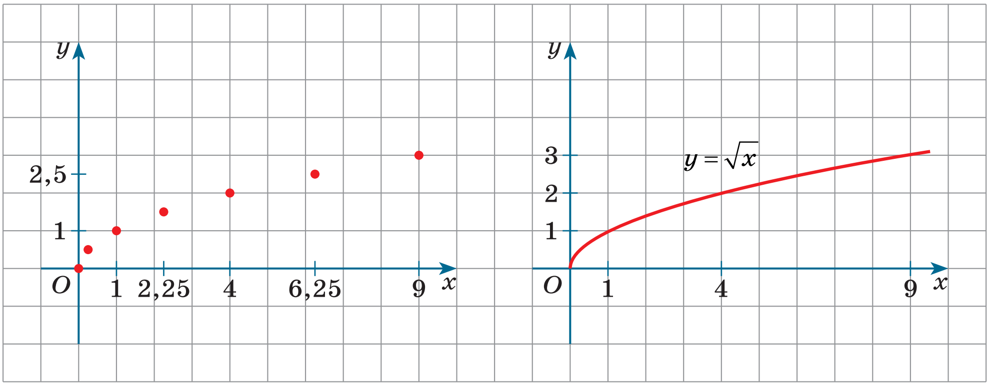


*Рис. 28*

Построим точки (0; 0), (0,25; 0,5), (1; 1), (2,25; 1,5), (4; 2), (6,25; 2,5), (9; 3) на координатной плоскости (рис. 28, *а*). Все они принадлежат графику функции $y = \sqrt{x}$.

Сам график образует линию, которая соединяет все точки. Начертим эту линию (рис. 28, *б*). Получим график функции $y = \sqrt{x}$.

Мы видим, что этот график напоминает нам ветвь параболы. И зрительное впечатление нас не обманывает. Смотрите, график функции $y = x^2$, $x \geqslant 0$ — это ветвь параболы (рис. 29). Этой ветви параболы принадлежат точки (0; 0), (0,5; 0,25), (1; 1), (1,5; 2,25), (2; 4), (2,5; 6,25), (3; 9). Если у каждой из них поменять местами абсциссу и ординату, то получатся уже знакомые нам точки (0; 0), (0,25; 0,5), (1; 1), (2,25; 1,5), (4; 2), (6,25; 2,5), (9; 3) графика функции $y = \sqrt{x}$. Значит, график функции $y = \sqrt{x}$ — это такая же ветвь параболы, но направленная не вверх, а вправо.

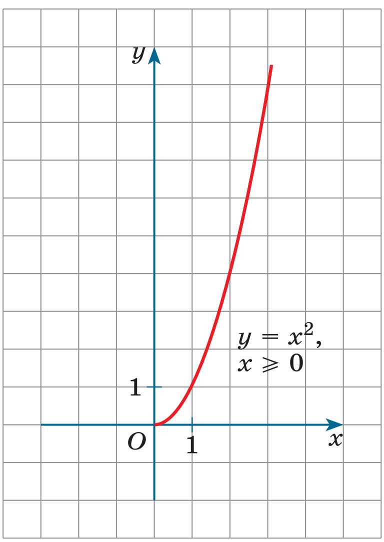


*Рис. 29*

В частности, ветвь параболы $y = x^2$, $x \geqslant 0$ *касается оси Ox* в точке (0; 0), а график функции $y = \sqrt{x}$ (ветвь параболы, направленной вправо) *касается оси Oy* в точке (0; 0), т. е. входит в точку (0; 0), «под прямым углом» к оси *Ox*.

Отметим некоторые свойства функции $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$.

**1.** Область определения функции — луч $[0; +\infty)$. Это следует из того, что при любом значении $x \geqslant 0$ можно вычислить соответствующее значение зависимой переменной $y$ по формуле $y = \sqrt{x}$.

**2.** $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x > 0$.

**3.** Функция возрастает на луче $[0; +\infty)$. Это значит, что *большему* значению аргумента соответствует *большее* значение функции.

**4.** $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб}}$ не существует.

Напомним, что $y_{\text{наим}}$ — это наименьшее значение функции, а $y_{\text{наиб}}$ — наибольшее значение функции на заданном промежутке; если промежуток не указан, то $y_{\text{наим}}$ и $y_{\text{наиб}}$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции во всей её области определения.

**5.** $y = \sqrt{x}$ — непрерывная функция.

Термин «непрерывная функция» мы используем пока как краткую замену фразы «график функции есть сплошная линия, которую можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги». Это лишь первое представление о том, что такое непрерывная функция. Более точное, строгое математическое определение будет дано в старшей школе.

**6.** Сравним две функции: $y = \sqrt{x}$ (её график изображён на рисунке 28, *б*) и $y = x^2$, $x \geqslant 0$ (её график изображён на рисунке 29). Мы только что перечислили пять свойств для первой функции, но абсолютно теми же свойствами обладает и вторая функция. Словесные «портреты» двух различных функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, $x \geqslant 0$ пока одинаковы. Но есть принципиальные различия в характере графиков: график функции $y = \sqrt{x}$ обращён *выпуклостью вверх*, тогда как график функции $y = x^2$, $x \geqslant 0$ обращён *выпуклостью вниз*.

Слова *функция выпукла вниз* означают, что участок её графика, лежащий между любыми двумя точками графика, расположен *ниже* отрезка, который соединяет эти точки (рис. 30, *а*). Соответственно, *функция выпукла вверх*, если участок её графика, лежащий между любыми двумя точками графика, расположен *выше* отрезка, который соединяет эти точки (рис. 30, *б*).

**Пример 1** Построить и прочитать график функции $y = -\sqrt{x}$.

**Решение.** Как известно (см. § 9), график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси $Ox$. Воспользовавшись этим, построим график

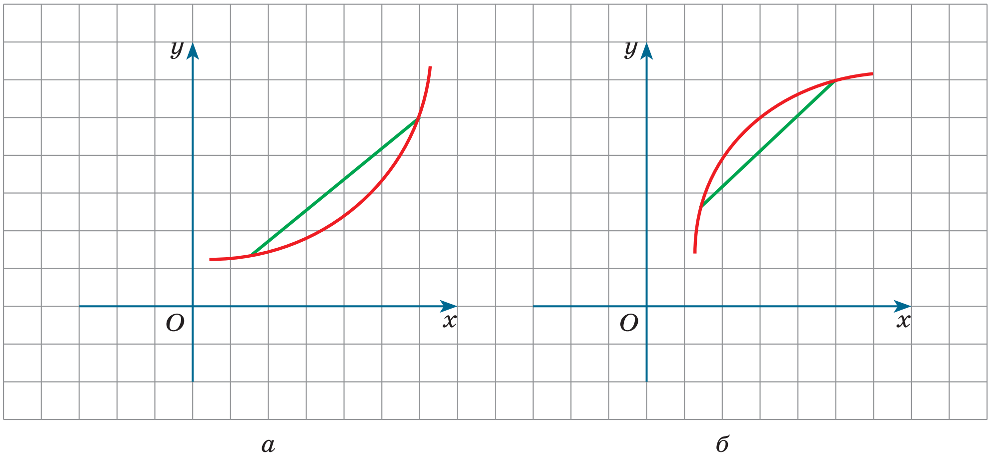


*Рис. 30*

функции $y = \sqrt{x}$ и отобразим его симметрично относительно оси $Ox$ (рис. 31). Это и будет график функции $y = -\sqrt{x}$.

Перечислим свойства функции $\boldsymbol{y = -\sqrt{x}}$.

**1.** Область определения функции — луч $[0; +\infty)$.

**2.** $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

**3.** Функция убывает на луче $[0; +\infty)$. Это значит, что *большему* значению аргумента соответствует *меньшее* значение функции.

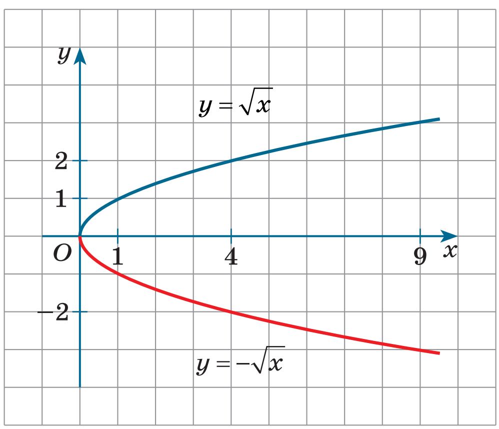


*Рис. 31*

4. $y_{\text{наиб}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наим}}$ не существует.
5. Функция непрерывна на луче $[0; +\infty)$.
6. Функция выпукла вниз.

**Пример 2** Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ y - \sqrt{x} = 0. \end{cases}$

**Решение.** $2x - 3y = 2$ — линейное уравнение с двумя переменными, его графиком, как известно из курса алгебры 7-го класса, является прямая. Для построения этой прямой достаточно найти две точки, принадлежащие этой прямой. Если в уравнении $2x - 3y = 2$ положить $y = 0$, то получим $x = 1$. Точка $(1; 0)$ принадлежит искомой прямой. Если в уравнении $2x - 3y = 2$ положить $x = -2$, то получим $y = -2$. Точка $(-2; -2)$ принадлежит искомой прямой. На рисунке 32 через точки $(1; 0)$ и $(-2; -2)$ проведена прямая — график линейного уравнения $2x - 3y = 2$.

В той же координатной плоскости построим график уравнения $y - \sqrt{x} = 0$, т. е. график функции $y = \sqrt{x}$. Построенные графики пересекаются в точке $(4; 2)$, об этом мы судим по чертежу. Проверим, так ли это на самом деле. Пара $(4; 2)$ удовлетворяет и уравнению $2x - 3y = 2$, и уравнению $y - \sqrt{x} = 0$, значит, эта пара действительно является решением системы уравнений.

**Ответ:** $(4; 2)$.

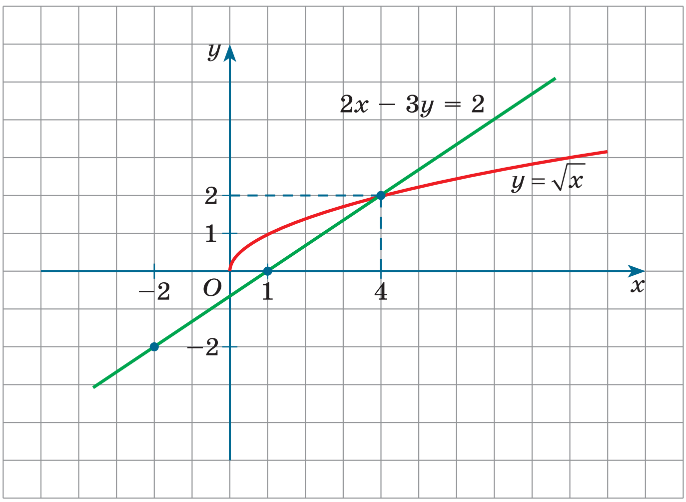


*Рис. 32*

## Упражнения

**19.1.** Не выполняя построения, распределите заданные точки в две группы: те, которые принадлежат графику функции $y = \sqrt{x}$, и те, которые не принадлежат графику этой функции:

а) $A(2; 4)$, $B(2; \sqrt{2})$, $C(16; 4)$, $D(25; -5)$, $E(9; 3)$, $F(-1; 1)$;

б) $K(1; 0{,}5)$, $L(3; -\sqrt{3})$, $M(2{,}5; 0{,}5)$, $N(6{,}25; 2{,}5)$, $R(-9; -3)$, $P(0; 0)$;

в) $D(0; 1)$, $E(2{,}25; 1{,}5)$, $F(4; 16)$, $G(25; 5)$, $H(1; 1)$, $Q(-16; -4)$;

г) $N(\sqrt{2}; 2)$, $M(0{,}16; 0{,}4)$, $P(49; 7)$, $Q(7; \sqrt{7})$, $T(-9; -3)$, $R(1; 2)$.

**19.2.** Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. С помощью графика найдите:

а) значения $y$ при $x = 1; 5; 9$;

б) значения $x$, если $y = 0; 2; 4$;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[1; 9]$;

г) при каких значениях $x$ график функции расположен выше прямой $y = 4$, ниже прямой $y = 4$.

**19.3.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{x}$:

а) на отрезке $[1; 4]$;

б) на полуинтервале $(0; 9]$;

в) на луче $[1; +\infty)$;

г) на отрезке $[4; 9]$;

д) на полуинтервале $(1; 4]$;

е) на луче $[4; +\infty)$.

**19.4.** Дана функция $y = \sqrt{x}$. Укажите, какому промежутку принадлежит переменная $x$, если:

а) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 4$;

б) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 6$;

в) $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}} = 3{,}5$;

г) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 3$;

д) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 2$;

е) $y_{\text{наим}} = 1{,}5$, $y_{\text{наиб}} = 5$.

**19.5.** Дана функция $y = \sqrt{x}$. Укажите, какому промежутку принадлежит переменная $x$, если:

а) $y \in [1; 4]$;

б) $y \in (0; 3]$;

в) $y \in [1; +\infty)$;

г) $y \in [2; 6]$;

д) $y \in [2; 5)$;

е) $y \in [3; +\infty)$.

**19.6.** Дана функция $y = \sqrt{x}$. Укажите промежуток, которому принадлежит переменная $y$, если:

а) $0 < x \leqslant 4$;

б) $1 \leqslant x < 9$;

в) $1 < x < 9$;

г) $0 < x < 1$;

д) $x \geqslant 9$;

е) $x > 4$.

**19.7.** Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x} = x$;  в) $\sqrt{x} = 2 - x$;  д) $\sqrt{x} = x^2$;

б) $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$;  г) $\sqrt{x} = 4 - \frac{1}{2}x$;  е) $\sqrt{x} = |x|$.

**19.8.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{x}$. Найдите:

а) $f(2)$, $f\left(\frac{4}{9}\right)$, $f(0)$;

б) $f(a)$, $f(2a)$, $f(-a)$;

в) $f(x + 2)$, $f(x) + 2$, $f(x + 2) + 3$;

г) $f(1)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f(2{,}25)$;

д) $f(b)$, $f(3b)$, $f(-2b)$;

е) $f(x^2 - 3)$, $f\left(\frac{2}{x}\right) - 2$, $f(x^3) + 3f(121)$.

**19.9.** Дано: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$. Докажите, что:

а) $f(x^4) = g(x)$;  б) $(f(x))^8 = g(x^2)$.

**19.10.** Дано: $f(x) = \sqrt{x}$. Решите уравнение:

а) $f(x - 1) = 3$;  в) $f(2x) = 4$.

б) $1 - f(x) = -3$;  г) $f(x + 1) = 2$.

**19.11.** Не выполняя построения, распределите заданные точки в две группы: те, которые принадлежат графику функции $y = -\sqrt{x}$, и те, которые не принадлежат графику этой функции:

а) $A(-2;\ 4)$, $B\left(3;\ -\sqrt{3}\right)$, $C(16;\ -4)$, $D(-25;\ 5)$, $E(2{,}25;\ 1{,}5)$;

б) $K(0;\ 0)$, $L\left(2;\ \sqrt{2}\right)$, $M(4;\ -2)$, $N(6{,}25;\ -2{,}5)$, $R(-9;\ -3)$;

в) $D(1;\ 1)$, $E(2{,}25;\ -1{,}5)$, $F(4;\ -16)$, $G(2{,}5;\ -5)$, $H(1{,}21;\ 1{,}1)$;

г) $M(0{,}25;\ 0{,}5)$, $N\left(\sqrt{2};\ -2\right)$, $P(49;\ -7)$, $Q\left(5;\ \sqrt{5}\right)$, $T(0{,}09;\ 0{,}3)$.

**19.12.** Постройте график функции $y = -\sqrt{x}$. С помощью графика найдите:

а) значения $y$ при $x = 0;\ 3;\ 4$;

б) значения $x$, если $y = 0;\ -2;\ -3$;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[0;\ -4]$;

г) при каких значениях $x$ график функции расположен выше прямой $y = -2$, ниже прямой $y = -2$.

**19.13.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\sqrt{x}$:

а) на отрезке $[0; 9]$;
б) на полуинтервале $(1; 4]$;
в) на луче $[4; +\infty)$;
г) на отрезке $[1; 4]$;
д) на полуинтервале $(1; 9]$;
е) на луче $[9; +\infty)$.

**19.14.** Дана функция $y = -\sqrt{x}$. Укажите, какому промежутку принадлежит переменная $x$, если:

а) $y_{\text{наим}} = -3$, $y_{\text{наиб}} = 0$;
б) $y_{\text{наим}} = -6$, $y_{\text{наиб}} = -1$;
в) $y_{\text{наим}} = -2{,}5$, $y_{\text{наиб}} = -1{,}5$;
г) $y_{\text{наим}} = -2$, $y_{\text{наиб}} = -1$;
д) $y_{\text{наим}} = -5$, $y_{\text{наиб}} = 0$;
е) $y_{\text{наим}} = -5$, $y_{\text{наиб}} = -1{,}5$.

**19.15.** Дана функция $y = -\sqrt{x}$. Укажите промежуток, которому удовлетворяет переменная $y$, если:

а) $0 < x \leqslant 1$;
б) $4 \leqslant x < 9$;
в) $1 < x < 4$;
г) $0 < x < 4$;
д) $x > 1$;
е) $x \geqslant 4$.

**19.16.** Дана функция $y = -\sqrt{x}$. Укажите промежуток, которому удовлетворяет переменная $x$, если:

а) $-3 < y \leqslant -1$;
б) $-4 \leqslant y < -1$;
в) $-5 < y < -1$;
г) $-2 < y < 0$;
д) $y < -2$;
е) $y \leqslant -3$.

**19.17.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = -\sqrt{x}$. Найдите:

а) $f(3)$, $f\left(2\frac{1}{4}\right)$, $f(0)$;

б) $f(a)$, $f(3a)$, $f(-2a)$;

в) $f(-x)$, $f\left(\frac{5}{x}\right) - 1$, $f(x^2 + 2x) - \sqrt{0{,}25}$;

г) $f(5)$, $f\left(\frac{4}{25}\right)$, $f(1{,}44)$;

д) $f(b)$, $f(-3b)$, $f(4b)$;

е) $f(2x + 3)$, $f(5 - x^2) + 1$, $f\left(\frac{3}{x^3} + x\right) - \sqrt{2{,}89}$.

**19.18.** Решите графически уравнение:

а) $-\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x$;
б) $-\sqrt{x} = 2 - 3x$;
в) $-\sqrt{x} = -|x|$;
г) $-\sqrt{x} = x$;
д) $-\sqrt{x} = 3 - \frac{2}{3}x$;
е) $-\sqrt{x} = -x^2$.

**19.19.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x - 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = -\sqrt{x}, \\ y = \dfrac{1}{2}x - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -\sqrt{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = |x|; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -\sqrt{x}, \\ y = -|x|. \end{cases}$

**19.20.** Решите графически неравенство:

а) $\sqrt{x} \leqslant 3$; в) $-\sqrt{x} < 2 - x$; д) $\sqrt{x} \geqslant |x|$;

б) $-\sqrt{x} \geqslant 2$; г) $\sqrt{x} > \dfrac{2}{3}x - 3$; е) $-\sqrt{x} \leqslant x^2$.

**19.21.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

а) Найдите $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(2\dfrac{1}{4}\right)$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Перечислите свойства функции.

**19.22.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x < 1, \\ -\sqrt{x}, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 9. \end{cases}$

а) Найдите $f(-2)$, $f(1)$, $f(9)$, $f(16)$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Перечислите свойства функции.

ИКТ **19.23.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, \text{ если } -4 \leqslant x < 4, \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}, \text{ если } 4 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$

а) Найдите корни уравнения $f(x) = a$, если $a = -2$, $a = \sqrt{2}$, $a = 6$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

ИКТ **19.24.** Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ если } x < 1, \\ -\sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

При каких значениях параметра $p$ прямая $y = p$ с графиком данной функции:
а) имеет две общие точки;
б) имеет одну общую точку;
в) не имеет ни одной общей точки;
г) имеет не менее трёх общих точек?

**19.25.** Постройте график функции:

а) $y = 2\sqrt{x}$;
б) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$;
в) $y = 3\sqrt{x}$;
г) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$;
д) $y = -2\sqrt{x}$;
е) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

**19.26.** Решите уравнение:

а) $2\sqrt{x} = x$;
б) $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{2}x$.

**19.27.** Постройте график функции:
а) $y = \sqrt{-x}$;
б) $y = \sqrt{|x|}$;
в) $y = -\sqrt{-x}$;
г) $y = -\sqrt{|x|}$.

ИКТ **19.28.** Постройте график уравнения:
а) $x = y^2$;
б) $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$.

## Упражнения для повторения

**19.29.** а) Числа 108 и 162 разложили на простые множители и составили два множества: $A$ — множество простых множителей числа 108 и $B$ — множество простых множителей числа 162. Найдите пересечение и объединение множеств $A$ и $B$.
б) Числа 320 и 400 разложили на простые множители и составили два множества: $A$ — множество простых множителей числа 320 и $B$ — множество простых множителей числа 400. Найдите пересечение и объединение множеств $A$ и $B$.