

А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

**АЛГЕБРА
и начала
математического
анализа
Базовый уровень**

10
КЛАСС

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для учителя**



МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2020

УДК 37.02:512
ББК 74.262.21
М79

М79 Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс. Методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 95, [1] с. : ил. — ISBN 978-5-9963-4690-5.

В пособии изложена концепция курса алгебры и начал математического анализа в 10 и 11 классах авторского коллектива под руководством А. Г. Мордковича, представлено примерное тематическое планирование учебного материала в 10 классе, методические рекомендации по всем главам учебного издания «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа» для 10 класса и решения некоторых упражнений повышенной сложности.

УДК 37.02:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9963-4690-5

© ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020
© Оформление. ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020
Все права защищены

Предисловие

В первом разделе данного пособия излагается общая концепция курса алгебры и начал математического анализа в 10—11-м классах, реализованная в наших учебниках, входящих в УМК:

- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10, 11 классы. **Учебник** для общеобразовательных организаций. В 2 частях;
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова.* Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы. **Примерные рабочие программы**;
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов.* Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10, 11 классы. **Методическое пособие для учителя**;
- *Е. Л. Мардахаева.* Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс. **Контрольные работы**;
- *М. В. Шуркова.* Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс. **Контрольные работы**.

Во втором разделе представлено примерное тематическое планирование материала в 10-м классе.

Третий раздел содержит методические рекомендации по всем главам учебника «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс».

В четвертом разделе рассмотрено решение ряда упражнений повышенной сложности.

Концепция курса «Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы» для общеобразовательной школы

Исходные положения нашей концепции можно сформулировать в виде двух тезисов:

1. *Математика в школе — не наука и даже не основы науки, а учебный предмет.*

2. *Математика в школе — учебный предмет скорее гуманитарный, чем естественно-научный.*

Первый тезис означает, что в учебном предмете необязательно соблюдать законы математики как науки (например, такие: все начинается с аксиом, нельзя начинать изучение теории без строгого определения основного понятия, все утверждения надо доказывать и т. д.), зачастую более важны законы педагогики и психологии, постулаты теории развивающего обучения. Остановимся для примера на одном из самых трудных моментов в преподавании — введении определений (как и когда вводить то или иное сложное математическое понятие) и на выборе уровня строгости изложения в школьном курсе математики.

Если основная задача учителя — обучение, то он имеет право давать формальное определение любого понятия тогда, когда считает нужным. Если основная задача учителя — развитие, то следует продумать выбор места и времени (*стратегия*) и этапы постепенного подхода к формальному определению на основе предварительного изучения понятия на более простых уровнях (*тактика*). Таких уровней в математике можно назвать три: *наглядно-интуитивный*, когда новое понятие вводится с опорой на интуитивные или образные представления учащихся; *рабочий (описательный)*, когда от учащегося требуется уметь отвечать не на вопрос «Что такое...», а на вопрос «Как ты понимаешь, что такое...»; *формальный*. Стратегия введения определений сложных математических понятий в наших учебниках базируется на положении о том, что выходить на

формальный уровень следует при выполнении двух условий:

1) если у учащихся накопился достаточный опыт для адекватного восприятия вводимого понятия, причём опыт по двум направлениям: *вербальный* (опыт полноценного понимания всех слов, содержащихся в определении) и *генетический* (опыт использования понятия на наглядно-интуитивном и рабочем уровнях);

2) если у учащихся появилась потребность в формальном определении понятия.

Новый математический термин и новое обозначение должны появляться мотивированно, тогда, когда в них возникает необходимость — в первую очередь в связи с появлением новой математической модели. Немотивированное введение нового термина провоцирует запоминание (компонент обучения) без понимания (и, следовательно, без развития).

В истории математики то или иное сложное понятие практически всегда проходило в своем становлении три указанные выше стадии (наглядное представление, рабочий уровень восприятия, формальное определение), причем переход с уровня на уровень зачастую был весьма болезненным и длительным по времени. Не учитывать этого нельзя, в силу своеобразного «закона сохранения сложности»: если формирование раздела науки, понятия, утверждения и т. п. в реальной истории науки было долгим и сложным, а временами, быть может, и мучительным, то и при обучении излишняя простота изложения психологически дезориентирует учащихся, создавая ненужную иллюзию легкости. Детям нужно дать время хотя бы приблизительно, но пережить эту нетривиальность, деятельностно почувствовать ее, не спеша переходить с уровня на уровень.

Проиллюстрируем это положение примером из элементарной теории вероятностей.

В учебнике для 8-го класса мы начинаем говорить о независимых повторениях испытаний (§ 43), там же впервые появляются термины «успех» и «неудача», но только на деятельностном уровне в решении конкретных примеров (пример 4 и 5). В учебнике для 9-го класса уже есть отдельный параграф — § 38 «Испытания с двумя исходами и их

независимые повторения». В нем появляются таблицы распределения числа «успехов» при $n = 2$ и $n = 3$ повторениях, закрепленные примерами 1—3, и ставится вопрос о распределении для произвольного n . Формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ приводится без доказательства, только как ответ на этот вопрос, и затем в примере 4 иллюстрируется ее применение при $n = 5$. Эта формула, кстати, показывает и важность предыдущего знакомства с комбинаторикой и числами C_n^k сочетаний. В учебнике для 10-го класса число «успехов» интерпретируется уже как один из важнейших примеров случайной величины. При этом таблица распределения такой с.в. оказывается, во-первых, знакомой из 9-го класса, а во-вторых, связанной с биномом Ньютона. Кроме того, формула Бернулли теперь уже *доказывается*. Позже, в 11-м классе мы работаем со знакомым теперь *биномиальным* распределением, и в итоге приходим к несомненно кульминационному моменту — статистической устойчивости и закону больших чисел в форме Бернулли. Тем самым локальная учебная линия «Испытания, формула и теорема Бернулли» оказывается распределенной по материалу четырех лет обучения с постепенным переходом от одного уровня сложности и абстрактности к другому, более высокому уровню.

В учебном предмете мы не обязаны все доказывать. Более того, в ряде случаев правдоподобные рассуждения или рассуждения, опирающиеся на графические модели, на интуицию, имеют для школьников более весомую развивающую и гуманитарную ценность, чем формальные доказательства. В нашем курсе все, что входит в программу, что имеет воспитательную ценность и доступно учащимся, доказывается. Если формальные доказательства мало поучительны и схоластичны, они заменяются правдоподобными рассуждениями (в основном это относится к изучению элементов математического анализа). Наше кредо: с одной стороны, *меньше схоластики, меньше формализма, меньше «жестких моделей»*, *меньше опоры на левое полушарие мозга*; с другой стороны, *больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше «мягких моделей»*, *больше опоры на правое полушарие мозга*. Преподавать в постоянном режи-

ме жесткого моделирования — легко, использовать в преподавании режим мягкого моделирования — трудно; первый режим — удел ремесленников от педагогики, второй режим — удел творцов.

В наших учебниках мы в той или иной степени старались реализовать *пять принципов развивающего обучения* Л. В. Занкова.

То, что теория занимает приоритетное положение (*первый принцип*), обсуждению не подлежит — это вообще характерная особенность учебной дисциплины под названием «математика». Наши учебные пособия насыщены информацией, так что изучение материала должно проходить в быстром темпе (*второй принцип*). Основное внимание при изложении материала уделяется трудным местам курса; трудности не отменяются, а преодолеваются совместной работой с учащимися с помощью отыскания адекватных методических средств (*третий принцип*).

Наша трактовка *четвертого принципа* такова: ученик не развивается по-настоящему, если он *не осознает своего* развития, не осознает, что изученный на уроке материал имеет гуманитарную (а не только информационную) ценность лично для него. В нашем курсе это достигается за счет целесообразно организованного *проблемного обучения*. Есть три подхода к обучению математике, в той или иной степени ассоциирующихся с проблемным обучением: метод обучения с помощью задач, метод обучения с помощью создания проблемных ситуаций и собственно проблемное обучение. Метод обучения с помощью задач заключается в следующем: в начале урока учитель предлагает ученикам задачу, решить которую они пока не в состоянии. Он кое-что объясняет, вводит новые элементы теории, затем возвращается к исходной задаче и доводит ее до конца.

В принципе это вполне пригодный метод обучения, но у него есть один крупный недостаток — он не является личностно ориентированным. Задача, которая разбирается на уроке, нужна не ученику, а учителю. Учитель навязывает ее учащимся, поскольку это сделает процесс объяснения нового материала более комфортным для учителя. Примерно так же обстоит дело и с методом создания проблемных ситу-

аций. В проблемную ситуацию учащегося загоняет учитель и сам его из проблемной ситуации выводит, причем на том же уроке. При использовании указанных двух методов учащиеся, как правило, пассивны.

При правильном подходе к проблемному обучению ситуация иная. Во-первых, с проблемой должен непосредственно столкнуться сам учащийся. Решая задачу или проводя какие-то рассуждения, он должен лично убедиться в том, что что-то ему не по силам, поскольку он, видимо, чего-то не знает (в нашем курсе это, как правило, связано с выходом на новую математическую модель). Во-вторых, решение проблемы должно быть отсрочено по времени, проблема должна «отлежаться». Только при этих условиях, добравшись до решения проблемы, учащийся поймет, что он продвинулся в своем развитии, и получит определенные положительные эмоции.

Пятый принцип Л. В. Занкова (о развитии всех учащихся) означает дифференцированность в обучении. Подходы к решению этой проблемы мы наметили. Особенно ярко это видно в наших системах упражнений. Упражнения к каждому параграфу выстроены в трех уровнях. Два уровня — базовые, строго в рамках стандарта (простые задания и задания средней трудности), третий — задания повышенной сложности. Упражнения во многих случаях идут блоками, причем от номера к номеру, как правило, добавляется только один новый дидактический компонент, который учитель легко обнаружит и поймет, надо ли ему в своем конкретном классе идти с предлагаемой авторами скоростью, не стоит ли кое-какие номера пропустить.

Обсудим теперь второй тезис.

Математика — гуманитарный (общекультурный) предмет, который позволяет субъекту правильно ориентироваться в окружающей действительности и «ум в порядок приводит». Математика — наука о математических моделях. Модели описываются в математике специфическим языком (термины, обозначения, символы, графики, графы, алгоритмы и т. д.). Значит, надо изучать математический язык, чтобы мы могли работать с любыми математическими моделями. Основное назначение математического языка — способствовать организации деятельности (тогда как

основное назначение обыденного языка — служить средством общения), а это в наше время очень важно для культурного человека. Поэтому в нашем курсе *математический язык* и *математическая модель* — ключевые слова в постепенном развертывании курса, его идейный стержень. В XXI веке владение хотя бы азами математического языка — неперенный атрибут культурного человека.

Гуманитарный потенциал школьного курса алгебры мы видим, во-первых, в том, что владение математическим языком и математическим моделированием позволит учащемуся лучше ориентироваться в природе и обществе; во-вторых, в том, что математика по своей внутренней природе имеет богатые возможности для воспитания мышления и характера учащихся; в-третьих, в реализации в процессе преподавания идей развивающего и проблемного обучения; в-четвертых, в том, что уроки математики (при правильной постановке) способствуют развитию речи обучаемого не в меньшей степени, чем уроки русского языка и литературы.

Заметим, что желание способствовать реализации последнего тезиса и привело к тому, что наши учебники написаны весьма подробно, обстоятельно и где-то даже избыточно многословно, вопреки традиции излагать материал в школьных учебниках математики в телеграфно-инструктивной, информационно-авторитарной манере. Но есть и еще одна серьезная причина выбора нами мягкого стиля подачи теоретического материала в учебнике. Школа должна не только обеспечить учащегося необходимыми знаниями, но и организовать формирование самостоятельного деятельностного опыта нахождения, получения и отбора информации. А для этого, как минимум, необходима привычка, навык самостоятельного чтения и понимания учебных текстов, в первую очередь — текстов учебников. Но сухо написанный учебник учащийся читать не будет.

Основу нашей методической концепции школьного курса алгебры для 7—9-го классов и алгебры и начал математического анализа для 10—11-го классов составляет *принцип приоритетности функционально-графической линии*.

Приоритетность функционально-графической линии выражается прежде всего в том, что, какой бы класс функ-

ций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда осуществляется по жесткой схеме:

функция — уравнения — преобразования.

Раскроем методические особенности изучения функций в наших учебниках.

1) Отказ от формулировки определения функции при первом появлении этого понятия.

Поначалу, пока изучаются простейшие функции (линейная, обратная пропорциональность, квадратичная — в нашей программе это материал 7—8-го классов), следует отказаться от формального определения функции и ограничиться описанием, не требующим заучивания. Ничего страшного в этом нет, о чем свидетельствует и история математики. Многие математические теории строились, развивались и обогащались все новыми и новыми фактами и приложениями, несмотря на отсутствие определения основного понятия этой теории. Так было в теории пределов (до О. Коши), так было в теории действительного числа. Действительными числами оперировали многие века, не имея определения, и лишь в конце XIX в. появилось сразу несколько вариантов определения действительного числа (Р. Дедекинд, К. Вейерштрасс, Г. Кантор). Можно строить теорию, даже достаточно строгую, и при отсутствии строгого определения исходного понятия — во многих случаях это оправдано с методической точки зрения. Определение функции в школе необходимо ввести тогда, когда ученики накопят достаточный опыт в оперировании этим понятием. В соответствии с нашей программой это происходит в начале 9-го класса.

Далее, в конце 9-го класса общее понятие числовой функции удачно дополняется и понятием *случайной величины*. Это тоже числовая функция, вот только область ее определения — не числовое множество, а (конечное) множество всех элементарных событий (исходов) данного испытания. Это новое для учеников обстоятельство объясняется у нас сначала в примерах 1—6, только потом формулируется в виде определения и затем иллюстрируется примерами 7—9.

2) Постепенное введение в программу свойств функций, подлежащих изучению, на различных уровнях строгости.

Перечислим те свойства функций, которые на том или ином уровнях строгости изучаются в различных разделах школьного курса алгебры: область определения, область значений функции, монотонность, четность, периодичность, непрерывность, выпуклость, ограниченность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, дифференцируемость. Естественно, учителей всегда беспокоят три вопроса:

- каким из этих понятий нужно дать в школе формальное определение, а какие достаточно описать на наглядно-интуитивном или рабочем уровне;

- как и когда давать то или иное формальное определение;

- если формальное определение вводится позже первичного использования понятия, то каковы пропедевтика и динамика развития соответствующего понятия?

Эти вопросы далеко не праздные. Главная методическая ошибка — появление указанных выше свойств функций в более или менее полном объеме практически одновременно при изучении темы «Исследование функций с помощью производной» в курсе алгебры и начал математического анализа в 10—11-м классах, что вызывает понятные затруднения у учащихся (из-за переизбытка информации). Это и педагогическая ошибка. Дело в том, что каждый учитель реализует в своей педагогической деятельности различные программы: интереса, памяти, развития и т. д. Среди них значительное место занимает программа развития речи (включающая, в частности, правильное употребление терминов математического языка). Не следует забывать, что в реальной жизни употребление определенных терминов в речи со смутным их пониманием часто предшествует полноценному пониманию, которое приходит после привыкания к терминам. Поэтому мы считаем не только возможным, но и полезным употребление школьниками, начиная с 7-го класса, таких, например, терминов, как «непрерывность функции», «наибольшее и наименьшее значения функции», без знания строгих математических определе-

ний этих понятий, что и сделано в нашем учебнике для 7-го класса. В 8-м классе на наглядно-интуитивном уровне мы ввели понятия выпуклости и ограниченности функции. И только в курсе алгебры для 9 класса, после накопления соответствующего опыта, мы выходим на формальный уровень определения таких понятий, как «ограниченность функции», «наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке» и т. д.

В чем состоит принципиальная трудность для учащихся в усвоении этих, казалось бы, несложных математических понятий, почему мы считаем необходимым готовить базу для введения формальных определений? На наш взгляд, принципиальная трудность заключается в том, что неокрепший мозг ученика не в состоянии осмыслить наличие в одном определении двух кванторов — квантора общности («для всех», «для каждого», «для любого») и квантора существования («существует», «для некоторого») — в рамках одного предложения. «Существует» и «для любого» — это для него в определенном смысле противоречащие друг другу ситуации. С чем он встречается при определении понятия ограниченности или наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке? Вспомним соответствующие определения.

Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной снизу (сверху)*, если *все* значения функции больше (меньше) *некоторого* числа. Иными словами, если *существует* число m (соответственно M) такое, что *для любого* значения x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) > m$ (соответственно, $f(x) < M$). Число m (M) называют *наименьшим (наибольшим) значением функции* $y = f(x)$ на множестве $X \in D(f)$, если, во-первых, в X *существует* такая точка x_0 , что $f(x_0) = m$ ($f(x_0) = M$); во-вторых, *для всех* x из X выполняется неравенство $f(x) \geq m$ (соответственно, $f(x) \leq M$). Опыт показывает, что двухкванторные определения трудны для восприятия большинством школьников, поэтому особенно важна опережающая формальное определение опора на наглядность. В такой ситуации работают оба полушария головного мозга ученика: и правое, отвечающее за образы, и левое, отвечающее за формально-логическое мышление. Введя понятия наименьшего (наибольшего)

значения функции в 7-м классе, а понятие ограниченности функции в 8-м классе, мы как раз и используем геометрические образы. Например, ограниченность сверху трактуется геометрически: весь график расположен ниже некоторой прямой. В последнем предложении фактически имеются оба квантора — *весь* график ниже *некоторой* прямой. Геометрическая иллюстрация помогает учащемуся преодолеть логические трудности. Вот так постепенно его ум «в порядок приводится».

Приведем таблицу «стратегии и тактики» изучения свойств функций в нашем курсе алгебры для 7—11-го классов. *Стратегия* определяет место введения понятия (класс), а *тактика* — выбор уровней строгости предъявления понятия. В таблице приняты условные обозначения: **Н** — это значит, что соответствующее свойство функции вводится на наглядно-интуитивном уровне; **Р** — это значит, что свойство функции изучается на рабочем уровне, на уровне словесного описания, не загнанного в жесткую формальную конструкцию; **Ф** — означает формальное определение свойства.

Свойство	Класс				
	7	8	9	10	11
Область определения	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Монотонность	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Непрерывность	Н	Н	Н	Н	Р, Ф
Ограниченность	—	Н, Р	Ф	Ф	Ф
Выпуклость	—	Н	Н	Н	Р, Ф
Область значений	—	Н, Р	Ф	Ф	Ф
Чётность	—	—	Ф	Ф	Ф
Периодичность	—	—	—	Ф	Ф
Дифференцируемость	—	—	—	—	Н
Экстремумы	—	—	—	—	Ф

Сделаем некоторые комментарии к этой таблице. Во-первых, учитывая, что учащиеся 7—9-го классов более воспри-

имчивы к новым математическим понятиям (представленным хотя бы в ознакомительном плане), чем учащиеся 10—11-го классов, мы все свойства функций, какие было можно, перенесли в основную школу; в старшей школе впервые появляются лишь три свойства функций (из одиннадцати) — периодичность, дифференцируемость и экстремумы. Далее следует обратить внимание на то, что фактически весь 7-й класс мы работаем с учащимися на наглядно-интуитивном уровне, весь 8-й класс — на рабочем уровне и только в 9-м классе выходим на формальный уровень. Поясним это на примере свойства монотонности функции.

В 7-м классе, изучая график линейной функции, мы обращаем внимание учащихся на то, что этот график в одних случаях как бы «идет в горку», а в других — как бы «идет с горки». В первом случае линейную функцию называют возрастающей, во втором — убывающей (наглядно-интуитивный уровень). Изучая в 8-м классе функцию $y = \sqrt{x}$ и квадратичную функцию, мы снова опираемся на наглядное представление о монотонности, но постепенно переходим на рабочий уровень: функция возрастает (убывает), если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. И только в 9-м классе после изучения свойств числовых неравенств мы даем формальное определение монотонности функции: функцию $y = f(x)$ называют возрастающей (убывающей) на множестве $X \subset D(f)$, если для любых x_1, x_2 из X , таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

3) Для понимания учащимися курса алгебры в целом прежде всего важно, чтобы они полноценно усвоили первичные модели (функции). Это значит, что нужно организовывать их деятельность по изучению той или иной функции так, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель — функцию) системно, с различных сторон, в разных ситуациях. В то же время не должно складываться ощущение набора случайных сюжетов, различных для разных классов функций, это создает ситуацию дискомфорта в обучении. Возникает методическая проблема выделения в системе упражнений по изучению того или иного класса функций *инвариантного ядра, универсального для любого класса функций*.

В наших учебниках такое ядро, инвариантное относительно класса функций, состоит из шести направлений (компонентов):

- графическое решение уравнений (неравенств);
- отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- преобразование графиков;
- функциональная символика;
- кусочно-заданные функции;
- чтение графика.

Учащиеся постепенно привыкают к тому, что, какой бы новый класс функций они ни изучали, в системе упражнений обязательно будут упражнения, рассредоточенные по указанным шести блокам. Образно выражаясь, это шесть красок, с помощью которых изучаемая математическая модель — функция — становится емкой, цельной, понятной, красивой и привычной. Создается эффект предсказуемости деятельности, что делает совместную работу учителя и ученика на уроке достаточно комфортной. Раскроем методические особенности каждого из указанных направлений.

Графическое решение уравнений

Графический (или, точнее, функционально-графический) метод решения уравнений должен, на наш взгляд, всегда быть первым и одним из главных при решении уравнений любых типов. Неудобства, связанные с применением графического метода, как правило, и создают ту проблемную ситуацию, которая приводит к необходимости отыскания алгоритмов аналитических способов решения уравнения. Эта идея проходит у нас красной нитью через весь школьный курс алгебры.

Что дает этот метод для изучения той или иной функции? Он приводит ученика к ситуации, когда график функции строится не ради графика, а для решения другой задачи — для решения уравнения. График функции становится *не целью, а средством*, помогающим решить уравнение. Это способствует и непосредственному изучению функции, и ликвидации того неприязненного отношения к функциям

и графикам, которое, к сожалению, характерно для традиционных способов организации изучения курса алгебры в общеобразовательной школе. В наших учебниках графический метод решения уравнения в большинстве случаев предшествует аналитическим методам. Учащиеся вынуждены применять его, привыкать к нему и относиться как к своему первому помощнику (они, образно выражаясь, обречены на дружбу с графическим методом), поскольку никаких других приемов решения того или иного уравнения к этому времени не знают. Опыт показывает, что графический метод решения уравнений им нравится, они чувствуют его полезность и красоту и в то же время ощущают проблемность ситуации, вызванной ненадежностью этого метода решения уравнения.

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке

Начиная с 7-го класса мы предлагаем учащимся задания такого типа: найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x + 3$ на отрезке $[1; 3]$. Предполагается, что учащиеся построят график линейной функции $y = 2x + 3$, выделят часть графика на отрезке $[1; 3]$ и по графику найдут наибольшее и наименьшее значения функции.

В чем методическая ценность подобного задания? Во-первых, это новая «игра» с функцией, когда график нужен не сам по себе, а для ответа на вопрос задачи (опять график — не цель, а средство). Во-вторых, сами того не осознавая, учащиеся привыкают к оперированию двухкванторным, т. е. достаточно сложным математическим понятием, восприятие которого требует как определенной подготовки, так и определенного уровня математической культуры.

Преобразование графиков

Начиная с 8-го класса, какая бы функция ни изучалась, школьникам предлагается в системе упражнений выполнить то или иное преобразование графика.

Функциональная символика

Как только в 7-м классе появится запись $y = f(x)$, мы предлагаем учащимся примеры, нацеленные на осознание смысла этой записи, примеры на функциональную символику. Опыт показывает, что школьники часто не могут, например, исследовать функцию на четность не потому, что не знают определений четной или нечетной функции, а потому, что не понимают смысла записи $f(-x)$. Нередко учащиеся испытывают затруднения с производной также из-за чисто технических трудностей: не понимают смысла записи $f(x + \Delta x)$ и вследствие этого зачастую не могут составить выражение для приращения функции даже в достаточно простых случаях. Это означает, что соответствующая работа не была проведена учителем в 7—9 классах. Поэтому считаем полезным включать в учебники задания следующего типа: для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, найти $f(a - 1)$, $f(a + 2)$, $f(3a)$, $f(5x)$, $f(-x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$ и т. п.

Кусочные функции

Для правильного формирования у учащихся как самого понятия функции, так и представления о методологической сущности этого понятия, полезно делать то, что до недавнего времени отсутствовало в большинстве школьных учебников. Речь идет о рассмотрении кусочных функций, т. е. функций, заданных различными формулами на разных промежутках области определения. Во многих случаях именно кусочные функции являются математическими моделями реальных ситуаций. Использование таких функций способствует преодолению обычного заблуждения учеников, отождествляющих функцию только с ее аналитическим заданием в виде некоторой формулы. В самом деле, чтобы задать функцию, надо указать область ее определения $D(f)$ и указать правило f , по которому каждому значению x из множества $D(f)$ сопоставляется определенное значение y . Если учащиеся имели дело с функциями, заданными аналитически одной формулой, заданными с помощью графика и особенно заданными различными формулами на раз-

ных промежутках, то они легче воспримут ту тонкость, которая содержится в определении («правило f »); менее вероятно при этом и отождествление ими «правила f » с «формулой f ». Использование кусочных функций готовит как в пропедевтическом, так и в мотивационном плане понятие непрерывности. Использование на уроках кусочных функций дает возможность учителю сделать систему упражнений более разнообразной (что очень существенно для поддержания интереса к предмету у обучающихся), творческой (можно предложить учащимся самим сконструировать примеры). Отметим и воспитательный момент: это воспитание умения принять решение, зависящее от правильной ориентировки в условиях, это и своеобразная эстетика — оценка красоты графиков кусочных функций, предложенных разными учениками.

Чтение графика

Очень важно научить школьников описывать свойства функции по графику, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной). Конечно, в 7-м классе этот перевод с одного языка на другой достаточно беден, но по мере появления новых свойств функций он становится все богаче (а значит, учащиеся видят, как они постепенно умнеют по мере изучения математики, что соответствует уже упомянутому выше принципу осознанности в теории развивающего обучения Л. В. Занкова). Наличие в курсе алгебры 10-го класса достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным, разнообразным (с литературной точки зрения), многоплановым. У ученика теперь имеется возможность составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику.

Попутно заметим, что в системе упражнений мы регулярно предлагаем учащимся по заданному графику восстановить аналитическое задание функции. Вообще переход от одного вида математической модели (аналитическая, графическая, вербальная) к другому происходит у нас в системе упражнений регулярно.

Примерное тематическое планирование

10 класс

(из расчета 3 ч в неделю, всего 102 ч)

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
Глава 1. Тригонометрические функции (23 ч)		
1	Что такое числовая окружность	2
2	Числовая окружность на координатной плоскости	2
3	Дуги числовой окружности на координатной плоскости	1
4	Понятия косинуса и синуса числа	2
5	Понятия тангенса и котангенса числа	1
6	Соотношения между тригонометрическими функциями	2
7	Тригонометрические функции углового аргумента	1
	<i>Контрольная работа № 1</i>	1
8	Периодические функции	2
9	Свойства и график функции $y = \cos x$	2
10	Свойства и график функции $y = \sin x$	2
11	Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$	1
12	Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$	1
13*	График гармонического колебания	1
14	Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$	1
	<i>Контрольная работа № 2</i>	1
Глава 2. Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений (16 ч)		
15	Понятие обратной функции	1
16	Функция $y = \arcsin x$	2
17	Функция $y = \arccos x$	2

Параграф	Тема	Кол-во часов
18	Функция $y = \operatorname{arctg} x$	1
19	Функция $y = \operatorname{arcsctg} x$	1
20	Решение уравнения $\cos x = a$	1
21	Решение уравнения $\sin x = a$	2
22	Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$	1
23	Методы решения тригонометрических уравнений	2
24	Однородные тригонометрические уравнения	2
	<i>Контрольная работа № 3</i>	1
Глава 3. Формулы тригонометрии (12 ч)		
25	Формулы приведения	1
26	Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов	2
27	Формулы тангенса суммы и разности аргументов	1
28	Формулы двойного аргумента	2
29	Формулы понижения степени	1
30	Формулы сложения (вычитания) синусов (косинусов)	2
31*	Формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму	2
	<i>Контрольная работа № 4</i>	1
Глава 4. Степенные функции (16 ч)		
32	Степенные функции с натуральным показателем	1
33	Степенные функции с целым отрицательным показателем	1
34	Функция $y = \sqrt[n]{x}$	2
35	Свойства корней n -й степени	2
36	Понятие степени с рациональным показателем	2
37	Степенные функции с рациональным показателем	2
38	Иррациональные уравнения	2

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
39	Преобразование иррациональных выражений	2
40	Понятие степени с иррациональным показателем	1
	<i>Контрольная работа № 5</i>	1
Глава 5. Показательные и логарифмические функции (20 ч)		
41	Показательные функции	2
42	Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$	1
43	Показательные уравнения	2
44	Показательные неравенства	2
	<i>Контрольная работа № 6</i>	1
45	Понятие логарифма	1
46	Логарифмические функции	2
47	Свойства логарифмов	2
48	Десятичные логарифмы	1
49	Логарифмические уравнения	2
50	Логарифмические неравенства	2
51	Переход к новому основанию логарифма	1
	<i>Контрольная работа № 7</i>	1
Глава 6. Закон больших чисел (9 ч)		
52	Треугольник Паскаля и бином Ньютона	2
53	Случайные события и их вероятности	2
54	Математическое ожидание (среднее значение) случайных величин	2
55	Частота и вероятность. Законы больших чисел	2
	<i>Контрольная работа № 8</i>	1
	Итоговое повторение	6

Методические рекомендации по работе с учебником «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс»

Глава 1. Тригонометрические функции

Первая глава учебника структурно распадается на два раздела: первый — числовая окружность и определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса (§ 1—7); второй — тригонометрические функции, их свойства и графики (§ 8—14). Особое внимание обратим на содержание первого раздела, поскольку именно в нем содержатся принципиальные отличия нашего учебника от всех остальных.

В школьном курсе математики в разные годы использовались различные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной числовой окружности. При этом практически всем учебникам присущ один и тот же недостаток: недооценка важности изучения самой модели «числовая окружность» и сложности дидактических компонентов, которые связаны с изучением этой модели.

О каких дидактических компонентах идет речь?

1) Числовая прямая изучается в школе в течение четырех лет: в 5-м классе речь идет о координатном луче, в 6—7-м классах — о координатной прямой и, наконец, в 8-м классе, после введения понятия действительного числа, — о числовой прямой. Числовая прямая считается изученной, когда учащиеся свободно решают задачи четырех типов: по заданному числу находят точку на прямой, по точке находят соответствующее число, умеют переходить от геометрической модели числового промежутка к аналитической записи и обратно. Числовая окружность представля-

ет собой более сложную модель, на которой тем не менее надо научиться решать задачи тех же четырех типов. Это требует времени и внимания как со стороны авторов учебников, так и учителей.

2) Понятие длины дуги, которое лежит в основе любых действий с числовой окружностью, не является надежно отработанным в курсе геометрии, значит, на это следует обратить внимание.

3) И авторы учебников, и учителя должны с пониманием относиться к тем трудностям, с которыми столкнутся учащиеся в начале изучения тригонометрии: непривычная модель (числовая окружность) и непривычный, «неаналитический» способ введения новых функций (синус — ордината, косинус — абсцисса точки числовой окружности). При этом от учащихся фактически требуется умение работать одновременно *в двух системах координат*: «криволинейной», когда снимаем информацию о положении точки на числовой окружности, и декартовой, когда снимаем информацию об абсциссе и ординате точки.

Опыт показывает: недоработки с моделью числовой окружности и слишком поспешное введение тригонометрических функций не позволяют создать надежный фундамент для успешного изучения материала. Более того, на самом деле школьникам приходится изучать не одну, а две новые модели: первая — собственно числовая окружность, а вторая — числовая окружность на координатной плоскости. Подчеркнем, что речь идет именно об окружности, а не о круге, поэтому в нашем учебнике нет столь любимого многими учителями словосочетания «тригонометрический круг».

Учитывая вышесказанное, мы уделяем большое внимание подготовке к введению основных определений: в первых трех параграфах соответствующей главы учебника речь идет о моделях «числовая окружность» и «числовая окружность на координатной плоскости». Для успешного овладения указанными моделями в учебнике предусмотрена система специальных заданий.

1. Вычисление длины дуги единичной окружности. Учащиеся должны привыкнуть к тому, что длина всей окруж-

ности равна 2π , половины окружности — π , четверти окружности — $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

2. Отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным в долях числа π (например, $M\left(\frac{13\pi}{6}\right)$).

3. Отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным не в долях числа π , например точек $M(1)$, $M(-5)$ и т. д. («плохие» числа и точки).

4. Запись чисел, соответствующих данной «хорошей» точке числовой окружности (например, «хорошей» является середина первой четверти).

5. Составление аналитических записей (двойных неравенств) для дуг числовой окружности.

6. Переход от данной аналитической записи дуги (двойного неравенства) к ее геометрическому изображению.

Заметим, что эти шесть направлений обеспечивают умение решать задачи четырех основных типов, связанных с числовой окружностью, о которых мы упоминали выше (от числа к точке, от точки к числу, от дуги к двойному неравенству, от двойного неравенства к дуге).

Следующие специальные задания относятся к модели «числовая окружность на координатной плоскости». Приступая к изучению этой модели, мы должны отчетливо сознавать, какие трудности ждут учащихся. Прежде всего от них требуется довольно высокий уровень математической культуры, достаточный для того, чтобы работать одновременно в двух системах координат — криволинейной и декартовой, — об этом уже упоминалось выше. Чтобы помочь им преодолеть указанную трудность, мы для точки M числовой окружности используем запись $M(t)$, если речь идет о криволинейной координате точки M , или запись $M(x; y)$, если речь идет о декартовых координатах точки.

Иногда в пособиях для школы с самого начала используют записи $\sin x$, $\cos x$, не учитывая, что буква x в сознании учащихся ассоциируется с абсциссой в декартовой системе координат, а не с длиной пройденного по окружности пути.

В нашем учебнике при работе с числовой окружностью нигде не используются указанные записи, используются символы $\sin t$, $\cos t$.

7. Отыскание координат «хороших» точек числовой окружности. Речь идет о переходе от записи $M(t)$ к записи $M(x; y)$. Например, $M\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Тем самым школьники фактически учатся вычислять значения тригонометрических функций. Например, из последнего равенства следует (но об этом они узнают позже), что $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Отыскание знаков координат «плохих» точек числовой окружности. Если, например, $M(2) = M(x; y)$, то $x < 0$, $y > 0$. Тем самым школьники фактически учатся определять знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности. Например, из последнего равенства следует (об этом они также узнают позже), что $\sin 2 > 0$, а $\cos 2 < 0$.

9. Отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. Например, если $y = \frac{1}{2}$, то этому условию удовлетворяют две точки

числовой окружности, их главные имена $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, а все имена охватываются двумя формулами: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Тем самым мы готовим учащихся к решению простейших тригонометрических уравнений вида $\sin t = a$, $\cos t = a$. Для понимания сути дела следует прежде всего научить школьников решать эти уравнения с помощью числовой окружности, не торопясь переходить к готовым формулам.

10. Отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному неравенству (типа $y > \frac{1}{2}$, $x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$). Тем самым мы работаем на опережение: готовим учащихся к решению тригонометрических неравенств вида $\sin t > a$, $\cos t < a$.

Указанные выше 10 видов заданий рассматриваются в § 1—3. В § 4 вводятся названия для декартовых координат точек числовой окружности: абсцисса точки $M(t)$ — это $\cos t$, а ордината — $\sin t$. Чтобы учащиеся приняли эти определения осознанно, им предлагаются те же задания, но в новой формулировке: например, не найти координаты точки окружности, а вычислить синус или косинус. Подчеркнем, что на первых уроках тригонометрии простейшие тригонометрические уравнения и неравенства используются не как *цель обучения*, а только как *средство* для усвоения главного — определений синуса и косинуса как декартовых координат точки числовой окружности.

В § 4 и 5 даются определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, рассматриваются некоторые их свойства.

Основная цель § 7 «Тригонометрические функции углового аргумента» состоит в том, чтобы собрать воедино старые и новые представления учащихся об основных понятиях тригонометрии. В курсе геометрии (да и в курсе физики) они говорили о синусе, косинусе, тангенсе *угла*, а не *числа*. Необходимо убедить их в том, что те модели, которые использовались в курсе геометрии (синус, косинус, тангенс, котангенс как отношения сторон прямоугольного треугольника), легко и естественно вписываются в новые модели более общего характера. Ученики должны понять, что есть только одно определение тригонометрических функций: то, которое связано с числовой окружностью. Определение, связанное с прямоугольным треугольником, — частный случай общего определения. Предпочтение, на наш взгляд, следует отдать словосочетанию «тригонометрическая функция числа» и реже употреблять компромиссное словосочетание «тригонометрическая функция угла». Например, практически нигде в учебнике мы не используем архаичное «синус двойного угла», — мы говорим «синус двойного аргумента».

Что касается второго из указанных выше разделов первой главы, то он выдержан в духе общей концепции построения функционально-графической линии в нашем УМК, описанной в первой части данного пособия. В частности, для всех изучаемых в § 8—14 функций система упражнений строится с опорой на инвариантное ядро: графическое

решение уравнений; отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке; преобразование графиков; функциональная символика; кусочно-заданные функции; чтение графика.

Глава 2. Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений

В первой части настоящего пособия мы говорили о том, что в нашем курсе алгебры и начал математического анализа из основных содержательно-методических линий в качестве приоритетной выбрана функционально-графическая: какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала осуществляется по жесткой схеме: *функция — уравнения — преобразования*. По этой же схеме позднее строится весь раздел «Тригонометрия» — порядок глав именно такой; по этой же схеме строится изучение степенных, показательных и логарифмических функций в главах 4 и 5.

Между прочим, именно по отношению к тригонометрии эта схема вызывает у учителей, не знакомых с нашей концепцией, возражения. «Как, — спрашивают они, — можно изучать тригонометрические уравнения, если учащиеся не знают формул тригонометрии?» Серьезный вопрос требует серьезного ответа. Почему в нашем курсе функции предшествуют преобразованиям? Ответим на этот вопрос с позиции здравого смысла: целесообразнее сначала изучить «чистые модели» (такowymi в математике являются основные элементарные функции), а затем уже переходить к изучению «навороченных моделей» (такowymi в математике являются сложные выражения, которые надо упрощать, применяя формульный аппарат). А как обстоит дело с тригонометрическими уравнениями? Примерно так же: сначала следует разобраться с «чистыми моделями», т. е. с простейшими тригонометрическими уравнениями и уравнениями, которые сводятся к простейшим с помощью алгебраических приемов. И только потом переходить к «навороченным моделям», т. е. к уравнениям, которые нужно сначала долго и

упорно «раскручивать», используя рутинный аппарат формул. Обычная методическая ошибка в изучении тригонометрии в школе в последние годы заключается в следующем: учащимся не дают возможности разобраться со спецификой собственно тригонометрических уравнений — простейших уравнений типа $\sin x = a$, $\cos 2x = a$. А ведь в этих уравнениях много нового и неожиданного: бесконечное множество корней, наличие параметра (n или k) в записи решений, новые символы (пресловутые «арки») и прочие «выкрутасы» (типа $(-1)^n$). Ко всему этому надо привыкнуть. В традиционных учебниках школьникам не дают этой возможности: уравнения практически сразу усложнены обилием тригонометрических формул и необходимостью выполнения соответствующих преобразований.

Теперь можно сформулировать концепцию всей главы 2 учебника: в этой главе изучаем только то, что даст возможность школьникам почувствовать именно специфику тригонометрических уравнений. Перечень составляют, во-первых, простейшие уравнения типа $\sin x = a$, $\cos 2x = a$; во-вторых, уравнения, при решении которых применяется метод введения новой переменной: однородные и уравнения, сводящиеся к квадратным с помощью основного тригонометрического тождества, например, $\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$ (положив $u = \cos x$, получим $1 - u^2 - 5u + 1 = 0$ и т. д.).

Еще раз обращаем внимание на обозначение переменной, относительно которой в § 20—22 решаются тригонометрические уравнения. До тех пор, пока мы в своих рассуждениях опираемся на числовую окружность, мы, как неоднократно отмечалось выше, обозначаем переменную буквой t . Как только выходим на формальный уровень, т. е. на уровень использования готовых формул для решения простейших тригонометрических уравнений, мы возвращаемся к тому, к чему привыкли ученики, — к обозначению переменной в уравнении буквой x .

Для решения простейших тригонометрических уравнений типа $\sin x = a$, $\cos x = a$ и т. д. в учебнике фактически используется трехшаговый алгоритм:

- 1) составить общую формулу;
- 2) вычислить значение арксинуса (арккосинуса и т. д.);
- 3) подставить найденное значение в общую формулу.

В главе 2 рассмотрены следующие виды тригонометрических уравнений:

- базовые уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$;
- простейшие уравнения вида

$$\sin 3x = a, \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

- квадратные уравнения относительно $\sin x$ или $\cos x$;
- однородные уравнения первой степени;
- однородные уравнения второй степени;
- уравнения, сводящиеся к однородному уравнению второй степени за счет применения основного тригонометрического тождества.

Рассмотрены также примеры на отбор корней в тригонометрических уравнениях. Так что и без использования тригонометрических формул есть чем заняться. Это ответ на часто встречающийся вопрос учителей, который мы привели выше: как можно изучать тригонометрические уравнения, если учащиеся не знают формул тригонометрии?

Весьма трудным в методическом плане является вопрос об отборе корней в тригонометрических уравнениях. Учащиеся не должны формально заучивать формулы корней тригонометрических уравнений, они должны их «прочувствовать», понять, что корней бесконечно много, что все они зависят от целочисленного параметра. А для этого отбор корней, причем именно в простейших уравнениях, не обремененных техническими «формульными» сложностями, — наиболее благодатный материал.

В § 20 предложено найти корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезкам $[0; 2\pi]$, $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$, $(1; 13)$, и показан метод «перебора по параметру». В § 21 предложено найти корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$, и показан метод «двойного неравенства». Во всех параграфах главы 2 в достаточном количестве имеются

упражнения на отбор корней в тригонометрических уравнениях, причем учащиеся вольны выбирать любой из указанных методов.

Глава 3. Формулы тригонометрии

Глава 3 учебника посвящена выводу основных формул тригонометрии и показу многочисленных примеров их использования как для упрощения тригонометрических выражений, так и для осуществления вычислений в тригонометрии, для решения тригонометрических уравнений и т. д. Тригонометрические уравнения решаются постоянно, на протяжении всего периода изучения главы 3 отрабатывается техника их решения, в то время как все принципиальные вопросы, связанные с решением тригонометрических уравнений, подробно рассмотрены ранее, в главе 2.

Глава 3 начинается с § 25 «Формулы приведения». Конечно, экономнее было бы получить эти формулы после изучения теоремы сложения в § 26, но мы сочли разумным опираться на геометрические представления, на работу с числовой окружностью — это дает больший развивающий эффект.

Остальной материал главы достаточно традиционен в методическом плане.

Подчеркнем, что и в этой главе в упражнениях постоянно встречаются задания на отбор корней в тригонометрических уравнениях.

Глава 4. Степенные функции

Напомним еще раз, что методическая линия, связанная с изучением функций, в нашем курсе приоритетная. В 8-м классе освоение квадратичной функции предшествовало изучению квадратных уравнений. Изучение тригонометрии в 10-м классе начиналось с тригонометрических функций, а тригонометрические формулы появились позднее. Та же линия реализуется в главе 4. После напоминания понятия корня n -й степени, которое в нашем курсе вве-

дено в 9-м классе, речь идет не о свойствах корней, а о функции $y = \sqrt[n]{x}$ (в § 34), тогда как свойствам корней посвящен следующий § 35.

В учебнике нет понятия арифметического корня, поскольку его использование в общеобразовательной школе по сути дела лишено смысла. В школьном курсе алгебры нет речи об n значениях корня n -й степени из действительного числа; в силу принятых определений эта операция всегда однозначно определена: корень n -й степени из положительного числа есть положительное число, корень из 0 есть 0, корень нечетной степени из отрицательного числа есть отрицательное число. При этих условиях «довесок» в виде прилагательного «арифметический» представляется излишним.

В § 36 речь идет о степенях с любыми рациональными показателями. Учащиеся должны понимать, что определения в математике не обсуждаются, не доказываются. Но все-таки в большинстве случаев в основе того или иного определения имеется «земное начало». Вот это «земное начало» и следует довести до учащихся. В учебнике даны наброски соответствующего подхода, здесь мы остановимся на этом подробнее.

Известно, что $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n множителей) и что $a^1 = a$. Но такое содержательное истолкование степени не переносится ни на случай степени с нулевым или отрицательным целым показателем, ни на случай дробного показателя. В самом деле, ведь нельзя же повторить число a множителем -5 раз, или 0 раз, или 3,5 раза. Поэтому для каждого случая приходится придумывать свое определение. Но при этом есть «земное начало»: нужно придумать такое определение, чтобы на него распространялись известные и привычные свойства натуральных степеней (при умножении показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются).

Как определить a^0 ? Будем исходить из того, что должно выполняться равенство $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$, т. е. $a^n \cdot a^0 = a^n$, что возможно лишь в случае, когда $a^0 = 1$. Именно такое определение степени с нулевым показателем и ввели для любого основания a , кроме $a = 0$ (символ 0^0 считается в математике

лишенным смысла, причем понятно почему: с одной стороны, 0 в любой степени должен давать в итоге 0, с другой стороны, если сделать акцент на нулевой показателе, в итоге должно получиться число 1; двойственности ситуации математики стараются избежать).

Как определить a^{-n} ? Так, чтобы выполнялось, например, равенство $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$. Последнее равенство возможно лишь в случае, когда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Именно такое

определение степени с отрицательным целым показателем и принято в математике для любого основания a , кроме $a = 0$.

Пусть теперь $a \geq 0$ и надо определить $a^{\frac{p}{q}}$. Хотелось бы, чтобы при этом выполнялось свойство: «при возведении степени в степень показатели перемножаются», в частности,

должно выполняться равенство $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q} \cdot q}$, т. е.

$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$. Но если $x^q = a^p$, то $x = \sqrt[q]{a^p}$. Следовательно, есть смысл определить $a^{\frac{p}{q}}$ как $\sqrt[q]{a^p}$.

После того как введено понятие степени с любым рациональным показателем, естественно сделать следующий шаг — изучить степенные функции с рациональными показателями; этому посвящен § 37. Правда, обычно степенными функциями называют функции вида $y = x^r$, где r — любое действительное число, как рациональное, так и иррациональное. Но поскольку понятие степени с иррациональным показателем учащимся пока не известно (это будет сделано в § 40), приходится ограничиваться степенными функциями только с рациональными показателями.

Основная цель § 32, 33, 37 — добиться того, чтобы учащиеся четко представляли себе эскиз графика степенной функции $y = x^r$ для любого рационального показателя r и знали, что:

1) при четном натуральном значении r график похож на параболу, а при нечетном, большем, чем 1, — на кубическую параболу;

2) при нечетном отрицательном целом значении r график похож на гиперболу, а при четном состоит как бы из двух ветвей гиперболы, симметричных относительно оси y ;

3) при положительном дробном значении r график похож на одну ветвь параболы, которая ориентирована вверх при $r > 1$ и вправо — при $0 < r < 1$;

4) при отрицательном дробном значении r график похож на одну ветвь гиперболы;

5) график любой степенной функции проходит через точку $(1; 1)$.

При изучении степенных функций мы естественно не отказываемся от заявленного выше инвариантного ядра (подробно речь о нем шла в первом разделе настоящего пособия): в примерах, приведенных в учебнике, и в упражнениях реализованы все шесть стандартных сюжетов, составляющих указанное ядро.

В § 40 дается понятие степени с иррациональным показателем — понятие достаточно тонкое и сложное. Если основание степени a — положительное число, отличное от 1, а показатель степени t — положительное иррациональное число, то сначала строят последовательность десятичных приближений числа t по недостатку: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ — а затем последовательность рациональных степеней числа a : $a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_n}, \dots$. Эта последовательность монотонна и ограничена и поэтому сходится (по теореме Вейерштрасса). Предел последовательности и принимается за a^t . Это — типичная для классического математического анализа «теорема существования»: искомое значение существует, а что оно собой представляет конкретно — никого не волнует; главное, что оно есть и однозначно определено (в силу теоремы о единственности предела).

Этот подход не годится для 10-го класса, поскольку не изучены элементы теории пределов. Мы выбрали подход, основанный на формулировке аксиомы непрерывности множества действительных чисел в виде принципа разделяющего числа: если одно числовое множество расположено левее другого, то существует число, разделяющее эти множества, причем оно единственно тогда и только тогда, когда множества подходят друг к другу сколь угодно близко. Естественно, этот подход представлен в учебнике в адаптив-

ной для школы форме: для иррационального показателя степени берутся приближения по недостатку и по избытку, и с их помощью составляются два числовых множества, которые разделяются единственным числом — степенью с иррациональным показателем.

Глава 5. Показательные и логарифмические функции

В § 41 сначала рассматривается функция $y = 2^x$, $x \in \mathbb{Q}$. Отмечается, что это — возрастающая функция, неограниченная сверху и ограниченная снизу, не имеющая ни наименьшего, ни наибольшего значений. Как правило, учащихся смущает некоторая, на их взгляд, искусственность ситуации: они привыкли рассматривать функции, заданные на сплошных промежутках, а им предлагают рассмотреть функцию, заданную на «дырявом» множестве рациональных чисел. Несколько комфортнее будут чувствовать себя здесь те учителя и учащиеся, которые «исповедуют» нашу концепцию с 7-го класса. Дело в том, что в наших учебниках отдается приоритет функциям с заданной областью определения (такowymi являются, например, кусочные функции), и ученики постепенно привыкают к любому виду области определения. Если, в частности, область определения функции — множество натуральных чисел, то получается числовая последовательность. Именно так мы действовали в курсе алгебры 9-го класса при первом знакомстве с числовыми последовательностями.

Принципиальное значение имеет § 42, в котором ученики знакомятся с общим подходом к понятию касательной, с числом e и с показательной функцией $y = e^x$.

В курсе математического анализа число e вводится как значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (второй замечательный предел). Идти этим путем в общеобразовательной школе мы сочли неразумным. Конечно, второй замечательный предел очень важен в математике, но школьники в этом не смогут убедиться, так что указанный формальный путь окажется

для них чистой схоластикой. Мы выбрали известный методический прием, опирающийся на интуицию и правдоподобные рассуждения: рассматриваем графики показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, для различных оснований a и касательные к этим графикам в точке $(0; 1)$. Замечаем, что для функции $y = 2^x$ касательная образует с осью x угол 35° , для функции $y = 3^x$ — угол 48° , для функции $y = 10^x$ — угол $66,5^\circ$ (разумеется, все значения углов даны приближенно). Здравый смысл подсказывает, что, наверное, есть такое основание (его обозначают буквой e), для которого соответствующий угол равен 45° . Это основание должно быть заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35° , что меньше, чем 45° , а для функции $y = 3^x$ он равен 48° , что больше, чем 45° . В курсе математического анализа доказано, что e — иррациональное число, т. е. представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь: $e = 2,7182818284590\dots$

Материал § 43—44 достаточно традиционен и не нуждается в особых комментариях. Речь идет о решении показательных уравнений и неравенств.

Порядок ходов в § 45—47 (понятие логарифма, логарифмическая функция, свойства логарифмов) традиционен для нашей концепции; подобный порядок ходов был и в главе 4 при изучении радикалов.

Существует несколько методических подходов к решению логарифмических уравнений, о которых идет речь в § 49. Особенно популярным в последнее время стал такой подход: сначала надо найти ОДЗ (область допустимых значений переменной) уравнения $\log_a(x) = \log_a g(x)$, для чего

следует решить систему неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Затем решают

уравнение $f(x) = g(x)$ и делают проверку найденных корней по ОДЗ уравнения.

Второй подход заключается в следующем: не находят ОДЗ, а сразу решают уравнение $f(x) = g(x)$. Затем все найденные корни проверяют непосредственной их подстановкой в исходное уравнение.

Чем плох первый подход? Тем, что иногда решение системы неравенств, определяющей ОДЗ уравнения, бывает

весьма затруднительным, отвлекающим учащихся от основной работы — решения уравнения. При этом часто бывает так, что уравнение $f(x) = g(x)$ вообще не имеет корней, так что вся работа по опережающему отысканию ОДЗ оказывается пустой тратой времени. Бывает и так, что указанное уравнение имеет настолько простые корни, что их проверка подстановкой в исходное уравнение осуществляется легко и быстро. В таких случаях предпочтительнее второй подход. А чем плох второй подход? Тем, что мы рискуем «нарваться» на проверку подстановкой «плохих» корней. В этом случае выбираем первый подход.

Второй подход предпочтительнее и по идейным соображениям. В принципе сначала нужно решить уравнение, затем сделать проверку. А при первом подходе, еще ничего не сделав для собственно решения уравнения, мы начинаем «подстилать соломку», находить ОДЗ, думая о возможном появлении посторонних корней и о необходимости их отсева. В то же время при решении логарифмических неравенств (§ 50), где в принципе невозможна проверка, у нас нет иного выбора, кроме как использовать первый подход.

Мы в учебнике при решении логарифмических уравнений отдаем предпочтение третьему подходу, который, на наш взгляд, нивелирует недостатки как первого, так и второго подходов. Наш план решения уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ заключается в следующем: решаем уравнение $f(x) = g(x)$ и если оно имеет корни, то делаем проверку.

Для этого составляем систему неравенств: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ но

не решаем ее, а проверяем найденные корни уравнения подстановкой в неравенства системы (что значительно проще).

Но, вообще говоря, тактика решения логарифмического уравнения может быть достаточно гибкой: если ОДЗ можно найти без труда, выбираем первый подход; если с ОДЗ много возни, то выбираем третий подход (или второй — в случае очень простых корней). Самый общий взгляд на вопросы равносильности уравнений, который позднее обсудим в учебнике для 11-го класса, заключается в следующем.

Решение уравнения, как правило, осуществляют в три этапа.

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow \dots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

При решении логарифмического уравнения, как правило, происходит расширение ОДЗ, а это — неравносильное преобразование уравнения; поэтому проверка — неотъемлемая часть решения уравнения (а не приложение к решению).

В § 43 и 49 выделяются три основных метода решения показательных и логарифмических уравнений. В объединенном виде это выглядит так:

1) *функционально-графический метод*. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций;

2) *метод уравнивания показателей* (для показательных уравнений) и *метод потенцирования* (для логарифмических уравнений);

3) *метод введения новой переменной*.

Здесь представлены три общих метода решения любых уравнений, о чем подробнее пойдет речь в учебнике для 11-го класса, причем второй из указанных выше методов — это (в классификации, которая используется в учебнике для 11-го класса) метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.

В § 51 речь идет о переходе к новому основанию логарифма. Отметим, что мы придаем большое значение частному случаю формулы перехода, который зафиксирован в учебнике в следствии 2: если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равен-

ство $\log_a b = \log_a b^r$. Сама формула перехода к новому основанию доказана с помощью метода введения новых переменных, как и все свойства логарифмов в § 45, как и все свойства корней n -й степени в § 35 (заметим, что тот же прием мы использовали и в курсе алгебры 8-го класса при выводе свойств квадратных корней).

Глава 6. Закон больших чисел

Глава состоит из четырёх параграфов. Учебный материал каждого из них в заметной степени пересекается с содержанием стохастической линии основной школы. В особенности это относится к первым двум параграфам (§ 52, 53). Например, почти половину § 52 «Треугольник Паскаля и бином Ньютона» занимает краткое повторение элементов комбинаторики, в той или иной мере изложенной в учебниках для 8-го и 9-го классов: правило умножения, перестановки, сочетания и соответствующие формулы. Тем самым происходит и повторение, и закрепление материала, и подготовка к его дальнейшему изучению.

Изложение уже известных фактов весьма лаконично. А именно, треугольник Паскаля — это не более чем удобная и красивая таблица для «хранения» чисел C_n^k , а бином Ньютона — распространение известных формул сокращенного умножения «квадрат суммы» и «куб суммы» на случай старших степеней с использованием треугольника Паскаля. В принципе, и про треугольник Паскаля, и про бином Ньютона можно написать и отдельную главу, и отдельный учебник. Но мы ограничиваемся лишь самыми базовыми сведениями. В треугольнике Паскаля это свойство «любое число внутри строки равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке» и уверенное оперирование с первыми 6—8 строками треугольника. Бином Ньютона излагается как одно из применений сведений о треугольнике Паскаля. Основной итог этого параграфа состоит в том, что числа C_n^k могут быть определены и в приложениях используются *четырьмя* способами:

1) C_n^k — это число сочетаний из n элементов по k элементов;

$$2) C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

3) C_n^k — это число, стоящее в n -й строке треугольника Паскаля на k -м месте;

4) C_n^k — это коэффициент при $a^{n-k}b^k$ в биноме Ньютона для $(a+b)^n$.

Отметим, что первые представления о треугольнике Паскаля уже даны в учебнике для 9-го класса в виде дополнительных упражнений к соответствующей главе. В § 52 из десяти упражнений с пунктами а)–е) половину составляют упражнения, которые можно было решать и в 9-м классе. По нашему мнению, примерно такое пересечение — необходимое условие успешного выстраивания всей стохастической линии в УМК.

Следующий параграф (§ 53) «Случайные события и их вероятности» по своей структуре напоминает § 52. Он начинается с краткого напоминания материала основной школы: элементарные события (э.с.), случайные события, определения вероятности для случая конечного числа э.с. Из трех подробно разобранных примеров первый связан с классическим определением вероятности, а два других — со случаем неравномерного распределения вероятности; точнее — с испытаниями Бернулли. В решении третьего примера напоминаются и формулы $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ вероятности суммы и $P(AB) = P(A)P(B)$ для независимых событий. Основной методический момент составляет именно переход от классического определения вероятности к общему. Впрочем, мы, по существу, ограничиваемся единственным неравномерным распределением — *биномиальным* распределением. В финале этого параграфа переплетаются три уже начатые ранее «нити». Во-первых, мы продолжаем (см. 8-й и 9-й классы) изучение испытаний Бернулли и формулы $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, кратко доказывая ее. Во-вторых, здесь по-настоящему «работает» бином Ньютона из предыдущего параграфа. В-третьих, мы интерпретируем биномиальное распределение именно как таблицу распределения значений *случайной величины*, повторяя (см. 9-й класс) еще раз определение этого базового понятия.

Само по себе это понятие, на наш взгляд, является одним из самых сложных в элементарной теории вероятности

стей. Но хуже даже другое: оно имеет массу невнятных, да и просто непонятных, версий, широко распространенных в различных публикациях (в основном, прикладного толка). Можно поэкспериментировать: набрать в любом интернет-поисковике словосочетание «что такое случайная величина» и получить россыпь удивительных высказываний вроде «Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены». Можно предположить, что такой текст нормален для общего описания и формирования некоторых первичных представлений, но совершенно непонятно, как работать на уроке математики с определением подобного формата.

Формальному определению случайной величины (с.в.) в наших учебниках предшествует довольно долгий путь, что полностью соответствует общим положениям концепции УМК. На уровне нескольких примеров о случайной величине говорится уже в 8-м классе. В последнем параграфе учебника для 9-го класса приведены 9 примеров (необычно много для одного параграфа в нашем УМК) и дано определение с.в. для испытания с конечным числом исходов. В этом параграфе мы, по существу, продолжаем формирование понятия *случайная величина*. Отметим два обстоятельства: частное и общее.

Весьма распространенное в учебной литературе сочетание слов «...случайная величина задана своей таблицей распределения...» формально является заблуждением: по таблице распределения с.в. невозможно однозначно восстановить всю информацию о самой с.в. Например, две разные с.в., число «орлов» и число «решек» при одном бросании монеты, имеют одну и ту же таблицу распределения: в первой строке — два числа 0 и 1, во второй строке — 0,5 и 0,5. Поэтому корректнее говорить «...с.в. имеет такую (следующую) таблицу распределения...».

В целом, содержание действующих ПООП¹ основной и старшей школы в части стохастики, на наш взгляд, совершенно напрасно основано на систематическом использова-

¹ Примерные общие образовательные программы.

нии случайных величин. Многолетняя практика работы показывает, что даже у студентов вузов с этим понятием существуют серьёзные осложнения. По нашей оценке, эта тематика вполне уместна в учебнике по отдельному предмету с условным названием «Стохастика», а в рамках сложившегося традиционного курса математики изучение этих тем особого оптимизма не вызывает. Грубо говоря, на тщательное изучение этих понятий просто не хватает учебного времени. В средней школе знакомство со случайными величинами, скорее всего, следует ограничить именно знакомством на уровне простейших представлений. Тем не менее, по формально-номинативным параметрам изложение в нашем УМК организовано в полном соответствии с ПООП: изучение случайных величин начинается в 9-м классе и в необходимом объеме представлено в старшей школе.

Само название § 54 «Математическое ожидание (среднее значение) случайных величин» этой главы по умолчанию предполагает непосредственное продолжение предыдущего параграфа, а точнее — более детальное изучение случайных величин. Так оно и происходит: основное учебное умение, которое отрабатывается в параграфе и упражнениях к нему, — работа с таблицами распределения с.в. и подсчет по ним среднего значения или математического ожидания. Разумеется, приводятся (словесно и в виде формул) основные свойства математического ожидания:

- 1) $M(aS) = aM(S)$; 2) $M(S + b) = M(S) + b$; 3) $M(c) = c$;
4) $M(S + T) = M(S) + M(T)$; 5) $M(S - M(S)) = 0$.

Все они (кроме свойства 4) легко выводятся из определения $M(S) = s_1p_1 + s_2p_2 + \dots + s_np_n$, а вот свойство 4 (аддитивность), хотя и выглядит просто и естественно, доказать весьма непросто. На наш взгляд, это не менее страницы текста. Это доказательство не приводится. В примере 4 и ряде упражнений показано, как тождества $M(aS) = aM(S)$ и $M(S + b) = M(S) + b$ могут быть использованы для упрощения вычислений математического ожидания в конкретных ситуациях.

Изучение математического ожидания с.в. продолжается далее, например, в § 55 приведена теорема о том, что мате-

математическое ожидание числа «успехов» в n испытаниях Бернулли равно np .

Важной в § 54 является теорема 1. Она устанавливает связь материала, изучаемого в параграфе, с фактами, знакомыми по курсу 7-го класса (глава 7 «Описательная статистика»). Кратко, $M(S)$ для с.в. S , заданной на равновероятных исходах, равно среднему арифметическому набора своих значений (с учетом повторений). Естественно, тут возникают и частоты значений, что существенно для следующего параграфа. Тем самым, мы в очередной раз подчеркиваем преемственность всей стохастической линии в нашем УМК с 7-го по 11-й классы.

В соответствии с общими принципами построения наших учебников для 7—11-го классов ни в одном классе ни одна тема не должна быть «тупиковой», т. е. не связанной ни с предшествующим, ни с последующим материалом. Этот принцип мы выдерживаем, в частности, и для отдельных учебных тем по стохастике, и для стохастической линии в обучении математике в целом. В частности, заключительный § 55 «Частота и вероятность. Законы больших чисел» посвящен теме, которая генетически (исторически) является кульминацией начал теории вероятностей.

Изложение в § 52—54 организовано именно так, чтобы естественным образом подойти к описанию явления *статистической устойчивости* и *статистическому определению вероятности*. В § 55 «работают» и испытания Бернулли, и формула Бернулли, а, значит, и биномиальные коэффициенты, и случайные величины. В то же время, разговор о ЗБЧ (законах больших чисел) продолжится и в 11-м классе, а в 10-м классе лишь обозначены основные мотивы и приведена своего рода презентация базовых представлений. Например, теорема (не формула!) Бернулли

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > a\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$
 приведена, прокомментирована

рядом примеров, но ее более серьезное обоснование отложено на 11-й класс: «Вопросы, связанные с подсчётом вероятностей событий $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq a$ или $\left|\frac{k}{n} - p\right| > a$ при достаточно больших n , будут рассмотрены в учебнике 11-го класса».

Тем самым мы и тут выдерживаем методическую линию постепенного формирования и изложения сложных понятий.

В связи с оценкой приближения $k \approx np$ в этом же параграфе приводится теорема 2 о том, что математическое ожидание числа k «успехов» в серии из n испытаний Бернулли равно np , где p — вероятность «успеха» в одном испытании. Доказательство мы приводим для $n = 5$ и проводим прямые вычисления, что позволяет закрепить навыки практического подсчета математического ожидания. На базовом уровне, по нашему мнению, этого вполне достаточно для обоснования общего факта. Альтернативный подход, основанный на равенстве

$$\begin{aligned} M(S) &= M(S_1 + S_2 + \dots + S_n) = M(S_1) + M(S_2) + \dots + M(S_n) = \\ &= \underbrace{p + p + \dots + p}_n = np \end{aligned}$$

где S_i — с.в., равная числу «успехов» именно в i -м повторении, использует аддитивность математического ожидания, а аккуратно доказывать ее в средней школе все равно бессмысленно.

Решение некоторых упражнений

Глава 1

2.10. Укажите знаки абсциссы и ординаты данной точки числовой окружности:

а) 24; г) -51 .

Решение. а) Представим 24 в виде $24 = t + 2\pi n$ и подберем $n \in \mathbb{Z}$ так, чтобы выполнялось двойное неравенство $0 < t < 2\pi$ (или $-2\pi < t < 0$), т. е. $0 < 24 - 2\pi n < 2\pi$. Простой прикидкой устанавливаем, что $n = 3$, тогда $24 - 2\pi n = 24 - 6\pi \approx 24 - 18,84 = 5,16$.

Значит, числам 24 и 5,16 соответствует одна и та же точка числовой окружности, эта точка принадлежит 4-й четверти, где $x > 0$, $y < 0$.

г) Представим -51 в виде $-51 = t + 2\pi n$ и подберем $n \in \mathbb{Z}$ так, чтобы выполнялось двойное неравенство $0 < t < 2\pi$ (или $-2\pi < t < 0$), т. е. $0 < -51 - 2\pi n < 2\pi$. Простой прикидкой устанавливаем, что $n = -8$, тогда $-51 - 2\pi n = -51 + 16\pi \approx -51 + 50,24 = -0,76$. Значит, числам -51 и $-0,76$ соответствует одна и та же точка числовой окружности, эта точка принадлежит 4-й четверти, где $x > 0$, $y < 0$.

Ответ: а) $x > 0$, $y < 0$; г) $x > 0$, $y < 0$.

3.11. а) Составьте квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, между корнями которого заключено 75 натуральных чисел.

б) Составьте квадратный трехчлен с рациональными коэффициентами, между корнями которого заключено 52 целых числа, хотя бы одно из которых отрицательное.

Решение. а) Таких квадратных трехчленов можно составить сколько угодно. Можно, например, взять квадратный трехчлен $f(x)$ с корнями 1 и 77. Между этими числами заключено 75 натуральных чисел (от 2 до 76). Имеем:

$$f(x) = (x - 1)(x - 77) = x^2 - 78x + 77.$$

б) Можно взять квадратный трехчлен $f(x)$ с корнями $-2,5$ и $49,7$. Между этими числами заключено 52 целых числа $(-2, -1, 0, 1, 2, \dots, 49)$. Имеем:

$$f(x) = (x + 2,5)(x - 49,7) = x^2 - 47,2x - 124,25.$$

4.14. Решите уравнение:

а) $(2t - 5)|\sin t| = \sin t$; б) $(t^2 - 3t + 3) \cdot \frac{|\sin t|}{\sin t} = 1$.

Решение. а) Заметим прежде всего, что уравнению удовлетворяют те значения t , при которых выполняется равенство $\sin t = 0$, т. е. $t = \pi n$. Если $\sin t > 0$, то уравнение принимает вид $2t - 5 = 1$, откуда следует, что $t = 3$. Это значение удовлетворяет соотношению $\sin t > 0$ ($\sin 3 > 0$ — верное числовое неравенство). Если $\sin t < 0$, то уравнение принимает вид $2t - 5 = -1$, откуда следует, что $t = 2$. Это значение не удовлетворяет соотношению $\sin t < 0$ ($\sin 2 < 0$ — неверное числовое неравенство).

б) Если $\sin t > 0$, то уравнение принимает вид $t^2 - 3t + 3 = 1$, откуда следует, что $t = 1$ или $t = 2$. Оба эти значения удовлетворяют соотношению $\sin t > 0$. Если $\sin t < 0$, то уравнение принимает вид $t^2 - 3t + 3 = -1$, оно не имеет корней.

Ответ: а) $t = \pi n$, $t = 3$; б) 1; 2.

4.21. Расположите в порядке возрастания числа:

б) $\sin 3, \sin 4, \sin 6, \sin 7$; е) $\cos 2, \cos 3, \sin 4, \sin 5$.

Решение. б) Отметим на числовой окружности точки 3, 4, 6, 7 и опустим из этих точек перпендикуляры на ось абсцисс (рис. 1), которые как раз и характеризуют интересующие нас числа $\sin 3, \sin 4, \sin 6, \sin 7$. Учтем при этом, что точка 7 отстоит от точки 2π дальше, чем точка 3 от точки π , а точка 4 отстоит от точки π дальше, чем точка 6 от точки 2π .

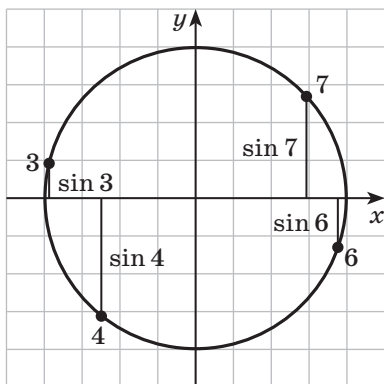


Рис. 1

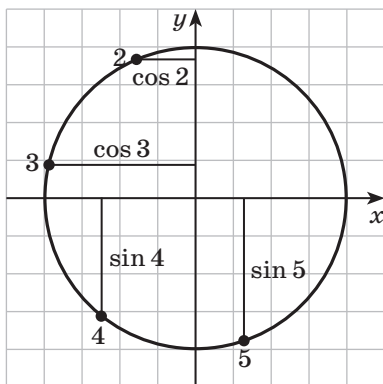


Рис. 2

Учтем также, что числа $\sin 4$, $\sin 6$ отрицательны, а числа $\sin 3$, $\sin 7$ положительны. Значит, $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 7$.

е) Отметим на числовой окружности точки 2, 3, 4, 5. Опустим из точек 4 и 5 перпендикуляры на ось абсцисс, которые характеризуют интересующие нас числа $\sin 4$, $\sin 5$, а из точек 2 и 3 — перпендикуляры на ось ординат (рис. 2), которые характеризуют интересующие нас числа $\cos 2$, $\cos 3$. Учтем при этом, что точка 4 отстоит от точки $\frac{3\pi}{2}$ даль-

ше, чем от этой точки отстоит точка 5 $\left(\frac{3\pi}{2} \approx 4,71\right)$. Учтем также, что все заданные числа отрицательны. Значит, $\sin 5 < \sin 4$, а $\cos 3 < \cos 2$. Далее, точка 5 отстоит от точки $\frac{3\pi}{2}$ дальше, чем точка 3 от точки π ; это значит, что $\cos 3 < \sin 5$. И, наконец, заметим, что точка 4 отстоит от точки π дальше, чем точка 2 от точки $\frac{\pi}{2}$; это значит, что $\sin 4 < \cos 2$. Итог: $\cos 3 < \sin 5 < \sin 4 < \cos 2$.

Ответ: б) $\sin 4$; $\sin 6$; $\sin 3$; $\sin 7$; е) $\cos 3$; $\sin 5$; $\sin 4$; $\cos 2$.

5.13. Решите неравенство:

д) $\operatorname{ctg}(-5) \cdot \sin 2 \cdot (5x^2 - 180) \geq 0$;

е) $\operatorname{tg} 1 \cdot \left(4x^2 - 25 \operatorname{tg} \frac{4\pi}{11} \cdot \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{11}\right) \geq 0$.

Решение. д) Числу -5 соответствует точка первой четверти числовой окружности, а потому $\operatorname{ctg}(-5) > 0$. Числу 2 соответствует точка второй четверти числовой окружности, а потому $\sin 2 > 0$. Значит, заданное неравенство равносильно неравенству $5x^2 - 180 \geq 0$, откуда получаем: $x \leq -6$, $x \geq 6$.

е) Числу 1 соответствует точка первой четверти числовой окружности, а потому $\operatorname{tg} 1 > 0$. Учтем также, что $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{11} \cdot \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{11} = 1$. Значит, заданное неравенство равносильно неравенству $4x^2 - 25 \geq 0$, откуда получаем: $x \leq -2,5$, $x \geq 2,5$.

Ответ: д) $x \leq -6$, $x \geq 6$; е) $x \leq -2,5$, $x \geq 2,5$.

6.14. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - \left(\sin^2 \frac{2}{x} + \cos^2 \frac{2}{x}\right)$;

б) $y = 2x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

в) $y = \frac{4}{x} - (\sin^2 \sqrt{x+4} + \cos^2 \sqrt{x+4})$.

Решение. а) Если $x \neq 0$, то $\sin^2 \frac{2}{x} + \cos^2 \frac{2}{x} = 1$. Значит, речь идёт о построении графика функции $y = x^2 - 1$, $x \neq 0$; это — парабола $y = x^2 - 1$ с выколотой точкой $(0; -1)$ (рис. 3).

б) Если $x \neq \frac{\pi n}{2}$, то $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = 2x - 1$, $x \neq \frac{\pi n}{2}$; это — прямая $y = 2x - 1$, на которой выколоты точки с абсциссами $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \dots$ (рис. 4).

в) Если $x \geq -4$, то $\sin^2 \sqrt{x+4} + \cos^2 \sqrt{x+4} = 1$.

Значит, речь идет о построении графика функции $y = \frac{4}{x} - 1$, $x \geq -4$; это — ги-

пербола $y = \frac{4}{x} - 1$, расположенная правее прямой $x = -4$, включая точку пересечения гиперболы с указанной прямой (рис. 5).

9.16. Решите неравенство:

а) $\cos x \geq -|x + \pi| - 1$;

б) $\cos x \geq (x - 2\pi)^2 + 1$.

Решение. а) Если $x = -\pi$, то заданное неравенство превращается в числовое равенство $-1 = -1$. Если $x \neq -\pi$, то $-|x + \pi| - 1 < -1$, тогда как

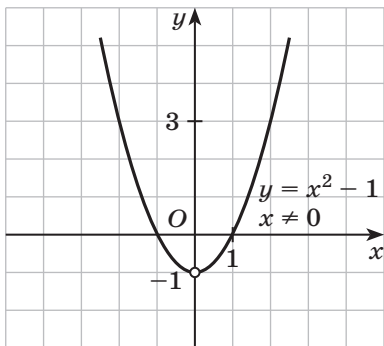


Рис. 3

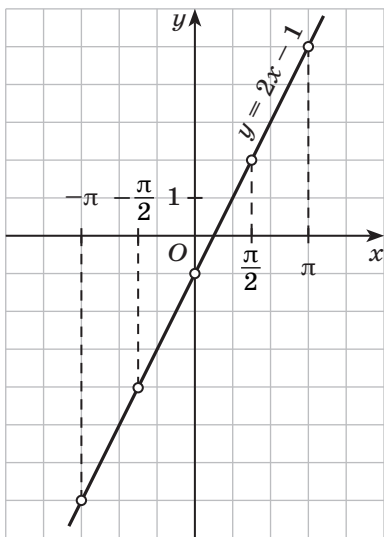


Рис. 4

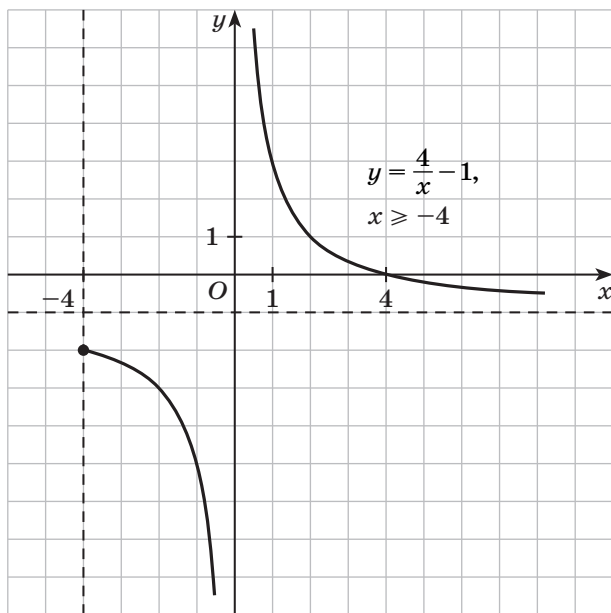


Рис. 5

$\cos x \geq -1$. Значит, заданное неравенство справедливо при всех действительных значениях x .

б) Если $x = 2\pi$, то заданное неравенство превращается в числовое равенство $1 = 1$. Если $x \neq 2\pi$, то правая часть заданного неравенства больше 1, а потому заданное неравенство не выполняется. Поэтому ответ: $x = 2\pi$.

9.17. б) Решите неравенство $\cos x \sqrt{14 + 5x - x^2} \geq 0$.

Решение. Квадратный трехчлен $14 + 5x - x^2$ обращается в 0 при $x = 7, -2$ — эти значения следует включить в ответ.

Если $14 + 5x - x^2 > 0$, т. е. $-2 < x < 7$, то $\sqrt{14 + 5x - x^2} > 0$ и, следовательно, заданное неравенство равносильно неравенству $\cos x \geq 0$. Точка -2 расположена в третьей четверти числовой окружности, а точка 7 — в первой. Будем двигаться по окружности в положительном направлении, отправляясь из точки -2 (рис. 6). На участке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ неравенство $\cos x \geq 0$ выполняется. Двигаемся дальше и видим,

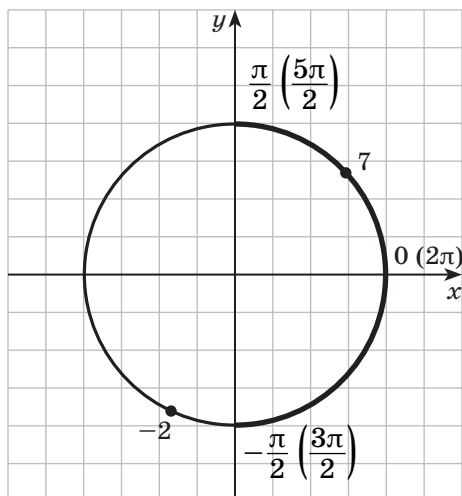


Рис. 6

что неравенство $\cos x \geq 0$ будет выполняться на участке от $\frac{3\pi}{2}$ до 7. В итоге получаем следующий ответ: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 7$; $x = 2$.

10.17. б) Решите неравенство $\sin x \sqrt{16 + 6x - x^2} \leq 0$.

Решение. Квадратный трехчлен $16 + 6x - x^2$ обращается в 0 при $x = 8, -2$ — эти значения следует включить в ответ. Если $16 + 6x - x^2 > 0$, т. е. $-2 < x < 8$, то $\sqrt{16 + 6x - x^2} > 0$ и, следовательно, заданное неравенство равносильно неравенству $\sin x \leq 0$. Точка -2 расположена в третьей четверти числовой окружности, а точка 8 — во второй. Будем двигаться по окружности в положительном направлении, направляясь из точки -2 (рис. 7). На участке от -2 до 0 неравенство $\sin x \leq 0$ выполняется. Двигаемся дальше и видим, что неравенство $\sin x \leq 0$ будет выполняться на участке от π до 2π . В итоге получаем следующий ответ: $-2 \leq x \leq 0$; $\pi \leq x \leq 2\pi$; $x = 8$.

11.9. Решите уравнение:

а) $2\sin x = 3\sqrt{x - \pi}$;

б) $\frac{1}{3}\cos x = 5(x - \pi)^2 - \frac{1}{3}$.

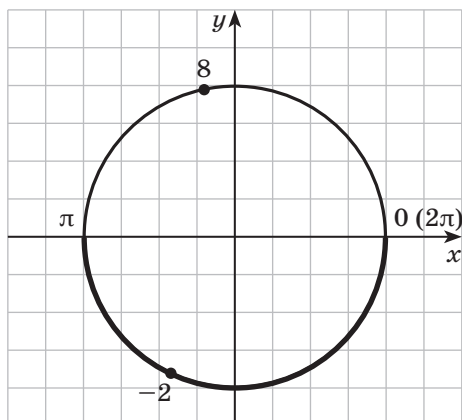


Рис. 7

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y = 2\sin x$, $y = 3\sqrt{x - \pi}$, убеждаемся (рис. 8), что они имеют одну общую точку $(\pi; 0)$, т. е. $x = \pi$ — единственный корень заданного уравнения.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}$, $y = 5(x - \pi)^2$, убеждаемся (рис. 9), что

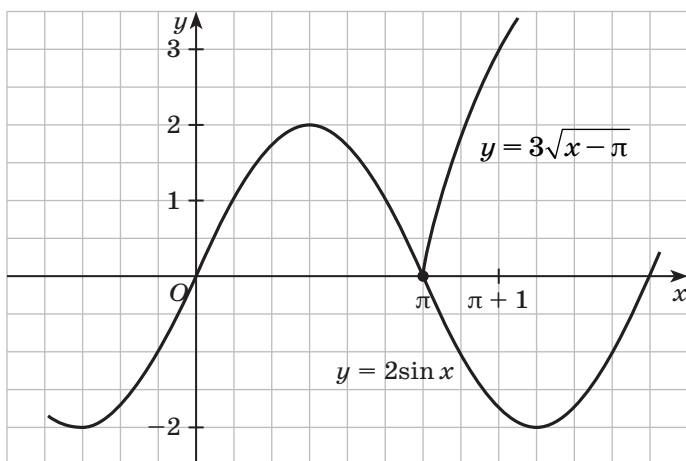


Рис. 8

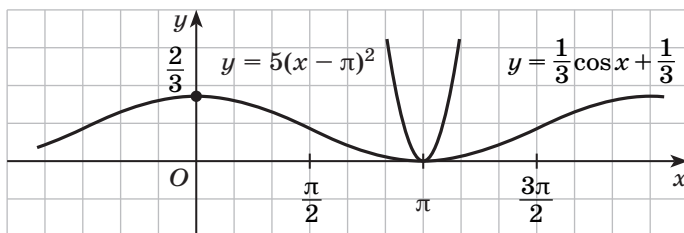


Рис. 9

они имеют одну общую точку $(\pi; 0)$, т. е. $x = \pi$ — единственный корень заданного уравнения.

11.10. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y = \frac{7}{3}\cos(x-1), \\ y = 3(x+\pi)^2 - 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = -1,5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ y = \frac{4}{x-2} + 1,5? \end{cases}$$

Решение. а) Построим график функции $y = 3(x + \pi)^2 - 4$, это — парабола с ветвями, направленными вверх, и вершиной в точке $(-\pi; -4)$ (рис. 10). Синусоида $y = \frac{7}{3}\cos(x-1)$ с

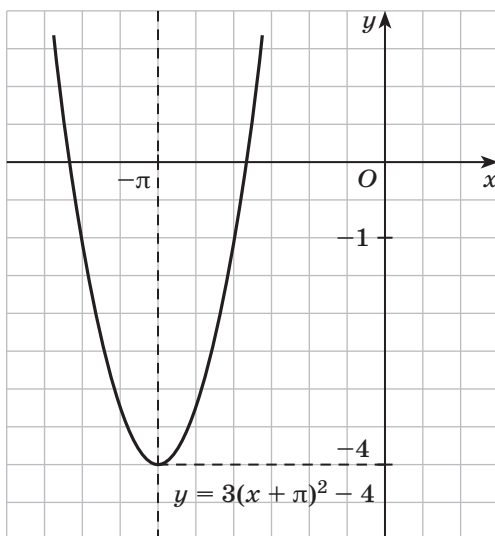


Рис. 10

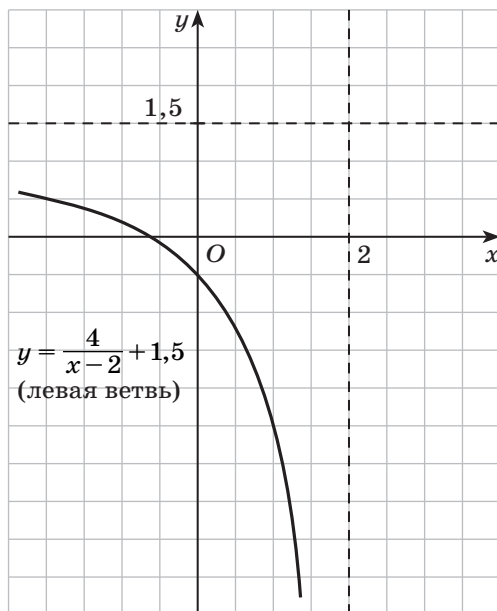


Рис. 11

амплитудой $\frac{7}{3}$ пересечет параболу ровно в двух точках (синусоиду можно и не строить). Значит, система имеет два решения.

б) Построим график функции $y = \frac{4}{x-2} + 1,5$, это — гипербола с асимптотами $x = 2$, $y = 1,5$ (рис. 11). Синусоида $y = -1,5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ с амплитудой 1,5 не пересекается с правой ветвью гиперболы, а левую пересечет бесконечно много раз (и здесь синусоиду можно не строить). Значит, система имеет бесконечное множество решений.

11.11. е) Постройте график функции

$$y = \frac{\left|x - \frac{\pi}{3}\right|}{1,5\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

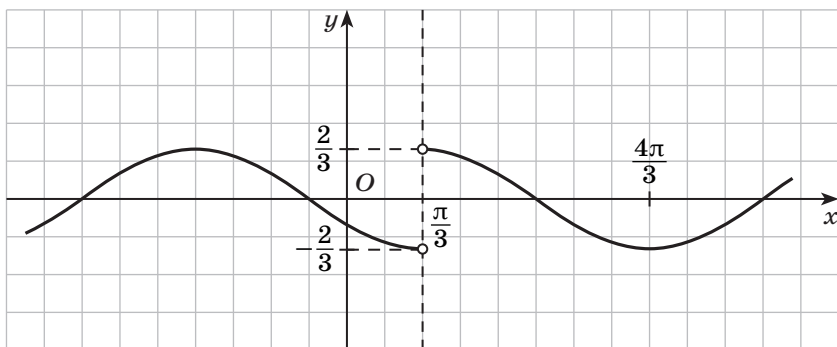


Рис. 12

Решение. Фактически речь идет о построении графика кусочной функции

$$y = \begin{cases} \frac{2}{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), & x > \frac{\pi}{3}, \\ -\frac{2}{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), & x < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

График представлен на рисунке 12.

11.14. б) Решите уравнение $x^2 + \frac{4}{x^2} = 8\left(x - \frac{2}{x}\right) + 4$.

Решение. Введем новую переменную $y = x - \frac{2}{x}$, тогда

$y^2 = \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4$ и, следовательно, исходное уравнение можно переписать в виде $y^2 + 4 = 8y + 4$. Значит, либо $y = 0$, либо $y = 8$. Остается решить два уравнения $x - \frac{2}{x} = 0$, $x - \frac{2}{x} = 8$. Из первого уравнения находим: $x = \pm\sqrt{2}$, из второго уравнения находим: $x = 4 \pm 3\sqrt{2}$.

12.6. г) Решите уравнение $\cos\frac{4x}{3} = 2\sqrt{x - \frac{3\pi}{8}}$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = \cos\frac{4x}{3}$, $y = 2\sqrt{x - \frac{3\pi}{8}}$, убеждаемся (рис. 13), что

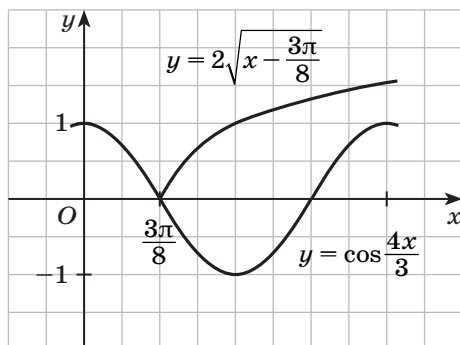


Рис. 13

они имеют одну общую точку $\left(\frac{3\pi}{8}; 0\right)$, т. е. $x = \frac{3\pi}{8}$ — единственный корень заданного уравнения.

12.7. Решите уравнение:

а) $2\sin\frac{x-\pi}{2} = -3\cos 2x + 5$

б) $1,5\sin 3x = -2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + 3,5$.

Решение. а) Имеем: $2\sin\frac{x-\pi}{2} \leq 2$, $-3\cos 2x + 5 \geq 2$, значит, заданному уравнению удовлетворяют те и только те значения x , при которых и левая, и правая части уравнения одновременно обращаются в 2, т. е. задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \sin\frac{x-\pi}{2} = 1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что $x = \pi k$. Подставим πk вместо x в первое уравнение системы:

$$\sin\frac{\pi k - \pi}{2} = 1, \quad \frac{\pi}{2}(k-1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad k = 2 + 4n.$$

Таким образом, получаем следующие решения уравнения: $x = \pi(2 + 4n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Имеем: $1,5 \sin 3x \leq 1,5, -2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + 3,5 \geq 1,5$, значит, заданному уравнению удовлетворяют те и только те значения x , при которых и левая, и правая части уравнения одновременно обращаются в 1,5, т. е. задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = 2\pi n, x = \frac{\pi}{6} + 4\pi n$.

Подставим $\frac{\pi}{6} + 4\pi n$ вместо x в первое уравнение системы:

$$\sin 3\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right) = 1, \sin\left(\frac{\pi}{2} + 12\pi n\right) = 1, 1 = 1.$$

Значит, серия $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi n$ удовлетворяет как второму, так и первому уравнению системы.

Ответ: а) $x = \pi(2 + 4n), n \in \mathbb{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

14.10. Постройте график функции:

б) $y = \sin^2(\operatorname{tg} x) + \cos^2(\operatorname{tg} x)$;

е) $y = 2\operatorname{tg}(\cos x) \cdot \operatorname{ctg}(\cos x)$.

Решение. б) Если выражение $\operatorname{tg} x$ определено, т. е. если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, то $y = 1$. Значит, графиком функции служит прямая $y = 1$, у которой выколоты точки с абсциссами

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

е) Положим $t = \cos x$. Множеством значений выражения $\cos x$ является отрезок $[-1; 1]$. Если $t \in [-1; 1]$, то $\operatorname{tg} t$ имеет смысл, а $\operatorname{ctg} t$ не имеет смысла при $t = 0$, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Значит, графиком функции служит прямая $y = 2$, у которой выколоты точки с абсциссами $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$

14.12. Найдите значения параметров p и q , если x_1 и x_2 — корни уравнения $4x - x^2 - p = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $36x - x^2 - q = 0$ и числа x_1, x_2, x_3 и x_4 образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Решение. Из уравнения $4x - x^2 - p = 0$ находим: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - p}$; из уравнения $36x - x^2 - q = 0$ находим: $x_{1,2} = 18 \pm \sqrt{324 - q}$. Введем обозначения: $\sqrt{4 - p} = a$, $\sqrt{324 - q} = b$. Из условия следует, что числа

$$2 - a, 2 + a, 18 - b, 18 + b \quad (1)$$

образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Отсюда следует, в частности, что

$$(2 + a) - (2 - a) = (18 + b) - (18 - b), \quad 2a = 2b, \quad a = b.$$

Далее, согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, выполняется равенство

$$2 + a = \frac{(2 - a) + (18 - b)}{2},$$

откуда находим: $3a + b = 16$.

В итоге приходим к системе уравнений $\begin{cases} a = b, \\ 3a + b = 16, \end{cases}$ откуда

находим: $a = 4, b = 4$. При этих значениях числа (1) таковы: $-2, 6, 14, 22$ — возрастающая арифметическая прогрессия.

Осталось найти значения параметров. Из соотношений $\sqrt{4 - p} = a, \sqrt{324 - q} = b$ находим: $p = -12, q = 308$.

Ответ: $p = -12, q = 308$.

Дополнительные задачи

5. Найдите величину угла (в градусах и в радианах) между минутной и часовой стрелками:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| а) в 12:00; | в) в 14:30; | д) в 16:45; |
| б) в 13:00; | г) в 15:30; | е) в 19:10. |

Решение. а) В 12:00 направления стрелок совпадают. Угол между ними равен 0.

б) В 13:00 минутная стрелка направлена на циферблате на метку «12». Часовая стрелка направлена на метку «1». Угол между соседними метками на циферблате — это $\frac{1}{12}$ полного оборота, он равен 30° или $\frac{\pi}{6}$ радиан.

в) В 14:30 минутная стрелка направлена на «6». Часовая стрелка направлена на середину между метками «2» и «3». Угол равен $90^\circ + 0,5 \cdot 30^\circ = 105^\circ$ или $\frac{7\pi}{12}$ радиан.

г) Аналогично пункту в); ответ: 75° ; $\frac{5\pi}{12}$ радиан.

д) Минутная направлена на метку «9». Часовая стрелка направлена между метками «4» и «5» на точку, которая делит эту дугу в отношении $45 : 15 = 3 : 1$ (по часовой стрелке). Значит, угол между направлением на «5» и часовой стрелкой равен $0,25 \cdot 30^\circ = 7,5^\circ$. Добавляем еще 120° — угол между направлениями на «5» и на «9». Ответ: $127,5^\circ$; $\frac{17\pi}{24}$ радиан.

е) Минутная стрелка направлена на метку «2». Часовая стрелка направлена между метками «7» и «8» на точку, которая делит эту дугу в отношении $10 : 50 = 1 : 5$ (по часовой стрелке). Значит, угол между направлением на «7» и часовой стрелкой равен $\frac{1}{6} \cdot 30^\circ = 5^\circ$. Добавляем еще 150° — угол между направлениями на «2» и на «7». Ответ: 155° ; $\frac{31\pi}{36}$ радиан.

6. В 12:00 совпадают направления часовой и минутной стрелок. Пусть t — время на часах, когда впервые после 12:00 совпадут направления стрелок.

1) Проверьте, что:

а) $t > 13$ ч 00 мин;

б) $t > 13$ ч 05 мин;

в) $t < 13$ ч 06 мин.

2) Найдите:

г) t ;

д) время второго после 12:00 совпадения;

е) количество совпадений за сутки от 00:00 (включая) до 24:00 (не включая).

Решение. а) В 13:00 минутная стрелка еще не «догонит» часовую, угол между ними равен 30° . Значит, $t > 13:00$.

б) Через 5 мин минутная стрелка будет направлена туда, куда была направлена часовая стрелка в 13:00. Но за это время сама часовая стрелка тоже повернется. Значит, $t > 13:05$.

в) Проще сначала выполнить задание г) и тогда обосновать в).

г) Обозначим x° — угол (в градусах), на который повернется часовая стрелка за время от 13:00 до первого совпадения направлений стрелок. За это же время минутная стрелка повернется от метки «12» до направления совпадения, т. е. на угол $(30 + x)^\circ$. Но минутная стрелка вращается в 12 раз быстрее часовой. Значит, $30 + x = 12x$, $x = \frac{30}{11}$ градусов.

Переведем градусы в минуты. За 60 мин минутная стрелка сделает полный оборот на 360° . Поэтому поворот на 1° минутная стрелка сделает за $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ мин, а поворот на $\left(\frac{30}{11}\right)^\circ$ она сделает за $\frac{1}{6} \cdot \frac{30}{11} = \frac{5}{11}$ мин. Получаем ответ: первое совпадение направлений часовой и минутной стрелок наступит в 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин, через 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин после их совпадения в 12:00.

е) Второе совпадение наступит через 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин после первого, т. е. в 14 ч $10\frac{10}{11}$ мин.

д) Переведем время 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин между соседними совпадениями в часы — это $1\frac{1}{11}$ ч $= \frac{12}{11}$ ч. Если промежуток времени [0 ч; 12 ч) пройти с шагом в $\frac{12}{11}$ ч, то получится 11 точек: $0 \cdot \frac{12}{11}, 1 \cdot \frac{12}{11}, 2 \cdot \frac{12}{11}, 3 \cdot \frac{12}{11}, \dots, 10 \cdot \frac{12}{11}$. Если промежуток

времени [12 ч; 24 ч) пройти с тем же шагом, то получится еще 11 точек. За сутки, т. е. за промежуток времени [0 ч; 24 ч), получатся 22 точки совпадения.

Глава 2

16.10. г) Постройте график функции $y = -\arcsin|x - 0,5|$.

Решение. 1) К вспомогательным осям $x = 0,5$, $y = 0$ «привязываем» график функции $y = \arcsin x$;

2) оставляем часть графика справа от вспомогательной оси ординат, а левую часть убираем, заменяя ее линией, симметричной оставленной относительно прямой $x = 0,5$.

3) Остается лишь отразить построенную линию симметрично относительно оси абсцисс (рис. 14).

20.7. Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) наибольший отрицательный корень.

Решение. $2x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. Далее имеет смысл от общей записи перейти к записи в виде двух серий:

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{\pi}{12} + \pi n.$$

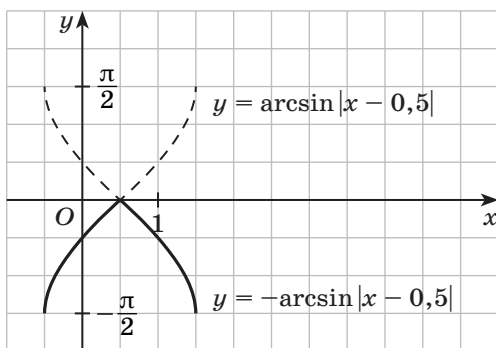


Рис. 14

а) Наименьший положительный корень получится из второй серии при $n = 0$, это $x = \frac{\pi}{12}$.

б) Наибольший отрицательный корень получится из первой серии при $n = -1$, это $x = -\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{12}$; б) $x = -\frac{3\pi}{4}$.

20.10. е) Решите неравенство $-\frac{2}{3} < \cos x < \frac{1}{3}$.

Решение. Воспользуемся математической моделью «Числовая окружность на координатной плоскости tOy ». Точки окружности, удовлетворяющие заданному двойному неравенству, располагаются на дугах, заключенных между прямыми $t = -\frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{3}$. С помощью рисунка 15 записываем ответ:

$$\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arccos \left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$-\arccos \left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n < x < -\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n.$$

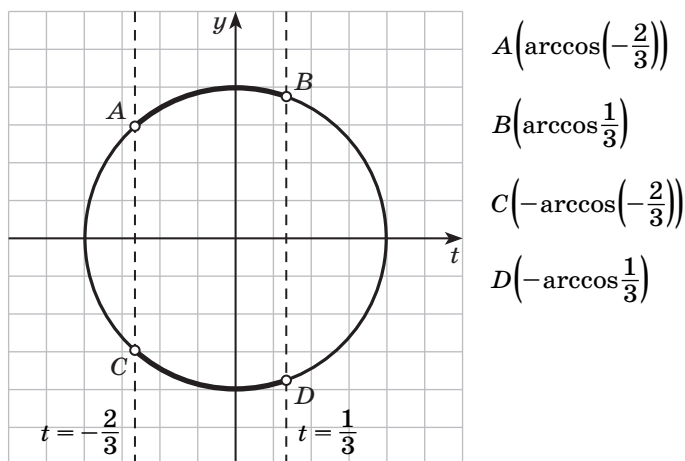


Рис. 15

21.6. б) Найдите корни уравнения на заданном отрезке:

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\sin \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right].$$

Решение. Здесь две серии решений: $x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi$,
 $x = (-1)^{n+1}\pi + 3\pi$.

Начинаем перебор по параметру для первой серии.

При $n = 0$ получаем $x = \pm \frac{\pi}{2}$; оба этих значения принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right]$.

При $n = 1$ получаем $x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi$, т.е. $x = \frac{9\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{2}$; оба этих значения принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right]$.

При $n = 2$ получаем $x = \pm \frac{\pi}{2} + 8\pi$, т.е. $x = \frac{17\pi}{2}$, $x = \frac{15\pi}{2}$; оба этих значения не принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right]$. Тем более не принадлежат указанному отрезку значения, получающиеся при $n \geq 3$.

При $n = -1$ получаем $x = \pm \frac{\pi}{2} - 4\pi$, т.е. $x = -\frac{7\pi}{2}$, $x = -\frac{9\pi}{2}$; оба этих значения не принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right]$. Тем более не принадлежат указанному отрезку значения, получающиеся при $n \leq -2$.

Выполним перебор по параметру для второй серии: $x = (-1)^{n+1}\pi + 3\pi$.

При $n = 0$ получаем $x = -\pi$; это значение не принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right]$. Тем более не принадлежат указанному отрезку значения, получающиеся при $n \leq -1$.

При $n = 1$ получаем $x = \pi + 3\pi$, т.е. $x = 4\pi$; это значение принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right]$.

При $n = 2$ получаем $x = -\pi + 6\pi$, т. е. $x = 5\pi$; это значение принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi\right]$. При остальных значениях n получаются числа, большие, чем 5π .

Ответ: $\pm\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, 4\pi, 5\pi$.

21.7. Решите уравнение:

а) $\sin 2x\sqrt{16-x^2} = 0$; б) $(2\sin x - 1)\sqrt{5x^2 - 7x + 2} = 0$.

Решение. а) Из уравнения $16 - x^2 = 0$ получаем $x = \pm 4$. Далее следует найти корни уравнения $\sin 2x = 0$, удовлетворяющие неравенству $16 - x^2 \geq 0$, т. е. принадлежащие отрезку $[-4; 4]$. Таковыми будут значения $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$.

б) Из уравнения $5x^2 - 7x + 2 = 0$ получаем $x = 1, x = 0,4$. Далее следует найти корни уравнения $2\sin x - 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $5x^2 - 7x + 2 \geq 0$, откуда следует, что либо $x \leq 0,4$, либо $x \geq 1$.

Имеем: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6}$. Это число больше, чем $0,4$, и меньше, чем 1 , его не следует включать в ответ. Все остальные значения из серии $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ принадлежат либо лучу $(-\infty; 0,4]$, либо лучу $[1; +\infty)$.

Ответ: а) $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm 4$; б) $x = 1, x = 0,4, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

21.8. Решите систему уравнений:

$$\text{б) } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} - \cos 2y = -0,5, \\ \sin \frac{x}{2} \cos 2y = 0,5. \end{cases}$$

Решение. Введя новые переменные $a = \sin \frac{x}{2}, b = \cos 2y$, получим достаточно простую систему $\begin{cases} a - b = -0,5, \\ ab = 0,5, \end{cases}$ решениями которой служат две пары: $(-1; -0,5), (0,5; 1)$.

Далее задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = -1, \\ \cos 2y = -0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0,5, \\ \cos 2y = 1. \end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases} x = -\pi + 4\pi n, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из второй системы получаем

$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если при решении тригонометрических уравнений с одной переменной при записи ответа для разных серий решений обозначения параметра разными буквами или одной и той же буквой непринципиально, то при решении систем параметры обязательно обозначаются разными буквами. В первом случае решения образуют совокупность, они не зависят друг от друга, тогда как во втором случае решения образуют систему, они зависят друг от друга.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -\pi + 4\pi n, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

22.5. б) Решите уравнение и найдите его корни, удовлетворяющие заданному условию:

$$\sin 3x \left(\cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right) = 0, \quad \operatorname{tg} x \leq 0.$$

Решение. Имеем:

$$\sin 3x = 0, \quad x = \frac{\pi n}{3}; \quad \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \quad x = \frac{\pi}{12} + \pi n.$$

Условие $\operatorname{tg} x \leq 0$ означает, что в найденных сериях решений нужно отобрать те решения, которые изображаются

точками второй и четвертой четвертей числовой окружности.

Со второй серией дело обстоит просто: значениям $\frac{\pi}{12} + \pi n$ соответствуют две точки числовой окружности, одна из которых принадлежит первой четверти, а другая — третьей. Вывод: серию $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$ в ответ не включаем.

Рассмотрим серию $x = \frac{\pi n}{3}$. Имеем: $n = 0, x = 0$; $n = 1, x = \frac{\pi}{3}$; $n = 2, x = \frac{2\pi}{3}$; $n = 3, x = \pi$; $n = 4, x = \frac{4\pi}{3}$; $n = 5, x = \frac{5\pi}{3}$; $n = 6, x = 2\pi$ и т. д. Всего 6 точек, из которых удовлетворяют условию задачи точки $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. В итоге решения можно записать следующим образом: $x = \pi n, x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$.

Ответ: $x = \pi n, x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

24.9. а) Решите уравнение и найдите его корни на заданном промежутке:

$$2\cos x + |\sin x| = 3\sin x, x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

Решение. Если $\sin x \geq 0$, то получаем

$$2\cos x + \sin x = 3\sin x, \sin x = \cos x, \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Если $\sin x < 0$, то получаем

$$\begin{aligned} 2\cos x - \sin x &= 3\sin x, \\ 2\sin x &= \cos x, \\ \operatorname{tg} x &= 0,5, \\ x &= \operatorname{arctg} 0,5 + \pi n. \end{aligned}$$

Из серии $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ принадлежат те значения x , которые получаются при следующих значениях параметра n : 1, 2; это числа $\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$.

Из серии $x = \arctg 0,5 + \pi n$ отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ принадлежат те значения x , которые получаются при следующих значениях параметра n : 1, 2; это числа

$$\arctg 0,5 + \pi, \arctg 0,5 + 2\pi.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \arctg 0,5 + \pi, \arctg 0,5 + 2\pi.$

24.10. На соревнованиях по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов. Из них 4 прыгуна из Казани и 10 прыгунов из Москвы. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Казани, а вторым — прыгун из Москвы.

Решение. Первым прыгает представитель Казани — 4 варианта выбора. Вторым прыгает представитель Москвы — 10 вариантов выбора. Два места зафиксированы. На остальные места (с № 3 до № 40) есть 38 претендентов, общее число вариантов жеребьевки для них равно $38!$. Итого, по правилу умножения получаем $4 \cdot 10 \cdot 38!$ вариантов жеребьевки, удовлетворяющих условию задачи. Если жеребьевка проводится без всяких дополнительных условий, то вариантов жеребьевки будет $40!$.

Вычислим искомую вероятность:

$$\frac{4 \cdot 10 \cdot 38!}{40!} = \frac{40 \cdot 38!}{40 \cdot 39 \cdot 38!} = \frac{1}{39} \approx 0,025.$$

Ответ: 0,025.

Дополнительные задачи

3. Найдите количество корней уравнения

$$(\sin x - 0,1)(\cos x + 0,9)(\operatorname{tg} x - 19) = 0,$$

принадлежащих отрезку:

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------------|
| а) $[0; 0,5\pi];$ | в) $[0; 1,5\pi];$ | д) $[0; 20,5\pi];$ |
| б) $[0; \pi];$ | г) $[0; 2\pi];$ | е) $[-0,5\pi; 3,5\pi].$ |

Решение. Изобразим на числовой окружности (рис. 16):

- точки A и B , у которых ордината равна $0,1$;
- точки C и D , у которых абсцисса равна $-0,9$;
- точки E и F , лежащие на прямой $y = 19t$.

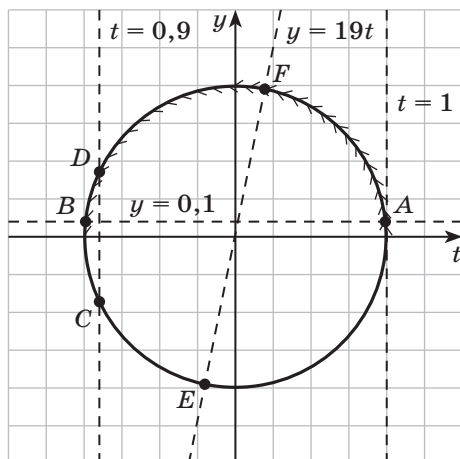


Рис. 16

Мы решили это уравнение графически, в «точках числовой окружности», но не в числах.

а) Отметим дугу, соответствующую отрезку $[0; 0,5\pi]$ (внешняя штриховка на рис. 16). Мы видим, что на отрезке $[0; 0,5\pi]$ есть одно число, соответствующее точке A, — это число $\arcsin 0,1$ и одно число, соответствующее точке F, — это число $\arctg 19$. Значит, уравнение имеет два корня.

б) Отметим дугу, соответствующую отрезку $[0; \pi]$ (внутренняя штриховка на рис. 16). Получаем четыре корня: $\arcsin 0,1$ (точка A), $\arctg 19$ (точка F), $\arccos(-0,9)$ (точка D), $\pi - \arcsin 0,1$ (точка B).

Дальнейшее аналогично, и не надо выписывать сами корни, необходимо найти их количество.

Ответ: а) 2; б) 4; в) 6; г) 6; д) 62; е) 12.

4. Известно, что $x_n = \cos \frac{\pi n}{13}$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите количество различных отрицательных чисел среди x_n :

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| а) при $1 \leq x \leq 10$; | г) при $10 \leq x \leq 33$; |
| б) при $1 \leq x \leq 20$; | д) при $-5 \leq x \leq 15$; |
| в) при $9 \leq x \leq 33$; | е) при $-25 \leq x \leq -5$. |

Решение. Отметим на числовой окружности точки $A_n \left(\cos \frac{\pi n}{13}; \sin \frac{\pi n}{13} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots, 11, 12$. Они разбивают

верхнюю полуокружность на 13 дуг, равных по длине $\frac{\pi}{13}$.

Затем отметим точки $A_{14}, A_{15}, \dots, A_{25}$. Относительно оси абсцисс они соответственно симметричны точкам $A_{12}, A_{11}, A_{10}, \dots, A_1$, а точка A_{26} совпадает с A_0 . Далее по периодичности: $A_1 = A_{27} = A_{53} = \dots, A_2 = A_{28} = A_{54} = \dots, A_n = A_{n+26}$.

а) Среди $A_1, \dots, A_{10}$ первые шесть точек лежат в первой, а остальные — во второй координатной четверти. Ответ: 4.

б) В первой координатной четверти лежат $A_1, \dots, A_6$, внутри второй четверти лежат $A_7, \dots, A_{12}$, точка $A_{13}(-1; 0)$ лежит на оси абсцисс, точки $A_{14}, \dots, A_{19}$ — в третьей четверти и точка A_{20} — в четвертой четверти, так как

$$\pi < \frac{19\pi}{13} < \frac{3\pi}{2} < \frac{20\pi}{13} < 2\pi.$$

Нужные точки — $A_7, \dots, A_{19}$. Ответ: 13.

в) 11 точек — $A_9, \dots, A_{19}$, и еще точка A_{33} . Ответ: 12.

Дальнейшее аналогично.

Ответ: а) 4; б) 13; в) 12; г) 11; д) 9; е) 13.

Глава 3

27.10. в) Решите уравнение и найдите все его корни из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$: $\frac{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 7x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение.

$$\frac{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 7x} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \operatorname{tg} 9x = \sqrt{3}; 9x = \frac{\pi}{3} + \pi n; x = \frac{\pi + 3\pi n}{27}.$$

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ принадлежат те значения из серии $x = \frac{\pi + 3\pi n}{27}$, которые получаются при $n = -1, -2, -3, -4$, это числа $-\frac{2\pi}{27}, -\frac{5\pi}{27}, -\frac{8\pi}{27}, -\frac{11\pi}{27}$.

Ответ: $x = \frac{\pi + 3\pi n}{27}, n \in \mathbf{Z}; -\frac{2\pi}{27}, -\frac{5\pi}{27}, -\frac{8\pi}{27}, -\frac{11\pi}{27}$.

28.12. г) Вычислите: $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \left(-\cos \frac{2\pi}{7} \right) \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \\&= -\frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \\&= -\frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

28.13. б) Решите уравнение: $4 \sin 2x + 8(\sin x - \cos x) = 7$.

Решение. Введем новую переменную $y = \sin x - \cos x$.

Тогда

$$\begin{aligned}y^2 &= (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x; \\ \sin 2x &= 1 - y^2.\end{aligned}$$

Теперь заданное уравнение принимает вид

$$4(1 - y^2) + 8y = 7; \quad y_1 = 1,5, \quad y_2 = 0,5.$$

Если $y = 1,5$, то $\sin 2x = 1 - 1,5^2 = -1,25$, чего быть не может; значит, далее работаем только со значением $y = 0,5$.
Имеем:

$$\sin x - \cos x = 0,5;$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 0,5 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right);$$

$$0,5 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1,5 \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 \pm \sqrt{7};$$

$$x = 2 \arctg(-2 \pm \sqrt{7}) + 2\pi n.$$

Ответ: $2 \arctg(-2 \pm \sqrt{7}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

30.14. е) Решите уравнение и найдите все его корни на указанном промежутке:

$$\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0, \quad x \in (-0,5; 3).$$

Решение. $2\sin 4x \cos 2x + \sin 4x = 0;$

$$\sin 4x(2\cos 2x + 1) = 0; \quad \sin 4x = 0; \quad \cos 2x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi n}{4}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Поработаем с серией $x = \frac{\pi n}{4}$. Из этой серии в интервал $(-0,5; 3)$ попадают значения x , которые получаются при $n = 0, 1, 2, 3$ — это числа, соответственно, $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Поработаем с серией $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. Если $n = 0$, то $x = \pm \frac{\pi}{3}$; из этих двух чисел интервалу $(-0,5; 3)$ принадлежит только $\frac{\pi}{3}$. Если $n = 1$, то $x = \pi \pm \frac{\pi}{3}$; из этих двух чисел интервалу $(-0,5; 3)$ принадлежит только $\frac{2\pi}{3}$. При остальных значениях параметра n получаются решения за пределами заданного интервала.

Таким образом, получаем следующий ответ: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$.

31.3. а) Представьте в виде суммы синусов или косинусов:

$$\sin 12^\circ \cos 10^\circ \cos 8^\circ.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sin 12^\circ \cos 10^\circ \cos 8^\circ &= \frac{1}{2}(\sin 22^\circ + \sin 2^\circ) \cos 8^\circ = \\ &= \frac{1}{2}(\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \sin 2^\circ \cos 8^\circ) = \\ &= \frac{1}{4}(\sin 30^\circ + \sin 14^\circ + \sin 10^\circ - \sin 6^\circ). \end{aligned}$$

31.6. а) Проверьте равенство $8\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sqrt{3}$.

Решение.

$$\begin{aligned} 8\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= 4(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \sin 80^\circ = \\ &= 4\cos 20^\circ \sin 80^\circ - 2\sin 80^\circ = 2(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ) - 2\sin 80^\circ = \\ &= 2\sin 100^\circ + \sqrt{3} - 2\sin 80^\circ. \end{aligned}$$

Поскольку $\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$, то в итоге получается $\sqrt{3}$.

Дополнительные задачи

5. Решите уравнение:

а) $\sqrt{-\sin x} (2\cos x + 1) = 0$;

е) $\sqrt{\cos x} \sqrt{-\sin x} \sqrt{2\cos^2 x - 1} = 0$.

Решение. Равенство нулю произведения сомножителей означает, что один из них равен нулю, а остальные при этом определены.

а) Если $-\sin x = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, то второй сомножитель $2\cos x + 1$ определен. Если $2\cos x + 1 = 0$, $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, то $\sqrt{-\sin x_1} = \sqrt{-0,5}$ не существует, а $\sqrt{-\sin x_2} = \sqrt{0,5}$ существует. Значит, $x = \pi n$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

е) Если $\cos x = 0$, то не существует $\sqrt{2\cos^2 x - 1} = \sqrt{-1}$. Если $-\sin x = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, то при нечетных n не существует $\sqrt{\cos x} = \sqrt{-1}$, а при четных n существуют $\sqrt{\cos x}$, $\sqrt{2\cos^2 x - 1}$. Если $\sqrt{2\cos^2 x - 1} = 0$, $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, то $\sqrt{\cos x}$, $\sqrt{-\sin x}$ существуют только для $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Значит, $x = 2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Ответ: а) πn , $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, е) $2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. Найдите множество значений функции:

а) $y = 5 - \cos 2x$;

б) $y = 5 + 3\cos x - \cos 2x$.

Решение.

а) $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, $-1 \leq -\cos 2x \leq 1$, $4 \leq 5 - \cos 2x \leq 6$.

Функция непрерывна и принимает все значения между наименьшим и наибольшим значениями.

б) Пусть $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда

$$y = 5 + 3\cos x - \cos 2x = 5 + 3t - (2t^2 - 1).$$

Надо найти множество значений квадратичной функции $y = -2t^2 + 3t + 6$ на отрезке $[-1; 1]$.

Найдем значения функции в концах отрезка: $y(-1) = 1$, $y(1) = 7$. Вершина параболы (ветви вниз) имеет абсциссу

$$t_{\text{верш}} = \frac{3}{4} \text{ и ординату } y_{\text{верш}} = \frac{57}{8}.$$

Ответ: а) $[4; 6]$; б) $\left[1; \frac{57}{8}\right]$.

Глава 4

33.16. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $-\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) \sin x = \cos x$, $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$;

б) $2\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) \cos x = \sqrt{3} \sin x$, $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение. а)

$$\sqrt{2} \cos x \sin x = \cos x, \cos x \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0;$$

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

На рисунке 17 показана часть числовой окружности, соответствующая заданному отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Из серии

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ выделенной части окружности принадлежат точки $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$. А $\sin x$ принимает значение $\frac{\sqrt{2}}{2}$ только в одной

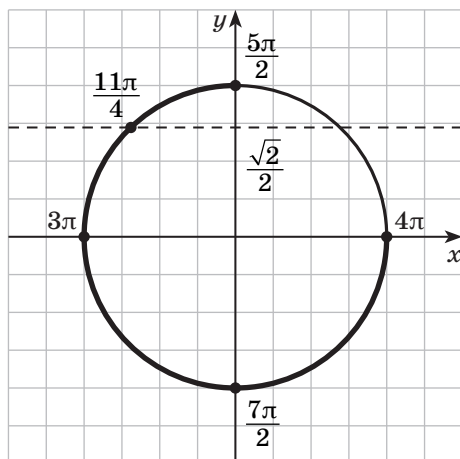


Рис. 17

точке выделенной части окружности — в середине второй четверти. В данном случае это точка $\frac{11\pi}{4}$ (так что общая формула решений здесь не понадобилась).

б)

$$-2\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin x, \sin x \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0;$$

$$\sin x = 0, x = \pi n; \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

На рисунке 18 показана часть числовой окружности, соответствующая заданному отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$. Из серии $x = \pi n$ выделенной части окружности принадлежат точки $-\pi, -2\pi$. А $\cos x$ принимает значение $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ только в одной точке выделенной части окружности — в точке $-\frac{7\pi}{6}$ из второй четверти (так что и здесь общая формула решений не понадобилась).

Ответ: а) $\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}$; б) $-\pi, -2\pi, -\frac{7\pi}{6}$.

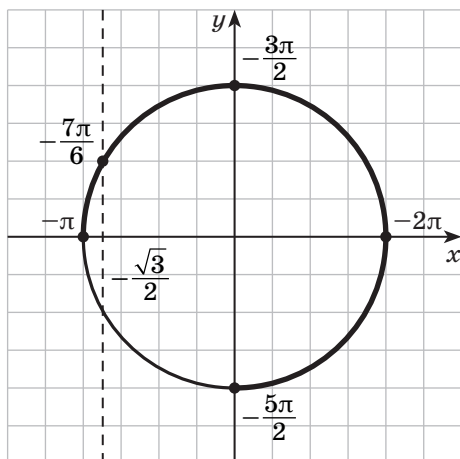


Рис. 18

34.11. Постройте график функции:

в) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}}$; г) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}} - 2x$.

Решение. в) Имеем:

$$y = \sqrt[4]{\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}} = \sqrt[4]{\frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3}} = \sqrt[4]{x + 2}, \quad x \neq 3.$$

Значит, нужно сдвинуть кривую типа $y = \sqrt[4]{x}$ по оси абсцисс на 2 единицы влево и «выколоть» из нее точку с абсциссой 3 (рис. 19).

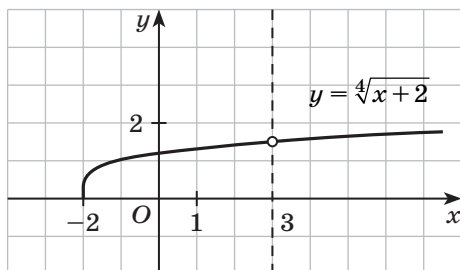


Рис. 19

г) Имеем:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}} - 2x = \sqrt[3]{\frac{-x^2 + 8x - 15}{x - 5}} = -\sqrt[3]{\frac{(x - 3)(x - 5)}{x - 5}} = \\ = -\sqrt[3]{x - 3}, \quad x \neq 5.$$

Значит, нужно сдвинуть кривую типа $y = \sqrt[3]{x}$ по оси абсцисс на 3 единицы вправо, отразить сдвинутую кривую симметрично относительно оси абсцисс и «выколоть» точку с абсциссой 5 (рис. 20).

38.13. При каких значениях параметра p уравнение $(x - 7)(\sqrt{x - p} + \sqrt{3p - x}) = 0$ имеет хотя бы один корень?

Решение. У заданного уравнения один корень вроде бы очевиден — это $x = 7$. Но этот корень можно будет включить в ответ только в том случае, если он принадлежит ОДЗ, ко-

торая задается системой уравнений $\begin{cases} x - p \geq 0, \\ 3p - x \geq 0. \end{cases}$ При $x = 7$

получаем $\begin{cases} 7 - p \geq 0, \\ 3p - 7 \geq 0, \end{cases}$ откуда следует, что $\frac{7}{3} \leq p \leq 7$.

Но корень заданного уравнения может получиться и из уравнения $\sqrt{x - p} + \sqrt{3p - x} = 0$. Таким корнем будет то значение x , при котором одновременно $x = p$ и $x = 3p$, что возможно лишь в одном случае: когда $p = 0$ (тогда $x = 0$). Таким образом, ответ на вопрос задачи таков: $\frac{7}{3} \leq p \leq 7, p = 0$.

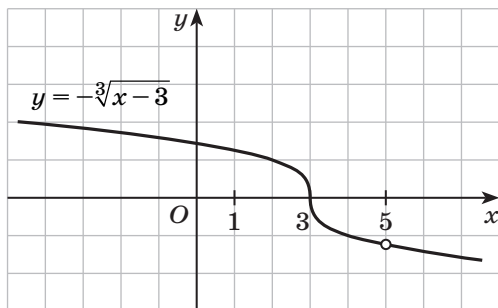


Рис. 20

Дополнительные задачи

1. Найдите количество пар $(n; k)$ натуральных чисел, для которых следующие равенства являются тождествами:

а) $x^n \cdot x^k = x^{17}$;

г) $x^n \cdot (\sqrt{x})^{4k} = x^{17}$;

б) $x^{n-3} \cdot x^{k-4} = x^2$;

д) $(x^{n-1} \cdot x^{n+1})^k = x^{24}$;

в) $x^{n+3} \cdot x^{k-13} = \frac{1}{x}$;

е) $x^n(x^{k-1})^k = (x^{10})^{3!}$.

Решение. Используя свойства степеней, задачу можно свести к решению в натуральных числах следующих уравнений:

а) $n + k = 17$;

г) $n + 2k = 17$;

б) $n + k = 9$;

д) $nk = 12$;

в) $n + k = 9$;

е) $n + k(k-1) = 60$.

После этого проводим прямой перебор вариантов.

Для пункта а) есть 16 решений: $(1; 16); (2; 15); \dots; (15; 2); (16; 1)$.

Для пунктов б) и в) есть 8 решений от $(1; 8)$ до $(8; 1)$.

В пункте г) k может принимать значения от 1 до 8 и для каждого из них значение n находится по формуле $n = 17 - 2k$; всего получаем 8 пар.

В пункте д) есть 6 решений: $(1; 12); (2; 6); (3; 4); (4; 3); (6; 2); (12; 1)$.

В пункте е) k может принимать значения от 1 до 8 и для каждого из них значение n находится по формуле $n = 60 - k(k-1)$; всего получаем 8 пар.

Ответ: а) 16; б) 8; в) 8; г) 8; д) 6; е) 8.

2. Найдите количество пар $(n; k)$ целых чисел по модулю меньших 11, для которых равенства из упражнения 1 а)—е) являются тождествами.

Решение. Переход к уравнениям в целых числах — такой же, как и в задаче 1. Но прямой перебор здесь уместно соединить с некоторыми оценками с помощью неравенств.

а) Если в $n + k = 17$ взять $n < 7$, то тогда $k > 10$, чего не должно быть. Значит, $7 \leq n \leq 10$ и тогда и $7 \leq k = 17 - n \leq 10$. Итак, есть четыре решения: $(7; 10); (8; 9); (9; 8); (10; 7)$.

б), в) Как и в пункте а), получаем $-1 \leq n \leq 10$, т. е. у уравнения $n + k = 9$ есть 12 решений: $(-1; 10); (0; 9); (1; 8);$

(2; 7); (3; 6); (4; 5) и еще 6 решений, полученных перестановкой координат.

г) Для $n + 2k = 17$ получаем, что $4 \leq k \leq 10$ и $n = 17 - 2k \in \{-3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\}$; 7 решений.

д) Из полученных в упражнении 1 д) решений (1; 12); (2; 6); (3; 4); (4; 3); (6; 2); (12; 1) надо убрать два крайних, а к оставшимся «приписать по минусу»: (-2; -6); (-3; -4); (-4; -3); (-6; -2). Всего 8 решений.

е) Так как $-10 \leq n \leq 10$, то из $n + k(k - 1) = 60$ находим $50 \leq k(k - 1) \leq 70$. Этому неравенству удовлетворяет только $k = 8$. Есть единственное решение (4; 8).

Ответ: а) 4; б) 12; в) 12; г) 7; д) 8; е) 1.

8. Пусть $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{5}$, $c = \sqrt[6]{21}$. Верны ли следующие неравенства:

- а) $a < b < c$; г) $b < a < c$;
б) $c < a < b$; д) $a + b + c > 6$;
в) $c < b < a$; е) $abc < 10$?

Решение. Так как $a = \sqrt[6]{27}$, $b = \sqrt[6]{25}$, $c = \sqrt[6]{21}$, то $c < b < a$ и из а)—г) верно только в). Так как каждое из этих чисел меньше 2, то д) неверно, а е) верно.

Глава 5

41.17. г) Решите неравенство $2^{|x|} + 1 \leq 2\cos x$.

Решение. Поскольку $2^{|x|} + 1 \geq 2$, а $2\cos x \leq 2$, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2^{|x|} + 1 = 2, \\ 2\cos x = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим $x = 0$. Это значение удовлетворяет и второму уравнению системы.

Ответ: $x = 0$.

41.20. а) Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

$$2\cos 2x - \sin x = \sin 5x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

Решение.

$$2\cos 2x - (\sin x + \sin 5x) = 0;$$

$$2\cos 2x - 2\sin 3x \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x(1 - \sin 3x) = 0;$$

$$\cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

$$\sin 3x = 1, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Серии $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ соответствуют на числовой окружности 4 точки — середины четвертей. Из них заданному отрезку принадлежат три точки, что хорошо видно на рисунке 21 — это точки $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

Что касается серии $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, то тут будем действовать стандартным методом перебора по параметру.

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6}$; если $n = 1$, то $x = \frac{5\pi}{6}$; при $n \geq 2$ выходим за пределы заданного отрезка.

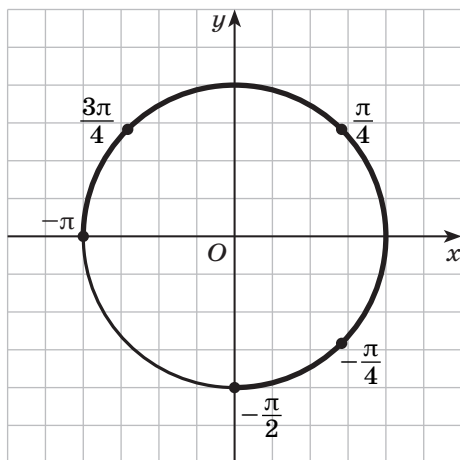


Рис. 21

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2}$; при $n \leq -2$ выходим за пределы заданного отрезка.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

43.11. б) Решите уравнение $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$.

Решение. $4^{\cos 2x} + 2^{1 + \cos 2x} = 3$; $4^{\cos 2x} + 2 \cdot 2^{\cos 2x} = 3$.

Введем новую переменную $y = 2^{\cos 2x}$, тогда уравнение примет вид $y^2 + 2y - 3 = 0$, откуда находим $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. Поскольку $2^{\cos 2x} > 0$, берем только положительный корень квадратного уравнения.

Далее, $2^{\cos 2x} = 1$, $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

43.12. а) Решите уравнение: $(\sqrt{5} - 2)^x + (\sqrt{5} + 2)^x = 18$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$; значит, есть

смысл ввести новую переменную $y = (\sqrt{5} + 2)^x$, и тогда заданное уравнение примет вид $\frac{1}{y} + y = 18$, откуда находим:

$$y_1 = 9 + 4\sqrt{5}, y_2 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

Заметим, что $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$, а потому из уравнения $(\sqrt{5} + 2)^x = (\sqrt{5} + 2)^2$ получаем $x = 2$.

Осталось решить уравнение $(\sqrt{5} + 2)^x = 9 - 4\sqrt{5}$. Имеем:

$$9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 2)^2 = \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^2} = (\sqrt{5} + 2)^{-2}.$$

Из уравнения $(\sqrt{5} + 2)^x = (\sqrt{5} + 2)^{-2}$ находим $x = -2$.

Ответ: ± 2 .

43.13. е) Решите уравнение:

$$5^{2x^2 - 1} - 3 \cdot 5^{(x+1)(x+2)} = 2 \cdot 5^{6(x+1)}.$$

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $5^{6(x+1)}$, получим (после выполнения соответствующих преобразований) уравнение

$$5^{2x^2-6x-7} - 3 \cdot 5^{x^2-3x-4} = 2.$$

Введем новую переменную $y = 5^{x^2-3x-4}$, тогда

$$5^{2x^2-6x-7} = 5^{2(x^2-3x-4)+1} = 5 \cdot (5^{x^2-3x-4})^2 = 5y^2.$$

Значит, задача сводится к решению уравнения $5y^2 - 3y - 2 = 0$, откуда находим: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{2}{5}$. Из уравнения $5^{x^2-3x-4} = 1$ получаем $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Уравнение $5^{x^2-3x-4} = -\frac{2}{5}$ корней не имеет.

Ответ: $-1, 4$.

43.15. б) Найдите все значения параметра p , при каждом из которых не имеет корней уравнение $9^x - 2p \cdot 3^x = 1 - p^2$.

Решение. Введем новую переменную $y = 3^x$ и найдем корни квадратного уравнения $y^2 - 2py + (p^2 - 1) = 0$: $y_1 = p + 1$, $y_2 = p - 1$.

Заданное уравнение не будет иметь корней, если не имеют корней оба уравнения совокупности $3^x = p + 1$; $3^x = p - 1$. Для этого нужно, чтобы выполнялись неравенства $p + 1 \leq 0$, $p - 1 \leq 0$.

Ответ: $p \leq -1$.

43.16. а) Найдите целые значения параметра p , при которых данное уравнение имеет два различных действительных корня: $3 \cdot 25^x - 5^{x+1} = 2p$.

Решение. Введем новую переменную $y = 5^x$ и найдем корни квадратного уравнения $3y^2 - 5y - 2p = 0$:

$$y_1 = \frac{5 + \sqrt{25 + 24p}}{6}, y_2 = \frac{5 - \sqrt{25 + 24p}}{6}.$$

Заданное уравнение будет иметь два различных действительных корня, если, во-первых, $25 + 24p > 0$, т. е. $p > -\frac{25}{24}$, и, во-вторых, если $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, для чего достаточно потребовать выполнения условия $5 - \sqrt{25 + 24p} > 0$.

Из последнего неравенства получаем $p < 0$. Таким образом, данное показательное уравнение имеет два различных действительных корня, если $-\frac{25}{24} < p < 0$. В этих рамках целочисленное значение параметра только одно: $p = -1$.

43.19. а) Найдите, при каких значениях параметра p из отрезка $[0; 2\pi]$ данное уравнение не имеет корней: $\cos(x + p) + \cos(x - p) = 1$.

Решение. $2\cos x \cos p = 1, \cos x = \frac{1}{2\cos p}$.

Чтобы последнее уравнение не имело корней, должны выполняться следующие условия:

- 1) $\cos p = 0$;
- 2) $\frac{1}{2\cos p} < -1$, т. е. $\frac{1+2\cos p}{\cos p} < 0, -\frac{1}{2} < \cos p < 0$;
- 3) $\frac{1}{2\cos p} > 1$, т. е. $\frac{1-2\cos p}{\cos p} > 0, 0 < \cos p < \frac{1}{2}$.

Таким образом, чтобы заданное уравнение не имело корней, должно выполняться двойное неравенство $-\frac{1}{2} < \cos p < \frac{1}{2}$. С помощью рисунка 22 и с учетом условия $p \in [0; 2\pi]$ получаем: $\frac{\pi}{3} < p < \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} < p < \frac{5\pi}{3}$.

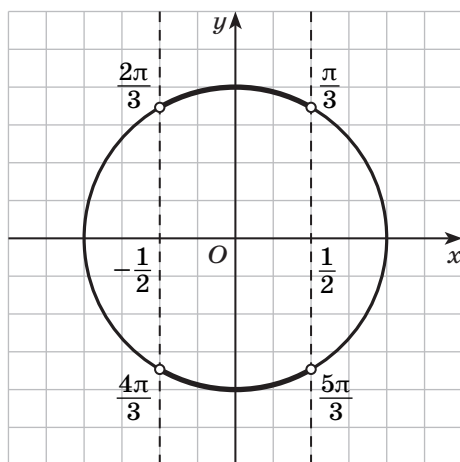


Рис. 22

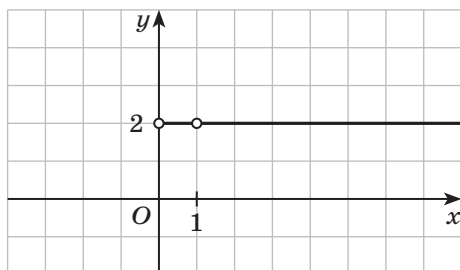


Рис. 23

45.13. г) Постройте график функции: $y = x^{\log_x 2}$.

Решение. Если $x > 0$, $x \neq 1$, то $x^{\log_x 2} = 2$. Значит, графиком заданной функции служит часть прямой $y = 2$, расположенная в правой полуплоскости с двумя выколотыми точками — точками с абсциссами 0 и 1 (рис. 23).

46.15. Постройте график функции:

в) $y = 0,3^{\log_{0,3}(8+2x-x^2)}$; г) $y = 0,5^{\log_{0,5}|9-x^2|}$.

Решение. в) Если $8 + 2x - x^2 > 0$, то $y = 8 + 2x - x^2$; графиком функции служит соответствующая часть параболы (рис. 24).

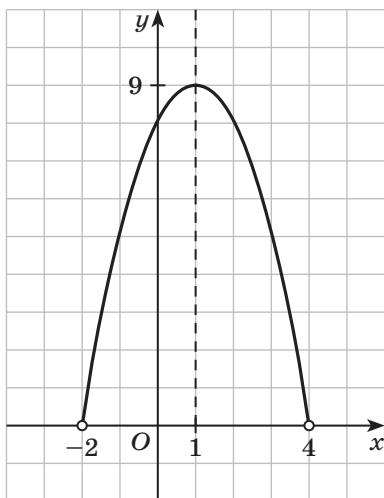


Рис. 24

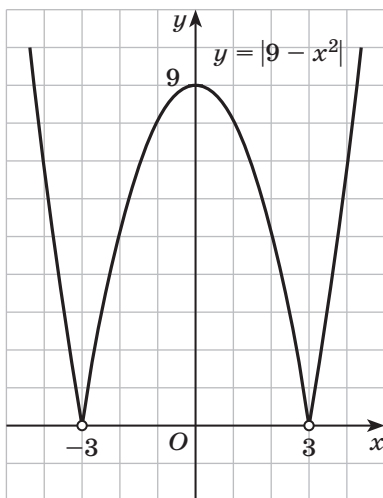


Рис. 25

г) Если $|9 - x^2| \neq 0$, то заданная функция принимает вид $y = |9 - x^2|$. Значит, порядок ходов такой: строим параболу $y = 9 - x^2$, затем строим график функции $y = |9 - x^2|$ и выкалываем точки -3 и 3 на оси абсцисс (рис. 25).

50.17. а) При каких значениях параметра p уравнение $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$ на промежутке $[0; p]$ имеет три корня?

Решение. Речь идет о решении смешанной системы $\begin{cases} \cos x = 0, \\ 1 - \sin x \neq 0. \end{cases}$ Из уравнения $\cos x = 0$ находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Поскольку нас интересуют корни, принадлежащие отрезку $[0; p]$, получаем $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$. Но второе соотношение смешанной системы означает, что $\sin x \neq 1$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Значит, из последовательности $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ нужно удалить числа, находящиеся на нечетных номерах; останется такая последовательность корней: $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}, \dots$. По условию уравнение на указанном отрезке должно иметь три корня, это числа $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$. Они должны принадлежать отрезку $[0; p]$, значит, $p \geq \frac{11\pi}{2}$. С другой стороны, число $\frac{15\pi}{2}$ не должно попасть в отрезок $[0; p]$, иначе оно оказалось бы четвертым корнем уравнения. Значит, $p < \frac{15\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{11\pi}{2} \leq p < \frac{15\pi}{2}$.

51.11. в) Решите систему неравенств: $\begin{cases} \cos t \geq 0,3, \\ \sin t \leq -0,3. \end{cases}$

Решение. Обратимся к математической модели «Числовая окружность в прямоугольной системе координат xOy ». Прямая $x = 0,3$ отсекает от окружности замкнутую ду-

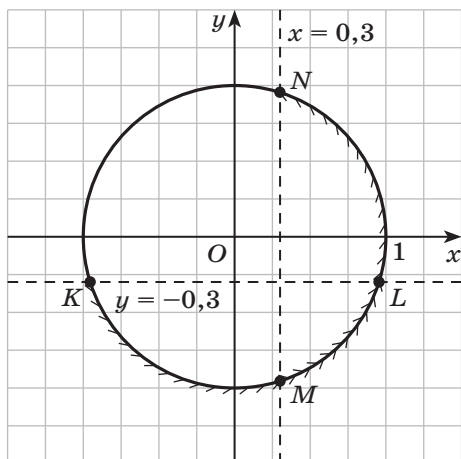


Рис. 26

гу MN , иллюстрирующую решение неравенства $\cos t \geq 0,3$ (рис. 26).

Прямая $y = -0,3$ отсекает от окружности замкнутую дугу KL , иллюстрирующую решение неравенства $\sin t \leq -0,3$ (см. рис. 26). Пересечением указанных выше дуг является дуга ML — геометрическое решение системы неравенств. Осталось составить аналитическую запись этой дуги.

Точка M соответствует числу $-\arccos 0,3$, точка L соответствует числу $-\arcsin 0,3$. Значит, аналитическая запись дуги ML такова:

$$2\pi n - \arccos 0,3 \leq t \leq -\arcsin 0,3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Дополнительные задачи

3. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции:

а) $y = 2^x, -4 < x < 3$;

г) $y = 5 \cdot 2^x, -2 < x < 2$;

б) $y = 2^x, -2,5 < x < 2,5$;

д) $y = 0,5 \cdot 3^x - 5, -3 \leq x \leq 3$;

в) $y = 3^x, -3,5 \leq x \leq 3,5$;

е) $y = 5 \cdot 2^{-x} - 3, -2 \leq x \leq 5$.

Решение. Все функции монотонны и непрерывны. Поэтому множества их значений на указанных промежутках

для x — это соответствующие промежутки на оси Oy между значениями функций в концах промежутков для x .

а) Здесь получаем интервал $(2^{-4}; 2^3) = \left(\frac{1}{16}; 8\right)$. В нем семь целых чисел — от 1 до 7.

б) Получаем интервал $(2^{-2,5}; 2^{2,5}) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}; 4\sqrt{2}\right)$. Так как $5 < 4\sqrt{2} < 6$, то в этом интервале пять целых чисел.

в) Так как $46 < 27\sqrt{3} < 47$, то в отрезке $\left[\frac{1}{27\sqrt{3}}; 27\sqrt{3}\right]$ лежит 46 целых чисел.

г) В интервале $(5 \cdot 2^{-2}; 5 \cdot 2^2) = \left(\frac{5}{4}; 20\right)$ лежит 18 целых чисел — от 2 до 19.

д) В отрезке $[0,5 \cdot 3^{-3} - 5; 0,5 \cdot 3^3 - 5] = \left[-4\frac{53}{54}; 8,5\right]$ 13 целых чисел — от -4 до 8.

е) В отрезке $[5 \cdot 2^{-5} - 3; 5 \cdot 2^{-(-2)} - 3] = \left[-2\frac{27}{32}; 17\right]$ 20 целых чисел — от -2 до 17.

Ответ: а) 7; б) 5; в) 46; г) 18; д) 13; е) 20.

4. Решите уравнение:

а) $25 \cdot 2^{x+2} = (\sqrt{x})^4 \cdot 2^x;$

б) $12 \cdot 3^{x+1} = (\sqrt{x})^8 \cdot 3^x;$

в) $0,8 \cdot 5^{x+3} = (\sqrt{x})^4 \cdot 0,2^{-x};$

г) $6^{\frac{x}{2}} + 2 \cdot 6^{0,5x} = 108.$

Решение. а) $25 \cdot 2^x \cdot 2^2 = x^2 \cdot 2^x$. Так как $2^x > 0$, то $x^2 = 100$, $x = \pm 10$ и подходит только $x = 10$, так как по условию $x \geq 0$.

б) $12 \cdot 3^x \cdot 3 = x^2 \cdot 3^x$, $x^2 = 36$, $x = \pm 6$ и подходит только $x = 6$.

в) $0,8 \cdot 5^x \cdot 125 = x^2 \cdot (5^{-1})^{-x}$, $5^x \cdot 100 = x^2 \cdot 5^x$. Ответ: $x = 10$.

г) $6^{0,5x} + 2 \cdot 6^{0,5x} = 108$, $6^{0,5x}(1 + 2) = 108$, $6^{0,5x} = 36 = 6^2$, $0,5x = 2$, $x = 4$.

Ответ: а) 10; б) 6; в) 10; г) 4.

10. Найдите количество всех целых чисел, являющихся решениями неравенства:

а) $\frac{2}{\sqrt{\log_3 x}} \geq 1;$

д) $\log_2(x^2 - 7x + 18) \leq 3;$

б) $\sqrt{\frac{4}{\log_4 x}} > 1;$

е) $\log_2(10 - x) > \log_{0,5} x - 10.$

Решение. а) Левая часть $y = \frac{2}{\sqrt{\log_3 x}}$ убывает. При $x = 81 = 3^4$ неравенство становится равенством. Значит, все числа 2, 3, 4, ..., 81 — целые решения неравенства, их 80.

б) Левая часть $y = \sqrt{\frac{4}{\log_4 x}}$ убывает. При $x = 4^4 = 256$ неравенство становится равенством. Значит, все числа 2, 3, 4, ..., 255 — целые решения неравенства, их 254.

д) Так как $D = 7^2 - 4 \cdot 18 < 0$, то $x^2 - 7x + 18 > 0$ для всех x . Избавляемся от логарифмов, получаем $x^2 - 7x + 18 \leq 8$, $x^2 - 7x + 10 \leq 0$, $(x - 2)(x - 5) \leq 0$; 4 целых решения.

е) По условию $0 < x < 10$, $x = 1, 2, 3, \dots, 8, 9$. Тогда левая часть положительна, а правая часть — отрицательна; 9 целых решений.

Ответ: а) 80; б) 254; д) 4; е) 9.

Глава 6

52.10. По формуле для числа сочетаний проверьте, что:

а) $C_n^0 = 1;$ в) $C_n^k = C_n^{n-k};$ д) $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6};$

б) $C_n^{n-1} = n;$ г) $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};$ е) $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k.$

Решение. а), б), г) аналогично примеру 2 в учебнике.

в) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}.$

д) $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-3)!}{6 \cdot (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

е) По формулам для C_{n+1}^k , C_n^k , C_n^{k-1} достаточно проверить справедливость равенства

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Сокращая обе части на $\frac{n!}{(k-1)!}$, получаем

$$\frac{n+1}{k(n+1-k)!} = \frac{1}{(n-k+1)!} + \frac{1}{k \cdot (n-k)!}.$$

Еще одно сокращение — на $(n-k)!$ в знаменателях. Получаем

$$\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}.$$

Если правую часть привести к общему знаменателю, то получится левая часть.

Итак, после тождественных преобразований исходное равенство перешло в верное равенство. Значит, верно и исходное равенство.

52.8. На поносе лежат одинаковые по виду пирожки: 4 — с мясом, 5 — с картошкой, 6 — с капустой. Выбирают 4 пирожка. В скольких случаях:

- а) все они будут с мясом;
- б) все они будут с капустой;
- в) все они будут без картошки;
- г) будет поровну пирожков с капустой и без нее;
- д) будет ровно 3 пирожка с картошкой;
- е) будут пирожки и с мясом, и с картошкой, и с капустой?

Решение. а) 4 пирожка из четырех можно выбрать единственным способом: $C_4^4 = 1$.

б) 4 пирожка из шести можно выбрать C_6^4 способами, $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

в) Есть 10 пирожков без картошки. Число способов выбрать 4 штуки из них равно $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$.

г) 2 пирожка выбираем из шести с капустой и 2 пирожка выбираем из девяти без капусты. Применяем правило умножения и получаем ответ: $C_6^2 \cdot C_9^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 15 \cdot 36 = 540$.

д) 3 пирожка выбираем из пяти с картошкой и 1 пирожок выбираем из десяти без нее. Применяем правило умножения и получаем ответ: $C_5^3 \cdot C_{10}^1 = 10 \cdot 10 = 100$.

е) Сначала выберем 3 пирожка, по одному каждого типа. Это можно сделать $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ способами. Из оставшихся 12 пирожков произвольно выбираем еще один. Всего получаем $120 \cdot 12 = 1440$ способов.

Ответ: а) 1; б) 15; в) 210; г) 540; д) 100; е) 1440.

53.5. Проводится экзамен по математике. Ученику надо выбрать два билета из лежащих перед ним на столе одинаковых по виду четырех билетов по геометрии и шести билетов по алгебре. Найдите вероятность того, что из выбранных билетов:

а) оба будут по алгебре;

б) оба будут по геометрии;

в) будет хотя бы один по алгебре;

г) хотя бы один по геометрии;

д) ровно один по геометрии;

е) ученик знает оба, если знает только половину билетов по геометрии и половину по алгебре.

Решение. Из 10 билетов выбрать 2 билета можно $N = C_{10}^2 = 45$ способами.

а) Событие «оба билета по алгебре» наступит в $C_6^2 = 15$ случаях из 45; вероятность равна $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

б) Событие «оба билета по геометрии» наступит в $C_4^2 = 6$ случаях из 45; вероятность равна $\frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

в) Это событие противоположно предыдущему и, значит, его вероятность равна $\frac{13}{15}$.

г) Это событие противоположно событию из пункта а) и, значит, его вероятность равна $\frac{2}{3}$.

д) Один билет по геометрии, а второй по алгебре можно выбрать $4 \cdot 6 = 24$ способами; вероятность равна $\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

е) Ученик знает 5 билетов. Выбрать 2 из них можно $C_5^2 = 10$ способами; вероятность равна $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{15}$; в) $\frac{13}{15}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{8}{15}$; е) $\frac{2}{9}$.

53.10. Вероятность того, что биатлонист попадет во все пять мишеней на рубеже, оценивается в 80 %. Оцените вероятность того, что в индивидуальной гонке (в которой 4 стрелковых рубежа) биатлонист:

- а) ни разу не промахнется;
- б) промахнется только на одном рубеже;
- в) промахнется на половине рубежей;
- г) не промахнется только на одном рубеже;
- д) промахнется на каждом рубеже;
- е) промахнется только на последнем рубеже.

Решение. В данном случае $n = 4$, $p = 0,8$, $q = 0,2$ и $P_4(k) = C_4^k \cdot 0,8^k \cdot 0,2^{4-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

- а) Число успехов $k = 4$ и $P_4(4) = P(\text{УУУУ}) = 0,8^4 = 0,4096$.
б)

$$\begin{aligned} P_4(3) &= P(\text{НУУУ}) + P(\text{УНУУ}) + P(\text{УУНУ}) + P(\text{УУУН}) = \\ &= 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096. \end{aligned}$$

в) $P_4(2) = 6 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 6 \cdot 0,16^2 = 6 \cdot 0,0256 = 0,1536$.

г)

$$\begin{aligned} P_4(1) &= P(\text{УННН}) + P(\text{НУНН}) + P(\text{ННУН}) + P(\text{НННУ}) = \\ &= 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 4 \cdot 0,0064 = 0,0256. \end{aligned}$$

д) $P_4(0) = P(\text{НННН}) = 0,2^4 = 0,0016$.

е) $P(\text{УУУН}) = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024$.

Ответ: а) 0,4096; б) 0,4096; в) 0,1536; г) 0,0256; д) 0,0016; е) 0,1024.

54.4. Монету бросают трижды. Укажите множество всех значений следующих с.в.:

- а) A — число выпавших «решек»;
- б) B — число выпавших «орлов»;
- в) $C = 2A + 3B$;
- г) $X = (A - B)^2$;

$$\text{д) } Y = |A - B|;$$

$$\text{е) } Z = (A + 1)^B.$$

54.5. Составьте таблицы распределения с.в. из пунктов а)—е) упражнения 54.4.

Решение. а) Выпасть может от 0 до 3 «решек». Ответ: $\{0, 1, 2, 3\}$.

Событие « $A = 0$ » состоит в том, что все 3 раза выпал «орел». Вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Событие « $A = 1$ » состоит в том, что «орел» выпал ровно 1 раз. Вероятность находим по формуле Бернулли: $P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^2 = \frac{3}{8}$. Аналогично для « $A = 2$ » и « $A = 3$ ». Таблица:

0	1	2	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

б) Можно повторить рассуждения пункта а), а можно использовать тот факт, что $B = 3 - A$. Таблица будет такой же, как и в пункте а), хотя A и B — разные с.в.

в) $C = 2A + 3B = 2A + 3(3 - A) = 9 - A$. Поэтому множество значений с.в. C — это множество $\{6, 7, 8, 9\}$. Равенство $C = 6$ равносильно равенству $A = 3$ и $P(C = 6) = P(A = 3) = \frac{1}{8}$.

Аналогично, $P(C = 7) = P(A = 2) = \frac{3}{8}$ и т. д.

Таблица:

6	7	8	9
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\text{г) } A = 0 \Rightarrow B = 3 \Rightarrow X = (A - B)^2 = 9;$$

$$A = 1 \Rightarrow B = 2 \Rightarrow X = (A - B)^2 = 1;$$

$$A = 2 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow X = (A - B)^2 = 1;$$

$$A = 3 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X = (A - B)^2 = 9.$$

Поэтому с.в. X принимает всего два значения: 1 или 9. Равенство $X = 9$ наступает только в случаях $A = 0$ и $A = 3$.

Значит, $P(X=9) = P(A=0) + P(A=3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. Получаем таблицу:

1	9
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

д) Аналогично пункту г) составляем таблицу распределения с.в. Y :

1	3
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{е) } A=0 \Rightarrow B=3 \Rightarrow Z=(A+1)^B=1;$$

$$A=1 \Rightarrow B=2 \Rightarrow Z=(A+1)^B=4;$$

$$A=2 \Rightarrow B=1 \Rightarrow Z=(A+1)^B=3;$$

$$A=3 \Rightarrow B=0 \Rightarrow Z=(A+1)^B=1.$$

Находим вероятности

$$P(Z=3) = P(A=2) = \frac{3}{8}; \quad P(Z=4) = P(A=1) = \frac{3}{8};$$

$$P(Z=1) = P(A=0) + P(A=3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Получаем таблицу:

1	3	4
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

54.15. Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{2 \cdot 64^{\sin x} + 8^{\sin x} - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{15 \cdot 5^{2\lg x} - 34 \cdot 15^{\lg x} + 15 \cdot 3^{2\lg x}}{\sqrt{2 \cos x} - 1} = 0.$$

Решение. а) Рассмотрим уравнение

$$2 \cdot 64^{\sin x} + 8^{\sin x} - 1 = 0.$$

Введем новую переменную $y = 8^{\sin x}$, получим уравнение $2y^2 + y - 1 = 0$ с корнями -1 и $\frac{1}{2}$. Первый корень нас не устраивает, остается решить уравнение $8^{\sin x} = \frac{1}{2}$, откуда получаем $\sin x = -\frac{1}{3}$. ОДЗ уравнения задается условием $\cos x > 0$, значит, из двух точек числовой окружности с ординатой $-\frac{1}{3}$ берем лишь ту, которая находится в четвертой четверти, ее главное значение $-\arcsin \frac{1}{3}$.

б) Рассмотрим уравнение

$$15 \cdot 5^{2\operatorname{tg} x} - 34 \cdot 15^{\operatorname{tg} x} + 15 \cdot 3^{2\operatorname{tg} x} = 0.$$

Разделив обе его части почленно на $3^{2\operatorname{tg} x}$, получим уравнение $15 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2\operatorname{tg} x} - 34 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 15 = 0$. Введя новую переменную $y = \left(\frac{5}{3}\right)^{\operatorname{tg} x}$, получим квадратное уравнение $15y^2 - 34y + 15 = 0$ с корнями $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{5}$. Из уравнения $\left(\frac{5}{3}\right)^{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{3}$ находим $\operatorname{tg} x = 1$, а из уравнения $\left(\frac{5}{3}\right)^{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{5}$ находим $\operatorname{tg} x = -1$. Обобщив, получаем $\operatorname{tg} x = \pm 1$. На числовой окружности последнему уравнению соответствуют 4 точки — середины дуг в координатных четвертях.

ОДЗ уравнения задается условием $\cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. исключаются середины первой и четвертой четвертей. Середины второй и третьей четвертей соответствуют числам $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ — таковы корни заданного уравнения.

Ответ: а) $x = -\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Дополнительные задачи

2. За круглым столом переговоров симметрично относительно центра стоят 6 стульев. На них надо по одному посадить переговорщиков А, Б, В, Г, Д, Е. Сколько существует способов рассаживания:

- а) всего;
- б) при которых стул для А фиксирован;
- в) при которых стул для А и стул для Г фиксированы;
- г) при которых А надо посадить рядом с Д;
- д) при которых А надо посадить рядом с Д, а Б — рядом с Е;
- е) при которых Б сидит напротив Г, но не рядом с Д?

Решение. а) $P_6 = 6! = 720$.

б) $P_5 = 5! = 120$.

в) $P_4 = 4! = 24$.

г) Сначала сажаем А — 6 вариантов. Рядом сажаем Д — 2 варианта. Остальных четырех произвольно рассаживаем на четыре оставшихся места — $P_4 = 4! = 24$ варианта. По правилу умножения всего получается $6 \cdot 2 \cdot 24 = 288$ способов рассаживания.

д) Сначала сажаем А — 6 вариантов. Рядом сажаем Д — 2 варианта. Всего 12 вариантов. Для каждого из них:

— либо Е сидит рядом с А или Д, и тогда для Б есть 1 вариант; всего 2 варианта;

— либо Е сидит через одного от А или от Д, и тогда для Б есть 2 варианта; всего 4 варианта.

Всего получается $12 \cdot (2 + 4) = 72$ варианта.

После этого надо не забыть рассадить В и Г на два оставшихся места, еще 2 варианта. Получаем ответ $72 \cdot 2 = 144$ варианта.

е) Б сажаем напротив Г — 6 вариантов. Д сажаем не рядом с Б, т. е. рядом с Г — 2 варианта. Оставшихся троих рассаживаем на 3 свободных места. Получаем ответ $6 \cdot 2 \cdot 6 = 72$ варианта.

Ответ: а) 720; б) 120; в) 24; г) 288; д) 144; е) 72.

6. На столе стоят одинаковые коробки. Среди них 5 пустых, 3 с призом и 2 с сюрпризом. Наудачу выбирают три коробки. Какова вероятность того, что:

- а) все они пустые;

б) все они не пустые;
в) одна из них пустая, одна с призом и одна с сюрпризом;

г) две из них пустые, а одна с призом;

д) одна пустая и две с сюрпризом;

е) в них нет сюрприза?

Решение. Выбирают 3 коробки из десяти. Всего $N = C_{10}^3 = 120$ способов выбора.

а) Событие A — «выбраны 3 коробки из пяти пустых». Всего $N(A) = C_5^3 = 10$ способов выбора. Значит,

$$P(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

б) Событие B — «выбраны 3 коробки из пяти непустых»;

$$P(B) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

в) Событие C — «выбраны 1 коробка из пяти пустых, 1 коробка из трех с призом, 1 коробка из двух с сюрпризом». Всего $N(C) = 5 \cdot 3 \cdot 2$ способов выбора. Значит,

$$P(C) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}.$$

г) Событие D — «выбраны 2 коробки из пяти и 1 коробка из трех». Всего $N(D) = C_5^2 \cdot 3 = 10 \cdot 3$ способов выбора. Значит,

$$P(D) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}.$$

д) Событие E — «выбраны 1 коробка из пяти пустых, 2 из двух с сюрпризом». Всего $N(E) = 5$ способов выбора. Значит,

$$P(E) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}.$$

е) Событие F — «выбраны 3 коробки из восьми без сюрприза». Всего $N(F) = C_8^3 = 56$ способов выбора. Значит,

$$P(F) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{24}$; е) $\frac{7}{15}$.

8. В лотерейном барабане 7 белых и 3 черных шара. Выкатившийся шар возвращают в барабан. «Неудача» — выпадение черного шара. Испытание повторяют 4 раза. Используйте задачу 7 и вычислите в этом случае вероятности событий, состоящих в том, что будет:

- а) более двух «успехов»;
- б) менее двух «успехов»;
- в) хотя бы один «успех»;
- г) хотя бы одна «неудача»;
- д) число «успехов» нечетно;
- е) «неудач» больше, чем «успехов».

Решение. В упражнении 7 (о четырехкратном повторении испытания Бернулли) получается таблица распределения вероятностей наступления «успехов» в четырех испытаниях Бернулли:

«Успехи»	0	1	2	3	4
Вероятность	q^4	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	p^4

В этой задаче $n = 4$, $p = 0,7$, $q = 0,3$. Составляем таблицу:

0	1	2	3	4
0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

После этого остается арифметика:

а) «успехов» или 2, или 3; вероятность равна $0,4116 + 0,2401 = 0,6517$;

б) «успехов» или 0, или 1; вероятность равна $0,0081 + 0,0756 = 0,0837$;

в) противоположное событие — 0 «успехов»; значит, вероятность равна $1 - 0,0081 = 0,9919$;

г) противоположное событие — 4 «успеха»; значит, вероятность равна $1 - 0,2401 = 0,7599$;

д) «успехов» или 1, или 3; вероятность равна $0,0756 + 0,4116 = 0,4872$;

е) см. пункт б).

Ответ: а) 0,6517; б) 0,0837; в) 0,9919; г) 0,7599; д) 0,4872; е) 0,0837.

Содержание

Предисловие	3
Концепция курса «Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы» для общеобразовательной школы	4
Примерное тематическое планирование	19
Методические рекомендации по работе с учебником «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс»	22
Решение некоторых упражнений	44

Учебно-методическое издание

**Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович**

Алгебра и начала математического анализа
Базовый уровень
10 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Редактор *С. В. Бахтина*
Художественное оформление *А. А. Павлов*
Внешнее оформление *Н. А. Новак*
Компьютерная верстка: *А. А. Павлов*
Корректор *С. О. Никулаев*

Подписано в печать 29.10.19. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 150. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3
тел. (495)181–53–44, e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Приобрести книги издательства
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
можно в магазине по адресу:
Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181–60–77, e-mail: shop@blbz.ru
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются
Коммерческим департаментом издательства:
тел. (495)181–53–44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано в