

# Итак, в главе 1

Познакомились с новыми свойствами числовых последовательностей:

- ограниченность снизу;
- ограниченность сверху;
- сходимоть;
- расходимость.

Выяснили, что такое:

- окрестность точки;
- предел числовой последовательности;
- предел функции на бесконечности;
- предел функции в точке;
- приращение аргумента;
- приращение функции.

Изучили арифметические операции над пределами числовых последовательностей и над пределами функций.

Узнали, какие два соотношения специально выделяют в курсе высшей математики:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  — первый замечательный предел;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$  — второй замечательный предел.

Узнали два варианта определения непрерывности функции в точке:

- «на языке пределов»:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ;
- «на языке приращений»: если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$ .

## Вопросы

1. Что такое числовая последовательность?
2. Какую последовательность называют возрастающей; убывающей?
3. Сформулируйте определение ограниченности последовательности сверху (снизу).
4. Приведите примеры последовательностей, которые ограничены только сверху (только снизу).

5. Может ли возрастающая последовательность быть не ограниченной сверху, а убывающая — не ограниченной снизу? Если да, то приведите примеры.
6. Какой числовой промежуток называют окрестностью точки  $a$  радиусом  $r$ ?
7. Дайте определение предела последовательности; сходящейся последовательности.
8. При каких значениях знаменателя  $q$  сходится бесконечная геометрическая прогрессия?
9. Верно ли, что из сходимости последовательности следует её ограниченность? Верно ли обратное, т. е. что из ограниченности последовательности следует её сходимость?
10. Какая связь имеется между пределом функции на бесконечности и наличием у неё горизонтальной асимптоты?
11. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над пределами последовательностей, функций.
12. Что называют приращением аргумента  $x$  при переходе от  $x_0$  к  $x_1$ ?
13. Что называют приращением функции  $y = f(x)$  при переходе аргумента от  $x_0$  к  $x_1$ ?
14. Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке  $x = a$ :  
— «на языке пределов»;  
— «на языке приращений».

## Тест

1. Укажите формулу, которая задаёт последовательность  
5, 9, 13, 17, ... .
 

а) $y_n = 4n + 1$	в) $y_n = 3n + 2$
б) $y_n = 6n - 1$	г) $y_n = n + 4$
2. Укажите последовательность, которая не является монотонной.
 

а) $x_n = (3 - n)^2$	в) $x_n = -0,1^{n-2}$
б) $x_n = n^3 + 1$	г) $x_n = (-1)^{n+1}$
3. Укажите свойство, которое всегда следует из сходимости последовательности.
  - а) последовательность убывает
  - б) последовательность ограничена сверху и не ограничена снизу
  - в) последовательность монотонна
  - г) последовательность ограничена

4. Дана последовательность  $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Укажите верные утверждения.

- а) последовательность сходится
- б) последовательность является убывающей
- в) последовательность ограничена снизу
- г) предел последовательности больше нуля

5. Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - 4)(2 - 5n)}{n^2}$ .

6. Найдите  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \sqrt{5x + 6} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \right)$ .

7. Найдите приращение функции  $y = x^2 + 2x - 3$  при переходе от точки  $x = 0$  к точке  $x + \Delta x = 0,1$ .

8. Установите соответствие между пределом и его значением.

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{-x}$

Б.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{2x}$

В.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-2x}$

1)  $-0,5$

2)  $-1,5$

3)  $-1$

9. Укажите прямую, которая является горизонтальной асимптотой к графику функции  $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$ .

а)  $y = 2$

в)  $y = 1$

б)  $y = -2$

г)  $y = -0,5$

10. Укажите функцию, которая является непрерывной в точке  $x = 2$ .

а)  $y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 2, \\ 14 - 2x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

б)  $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \leq 2, \\ 2x + 3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

в)  $y = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{если } x < 2, \\ \sqrt{x - 1}, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$

г)  $y = \begin{cases} 2^{x-2}, & \text{если } x \leq 2, \\ \log_2 x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

## Дополнительные задачи

- Для последовательности  $y_n = -2n^2 + 19n - 42$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , найдите все значения  $n$ , при которых:  
а)  $y_n = 0$ ;                      г)  $y_n > y_{n+1}$ ;  
б)  $y_n > 0$ ;                      д)  $y_3 < y_n$ ;  
в)  $y_n < y_{n+1}$ ;                  е)  $y_n$  принимает наибольшее значение.
- Перечислите все элементы последовательности  $a_n = -3 + 0,1n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , которые принадлежат окрестности точки  $a$  радиусом  $r$ :  
а)  $a = -3$ ,  $r = 0,2$ ;              в)  $a = -3$ ,  $r = 0,5$ ;              д)  $a = 4$ ,  $r = \pi^{-2}$ ;  
б)  $a = -3$ ,  $r = 0,1$ ;              г)  $a = -2$ ,  $r = 0,2$ ;              е)  $a = \pi$ ,  $r = 0,15$ .
- Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором в окрестности точки  $a$  радиусом  $r$  нет ни одного члена последовательности  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :  
а)  $a = 3$ ;                      в)  $a = 0$ ;                      д)  $a = 1,12$ ;  
б)  $a = 2,01$ ;                  г)  $a = 0,99$ ;                  е)  $a = 1$ .
- Найдите наименьшее значение  $n$ , начиная с которого все члены последовательности  $x_n = \frac{10n + 21}{n + 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежат окрестности точки  $10$  радиусом  $r$ :  
а)  $r = 10$ ;                      в)  $r = 2$ ;                      д)  $r = 0,1$ ;  
б)  $r = 5$ ;                      г)  $r = 1$ ;                      е)  $r = 0,01$ .
- В последовательности  $z_n = \frac{an + 3}{(2 + a)n - 3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , значение коэффициента  $a$  наудачу выбирают из чисел  $1, 2, \dots, 10$ . Найдите вероятность того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ :  
а) положителен;                      г) больше  $0,5$ ;  
б) больше  $1$ ;                      д) больше  $0,7$ ;  
в) равен  $0,5$ ;                      е) меньше  $0,8$ .
- Для бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по модулю меньше единицы, по известным двум из трёх значений  $S$ ,  $b_1$ ,  $q$  вычислите третье:  
а)  $b_1 = 4$ ,  $q = 0,5$ ;                  г)  $S = -3$ ,  $q = -0,3$ ;  
б)  $b_1 = -6$ ,  $q = -0,2$ ;              д)  $S = \sqrt{2} + 1$ ,  $b_1 = 1$ ;  
в)  $S = 2$ ,  $q = 0,3$ ;                  е)  $S = 1\,000\,000$ ,  $b_1 = 1000$ .

- 7.** В бесконечной геометрической прогрессии первый член наудачу выбирают из чисел 1, 2, 3, 4, 5, а знаменатель — из чисел 0,5 и 0,9. Найдите вероятности событий:
- второй член прогрессии меньше 5;
  - второй член прогрессии меньше 0,5;
  - третий член прогрессии равен 1;
  - третий член прогрессии меньше 3;
  - сумма прогрессии равна 10;
  - сумма прогрессии больше 20.

При вычислении пределов бывает полезным раскрывать скобки по формулам сокращенного умножения или по формуле бинома Ньютона. При этом нужными для решения оказываются не все числовые коэффициенты, а только один или два из них.

Например:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^5 - x^4(x+1)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 2 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_1 x + 32) - (x^5 + x^4)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_1 x + 32}{x^4} \right) = 9 + 0 = 9. \end{aligned}$$

- 8.** Вычислите пределы функций при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{(2x+1)^3 - 8x^3}{x^2}; & \text{г) } \frac{x^2}{(x+2)^3 - x^2(x+1)}; \\ \text{б) } \frac{24x}{(x+4)^3 - (x^3 + 12x^2)}; & \text{д) } \frac{x^5 - (x+3)^5}{(x-3)^4}; \\ \text{в) } \frac{(x+3)^3 - x(x+1)^2}{x^2}; & \text{е) } \frac{x^7 + (1-x)^7}{(x+1)^6}. \end{array}$$

- 9.** Вычислите пределы функций при  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{(1+x)^3 - 1}{x}; & \text{г) } \frac{(1+x)^4 - 1}{x}; \\ \text{б) } \frac{(1-3x)^3 - 1}{x}; & \text{д) } \frac{(1-x)^5 - 1}{10x}; \\ \text{в) } \frac{8 - (2-x)^3}{x}; & \text{е) } \frac{(1+4x)^5 - (1+5x)^4}{x^2 - x^3}. \end{array}$$