Итак, в главе 3

Сформулировали определения следующих математических понятий:

— функция, область определения, область значений функции;
— монотонность (возрастание и убывание) функции;
— ограниченность функции снизу, сверху;
— наименьшее и наибольшее значения функции;
— чётность и нечётность функции;
— корень n-й степени из действительного числа.

Познакомились с различными способами задания функции: аналитическим, графическим, табличным, словесным.

Ввели новые обозначения:

$D(f)$ — для области определения функции $y = f(x)$;

$E(f)$ — для области значений функции $y = f(x)$.

Изучили новые математические модели — функции $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.

Обсудили геометрические особенности графика:

— чётной функции, нечётной функции;
— ограниченной снизу, ограниченной сверху функции;
— непрерывной функции;
— выпуклой вверх, выпуклой вниз функции.

Узнали, как, опираясь на известный график функции $y = f(x)$, построить графики функций $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.

Вопросы

1. Дайте определение числовой функции.
2. Что такое область определения функции; область значений функции?
3. Что называют графиком функции $y = f(x)$?
4. Перечислите способы задания функции. В чём состоит каждый из способов?
5. Какую функцию называют возрастающей; убывающей?
6. Какую функцию называют ограниченной снизу; ограниченной сверху; ограниченной; неограниченной?
7. Какую функцию называют выпуклой вниз; выпуклой вверх?

8. Сформулируйте определение наименьшего (наибольшего) значения функции на заданном промежутке.
9. Какую функцию называют чётной; нечётной?
10. Каким свойством обладает график чётной функции; нечётной функции?
11. Как построить график функции $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$?
12. Как построить график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$?

Тест

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{4 - 7x}$.

а) $\left(-\infty; \frac{4}{7}\right]$ в) $(-\infty; 1{,}75]$

б) $\left[\frac{4}{7}; +\infty\right)$ г) $\left[1\frac{3}{4}; +\infty\right)$

2. Укажите функции, убывающие на отрезке $[-1; 1]$.

а) $y = 2(x - 2)^2$ в) $y = \sqrt[3]{x + 1}$

б) $y = 1 - x^3$ г) $y = |2x - 1|$

3. Найдите наибольшее значение функции $y = -\sqrt[3]{x + 2}$ на отрезке $[-10; 5]$.

4. Вычислите: $\sqrt[3]{72 \cdot 24}$.

5. Какая из данных функций является чётной?

а) $y = x\sqrt{x}$ в) $y = x\sqrt[3]{x}$

б) $y = x\sqrt{|x|}$ г) $y = |x|\sqrt[3]{x}$

6. График функции $y = kx^3$ проходит через точку $(5; 1)$. Найдите значение коэффициента k.

7. Функция $y = f(x)$ имеет область значений $E(f) = [-4; 3]$. Укажите область значений функции $y = |f(x)|$.

а) $[3; 4]$ в) $[0; 3]$

б) $[0; 4]$ г) $[0; +\infty]$

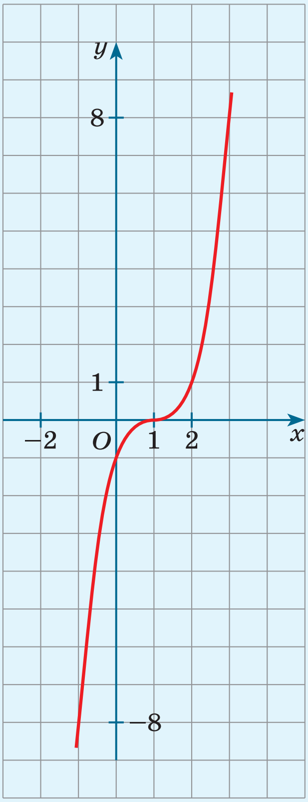

Рис. 204

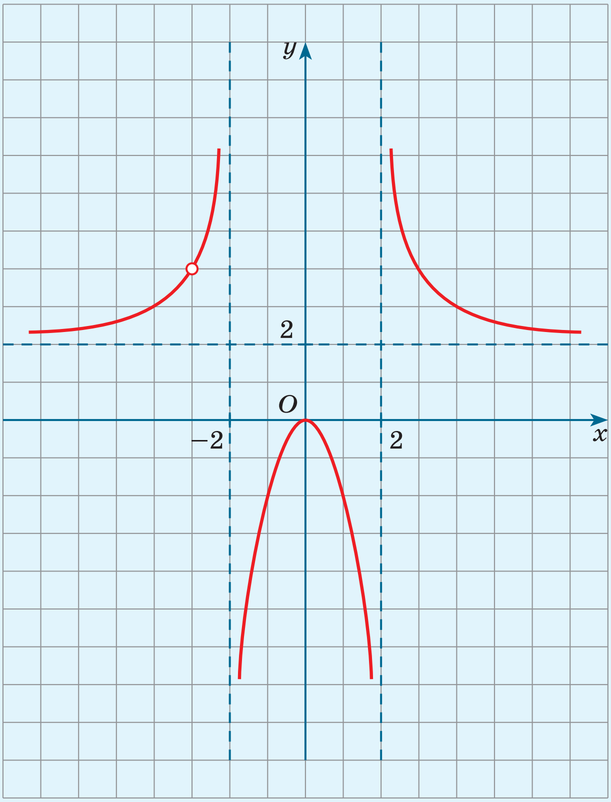

Рис. 205

8. График какой из данных функций изображён на рисунке 204?

а) $y = \sqrt[3]{x - 1}$ в) $y = \sqrt[3]{x} - 1$

б) $y = x^3 - 1$ г) $y = (x - 1)^3$

9. Укажите **не**верное утверждение.

1) Если график функции симметричен относительно начала координат, то функция является нечётной.

2) Если при $x_1 > x_2$ выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $y = f(x)$ возрастает.

3) Если функция не имеет наименьшего значения, то она не ограничена снизу.

10. На рисунке 205 изображён график функции $y = f(x)$. Найдите, при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет один корень.

Дополнительные задачи

По словесному описанию функции укажите аналитический способ её задания. При необходимости выполните тождественные преобразования, упрощающие аналитическое выражение.

1. Для каждого числа (значения независимой переменной) значение функции $y = f(x)$ равно:
а) сумме числа и удвоенного числа, увеличенного на 5;
б) сумме числа и удвоенной суммы этого числа и числа 5;
в) сумме половины числа и одной трети противоположного числа;
г) утроенному квадрату числа, уменьшенному на произведение этого числа и числа 5;
д) квадрату куба числа, уменьшенному на четвёртую степень квадрата числа;
е) квадратному корню из суммы квадрата числа и учетверённой суммы этого числа и числа 1.

2. Для каждого числа (значения независимой переменной) значение функции $y = g(x)$ равно:
а) произведению числа, увеличенного на 1, и противоположного числа, увеличенного на 1;
б) произведению удвоенного числа, уменьшенного на 3, и утроенного числа, увеличенного на 2;
в) произведению квадрата числа и куба половины противоположного числа;
г) частному от деления числа на его квадрат, увеличенный на 7;
д) частному от деления суммы утроенного числа и куба удвоенного числа на модуль числа, увеличенный на 2;
е) квадратному корню из суммы числа 2 и частного от деления на квадрат числа его четвёртой степени, увеличенной на 1.

3. Для каждого положительного числа (значения независимой переменной) значение функции $y = h(x)$ равно:
а) числу, увеличенному на 777 %;
б) половине числа, уменьшенного на 23 %;
в) 78 % от числа, уменьшенного на 20 %;
г) 80 % от числа, увеличенного на 90 %;
д) 40 % от 40 % трети числа, уменьшенного на 40 %;
е) 20 % от 20 % четверти числа, увеличенного на 20 %.

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутках I и J. На каждом из них она линейна и принимает указанные значения. Нарисуйте её график.

а) $I = (-\infty; 0)$, $J = [0; +\infty)$, $f(-1) = 1$, $f(-3) = 3$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$;
б) $I = (-\infty; 0]$, $J = (0; +\infty)$, $f(-2) = 4$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(3) = 5$;
в) $I = (-\infty; 1)$, $J = (1; +\infty)$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 2$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$;
г) $I = (-\infty; -1]$, $J = [2; +\infty)$, $f(-4) = 0$, $f(-1) = -3$, $f(3) = 1$, $f(4) = 0$;
д) $I = [-5; -1]$, $J = [0; 4]$, $f(-3) = 1$, $f(-2) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$;
е) $I = (-\infty; -1)$, $J = (0; 3)$, $f(-5) = 0$, $f(-3) = -4$, $f(1) = 3$, $f(2) = 0$.

5. Задайте аналитически функции из упражнения **4**.

6. Вычислите:

а) $f(-2)$ для функции из упражнения **4** «а»;
б) $f(2)$ для функции из упражнения **4** «б»;
в) $f(2)$ для функции из упражнения **4** «в»;
г) $f(f(-6))$ для функции из упражнения **4** «г»;
д) $f(f(0))$ для функции из упражнения **4** «д»;
е) $f(f(-4))$ для функции из упражнения **4** «е».

Квадратичная функция $y = f(x)$ принимает значения $f(-2) = 0$, $f(0) = -4$, $f(4) = 0$.

7. Нарисуйте эскиз графика функции:

а) $y = g(x)$, если $g(x) = -f(x)$;
б) $y = h(x)$, если $h(x) = 2f(x)$;
в) $y = \varphi(x)$, если $\varphi(x) = 1 - f(x)$;
г) $y = \gamma(x)$, если $\gamma(x) = 2f(x + 1)$;
д) $y = v(x)$, если $v(x) = |f(x - 1)|$;
е) $y = \omega(x)$, если $\omega(x) = f(|x|)$.

8. Верны ли неравенства для функций из предыдущего упражнения:

а) $g(3) \leqslant 0$;
б) $h(2) < 0$;
в) $\varphi(10) > 0$;
г) $\gamma(-1) \cdot \gamma(11) \leqslant 0$;
д) $v(-5) \cdot v(5) \leqslant 0$;
е) $\omega(-2) + \omega(2) > 0$?

9. Какие утверждения о монотонности функций из упражнения **7** верны, а какие — нет:

а) $y = g(x)$ убывает на $[0; 4]$;
б) $y = h(x)$ возрастает на $[2; 5]$;
в) $y = \varphi(x)$ возрастает на $[-2; 0]$;
г) $y = \gamma(x)$ возрастает на $[-2; 0]$;
д) $y = v(x)$ убывает на $[-2; 1]$;
е) $y = \omega(x)$ монотонна?

10. Дробно-линейная функция $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{x + b}{cx + d}$, не определена при $x = 1$, имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$, а её значение при $x = 2$ равно 7.

1) Задайте функцию аналитически.

2) Вычислите:

а) $f(3)$; б) $f(6)$; в) $f(11)$; г) $f(0)$; д) $f(-4)$.

11. Для функции из предыдущего упражнения нарисуйте эскизы графиков функций:

а) $y = g(x)$, если $g(x) = f(x - 1)$;
б) $y = h(x)$, если $h(x) = f(x + 1)$;
в) $y = \varphi(x)$, если $\varphi(x) = 1 + f(x)$;
г) $y = \gamma(x)$, если $\gamma(x) = -f(x)$;
д) $y = \psi(x)$, если $\psi(x) = 2 - f(x)$;
е) $y = \omega(x)$, если $\omega(x) = f(|x|)$.

12. Для функций из предыдущего упражнения решите неравенства:

а) $f(x) < 0$; в) $\varphi(x) < 2$; д) $\psi(x) > 0$;
б) $h(x) \leqslant 0$; г) $\gamma(x) \geqslant 0$; е) $\omega(x) < -3$.

13. Найдите все значения b, при каждом из которых функция:

а) $y = \sqrt{x + 1} + b$ возрастает на луче $[b; +\infty)$;
б) $y = \sqrt{x + 2} + b$ возрастает на луче $(b; +\infty)$;
в) $y = \sqrt{x + b} + 1$ возрастает на луче $[-1; +\infty)$;
г) $y = 1 - \sqrt{x + b}$ убывает на луче $[-1; +\infty)$;
д) $y = b + \sqrt{1 - x}$ убывает на луче $(-\infty; b)$;
е) $y = b - \sqrt{1 - x}$ возрастает на интервале $(-b; b)$.

Из истории математики

Современная математика и математика второй половины XX в. во многом существенно отличается от математики XIX в. и тем более математики более раннего времени. Одним из самых существенных отличий наряду с теоретико-множественным подходом является *функциональный* подход к введению, изучению и исследованию основных понятий и фактов; построение математических моделей, так или иначе основанных на *функциональных* зависимостях переменных.

Начальные представления о функциональных зависимостях имелись в астрономии и пифагорейской математике Древней Греции (VI—IV вв. до н. э.). При этом для описания того, что ныне мы называем способами задания функции, использовались в основном два способа: табличный и словесный. Таблицы широко использовались и в космологии, и в астрономии времён Сирийской империи Селевкидов, образовавшейся после распада империи Александра Македонского (IV в. до н. э.).

Позднее, в александрийскую эпоху с помощью геометрических теорем была разработана специальная (в основном табличная) тригонометрия хорд, во многом эквивалентная таблицам синусов более поздней арабской математики (IX—XI вв. н. э.). Часто использовались и словесные описания зависимостей между величинами. Например, при использовании *симптомов* — словесно описываемых уравнений кривых, получаемых при сечении конусов плоскостями. Проблемы зависимостей между величинами, идеи движения и непрерывности рассматривали многие учёные. Скажем, в «Физике» Аристотеля (IV в. до н. э.) систематически рассматривались «движения в отношении количества», «в отношении качества», «в отношении места», т. е. перемещения в плоскости и пространстве. Формулы и аналитические выражения тогда практически не использовались. Только у Диофанта (III в. н. э.) появились зачатки алгебры буквенных выражений.

В средневековой Европе формирование понятия *функция* традиционно связывают с результатами учёных XV—XVI вв. при исследовании естественно-научных вопросов, относящихся к различным формам *движения* (так называемые *кинематические* исследования, или «теория конфигураций качеств»). Отдельного термина *функция* тогда не было, пользовались или словами, отдельными для каждого отдельного случая, или термином *proportio* (отношение): «...какое бы отношение ни оказывалось между одной интенсивностью и другой... такое же отношение обнаруживается и между одной линией и другой...»

Идея обозначения переменных и констант (коэффициентов) буквами и регулярное использование буквенных выражений в явном и достаточно разработанном виде была реализована в работах Франсуа Виета (1540—1603), которого часто называют отцом символической алгебры. Всё же первое явное использование, упоминание и исследование зависимости одной переменной от другой традиционно связывают с «Геометрией» Рене Декарта (1637 г.). В этой знаменитой книге Декарт рассматривал движение точки по фиксированной кривой второго порядка и изучал зависимость между координатами этой точки. В частности, он явно описывал и неоднократно использовал то, что мы сейчас называем *построение графика по точкам*: «...придавая линии y последовательно бесконечное количество различных значений, мы найдём также бесконечное количество значений x и, таким образом, получим бесконечное количество точек... они опишут нужную кривую линию».

Несколько позже зависимости между координатами точки, двигающейся по более сложным кривым, рассматривал и Исаак Ньютон, и многие математики конца XVII в. Более того, именно исследование функций (в основном с помощью их разложения в степенные ряды) явилось отправной точкой создания Ньютоном (и Лейбницем) нового раздела математики — *математического анализа*.

Само слово *функция* впервые (1673 г.) использовал Г. Лейбниц в переписке с И. Бернулли. Лейбниц трактовал этот термин как отрезок, длина которого меняется по какому-нибудь определённому правилу, закону. Латинский глагол *fungor*, *functus sum*, *fungi* означает «осуществлять, выполнять, выражать». Первое общее определение функции дал, по-видимому, И. Бернулли в 1718 г.: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». При этом термины *постоянная величина* и *переменная величина* к этому времени уже широко использовались и входили (1716 г.) в словари.

Обозначение f для функций и запись $f(x)$, $y = f(x)$[1] ввёл в употребление Леонард Эйлер, после работ которого (1727—1741 гг., 1766—1783 гг., Санкт-Петербург, 1741—1766 гг., Берлин) функциональные зависимости стали одним из фундаментальных понятий математики.

[1] В оригинале $f : x$, обозначение $f(x)$ утвердилось после появления работ Жана Лерона Д'Аламбера (1717—1783).

Он писал так: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Понимание функции как аналитически заданного соотношения между переменными на долгое время оставалось главенствующим в математике XVIII—XIX вв.

Впрочем, уже к середине XIX в. стало понятно, что только аналитический подход недостаточен для общего понятий *функция*. Например, С. Ф. Лакруа (1765—1843) в 1806 г. в своём курсе анализа писал: «Всякая величина, значение которой зависит от одной или нескольких других величин, называется функцией, независимо от того, известны или неизвестны действия, с помощью которых следует от последних переходить к первой». Великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) в 1834 г. и немецкий математик Петер Дирихле (1805—1859) в 1837 г. предлагали сходные формулировки: «...Общее понятие функции требует, чтобы функцией от x называть число, которое даётся для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими в связи понимать как бы данными вместе...» (Лобачевский); «...y есть функция переменной x на отрезке, если каждому значению x на этом отрезке соответствует совершенно определённое значение y, причём безразлично, каким образом установлено это соответствие — аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами» (Дирихле).

Начиная с середины XIX в. нахождение и исследование функциональных зависимостей является одним из основных инструментов построения математических моделей реальных процессов в различных приложениях математики. Вместо числовых функций $y = f(x)$ стали рассматривать такого же типа зависимости $y = f(x)$, в которых x и y — уже не числа, а элементы некоторых абстрактных или довольно сложных множеств. В таких случаях вместо термина *функция* чаще говорят *отображение*.