

# Итак, в главе 1

Познакомились с новыми свойствами числовых последовательностей:

- ограниченность снизу;
- ограниченность сверху;
- сходимоть;
- расходимость.

Выяснили, что такое:

- окрестность точки;
- предел числовой последовательности;
- предел функции на бесконечности;
- предел функции в точке;
- приращение аргумента;
- приращение функции.

Изучили арифметические операции над пределами числовых последовательностей и над пределами функций.

Узнали, какие два соотношения специально выделяют в курсе высшей математики:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  — первый замечательный предел;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$  — второй замечательный предел.

Узнали два варианта определения непрерывности функции в точке:

- «на языке пределов»:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ;
- «на языке приращений»: если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$ .

## Вопросы

1. Что такое числовая последовательность?
2. Какую последовательность называют возрастающей; убывающей?
3. Сформулируйте определение ограниченности последовательности сверху (снизу).
4. Приведите примеры последовательностей, которые ограничены только сверху (только снизу).



4. Дана последовательность  $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Укажите верные утверждения.

- а) последовательность сходится
- б) последовательность является убывающей
- в) последовательность ограничена снизу
- г) предел последовательности больше нуля

5. Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - 4)(2 - 5n)}{n^2}$ .

6. Найдите  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \sqrt{5x + 6} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \right)$ .

7. Найдите приращение функции  $y = x^2 + 2x - 3$  при переходе от точки  $x = 0$  к точке  $x + \Delta x = 0,1$ .

8. Установите соответствие между пределом и его значением.

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{-x}$

Б.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{2x}$

В.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-2x}$

1)  $-0,5$

2)  $-1,5$

3)  $-1$

9. Укажите прямую, которая является горизонтальной асимптотой к графику функции  $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$ .

а)  $y = 2$

в)  $y = 1$

б)  $y = -2$

г)  $y = -0,5$

10. Укажите функцию, которая является непрерывной в точке  $x = 2$ .

а)  $y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 2, \\ 14 - 2x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

б)  $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \leq 2, \\ 2x + 3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

в)  $y = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{если } x < 2, \\ \sqrt{x - 1}, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$

г)  $y = \begin{cases} 2^{x-2}, & \text{если } x \leq 2, \\ \log_2 x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

## Дополнительные задачи

- Для последовательности  $y_n = -2n^2 + 19n - 42$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , найдите все значения  $n$ , при которых:  
а)  $y_n = 0$ ;                      г)  $y_n > y_{n+1}$ ;  
б)  $y_n > 0$ ;                      д)  $y_3 < y_n$ ;  
в)  $y_n < y_{n+1}$ ;                  е)  $y_n$  принимает наибольшее значение.
- Перечислите все элементы последовательности  $a_n = -3 + 0,1n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , которые принадлежат окрестности точки  $a$  радиусом  $r$ :  
а)  $a = -3$ ,  $r = 0,2$ ;              в)  $a = -3$ ,  $r = 0,5$ ;              д)  $a = 4$ ,  $r = \pi^{-2}$ ;  
б)  $a = -3$ ,  $r = 0,1$ ;              г)  $a = -2$ ,  $r = 0,2$ ;              е)  $a = \pi$ ,  $r = 0,15$ .
- Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором в окрестности точки  $a$  радиусом  $r$  нет ни одного члена последовательности  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :  
а)  $a = 3$ ;                      в)  $a = 0$ ;                      д)  $a = 1,12$ ;  
б)  $a = 2,01$ ;                  г)  $a = 0,99$ ;                  е)  $a = 1$ .
- Найдите наименьшее значение  $n$ , начиная с которого все члены последовательности  $x_n = \frac{10n + 21}{n + 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежат окрестности точки  $10$  радиусом  $r$ :  
а)  $r = 10$ ;                      в)  $r = 2$ ;                      д)  $r = 0,1$ ;  
б)  $r = 5$ ;                      г)  $r = 1$ ;                      е)  $r = 0,01$ .
- В последовательности  $z_n = \frac{an + 3}{(2 + a)n - 3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , значение коэффициента  $a$  наудачу выбирают из чисел  $1, 2, \dots, 10$ . Найдите вероятность того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ :  
а) положителен;                      г) больше  $0,5$ ;  
б) больше  $1$ ;                      д) больше  $0,7$ ;  
в) равен  $0,5$ ;                      е) меньше  $0,8$ .
- Для бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по модулю меньше единицы, по известным двум из трёх значений  $S$ ,  $b_1$ ,  $q$  вычислите третье:  
а)  $b_1 = 4$ ,  $q = 0,5$ ;                      г)  $S = -3$ ,  $q = -0,3$ ;  
б)  $b_1 = -6$ ,  $q = -0,2$ ;                  д)  $S = \sqrt{2} + 1$ ,  $b_1 = 1$ ;  
в)  $S = 2$ ,  $q = 0,3$ ;                      е)  $S = 1\,000\,000$ ,  $b_1 = 1000$ .

- 7.** В бесконечной геометрической прогрессии первый член наудачу выбирают из чисел 1, 2, 3, 4, 5, а знаменатель — из чисел 0,5 и 0,9. Найдите вероятности событий:
- второй член прогрессии меньше 5;
  - второй член прогрессии меньше 0,5;
  - третий член прогрессии равен 1;
  - третий член прогрессии меньше 3;
  - сумма прогрессии равна 10;
  - сумма прогрессии больше 20.

При вычислении пределов бывает полезным раскрывать скобки по формулам сокращенного умножения или по формуле бинома Ньютона. При этом нужными для решения оказываются не все числовые коэффициенты, а только один или два из них.

Например:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^5 - x^4(x+1)}{x^4} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 2 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_1 x + 32) - (x^5 + x^4)}{x^4} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_1 x + 32}{x^4} \right) = 9 + 0 = 9. \end{aligned}$$

- 8.** Вычислите пределы функций при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{(2x+1)^3 - 8x^3}{x^2}; & \text{г) } \frac{x^2}{(x+2)^3 - x^2(x+1)}; \\ \text{б) } \frac{24x}{(x+4)^3 - (x^3 + 12x^2)}; & \text{д) } \frac{x^5 - (x+3)^5}{(x-3)^4}; \\ \text{в) } \frac{(x+3)^3 - x(x+1)^2}{x^2}; & \text{е) } \frac{x^7 + (1-x)^7}{(x+1)^6}. \end{array}$$

- 9.** Вычислите пределы функций при  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{(1+x)^3 - 1}{x}; & \text{г) } \frac{(1+x)^4 - 1}{x}; \\ \text{б) } \frac{(1-3x)^3 - 1}{x}; & \text{д) } \frac{(1-x)^5 - 1}{10x}; \\ \text{в) } \frac{8 - (2-x)^3}{x}; & \text{е) } \frac{(1+4x)^5 - (1+5x)^4}{x^2 - x^3}. \end{array}$$