§ 40. Испытания с равновозможными исходами

Сравним две задачи, которые на первый взгляд очень похожи между собой.

а) На тестировании каждый ученик 8 «Б» класса произвольно назвал одну из цифр 0, 1, 2, ..., 9. Найти частоту результата «0».

б) Какова вероятность того, что при случайном выборе из цифр 0, 1, 2, ..., 9 будет выбрана цифра 0?

Несмотря на похожесть, имеются и важные различия. *Первое* из них — время, в котором стоит глагол. В задаче «а» это прошедшее время, действие уже было совершено. В задаче «б» время будущее, а действие — предполагаемое. *Второе* различие — объект, к которому вопрос относится. В задаче «а» это конкретный класс с конкретными учениками. В задаче «б» — неопределённый, предполагаемый, абстрактный «выбиратель» цифры.

Третье различие для вас сейчас самое важное. Задача «а» — это задача по описательной статистике, такие задачи мы решали в 7-м классе. Надо сосчитать число полученных результатов «0» и разделить это число на *объём* данных, т. е. на число отвечавших учеников. Получится ответ типа $\frac{3}{29}$, $\frac{2}{23}$, $\frac{1}{19}$, ... Задача «б» — новая, на такие вопросы вы пока ещё не отвечали. Давайте посмотрим, как это делается.

Решение задачи «б». Всего имеется 10 исходов: выбрана цифра 0, выбрана цифра 1, ..., выбрана цифра 9. Шансы наступления каждого из исходов *предполагаются* одинаковыми, т. е. доля каждого из исходов среди всех исходов равна $\frac{1}{10}$. Эта доля как раз и равна *вероятности* того или иного исхода. В частности, вероятность того, что будет выбрана именно цифра 0, равна $\frac{1}{10}$.

Ответ: 0,1.

Какой же вывод можно сделать из сравнения задач «а» и «б»? Вот он. Задача «а» — по статистике, она относится к уже произошедшему выбору цифры и к уже полученным данным. Задача «б» — по теории вероятностей, она относится к *вероятностной модели* выбора цифры. Кратко: «б» есть математическая (вероятностная) модель «а».

В этой модели все исходы испытания предполагаются *равновозможными*.

Конечно, это очень сильное предположение, и получается, быть может, излишне простая модель реального события. Но именно за счёт простоты как раз и удаётся сравнительно быстро получать ответы во многих ситуациях. Для сравнения, в хорошо известных вам текстовых задачах «про пешехода» или «про землекопа» мы также имеем дело с простейшей моделью, в которой пешеход равномерно шагает по прямолинейному шоссе, а землекоп без устали и с постоянной производительностью роет землю. Разумеется, прямолинейность и равномерность движения, или постоянность производительности, — предположения, которые очень серьёзно упрощают реальность. Но без этих упрощений мы вообще не смогли бы научиться разбираться даже в простейших моделях реальных ситуаций.

Приведём общее правило.

Алгоритм вычисления вероятностей для испытаний с равновозможными между собой исходами

1. Найти общее число N равновозможных между собой исходов.
2. Найти число $N(A)$ тех исходов, в результате которых наступает интересующее нас событие A.
3. Найти отношение $\dfrac{N(A)}{N}$, оно и равно вероятности события A.

Вероятность события A принято обозначать $P(A)$; буква P берётся от французского *probabilite* (или от английского *probability*) — вероятность. Значит, приведённое правило можно записать одной краткой формулой:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

Следуя традиции, это правило называют *классическим определением вероятности* и часто формулируют не в виде алгоритма из трёх шагов, а в виде одной фразы:

вероятность события A при проведении некоторого испытания равна отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу равновозможных между собой исходов этого испытания.

В этой фразе слова «*...благоприятствующих наступлению события A...*» есть аналог слов «*...в результате которых наступает событие A...*».

Пример 1 Монету бросают дважды. Какова вероятность того, что оба раза выпадет «орёл»?

Решение. Предполагается, что при одном бросании монеты возможны только два исхода: Р — выпадение «решки» и О — выпадение «орла»[1]. При двух бросаниях возможны исходы РР, РО, ОР, ОО. Из них только один исход ОО благоприятствует наступлению интересующего нас события A. Значит, $N = 4$, $N(A) = 1$, $P(A) = \frac{1}{4}$.

Ответ: 0,25.

Пример 2 Монету бросают трижды. Какова вероятность того, что ровно два раза из трёх выпадет «орёл»?

Решение. При трёх бросаниях возможны восемь исходов:

РРР, РРО, РОР, РОО, ОРР, ОРО, OОР, ООО.

Интересующее нас событие, обозначим его B, произойдёт при наступлении трёх из восьми исходов: РОО, ОРО, OОР. Значит, $N = 8$, $N(B) = 3$, $P(B) = \frac{3}{8}$.

Ответ: 0,375.

В этом примере самое интересное — перечисление всех восьми возможных исходов. Это перечисление можно организовать с помощью так называемого *дерева вариантов*. Рисуют это дерево шаг за шагом. Можно делать это, двигаясь и сверху вниз, и снизу вверх, а можно и слева направо. Покажем, как это делается.

Сначала нарисуем одну точку — «корень» дерева (рис. 130, *а*). Из корня выходят две «ветки», два отрезка. Их концы соответствуют исходам О и Р первого бросания монеты (рис. 130, *б*). Из этих концов выходят ещё по две «ветки», по два отрезка. Их концы соответствуют четырём исходам ОО, ОР, РО и РР второго бросания (рис. 130, *в*). Из этих концов выходят ещё по две «ветки» О и Р. Всего как раз и получается восемь исходов троекратного бросания монеты (рис. 130, *г*).

[1] Монета не встанет на ребро, не укатится, её никто не утащит и т. п.

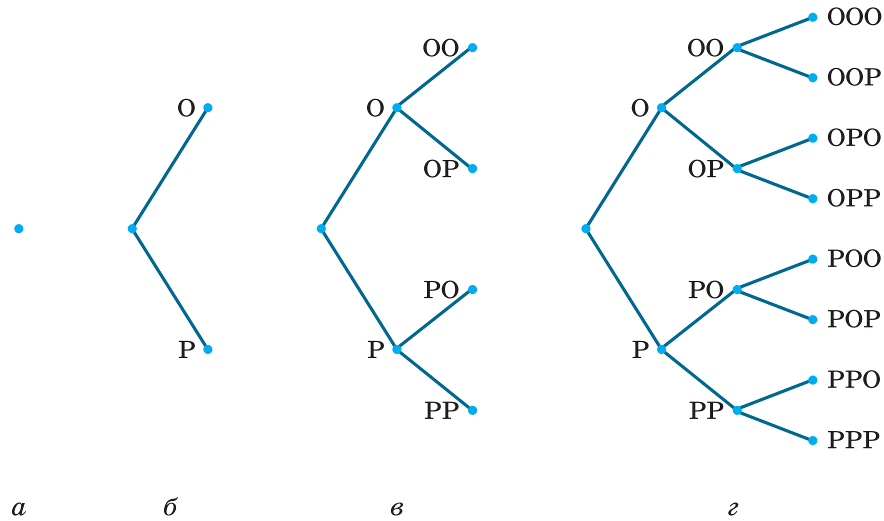

Рис. 130

Пример 3 Митя и Миша по очереди называют произвольную цифру из 0, 1, 2, ..., 9, а Маша записывает их ответы друг за другом без пробелов и запятых. Какова вероятность того, что у Маши получится:

а) натуральное число; б) число, большее 90; в) число, меньшее 27; г) число, кратное 5?

Решение. Вот какие исходы вообще могут получиться:

00, 01, 02, ..., 09, 10, 11, ..., 19, 20, 21, ..., 29, 30, ..., 98, 99.

Всего $N = 100$ исходов.

а) Исходы 00, 01, 02, ..., 09 — не числа. Интересующее нас событие, обозначим его A, произойдёт при наступлении остальных исходов. Их 90, т. е. $N(A) = 90$, $P(A) = \dfrac{90}{100} = 0{,}9$.

б) Интересующее нас событие, обозначим его B, произойдёт при наступлении исходов 91, 92, ..., 99. Их 9, т. е. $N(B) = 9$, $P(B) = \dfrac{9}{100} = 0{,}09$.

в) Интересующее нас событие, обозначим его C, произойдёт при наступлении исходов 10, 11, ..., 26. Их 17, т. е. $N(C) = 17$, $P(C) = \dfrac{17}{100} = 0{,}17$.

г) Интересующее нас событие, обозначим его D, произойдёт при наступлении исходов 10, 15, 20, 25, ..., 85, 90, 95. Сосчитать их количество можно так. Разделим все числа на 5, получится ряд 2, 3, 4, 5, ..., 18, 19. В нём 19 − 1 = 18 чисел. Итак,

$$N(D) = 18, \quad P(D) = \frac{18}{100} = 0{,}18.$$

Ответ: а) 0,9; б) 0,09; в) 0,17; г) 0,18.

Подчеркнём, что в примерах 1—3 рассмотрены испытания с равновозможными исходами. Это означает, что в примерах 1 и 2 монета *идеальна*. Она симметрична, и два возможных исхода О и Р выпадения «орла» и «решки» равновозможны между собой. В примере 3 все ответы 0, 1, 2, ..., 9 мальчиков также считаются равновозможными между собой. Это тоже *идеальная* ситуация: в реальной жизни Митя, к примеру, может предпочитать цифру 5, а Миша, скажем, цифру 1.

Итак, в примерах 1—3 мы имеем дело с *моделями* реальных ситуаций. Впрочем, так бывает всегда при использовании классического определения вероятности.

Упражнения

На шести гранях игрального кубика по одному расставлены числа очков от 1 до 6. Кубик бросают один раз.

40.1. Какова вероятность того, что выпадет:
а) число очков, равное 3;
б) число очков, равное 2;
в) наибольшее число очков;
г) число очков, равное 2 или 5;
д) число очков, не равное 4;
е) число очков, не равное ни 4, ни 5?

40.2. Какова вероятность того, что выпадет:
а) положительное число очков;
б) нечётное число очков;
в) чётное число очков;
г) число очков, кратное трём;
д) число очков, меньшее $\sqrt{5}$;
е) число очков, большее π?

Наудачу выбирают целое неотрицательное число, которое меньше ста.

40.3. Какова вероятность того, что выбранное число окажется:
а) равным 11;
б) равным 23;
в) равным 45;
г) элементом множества $\{1, 7, 72, 81\}$;
д) элементом множества $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$;
е) элементом множества $\{10, 20, \ldots, 90\}$?

40.4. Какова вероятность того, что выбранное число окажется:
а) больше 11;
б) меньше 23;
в) больше 11 и меньше 23;
г) или меньше 11, или больше 23;
д) принадлежащим промежутку $(23{,}45; 67{,}89]$;
е) принадлежащим отрезку $\left[\sqrt{50}; \sqrt{5000}\right]$?

40.5. Какова вероятность того, что выбранное число окажется:
а) чётным;
б) нечётным;
в) кратным пяти;
г) кратным семи;
д) нечётным и кратным семи;
е) или чётным, или кратным пяти?

На уроке алгебры проводилось тестирование. Следующим уроком была геометрия, на которой тоже было тестирование. За каждое тестирование ставили отметки «2», «3», «4», «5». Учитель сказала Вере, что у неё «двоек» нет.

40.6. а) Нарисуйте дерево возможных отметок Веры за оба тестирования.
б) Сколько всего вариантов отметок Веры?
в) Сколько всего вариантов отметок без «троек»?
г) Сколько всего вариантов отметок с одной «пятёркой»?
д) Сколько всего вариантов отметок, среди которых нет одинаковых?
е) Сколько всего вариантов отметок с суммой больше 7?

40.7. Какова вероятность того, что:
а) сумма отметок меньше 11;
б) сумма отметок больше 10;
в) среди отметок нет «пятёрок»;
г) отметки одинаковы;
д) первая отметка больше второй;
е) отметки различаются более чем на 1?