§ 54. Математическое ожидание (среднее значение) случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины называют сумму произведений её значений на те вероятности, с которыми она эти значения принимает.

Зная таблицу распределения случайной величины,

s_1	s_2	...	s_n
p_1	p_2	...	p_n

математическое ожидание можно записать как $s_1p_1 = s_2p_2 + \ldots + s_np_n$. Напомним, что в первой строке таблицы распределения случайной величины S выписывают все её значения $s_1, s_2, \ldots, s_n$, а в клетки второй строки вписывают соответствующие вероятности:

p_1 — вероятность того, что S примет значение s_1; кратко, $p_1 = P(S = s_1)$;

...

p_n — вероятность того, что S примет значение s_n; кратко, $p_n = P(S = s_n)$.

Математическое ожидание случайной величины S обозначают $M(S)$[1]. Появление слова «ожидание» связано с тем, что первоначально рассматривались различные игровые ситуации (бросания монет, кубиков, делёж ставок, выигрыши в лотереях и т. п.) и исследовали вопрос о «самом ожидаемом» результате.

У математического ожидания есть ясная физическая модель: если на числовой оси в точках $s_1, s_2, \ldots, s_n$ разместить общую единичную массу, распределив её соответственно на части $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то получится система материальных точек. Так вот центр масс (центр тяжести, точка равновесия) этой системы как раз и равен $s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_np_n$. Например, если в точках s_1, s_2 разместить массы 0,5 и 0,5, то центр масс окажется в середине отрезка $[s_1; s_2]$, в точке $\frac{s_1 + s_2}{2} = s_1 \cdot 0{,}5 + s_2 \cdot 0{,}5$. Итак, $M(S)$ — это центр масс системы

---

[1] Используют также обозначение $E(S)$ (от англ. *expectation* — ожидание) и похожие символы M_S, $M[S]$, E_S. В XVI—XVII вв. использовали термин «моральное ожидание».

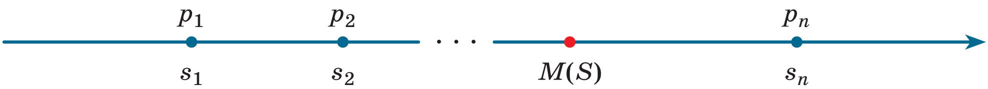

Рис. 179

материальных точек: s_1 массой p_1, s_2 массой p_2, ..., s_n массой p_n (рис. 179).

Если точку опоры разместить в точке

$$M(S) = s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_np_n,$$

то система материальных точек окажется в состоянии равновесия.

Математическое ожидание часто называют *средним* значением. Дело в том, что в случае $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ равномерного распределения получается вот что:

$$M(S) = s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_np_n =$$
$$s_1 \cdot \frac{1}{n} + s_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + s_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Значит, среднее арифметическое числового набора — частный случай математического ожидания. Он наступает, если все значения числового набора «равнозначны» между собой, т. е. принимаются с одной и той же вероятностью.

Пример 1 По таблице распределения случайной величины вычислить её математическое ожидание:

а)

0	1
0,35	0,65

в)

−2	−1	3
0,2	0,5	0,3

б)

−4	5
0,1	0,9

в)

0	1	2
q^2	$2pq$	p^2

Решение. Подсчёты проведём по определению.

а) $0 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}65 = 0{,}65$;

б) $(-4) \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}9 = 4{,}1$;

в) $(-2) \cdot 0{,}2 + (-1) \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 0$;

г) $0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2pq + 2 \cdot p^2 = 2p(q + p) = 2p$.

Пример 2 Десять экспертов дали свои прогнозы цены в рублях одного килограмма яблок через месяц: 90, 85, 80, 120, 90, 85, 130, 110, 100, 70. Какую цену в среднем следует ожидать через месяц, если:

а) оценкам всех экспертов доверяют одинаково;

б) оценке девятого эксперта доверяют на 50 % больше, а оценке десятого эксперта на 50 % меньше, чем оценке каждого из первых восьми экспертов?

Решение. Случайная величина — это прогноз эксперта. Надо найти математическое ожидание этой с.в.

а) Здесь с.в. принимает все значения с равной вероятностью и математическое ожидание совпадает со средним арифметическим прогнозов:

$$\frac{90 + 85 + 80 + 120 + 90 + 85 + 130 + 110 + 100 + 70}{10} =$$

$$= 100 + \frac{-10 - 15 - 20 + 20 - 10 - 15 + 30 + 10 + 0 - 30}{10} = 96.$$

б) Здесь таблица распределения с.в. выглядит так:

90	85	80	120	90	85	130	110	100	70
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,15	0,05

Вероятности первых восьми прогнозов одинаковы, вероятность девятого — на 50 % больше, а десятого — на 50 % меньше. Среднее будет равно

$$\frac{90 + 85 + 80 + 120 + 90 + 85 + 130 + 110 + 100 \cdot 1{,}5 + 70 \cdot 0{,}5}{10}.$$

По сравнению с пунктом а) числитель изменится на (+ 50 − 35), т. е. увеличится на 15. Значит, среднее увеличится на 1,5. Получится 97,5 р.

Пример 3 На выборах в городе А за партию Б проголосовали 35 % избирателей не старше 60 лет и 65 % избирателей, которым более

60 лет[1]. В городской газете опубликовали вывод, сделанный руководителем пресс-центра партии Б: «Средний процент равен 50, т. е. за нашу партию проголосовала половина участвовавших в выборах». Соперники партии Б подали иск в суд за распространение ложных сведений. Кто прав?

Решение. Среднее арифметическое чисел 35 и 65, несомненно, равно 50, но вывод о половине проголосовавших за партию Б неверен.

Первое объяснение — на уровне простейших подсчётов. Если голосовало N человек, и из них было x не старше 60 лет, то число проголосовавших за партию Б равно

$$0{,}35x + 0{,}65(N - x) = 0{,}65N - 0{,}3x,$$

что равно $0{,}5N$ (половине голосовавших) только при весьма специальном подборе x.

Второе объяснение — через математическое ожидание. Смотрите, случайная величина «процент проголосовавших за партию Б» принимает значение 35 с вероятностью $\frac{x}{N}$ и значение 65 с вероятностью $1 - \frac{x}{N}$. Её математическое ожидание (среднее значение) равно

$$35\frac{x}{N} + 65\left(1 - \frac{x}{N}\right) = 65 - 30\frac{x}{N}.$$

Оно равно 50, только если $\frac{x}{N} = \frac{1}{2}$, т. е. только если избирателей не старше 60 и старше 60 было поровну. Такое деление пополам в принципе возможно, но, судя по иску, в городе А это было не так. Значит, правы соперники партии Б.

Замечание. Обратите внимание, за вероятности наступления событий мы приняли частоты $\frac{x}{N}$ и $1 - \frac{x}{N} = \frac{N - x}{N}$. Тем самым, мы предполагаем, что при случайном выборе голосовавшего все варианты равновозможны.

[1] Процент берётся от числа избирателей, пришедших на выборы.

Теорема 1. Пусть все элементарные события x_1, ..., x_N некоторого испытания равновозможны, а S — случайная величина, заданная на этих э.с. Тогда математическое ожидание $M(S)$ равно среднему арифметическому набора $S(x_1)$, ..., $S(x_N)$ значений с.в. S.

Доказательство. Пусть N — число э.с. Какие-то из значений $S(x_1)$, ..., $S(x_N)$ вполне могут оказаться равными. Упорядочим набор значений с.в. S слева направо:

$$\underbrace{s_1, s_1, \ldots, s_1}_{n_1}, \underbrace{s_2, s_2, \ldots, s_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{s_k, s_k, \ldots, s_k}_{n_k},$$

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_k, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N.$$

Среднее арифметическое набора $S(x_1)$, ..., $S(x_N)$ равно

$$\frac{\underbrace{s_1 + s_1 + \ldots + s_1}_{n_1} + \underbrace{s_2 + s_2 + \ldots + s_2}_{n_2} + \ldots + \underbrace{s_k + s_k + \ldots + s_k}_{n_k}}{N} =$$

$$= s_1 \cdot \frac{n_1}{N} + s_2 \cdot \frac{n_2}{N} + \ldots + s_k \cdot \frac{n_k}{N}.$$

Событие «с.в. S примет значение s_1» наступает в n_1 из всех N равновозможных э.с. Его вероятность p_1 равна $\frac{n_1}{N}$. Аналогично и с s_2, ..., s_k. Составляем таблицу распределения с.в. S

s_1	s_2	...	s_k
$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_2}{N}$	...	$\frac{n_k}{N}$

и находим математическое ожидание:

$$M(S) = s_1 \cdot \frac{n_1}{N} + s_2 \cdot \frac{n_2}{N} + \ldots + s_k \cdot \frac{n_k}{N}.$$

Перечислим важные свойства математического ожидания.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(aS) = aM(S).$$

2. Постоянное слагаемое можно слагаемым выносить за знак математического ожидания:

$$M(S + b) = M(S) + b.$$

3. Математическое ожидание с.в., которая тождественно равна числу, равно этому числу:

$$M(c) = c.$$

4. Математическое ожидание суммы двух с.в. равно сумме их математических ожиданий:

$$M(S + T) = M(S) + M(T).$$

5. Математическое ожидание отклонения с.в. от своего математического ожидания равно нулю:

$$M(S - M(S)) = 0.$$

Доказательства (за исключением свойства 4)) очень простые. Докажем свойства 1 и 2.

Доказательство. Таблица распределения с.в. S имеет вид:

s_1	s_2	...	s_k
p_1	p_2	...	p_k

1. В первой строке таблицы распределения с.в. aS стоят те же числа, что и в таблице распределения с.в. S, но только умноженные на число a:

as_1	as_2	...	as_k
p_1	p_2	...	p_k

Поэтому

$$M(aS) = (as_1)p_1 + (as_2)p_2 + \ldots + (as_k)p_k =$$
$$= a(s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_kp_k) = aM(S).$$

2. К числам первой строки таблицы распределения с.в. S добавим константу b. Получим первую строку таблицы распределения с.в. $S + b$:

$s_1 + b$	$s_2 + b$	...	$s_k + b$
p_1	p_2	...	p_k

Поэтому

$$M(S + b) = (s_1 + b)p_1 + (s_2 + b)p_2 + ... + (s_k + b)p_k =$$
$$= (s_1p_1 + s_2p_2 + ... + s_kp_k) + b(p_1 + p_2 + ... + p_k) = M(S) + b,$$

так как сумма $p_1 + p_2 + ... + p_k$ вероятностей во второй строке равна 1.

Кстати, свойство 2 мы уже использовали в решении примера 2 а). Рассмотрим ещё один пример.

Пример 4 а) У десяти десятиклассниц измерили рост. Получили такие данные (в см): 165, 164, 149, 151, 170, 155, 161, 154, 157, 172. Найти среднее значение роста десятиклассницы.

б) По таблице распределения с.в. найти её математическое ожидание.

−3	0,09	1,1	0,57
$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

Решение. а) Вычтем по 160 из всех данных. Получим:

$$5, 4, -11, -9, 10, -5, 1, -6, -3, 12.$$

Сумму этих чисел можно найти устно. Получится −2; среднее равно −0,2. Теперь добавим 160, получится 159,8. Запишем решение формулой: $M(S) = M(S - 160) + 160$.

б) Умножим значения с.в. на 100. Получим: −300, 9, 110, 57. Найдём их произведения на числители дробей из второй строки: −300, 27, 110, 114. Их сумму −49 делим на общий знаменатель 7. Получаем −7 и этот результат делим на 100. Получится −0,07. Запишем решение формулой: $M(S) = \frac{M(100S)}{100}$.

Упражнения

Пусть с.в. S — это число выпадений «решки» при двух бросаниях монеты.

54.1. Укажите множество всех значений следующей с.в.:
а) S; в) $2S - 5$; д) $3 - 4S$;
б) $S + 1$; г) $-S$; е) $(S - 1)^2$.

54.2. Составьте таблицы распределения с.в. из пунктов а)—е) упражнения 54.1.

54.3. Вычислите математические ожидания из пунктов а)—е) упражнения 54.2. В пунктах а)—д) проверьте тождество $M(aS + b) = aM(S) + b$. В пункте е) проверьте, что $M(S - 1)^2 \neq (M(S) - 1)^2$.

Монету бросают трижды.

54.4. Укажите множество всех значений следующих с.в.:
а) A — число выпавших «решек»;
б) B — число выпавших «орлов»;
в) $C = 2A + 3B$;
г) $X = (A - B)^2$;
д) $Y = |A - B|$;
е) $Z = (A + 1)^B$.

54.5. Составьте таблицы распределения с.в. из пунктов а)—е) упражнения 54.4.

54.6. Найдите число, пропущенное в таблице распределения:

а)

−2	3	5
0,3	0,6	

б)

5	7	9	100
0,24	0,32		0,06

в)

−7	−8	8	18	28
0,31	0,11	0,07		0,5

54.7. Найдите пропущенные числа в таблице распределения, если известно, что в каждой таблице это равные числа:

а)

-1	2	5	7
0,3	0,3		

б)

-5	5	10	15
0,43			0,45

в)

-1	0	1	2	3
0,21	0,4			

По таблице распределения случайной величины T найдите вероятность указанного события.

54.8.

-1	0	1	2	3
0,21	0,4	0,13	0,11	0,15

а) $P(T \leqslant 0)$; в) $P(2T < 3)$; д) $P(T^2 > 1)$;
б) $P(T \geqslant 0)$; г) $P(3T > 2)$; е) $P(T^2 = 2T + 3)$.

54.9.

-3	-2	0	1	4
0,2	0,1	0,01	0,6	0,09

а) $P(T < -3)$; в) $P(2T \leqslant 5)$; д) $P(T^2 > 5)$;
б) $P(T > -4)$; г) $P(2T \geqslant 5)$; е) $P(T^2 = T)$.

54.10. Заполните таблицу распределения с.в., если известно, что её математическое ожидание равно 2:

а)

0	
0,5	

б)

1	
0,3	

в)

1	
0,99	

г)

-2	
0,6	

д)

	4
0,2	

е)

-5	
	0,2

54.11. По множеству значений с.в., определённой на равновероятных элементарных событиях, найдите её математическое ожидание:
а) 10, 12;
б) 1, 10, 100;
в) 26, 28, 29, 30, 34;
г) 136, 138, 139, 140, 144;
д) 393, 395, 398, 403, 420;
е) 190, 193, 195, 198, 199, 203, 205, 206, 207, 210.

Упражнения для повторения

54.12. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 3; \\ 2(x-5)^2, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \frac{1}{3}^{x-1}, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ -x^2 + 8x - 6, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции одну или две общие точки?

54.13. Решите уравнение:

а) $2^{2x-7} = 32$;
б) $5^{x-1} \cdot 2 \cdot 5^{x-3} = 1250$;
в) $49^x - 7^{x+1} = 0$;
г) $3^{4x+9} = \frac{1}{27}$;
д) $3 \cdot 6^{x+1} - 6^{x+2} = -648$;
е) $4^{2x+1} - 13 \cdot 4^x + 3 = 0$.

54.14. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+5x} > 5\frac{1}{16}$;
б) $3^x - 5 \cdot 3^{x+2} < -396$;
в) $25^{x+1} - 51 \cdot 5^x + 2 \geqslant 0$;
г) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2-2x-5} \leqslant 1\frac{11}{25}$;
д) $2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x+2} \geqslant -376$;
е) $6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x < -2$.