§ 4. Основные понятия, связанные с системами двух уравнений с двумя переменными

С системами двух уравнений с двумя переменными вы впервые познакомились в курсе алгебры 7-го класса. Правда, там мы ограничивались только линейными уравнениями. В этой главе мы будем говорить о системах уравнений с самых общих позиций.

Определение 1. Если поставлена задача найти все пары чисел $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x; y) = 0$ и уравнению $q(x; y) = 0$, то говорят, что указанные уравнения образуют **систему уравнений** $\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$ Пару чисел $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют **решением системы уравнений**.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Например, пара $(2; 5)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} xy = 10, \\ y^2 - x^2 = 21. \end{cases}$ В самом деле, эта пара удовлетворяет как первому, так и второму уравнению системы, значит, является её решением. Навскидку можно указать ещё одно решение: $(-2; -5)$. Не исключено, что есть и другие решения, но так это или нет, мы сможем выяснить только в следующем параграфе. А вот пар, не являющихся решением системы, можно придумать сколько угодно, например $(1; 3)$; эта пара не удовлетворяет ни первому, ни второму уравнению системы. Ещё один пример: $(2{,}5; 4)$; эта пара — решение первого уравнения системы, но не удовлетворяет второму уравнению. Значит, решением системы она не является. Придумайте сами ещё несколько пар, не являющихся решением системы.

Переменные в уравнениях, образующих систему уравнений, могут быть обозначены и другими буквами, чаще всего латинского (a и b, s и t, u и v и т. д.) или другого (греческого, русского и т. д.) алфавита. При записи ответа в виде пары чисел на первое место ставят ту из двух букв, которая в соответствующем алфавите встречается раньше.

В § 1 мы ввели понятие равносильности для уравнений с двумя переменными. Теперь введём понятие равносильности для систем уравнений.

Определение 2. Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одинаковые множества решений (в частности, если обе системы не имеют решений).

Иногда удаётся решить систему двух уравнений с двумя переменными *графическим методом*. Вы с этим методом знакомы: нужно построить графики первого и второго уравнений заданной системы и найти точки пересечения графиков. Решения системы уравнений — координаты каждой точки пересечения.

Пример 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Решение. Построим график уравнения $x^2 + y^2 = 25$ — окружность с центром в начале координат и радиусом 5 (рис. 29). Построим график уравнения $x + y = 5$ — это прямая, проходящая через точки (0; 5) и (5; 0) (см. рис. 29). Окружность и прямая пересекаются в точках (0; 5) и (5; 0).

Ответ: (0; 5); (5; 0).

Заметим, что допустима (а иногда даже и предпочтительна) более подробная запись решения системы. Для системы, решённой в примере 1, ответ (0; 5); (5; 0) можно записать так:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 0. \end{cases}$$

Пример 2 Решить систему уравнений $\begin{cases} y = 3x^2, \\ xy = 3. \end{cases}$

Решение. Графиком уравнения $y = 3x^2$ является парабола (рис. 30). Переписав второе уравнение системы в виде $y = \dfrac{3}{x}$, приходим к выводу: графиком этого уравнения является гипербола (рис. 31). Парабола и гипербола пересекаются в единственной точке A (рис. 32). Судя по построенной геометрической модели, точка A имеет координаты (1; 3). Проверка показывает, что на самом деле пара (1; 3) является решением обоих уравнений системы, а значит, и решением системы уравнений. Следовательно, заданная система уравнений имеет одно решение: (1; 3).

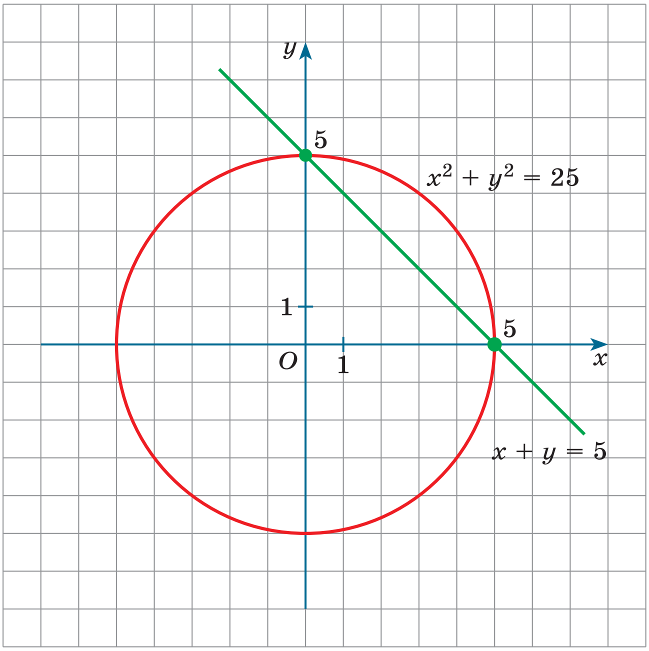

Рис. 29

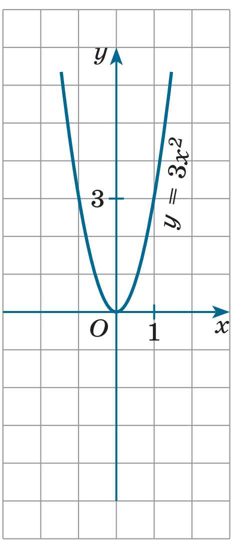

Рис. 30

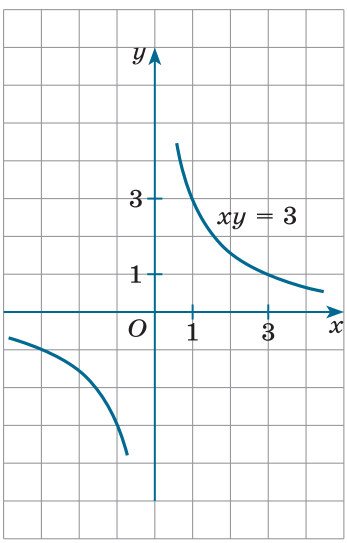

Рис. 31

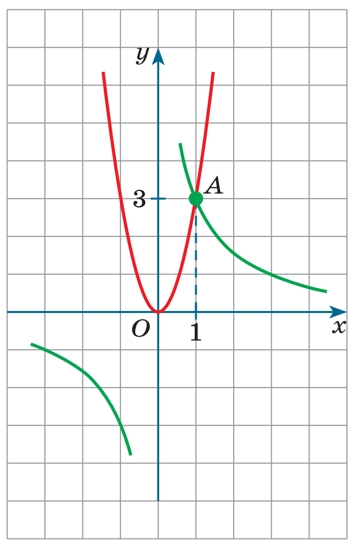

Рис. 32

Графический метод решения систем уравнений не очень надёжен. Во-первых, не для любого уравнения с двумя переменными задача построения его графика является простой. Во-вторых, даже если графики уравнений удалось построить, точки пересечения могут быть не такими удачными, как в рассмотренных примерах 1 и 2, более того, интересующие нас точки и вовсе могут оказаться за пределами чертежа. Значит, нам нужно располагать надёжными алгебраическими методами решения систем уравнений. Подробнее о методах решения систем уравнений поговорим в следующих параграфах.

Упражнения

4.1. Является ли пара чисел (3; −2) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=5,\\2x-y=6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+3y=3,\\3x-2y=5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x-y^2+1=0,\\xy-6=0;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x^2+(y+4)^2=13,\\3x-2y=13;\end{cases}$

д) $\begin{cases}2x^2+5y=8,\\4x=6-3y;\end{cases}$

е) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=8,\\x(y+3)=9?\end{cases}$

4.2. а) Какая из данных пар чисел (1; −2), (−1; 2), (2; −1) является решением системы уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\x+2y=-3?\end{cases}$$

б) Какая из данных пар чисел (−3; 1), (3; −1), (1; −3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=10,\\|x-3|+y=-1?\end{cases}$$

4.3. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\x-y=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\x+y=3;\end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ y = \sqrt{x+1} - 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25, \\ |x-1| - y = 4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x-2)^2 - y = 0, \\ y = |x-2|; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4, \\ y = -\sqrt{x+2} - 1? \end{cases}$

Решите систему уравнений.

4.4. а) $\begin{cases} x = 1, \\ x^2 - 2y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 4, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = 4, \\ x^2 + y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} xy = -6, \\ x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$

4.5. а) $\begin{cases} (x-2)^2 - y + 1 = 0, \\ \sqrt{x-2} + y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9, \\ x - y - 2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 = 4, \\ 0{,}5x^2 - y - 1 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x+3)^2 - y - 2 = 0, \\ \sqrt{x+2} + y = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16, \\ x + y - 5 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 9, \\ (x-3)^2 + 3y - 3 = 0. \end{cases}$

4.6. а) $\begin{cases} (x+1)^2 - y + 2 = 0, \\ |x+1| + y - 8 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ |x| - y - 4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9, \\ |x-6| + y + 2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-3)^2 + y - 2 = 0, \\ |x-3| - y - 4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ |x| + y - 3 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4, \\ |x| - y + 1 = 0. \end{cases}$

ИКТ **4.7.** При каком значении параметра p пара чисел $(-1; 2)$ является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} p^2x - y = -6, \\ x^2 + y^2 = p + 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} p^2x + 2py = 3, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3p + 1? \end{cases}$

ИКТ **4.8.** При каком значении параметра p система уравнений имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} x^2 - y - 2 = 0, \\ px + y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} px - y + 3 = 0, \\ (x-2)^2 - y + 3 = 0? \end{cases}$

ИКТ **4.9.** При каком значении параметра p система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x^2 - y + p = 0 \end{cases}$

а) имеет два решения;

б) имеет единственное решение?

Упражнения для повторения

4.10. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x - 3y = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -7x + 4y = 9, \\ 3x - y = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + y = -12, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 5y = 42, \\ 3x - y = 12. \end{cases}$

4.11. Решите систему неравенств и укажите наименьшее целое её решение:

а) $\begin{cases} 7y - 4 \geqslant 5y - 14, \\ 6 - 5y > 2y + 27; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5y + 11 < 2y - 1, \\ y - 8 \leqslant 6y + 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - 10y \leqslant 3y + 1, \\ 2 - 6y \geqslant 4y + 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4y + 3 > 5y + 3, \\ 7 - 3y \leqslant 7 - 2y. \end{cases}$

4.12. Даны множества:

$A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$;

$B = \{-3; -2; -1\}$;

$C = \{-3; -2; -1; 12; 13; 14\}$;

$D = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;

$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

а) Можно ли выделить среди них три таких множества, что пересечение двух из них равно третьему? С помощью соответствующих математических символов запишите равенство.

б) Можно ли выделить среди них три таких множества, что объединение двух из них равно третьему? С помощью соответствующих математических символов запишите равенство.