# Глава 1

# Элементы теории пределов

## § 1. Предел числовой последовательности

Большое значение для теории и практики имеет математическая дисциплина, известная под названием «Математический анализ», в основном занимающаяся изучением числовых функций. При этом, разумеется, изучается поведение каждой конкретной функции в целом, на всей области определения (*глобальный подход*), но большее внимание уделяется *анализу* того, как ведёт себя функция около той или иной точки (*локальный подход*). Математический анализ — составная часть курса высшей математики, изучаемого в высших учебных заведениях, а наша цель — познакомить вас с некоторыми элементами математического анализа, имеющими общекультурное значение. При этом мы не будем стремиться всё строго доказать (в школьном курсе математики сделать это практически невозможно), во многих случаях мы будем полагаться на визуальные представления и интуицию.

Тот *анализ*, о котором мы упомянули выше, связан с понятием предела. В этом параграфе речь пойдёт о том, что такое предел числовой последовательности.

С числовыми последовательностями вы познакомились в курсе алгебры 9-го класса. Напомним, что *числовой последовательностью* называют функцию натурального аргумента, т. е. функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$. Числовую последовательность обозначают или $y = f(n)$, или коротко $(y_n)$, или подробнее, выписывая несколько членов последовательности: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ .

Удобнее всего *аналитическое задание* последовательности, когда указана формула её $n$-го члена. Например, формулой $y_n = n^2 + 1$ задаётся последовательность 2, 5, 10, 17, 26, ..., формулой $y_n = \dfrac{1}{n}$ — последовательность $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$, а формулой $y_n = a + (n-1)d$ —

арифметическая прогрессия $a$, $a + d$, $a + 2d$, ... со знаменателем $d$ и первым членом $a$.

Последовательность $(y_n)$ называют *возрастающей*, если каждый её член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{n-1} < y_n < y_{n+1} < \ldots .$$

Последовательность $(y_n)$ называют *убывающей*, если каждый её член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_{n-1} > y_n > y_{n+1} > \ldots .$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином *монотонные последовательности*.

Например,

3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... — возрастающая последовательность,

64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\dfrac{64}{2^{n-1}}$, ... — убывающая последовательность;

а последовательность 3, 64, 5, 32, 7, 16, 9, 8, 11, 4, 13, 2, ... не является монотонной, она и не возрастающая, и не убывающая.

Познакомимся ещё с одним свойством числовых последовательностей.

**Определение 1.** Последовательность $(y_n)$ называют **ограниченной сверху**, если существует число $M$ такое, что для любого $n$ выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число $M$ называют **верхней границей** последовательности. Последовательность $(y_n)$ называют **ограниченной снизу**, если существует число $m$ такое, что для любого $n$ выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число $m$ называют **нижней границей** последовательности. Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, то её называют **ограниченной последовательностью**.

Например,

— последовательность 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... ограничена снизу (в качестве нижней границы можно взять число 3, как, впрочем, и любое число, меньшее, чем 3),

— последовательность 64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\dfrac{64}{2^{n-1}}$, ... ограничена сверху (в качестве верхней границы можно взять число 64, как, впрочем, и любое число, большее чем 64).

Обратите внимание: последовательность 64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\frac{64}{2^{n-1}}$, ... ограничена и снизу, ведь все её члены больше нуля. Это — ограниченная последовательность. А вот ещё один весьма показательный пример ограниченной последовательности: 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... .

Итак, мы обсудили два достаточно простых свойства числовых последовательностей: монотонность и ограниченность. Более сложным является свойство сходимости, к обсуждению которого мы сейчас приступим. Для этого нам понадобится понятие окрестности точки.

**Определение 2.** Интервал $(a - r; a + r)$, где $r > 0$, называют **окрестностью точки *a***; число $r$ называют **радиусом окрестности.**

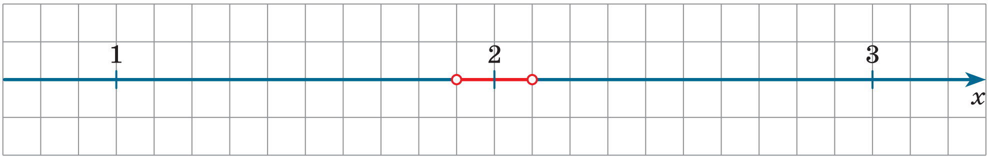
Например, на рисунке 1, *а* изображена окрестность точки 2 радиусом 0,1, а на рисунке 1, *б* — окрестность точки −3 радиусом 1.

Рассмотрим две последовательности:

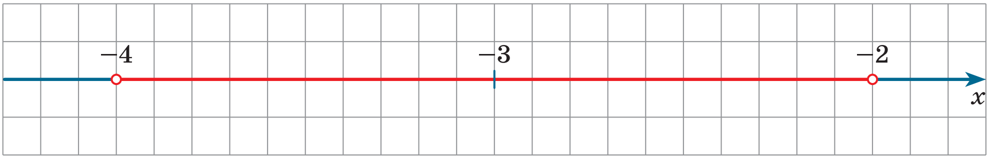
$$(x_n)\colon -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots$$

$$(y_n)\colon 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots$$

На рисунке 2 члены последовательности $(x_n)$ изображены точками на числовой прямой. Обратите внимание: по мере увеличения номера члены последовательности всё ближе и ближе подходят к точке 0. Более точно: какую бы окрестность точки 0 ни выбрали, с некоторого




*а*




*б*

*Рис. 1*

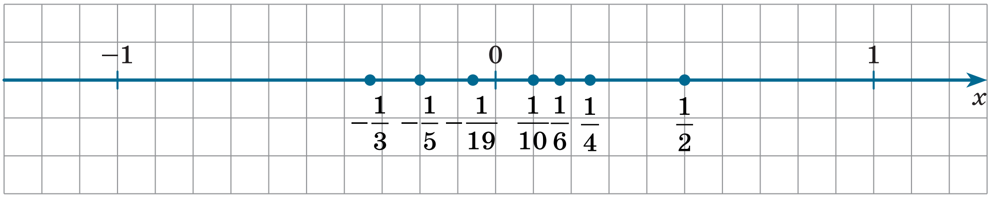



*Рис. 2*

номера все члены последовательности попадут в выбранную окрестность. Пусть, например, радиус окрестности равен 0,1, т. е. речь идёт об интервале (−0,1; 0,1). Все члены последовательности, начиная с одиннадцатого, принадлежат выбранной окрестности:

$$-\frac{1}{11} \in (-0{,}1;\, 0{,}1), \quad \frac{1}{12} \in (-0{,}1;\, 0{,}1),$$
$$-\frac{1}{13} \in (-0{,}1;\, 0{,}1), \quad \frac{1}{14} \in (-0{,}1;\, 0{,}1), \ldots$$

Другой пример: радиус окрестности равен 0,03, т. е. речь идёт об интервале (−0,03; 0,03). Ясно, что $0{,}01 < 0{,}03$, т. е. $\frac{1}{100}$ принадлежит интервалу (−0,03; 0,03). Начиная с $\frac{1}{100}$, все члены последовательности $\left(\frac{1}{100}, -\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, -\frac{1}{103}, \ldots\right)$ попадают в окрестность точки 0 радиусом 0,03 (на самом деле, последовательность $(x_n)$ попадает в эту окрестность даже с более раннего номера, с номера 34, поскольку $x_{34} = \frac{1}{34} < \frac{3}{100}$, но это не суть важно). Рассмотренную ситуацию обычно описывают словами так: последовательность $(x_n)$ *сходится к числу* 0.

Теперь изобразим на числовой прямой последовательность $(y_n)$ (рис. 3). Как видите, члены этой последовательности не концентрируются около какой-либо точки, про такую последовательность говорят, что она *расходится*.

**Определение 3.** Число $b$ называют **пределом последовательности** $(x_n)$, если в любой окрестности точки $b$ содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

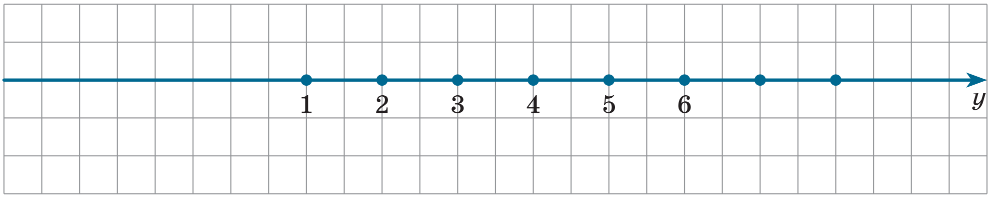



*Рис. 3*

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и говорят: *предел последовательности* $(x_n)$ *равен* $b$. Правильнее было бы добавлять ещё и слова «при стремлении $n$ к бесконечности», но их, как правило, опускают, ведь уже записано, что $n \to \infty$. Используют и такую запись: $x_n \to b$ и говорят: *последовательность* $(x_n)$ *сходится к* $b$.

Для рассмотренной выше последовательности $(x_n)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

**Определение 4.** Если последовательность имеет предел, то её называют **сходящейся**; если последовательность не имеет предела, то говорят, что последовательность **расходится**.

Приведём примеры сходящихся последовательностей:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

2) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$. Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

3) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$. Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

4) для стационарной последовательности $c, c, c, \ldots, c, \ldots$, имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$;

5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$. Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Вообще, если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

А что будет с последовательностью $(q^n)$, если $|q| > 1$? Пусть, например, $q = 2$, т. е. речь идёт о последовательности $2, 4, 8, 16, \ldots$.

Эта последовательность расходится. Вообще справедливо утверждение:

если $|q| > 1$, то последовательность $(q^n)$ не имеет предела (расходится).

Мы рассмотрели лишь простейшие случаи вычисления пределов, о более сложных случаях поговорим в следующем параграфе.

Сходящиеся последовательности обладают рядом свойств. Мы дадим лишь формулировки этих свойств.

**1.** Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

**2.** Если последовательность сходится, то она ограничена.

Заметим, что обратное утверждение неверно; например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., 1, 2, 3 — ограниченная последовательность, но она не имеет предела (расходится). А вот если последовательность не только ограниченна, но и монотонна, то она сходится.

**3.** Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейерштрасса[1]).

Приведём классические примеры из геометрии, в которых используется теорема Вейерштрасса.

1) Возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиугольник, 16-угольник и т. д., каждый раз увеличивая число сторон вдвое. Последовательность площадей этих правильных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, числом, равным площади описанного около окружности квадрата. По теореме Вейерштрасса построенная последовательность сходится, её предел принимается за площадь $S$ круга. Именно с помощью таких рассуждений и доказывают формулу площади круга $S = \pi r^2$ (установлено, что $\pi r^2$ — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиусом $r$ правильных многоугольников).

[1] Карл Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

2) Снова возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиугольник, 16-угольник и т. д., каждый раз увеличивая число сторон вдвое. Последовательность периметров этих вписанных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, периметром описанного квадрата. По теореме Вейерштрасса построенная последовательность сходится, её предел принимается за длину $L$ окружности. Именно с помощью таких рассуждений и доказывают формулу $L = 2\pi r$.

## Упражнения

По заданной формуле $n$-го члена последовательности вычислите первые пять её членов.

**1.1.** а) $y_n = 5n - 3$; г) $y_n = 4 - 7n$;

б) $x_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 2n)$; д) $x_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 + 3n)$;

в) $a_n = \dfrac{3n - 1}{n^2}$; е) $a_n = \dfrac{2n - 1}{n}$.

**1.2.** а) $y_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$;

б) $x_n = \operatorname{tg}\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi n}{4}\right)$;

в) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n!}$;

г) $y_n = \cos\pi n$;

д) $x_n = \operatorname{ctg}\left((-1)^{n}\dfrac{\pi n}{4}\right)$;

е) $a_n = \dfrac{1}{n} + n(n+1)(n+2)$.

**1.3.** Выпишите первые пять членов последовательности десятичных приближений:

а) числа $\sqrt{3}$ по недостатку; г) числа $\sqrt{5}$ по избытку;

б) числа $\pi$ по избытку; д) числа $e$ по недостатку;

в) числа $\lg 3$ по недостатку; е) числа $\lg 3$ по избытку.

**1.4.** Составьте одну из возможных формул $n$-го члена последовательности:

а) 4, 8, 12, 16, 20, ...;
б) 2, 5, 10, 17, 26, ...;
в) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;
г) 6, 12, 18, 24, 30, ...;
д) 0, 3, 8, 15, 24, ...;
е) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$ .

**1.5.** Является ли последовательность возрастающей:

а) $y_n = 8 - 4(6 - n)$;
б) $y_n = -\frac{n}{n+3}$;
в) $a_n = 8 \cdot 0{,}8^{n+1}$;
г) $y_n = 4 - 3(n - 2)$;
д) $y_n = \frac{n-3}{n}$;
е) $x_n = \lg(n + 2)$?

**1.6.** Является ли последовательность $(y_n)$ убывающей:

а) $y_n = \sqrt{6 - n}$;
б) $y_n = \frac{n}{n+1}$;
в) $x_n = \log_{0,1}(n + 1)$;
г) $y_n = -\sqrt{n + 2}$;
д) $y_n = \frac{n+1}{n}$;
е) $a_n = 0{,}2 \cdot 4^{n-1}$?

**1.7.** Является ли последовательность ограниченной сверху:

а) $y_n = 3 + 2(n + 2)$;
б) $x_n = 2 \cdot 0{,}4^{n+1}$;
в) $a_n = n(n - 7)$;
г) $y_n = 12(2 - n) + 11$;
д) $x_n = 5 \cdot 0{,}3^n$;
е) $a_n = n(10 - n)$?

**1.8.** Является ли последовательность ограниченной снизу:

а) $y_n = \frac{3}{n-1}$;
б) $x_n = \sqrt{n - 2}$;
в) $a_n = 4 \cdot 2{,}2^n$;
г) $y_n = -\frac{4}{n+1}$;
д) $x_n = \log_2(n + 1)$;
е) $a_n = n^2 + 4n - 5$?

**1.9.** Дана последовательность $y_n = \frac{2n+1}{n-1}$. Укажите верные утверждения и обоснуйте свой выбор:

1) последовательность ограничена сверху;
2) последовательность является убывающей;
3) последовательность ограничена снизу;
4) последовательность является возрастающей.

**1.10.** Дана последовательность $y_n = \frac{3n-2}{n+1}$. Укажите верные утверждения и обоснуйте свой выбор:

1) последовательность ограничена сверху;
2) последовательность является убывающей;

3) последовательность ограничена снизу;
4) последовательность является возрастающей.

**1.11.** Найдите натуральные решения неравенства:

а) $\frac{1}{5^n} < c$, если $c = 0{,}01$;
б) $\frac{1}{2^n} < c$, если $c = 0{,}1$;
в) $\frac{1}{3^n} < c$, если $c = 0{,}001$;
г) $\frac{1}{3^n} < c$, если $c = 0{,}01$;
д) $\frac{1}{4^n} < c$, если $c = 0{,}1$;
е) $\frac{1}{5^n} < c$, если $c = 0{,}001$.

**1.12.** Дана последовательность $y_n = \frac{1}{n}$.

а) Постройте график последовательности.
б) Докажите, что последовательность убывает.
в) Докажите, что последовательность ограничена снизу.
г) Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

**1.13.** Дана последовательность $y_n = \frac{1}{3^n}$.

а) Постройте график последовательности.
б) Докажите, что последовательность убывает.
в) Докажите, что последовательность ограничена снизу.
г) Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

**1.14.** Найдите наименьшее натуральное значение $n$, начиная с которого все члены указанной последовательности лежат в указанной окрестности точки 0, и выскажите предположение о том, чему равен предел последовательности:

а) $y_n = \frac{2}{n}$, $(-0{,}2;\ 0{,}2)$;
б) $y_n = \frac{1}{n+2}$, $(-0{,}1;\ 0{,}1)$;
в) $y_n = \frac{2}{n^2+1}$, $(-0{,}5;\ 0{,}5)$;
г) $y_n = \frac{3}{n}$, $(-0{,}3;\ 0{,}3)$;
д) $y_n = \frac{2}{n+2}$, $(-0{,}5;\ 0{,}5)$;
е) $y_n = \frac{1}{n^2-1}$, $(-0{,}1;\ 0{,}1)$.

Найдите наименьшее натуральное значение $n$, начиная с которого все члены указанной последовательности лежат в интервале $(-0{,}01; 0{,}01)$, и выскажите предположение о том, чему равен предел последовательности.

**1.15.** а) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^2 + 2}$; г) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2}{(n + 2)^2 + 2}$;

б) $a_n = \dfrac{5}{2^{n+1}}$; д) $a_n = \dfrac{2}{5^n}$;

в) $a_n = (-1)^n \dfrac{4}{3^n}$; е) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{6}{10^n}$.

**1.16.** а) $b_n = \dfrac{2}{\sqrt{n} + 2}$; в) $b_n = \dfrac{3}{\sqrt{n} + 3}$;

б) $b_n = (-1)^n \dfrac{2}{\sqrt{n}}$; г) $b_n = (-1)^{n+1} \dfrac{3}{\sqrt{n}}$.

## Упражнения для повторения

ИКТ **1.17.** Решите уравнение и найдите его корни на указанном отрезке:

а) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -1,\ x \in \left[-2\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

б) $\sqrt{2}\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{2} + x\right) = \cos x,\ x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; \pi\right]$;

в) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3},\ x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$;

г) $2\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

**1.18.** Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = 0{,}5x - 3 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; в) $y = \dfrac{1}{3}x + 3 - 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{x + 4}}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$.