В. А. Смирнов
И. М. Смирнова

ГЕОМЕТРИЯ

Базовый и углубленный уровни

10 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2020

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
С50

Смирнов, В. А. Геометрия. Базовый и углубленный уровни.
С50 10 класс. Методическое пособие для учителя / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 110, [2] с. — ISBN 978-5-9963-5198-5.

Данное методическое пособие входит в УМК «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 10—11 классы» В. А. Смирнова, И. М. Смирновой. В нем представлено примерное тематическое планирование учебного материала по геометрии в 10-м классе, самостоятельные и контрольные работы, даны методические рекомендации по решению задач повышенной трудности.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9963-5198-5

Введение

Данное методическое пособие является составной частью учебно-методического комплекта «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 10—11 классы».

Пособие предназначено учителям, работающим в 10-м классе по учебнику «Геометрия» В. А. Смирнова, И. М. Смирновой. Оно сориентирует педагога в его работе, позволит качественно спланировать процесс обучения геометрии старшеклассников.

В пособие включено:

— примерное тематическое планирование;

— методические рекомендации к решению задач повышенной трудности;

— самостоятельные работы;

— контрольные работы.

В конце пособия даны ответы к предложенным самостоятельным и контрольным работам.

Геометрия, как ни один другой предмет, нужна каждому человеку, поскольку именно она развивает необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения различных фигур, что позволяет человеку правильно ориентироваться в окружающем мире. С другой стороны, геометрия дает метод научного познания, способствует развитию мышления, формирует навыки дедуктивных рассуждений. Помимо этого, изучение геометрии вырабатывает необходимые практические навыки в изображении, моделировании и конструировании плоских и пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, величин углов, площадей, объемов и др.).

Кроме сказанного, геометрия обладает интересным содержанием, имеет богатую историю, яркие приложения, она занимательна, изучает красивые объекты. Все это постепенно будет раскрываться и представляться учащимся по мере изучения ее курса.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) в направлении личностного развития:

— формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

— развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

— формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

— воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

— формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

— развитие интереса к математике;

— развитие математических способностей;

2) в метапредметном направлении:

— развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

— формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) в предметном направлении:

— овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

— создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Одна из особенностей предлагаемого учебно-методического комплекта для 10—11-го классов состоит в том, что с самого начала обучения стереометрии вводятся многогранники (параллелепипед, призма, пирамида, правильные и полуправильные многогранники). Это позволяет, с одной стороны, проиллюстрировать на многогранниках важные теоретические положения стереометрии, например, свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, а с другой — постепенно формировать практические умения учащихся по нахождению геометрических величин, расстояний и углов.

Рассматриваются способы изготовления моделей многогранников из разверток и геометрического конструктора. Моделирование многогранников способствует развитию у школьников: пространственных представлений, конструкторских, рационализаторских способностей, формированию понятия математической модели, раскрытию прикладных возможностей геометрии, эстетическому воспитанию.

Модели, самостоятельно изготовленные учащимися, являются средством конкретной наглядности, использование которой является начальной стадией для развития способности к восприятию абстрактной наглядности — чертежа — и формирования умений работать с ним. Модели могут быть использованы учителем для иллюстрации новых понятий, доказательств теорем, решения задач. Красиво сделанные модели являются украшением любого кабинета математики, рабочего уголка школьника и т. п.

Развитие пространственных представлений учащихся предполагает формирование умений правильно изображать основные геометрические фигуры и исследовать их взаимное расположение. Именно от этого во многом зависит успешность обучения геометрии. Поэтому большое внимание в курсе уделяется вопросам изображения пространственных фигур.

Помимо изображения пространственных фигур в параллельной проекции, рассматриваются методы изображения пространственных фигур в ортогональной проекции, приводятся примеры таких изображений (сферы, цилиндра, конуса и др.).

Кроме многогранников, рассматриваются фигуры вращения. Исследуется взаимное расположение многогранников и тел вращения, в том числе изучаются вписанные и описанные многогранники, вписанные и описанные цилиндры и конусы.

Формулы объемов фигур выводятся с помощью принципа Кавальери, что позволяет не только получить общие формулы для нахождения объемов призмы и цилиндра, пирамиды и конуса, шара и его частей, но и сформировать необходимые представления учащихся об объеме, заложить основы использования интеграла для вычисления объемов.

Расширены аналитические методы геометрии и их приложения. Помимо уравнений сферы и плоскости, учащиеся знакомятся с уравнениями прямой, аналитическим заданием многогранников и фигур вращения, уравнениями кривых и поверхностей в пространстве.

Предлагаются исторические сведения о возникновении и развитии геометрии. Они направлены на формирование мировоззрения учащихся, так как сведения о научных поисках, открытиях помогают увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным. Основной целью введения исторического материала является проникновение в мировоззренческий смысл науки, в процесс формирования ее основных идей и методов. История математики демонстрирует учащимся, каким может быть трудным и длительным путь ученого к истине, которая сегодня формулируется, например, в виде короткого утверждения.

Включение разнообразного геометрического материала, учитывающего интересы каждого учащегося, способствует повышению мотивации, интереса и желания учащихся заниматься геометрией.

Примерное тематическое планирование

10 класс
(2 ч в неделю, всего 68 ч за год)

Пункт	Тема	Кол-во часов
	Глава I. Начала стереометрии	**11**
1	Основные понятия стереометрии	2
2	Многогранники	2
3	Выпуклые и невыпуклые многогранники	2
4	Правильные многогранники	2
5*	Полуправильные многогранники	2
6	Развертки многогранников	1
	Глава II. Параллельные прямые и плоскости в пространстве	**7**
7	Параллельные прямые в пространстве	2
8	Параллельные прямая и плоскость	2
9	Параллельные плоскости	2
	Контрольная работа 1	1
	Глава III. Изображение пространственных фигур	**16**
10	Параллельное проектирование	3
11	Параллельные проекции плоских фигур	2

Продолжение таблицы

Пункт	Тема	Кол-во часов
12	Изображения многогранников	2
13	Сечения многогранников	2
14	Построение сечений куба	3
15	Построение сечений призмы и пирамиды	3
	Контрольная работа 2	1
	Глава IV. Углы и расстояния в пространстве	**20**
16	Угол между прямыми. Перпендикулярность прямых	2
17	Расстояние от точки до прямой	2
18	Перпендикулярные прямая и плоскость	2
19	Ортогональное проектирование. Перпендикуляр и наклонная	2
20	Расстояние от точки до плоскости	2
21	Угол между прямой и плоскостью	2
22	Двугранный угол. Угол между плоскостями	2
23	Расстояние между скрещивающимися прямыми	2
	Контрольная работа 3	1
24*	Площадь сечения	3

Окончание таблицы

Пункт	**Тема**	**Кол-во часов**
	Глава V. Симметрия	**11**
25	Центральная симметрия	2
26	Осевая симметрия	2
27	Зеркальная симметрия	3
28	Поворот. Симметрия n-го порядка	3
	Контрольная работа 4	1
	Обобщающее повторение	3

Методические рекомендации

Глава I
Начала стереометрии

В этой главе вводятся важнейшие для дальнейшего обучения геометрические понятия и изучаются их свойства.

При изучении учебного материала этой главы ставятся следующие цели обучения.

1. Представить основные понятия и аксиомы стереометрии.

2. Познакомить учащихся с основными пространственными фигурами: кубом, параллелепипедом, призмой, пирамидой.

3. Научить изображать пространственные фигуры и изготавливать их модели.

1. Основные понятия стереометрии

Цель обучения — познакомить учащихся с основными понятиями и аксиомами стереометрии; научить формулировать и доказывать следствия из аксиом, распознавать взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Основные понятия геометрии» учебника геометрии 7—9-го классов.

С учащимися можно заполнить таблицу «Математическая символика».

Математическая символика

Запись	Чтение
A; B; C ...	Точка A; точка B; точка C ...
a; b; c ... AB; CD ...	Прямая a; прямая b; прямая c ... Прямая AB, прямая CD ...
$A \in a$ $B \notin a$	Точка A принадлежит прямой a Точка B не принадлежит прямой a

Запись	Чтение
$a \cap b = C$	Точка C является точкой пересечения прямых a и b
α; β; γ ...	Плоскость α; плоскость β; плоскость γ ...
$A \in \alpha$ $B \notin \alpha$	Точка A принадлежит плоскости α Точка B не принадлежит плоскости α
$a \subset \alpha$	Прямая a лежит в плоскости α
$a \cap \alpha = A$	Точка A является точкой пересечения прямой a и плоскости α
$a \cap \beta = c$	Прямая c является линией пересечения плоскостей α и β
....	....

Рекомендации по решению задач

Задача 11*[1]. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, если никакие три из этих точек не принадлежат одной прямой?

Замечание. Нумерация задач взята из учебника: *В. А. Смирнов, И. М. Смирнова*. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 10 класс / М. : БИНОМ. Лаборатория знаний.

Решение. Пусть A_1, ..., A_n – n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой (рис. 1).

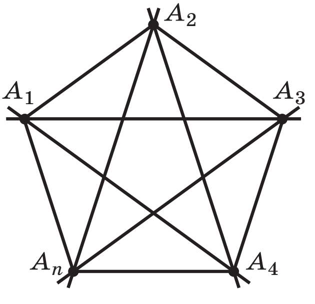


Рис. 1

[1] Здесь и далее знаком * отмечены задачи повышенного уровня сложности.

Выясним, сколько прямых проходит через точку A_1 и оставшиеся точки. Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно $n - 1$.

Заметим, что рассуждения, проведенные для точки A_1, справедливы для любой другой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит $n - 1$ прямая, то число подсчитанных прямых будет равно $n(n - 1)$.

Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при $n = 3$ получаем $n(n - 1) = 6$, а число прямых, на самом деле, равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчете мы каждую прямую сосчитали дважды, поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Полученная формула числа прямых имеет большое значение, в дальнейшем она будет появляться при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задается двумя точками, мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значения, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2. Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2 = 190$.

Задача 12*. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

Решение. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой (рис. 1).

Выясним, сколько плоскостей проходит через точку A_1 и пары оставшихся точек. Так как число оставшихся точек равно $n - 1$, то число пар этих точек равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Следовательно, искомое число плоскостей равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Заметим, что рассуждения, проведенные для точки A_1, справедливы для любой другой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ плоскостей, то число посчитанных плоскостей будет равно $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

Так как каждая плоскость проходит через три точки, то при указанном подсчете мы каждую плоскость посчитали трижды, поэтому число плоскостей, проходящих через различные тройки из n данных точек, равно $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Поскольку каждая плоскость однозначно задается тремя точками, не принадлежащими одной прямой, то мы, по существу, вычислили, сколько различных троек можно составить из n элементов. При этом не имеет значения, какие это элементы. Число таких троек называется числом сочетаний из n элементов по три и обозначается C_n^3. Например, если в классе 20 учеников, то число различных троек, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^3 = 1140$.

Задача 13*. Докажите, что через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость.

Решение. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C. Так как на прямых a и b выполняются аксиомы планиметрии, то на них найдутся соответственно точки A и B, отличные от точки C (рис. 2).

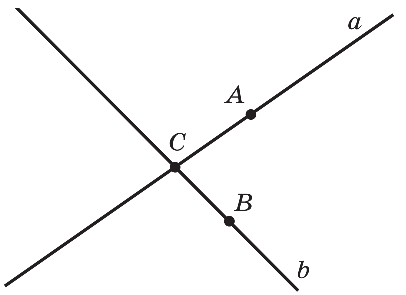


Рис. 2

Точки A, B, C не принадлежат одной прямой, следовательно, в силу аксиомы 2 через них проходит единственная плоскость. Так как точки A и C принадлежат этой плоскости, то по следствию 1 прямая a лежит в этой плоскости. Аналогично, так как точки B и C принадлежат этой плоскости, то по следствию 1 прямая b лежит в этой плоскости. Таким образом, данная плоскость проходит через две данные прямые.

Докажем, что эта плоскость единственна. Действительно, плоскость, проходящая через прямые a и b, будет проходить также через точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой. По аксиоме 2 такая плоскость единственна.

Задача 14*. Какое наибольшее число прямых попарных пересечений могут иметь n плоскостей?

Решение. Наибольшее число прямых попарных пересечений n плоскостей получается, если каждая плоскость пересекается с каждой и разные пары плоскостей дают разные прямые пересечения. Таким образом, прямые пересечения однозначно определяются парами плоскостей. Следовательно, искомое число прямых равно числу сочетаний из n плоскостей по две, т. е. равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. Многогранники

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием многогранника; определить основные многогранники: тетраэдр, куб, параллелепипед, призма, пирамида; научить изображать эти многогранники на клетчатой бумаге; решать простейшие задачи комбинаторного характера на нахождение числа вершин, ребер и граней многогранников.

Особенностью учебника является то, что многогранники вводятся с самого начала изучения. Это позволяет, с одной стороны, проиллюстрировать на многогранниках взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, свойства параллельности и перпендикулярности, а с другой — постепенно формировать умения учащихся по нахождению геометрических величин, расстояний и углов.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Многоугольники» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. На клетчатой бумаге изображены три ребра куба (рис. 2.7). Изобразите весь куб.

Решение. Искомый куб изображен на рисунке 3.

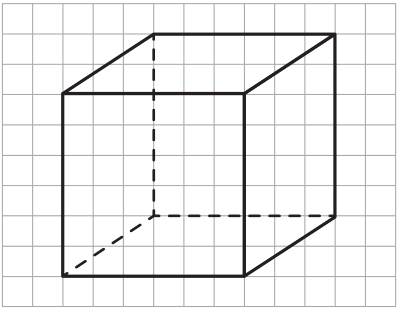


Рис. 3

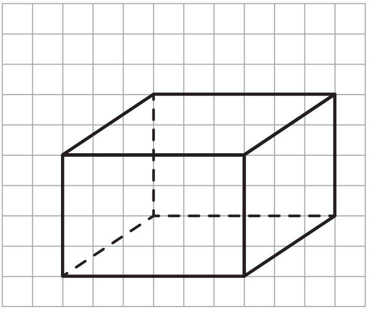


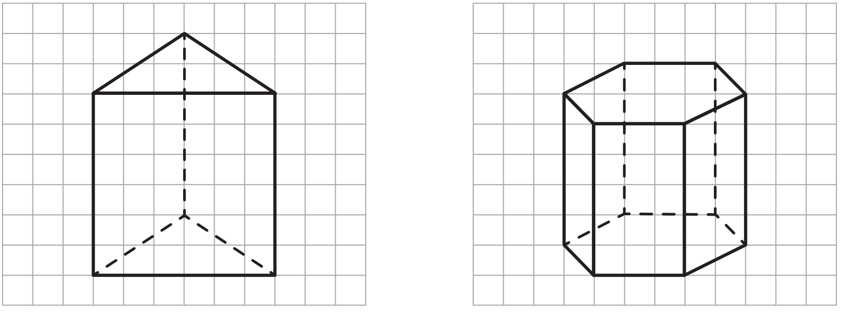
Рис. 4

Задача 10. На клетчатой бумаге изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.9). Изобразите весь параллелепипед.

Решение. Искомый параллелепипед изображен на рисунке 4.

Задача 12. На клетчатой бумаге изображены ребра призмы: а) треугольной (рис. 2.11, *а*); б) шестиугольной (рис. 2.11, *б*). Изобразите всю призму.

Решение. а) Искомая треугольная призма изображена на рисунке 5, а.



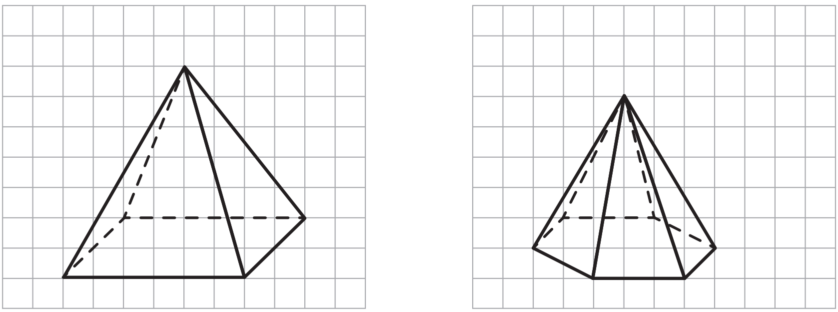
а *б*

Рис. 5

б) Искомая шестиугольная призма изображена на рисунке 5, б.

Задача 14. На клетчатой бумаге изображены ребра пирамиды: а) четырехугольной (рис. 2.13, *а*); б) шестиугольной (рис. 2.13, *б*). Изобразите всю пирамиду.

Решение. а) Искомая четырехугольная пирамида изображена на рисунке 6, а.



а *б*

Рис. 6

б) Искомая шестиугольная пирамида изображена на рисунке 6, б.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. Точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Укажите точку пересечения прямой AD и плоскости ABC.

2. Точки E, F, G, H не принадлежат одной плоскости. Укажите прямую пересечения плоскости EFG и плоскости FGH.

3. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную пирамиду.

4. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет шестиугольная пирамида?

5*. Сколько диагоналей имеет пятиугольная призма?

Вариант 2

1. Точки E, F, G, H не принадлежат одной плоскости. Укажите точку пересечения прямой EH и плоскости FGH.

2. Точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Укажите прямую пересечения плоскости ABC и плоскости ABD.

3. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную призму.

4. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет пятиугольная пирамида?

5*. Сколько диагоналей имеет шестиугольная призма?

3. Выпуклые и невыпуклые многогранники

Цель обучения — сформировать понятия выпуклого и невыпуклого многогранника; научить изображать и распознавать эти многогранники.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Выпуклые и невыпуклые многоугольники» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 5. На клетчатой бумаге изображены основание и боковое ребро невыпуклой призмы (рис. 3.7). Изобразите всю призму.

Решение. Искомая призма изображена на рисунке 7.

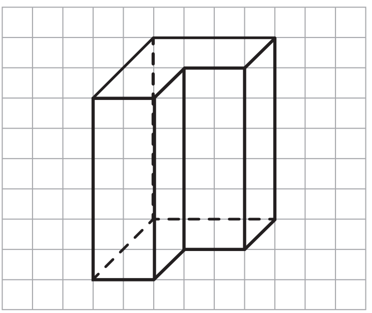


Рис. 7

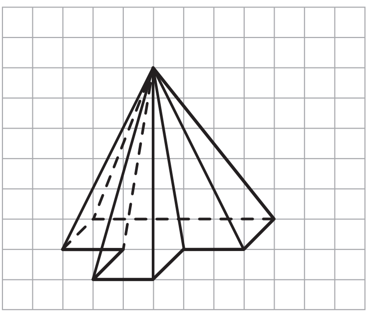


Рис. 8

Задача 6. На клетчатой бумаге изображены основание и боковое ребро невыпуклой пирамиды (рис. 3.8). Изобразите всю пирамиду.

Решение. Искомая пирамида изображена на рисунке 8.

Задача 7*. Докажите, что пересечение (общая часть) двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Решение. Рассмотрим выпуклые фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$. Обозначим Ф их пересечение. Пусть A и B — произвольные точки, принадлежащие фигуре Ф. Тогда эти точки принадлежат как $Ф_1$, так и $Ф_2$. Из того, что они принадлежат $Ф_1$ и из выпуклости $Ф_1$, следует, что отрезок AB содержится в фигуре $Ф_1$. Аналогично, из того, что они принадлежат $Ф_2$ и из выпуклости $Ф_2$, следует, что отрезок AB содержится в фигуре $Ф_2$. Значит, отрезок AB содержится в пересечении фигур $Ф_1$ и $Ф_2$. Следовательно, Ф — выпуклая фигура.

Задача 8*. Приведите пример двух выпуклых фигур, объединение которых является выпуклой фигурой.

Решение. Например, объединение двух кубов, не имеющих общих точек, не является выпуклой фигурой.

Задача 9*. Докажите, что основаниями выпуклой призмы являются выпуклые многоугольники.

Решение. Основание призмы является пересечением этой призмы и плоскости основания. Так как призма и плоскость — выпуклые фигуры, то и их пересечение будет выпуклой фигурой.

Задача 10*. Докажите, что основанием выпуклой пирамиды является выпуклый многоугольник.

Решение. Основание пирамиды является пересечением этой пирамиды и плоскости основания. Так как пирамида и плоскость — выпуклые фигуры, то и их пересечение будет выпуклой фигурой.

4. Правильные многогранники

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием правильного многогранника; определить правильные многогранники: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, икосаэдр, додекаэдр; научить распознавать правильные многогранники и изображать их на клетчатой бумаге, решать простейшие задачи комбинаторного характера на нахождение числа вершин, ребер и граней правильных многогранников.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Правильные многоугольники» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 12. Изобразите куб, как показано на рисунке 4.11. Отметьте центры его граней. Какой многогранник имеет своими вершинами эти центры граней? Найдите его ребро, если ребра исходного куба равны 1.

Решение. Искомым многогранником является октаэдр (рис. 9). Его ребра равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

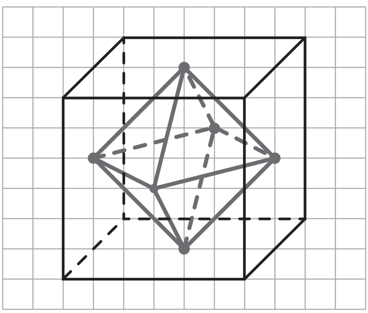


Рис. 9

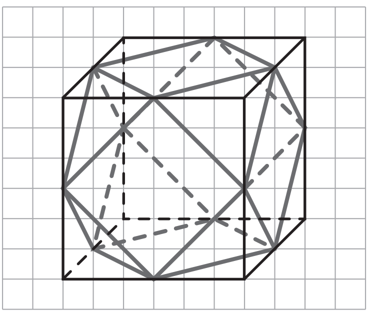


Рис. 10

Задача 13. Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины ребер куба (рис. 4.11). Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)? Найдите его ребро, если ребра исходного куба равны 1.

Решение. Искомый многогранник изображен на рисунке 10. У него В $=$ 12, Р $=$ 24, Г $=$ 14. Его ребра равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 14*. Изобразите правильный тетраэдр, как показано на рисунке 4.12. Отметьте середины его ребер. Какой многогранник имеет своими вершинами эти середины ребер? Найдите его ребро, если ребра исходного тетраэдра равны 1.

Решение. Искомым многогранником является октаэдр (рис. 11). Его ребра равны $\frac{1}{2}$.

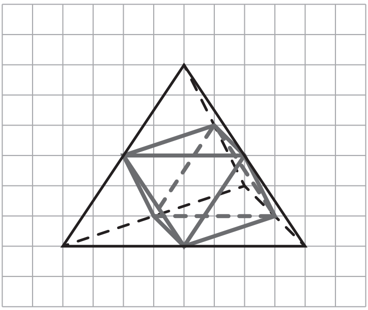


Рис. 11

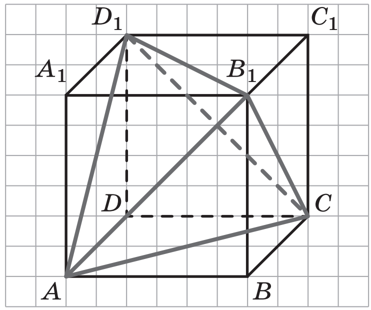


Рис. 12

Задача 15*. Вершинами какого многогранника являются вершины A, C, B_1, D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$? Изобразите куб и этот многогранник на клетчатой бумаге. Найдите его ребро, если ребра исходного куба равны 1.

Решение. Искомым многогранником является тетраэдр (рис. 12). Его ребра равны $\sqrt{2}$.

Задача 16*. Какой многогранник имеет своими вершинами центры граней тетраэдра? Найдите его ребро, если ребра исходного тетраэдра равны 1.

Решение. Искомым многогранником является тетраэдр (рис. 13).

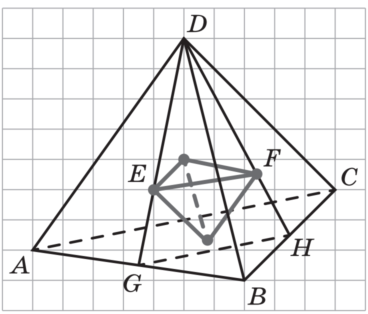


Рис. 13

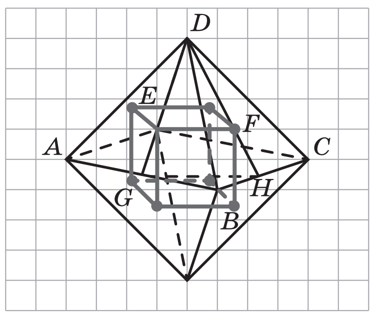


Рис. 14

Для нахождения его ребра EF обозначим G и H середины ребер соответственно AB и BC. Тогда $GH = 0{,}5$. Точки E и F делят отрезки DG и DH в отношении $2 : 1$, считая от вершины D. Следовательно, $EF = \frac{2}{3}GH = \frac{1}{3}$.

Задача 17*. Какой многогранник имеет своими вершинами центры граней октаэдра? Найдите его ребро, если ребра исходного октаэдра равны 1.

Решение. Искомым многогранником является куб (рис. 14). Для нахождения его ребра EF обозначим G и H середины ребер соответственно AB и BC. Тогда $GH = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Точки E и F делят отрезки DG и DH в отношении $2 : 1$, считая от вершины D. Следовательно, $EF = \frac{2}{3}GH = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 18*. Какой многогранник имеет своими вершинами центры граней икосаэдра? Найдите его ребро, если ребра исходного икосаэдра равны 1.

Решение. Искомым многогранником является додекаэдр (рис. 15).

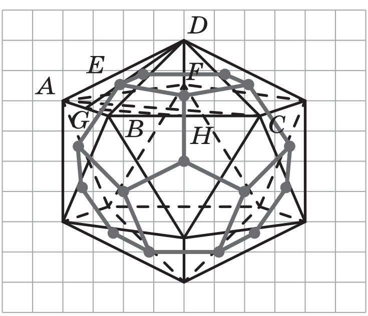


Рис. 15

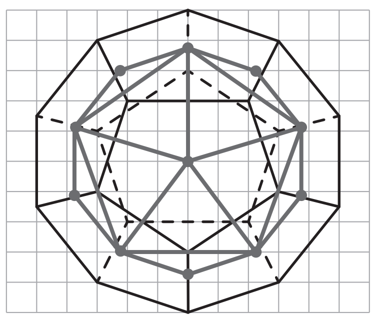


Рис. 16

Для нахождения его ребра EF обозначим G и H середины ребер соответственно AB и BC. Диагональ AC правильного пятиугольника со стороной 1 равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда $GH = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Точки E и F делят отрезки DG и DH в отношении 2 : 1, считая от вершины D. Следовательно, $EF = \frac{2}{3}GH = \frac{1+\sqrt{5}}{6}$.

Задача 19*. Какой многогранник имеет своими вершинами центры граней додекаэдра?

Решение. Искомым многогранником является икосаэдр (рис. 16).

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

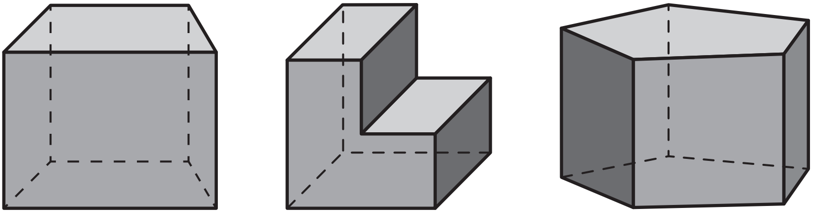
1. Среди многогранников, изображенных на рисунке 17, укажите выпуклые многогранники.

2. Изобразите невыпуклую четырехугольную призму.

3. Сколько ребер имеет икосаэдр?

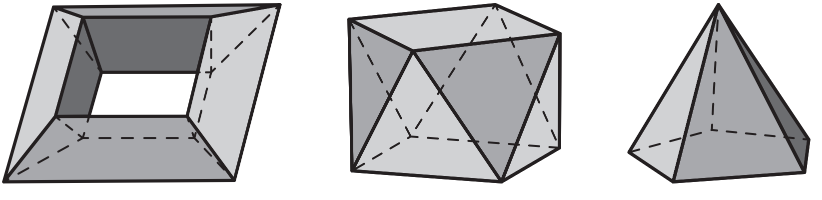
4. Сколько вершин имеет додекаэдр?

5*. Вершинами какого многогранника являются центры граней куба?



а *б* *в*

Рис. 17



а *б* *в*

Рис. 18

Вариант 2

1. Среди многогранников, изображенных на рисунке 18, укажите выпуклые многогранники.

2. Изобразите невыпуклую четырехугольную пирамиду.

3. Сколько ребер имеет додекаэдр?

4. Сколько вершин имеет икосаэдр?

5*. Вершинами какого многогранника являются середины ребер тетраэдра?

5*. Полуправильные многогранники

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием полуправильного многогранника; определить полуправильные многогранники; научить распознавать полуправильные многогранники и изображать некоторые из них на клетчатой бумаге, решать простейшие задачи комбинаторного характера на нахождение числа вершин, ребер и граней полуправильных многогранников.

Рекомендации по решению задач

Задача 11*. Какую часть ребер куба, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получился полуправильный многогранник — усеченный куб?

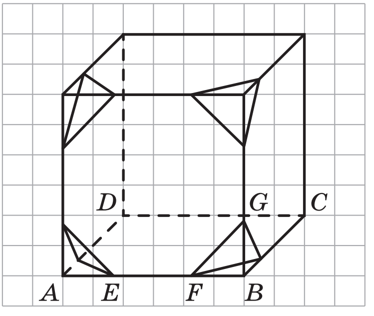


Рис. 19

Решение. Пусть в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AE = BF = BG = x$ (рис. 19). Тогда $EF = 1 - 2x$, $FG = \sqrt{2}x$. Для того чтобы после отсечения углов куба получился полуправильный многогранник, нужно, чтобы $EF = FG$, т. е. выполнялось равенство $1 - 2x = \sqrt{2}x$. Решая это уравнение, находим $x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 12*. Найдите ребро усеченного куба, полученного отсечением углов единичного куба.

Решение. В силу решения предыдущей задачи, ребро усеченного куба равно $1 - 2x = \sqrt{2} - 1$.

Задача 14*. Какими должны быть боковые ребра треугольных пирамид, отсекаемых от углов додекаэдра, ребра которого равны 1, чтобы в результате этого отсечения получился усеченный додекаэдр?

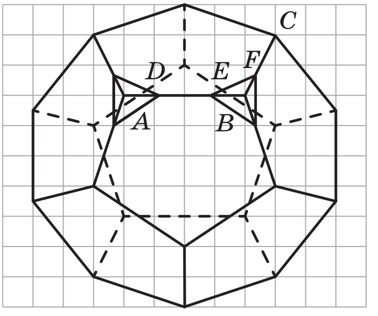


Рис. 20

Решение. Пусть в единичном додекаэдре $AD = BE = BF = x$ (рис. 20). Тогда $DE = 1 - 2x$, $EF = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x$. Для того чтобы после отсечения углов додекаэдра получился полуправильный многогранник, нужно, чтобы $DE = EF$, т. е. выполнялось равенство $1 - 2x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x$. Решая это уравнение, находим $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$.

Задача 15*. Найдите ребро усеченного додекаэдра, полученного отсечением углов додекаэдра, ребра которого равны 1.

Решение. В силу решения предыдущей задачи, ребро усеченного додекаэдра равно $1 - 2x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. Развертки многогранников

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием развертки многогранника; привести примеры разверток; научить распознавать многогранники по их разверткам и развертки по многогранникам.

Рекомендации по решению задач

Задача. На рисунке 21 укажите развертки куба.

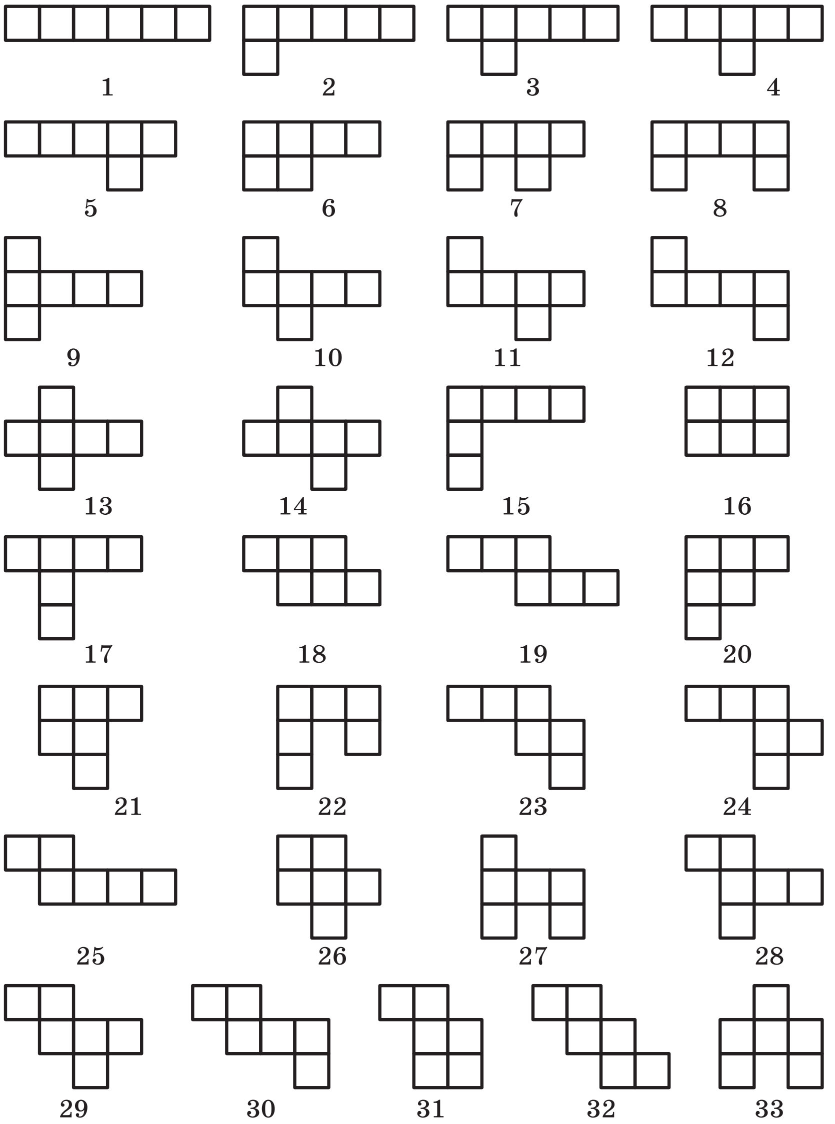


Рис. 21

Ответ. 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 28, 29, 30, 32.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. Изобразите тетраэдр. Получите из него изображение усеченного тетраэдра.

2. Какой многогранник имеет своими вершинами середины ребер икосаэдра?

3*. Сколько и каких граней имеется у кубооктаэдра?

4. Изобразите развертку правильной шестиугольной пирамиды.

5*. Развертка какого многогранника изображена на рисунке 22?

Вариант 2

1. Изобразите куб. Получите из него изображение усеченного куба.

2. Какой многогранник имеет своими вершинами середины ребер октаэдра?

3*. Сколько и каких граней имеется у икосододекаэдра?

4. Изобразите развертку правильной шестиугольной призмы

5*. Развертка какого многогранника изображена на рисунке 23?

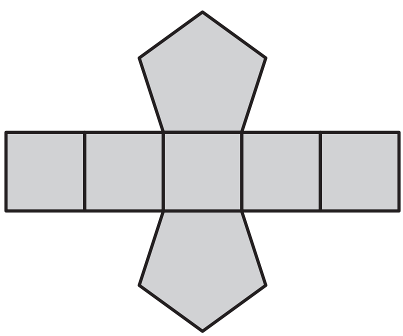


Рис. 22

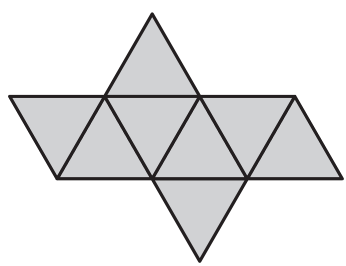


Рис. 23

Глава II
Параллельные прямые и плоскости в пространстве

В этой главе исследуются случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Определяются понятия параллельности двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Формулируются и доказываются признаки параллельности.

7. Параллельные прямые в пространстве

Цель обучения — определить понятия параллельных и скрещивающихся прямых; установить различные случаи взаимного расположения прямых в пространстве; сформулировать и доказать признак и свойства параллельных прямых; научить распознавать взаимное расположение прямых в пространстве.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Параллельные прямые» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые BA_1 и CD_1 параллельны.

Решение. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 24). Прямые BC и A_1D_1 параллельны прямой AD, сле-

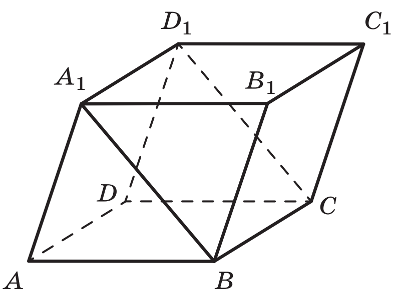


Рис. 24

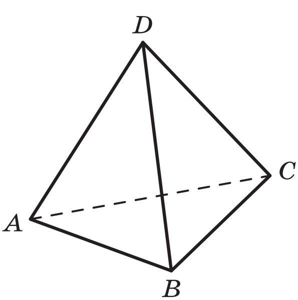


Рис. 25

довательно, они параллельны. Отрезки BC и A_1D_1 равны и параллельны. Следовательно, четырехугольник BCD_1A_1 — параллелограмм. Значит, прямые BA_1 и CD_1 параллельны.

Задача 14. Докажите, что ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ скрещиваются (рис. 7.10).

Решение. Прямая CD пересекает плоскость ABC в точке C, не принадлежащей прямой AB, лежащей в этой плоскости (рис. 25). По признаку скрещивающихся прямых эти прямые AB и CD скрещиваются.

Задача 18*. Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 7.13) параллельны прямые: а) AD и B_1C_1; б) AD и A_1D_1; в) AB_1 и ED_1.

Решение. а) Прямые AD и B_1C_1 параллельны прямой BC (рис. 26). Следовательно, они параллельны.

б) Отрезки AA_1 и DD_1 равны и параллельны (рис. 26). Следовательно, четырехугольник ADD_1A_1 — параллелограмм. Значит, прямые AD и A_1D_1 параллельны.

в) Прямые AE и B_1D_1 параллельны прямой BD (рис. 27). Следовательно, они параллельны. Отрезки AE и B_1D_1 равны и параллельны (рис. 27). Следовательно, четырехугольник AED_1B_1 — параллелограмм. Значит, прямые AB_1 и ED_1 параллельны.

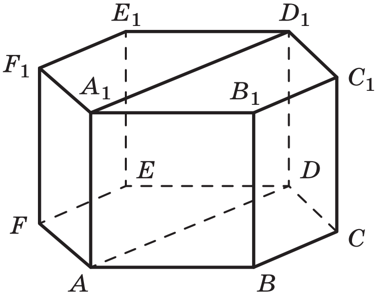


Рис. 26

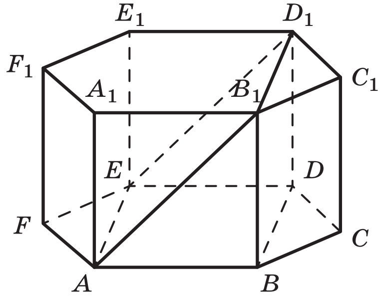


Рис. 27

Задача 19*. Точки A_1, A_2 и B_1, B_2 принадлежат скрещивающимся прямым соответственно a и b (рис. 7.14). Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

Решение. Нет. Если бы прямые A_1B_1 и A_2B_2 были пересекающимися или параллельными, то точки A_1, A_2, B_1, B_2 принадлежали бы одной плоскости (рис. 28). В этом случае прямые a и b лежали бы в одной плоскости. Следовательно, они не могли бы быть скрещивающимися.

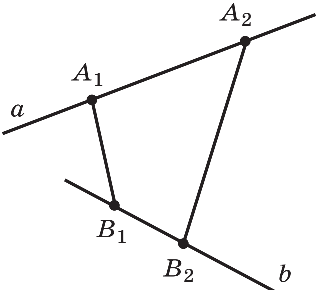


Рис. 28

Задача 20*. Каково взаимное расположение прямых DE и FG (рис. 7.15)?

Решение. Прямая DE пересекает плоскость SBC в точке H, не принадлежащей прямой FG, лежащей в этой плоскости (рис. 29). По признаку скрещивающихся прямых эти прямые DE и FG скрещиваются.

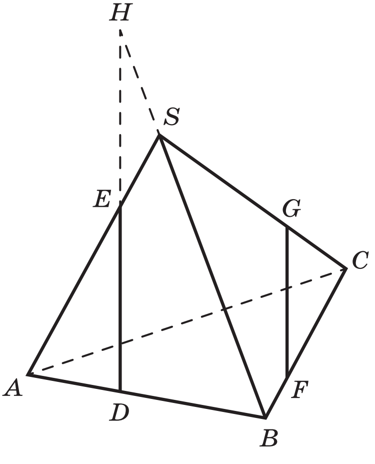


Рис. 29

Задача 21*. Пересекаются ли отрезки EF и GH (рис. 7.16)?

Решение. Аналогично тому, как это было показано в решении предыдущей задачи, прямые GF и EH скрещиваются (рис. 30). Следовательно, точки G, H, F, E не принадлежат одной плоскости. Значит, прямые EF и GH скрещиваются. Следовательно, отрезки EF и GH не пересекаются.

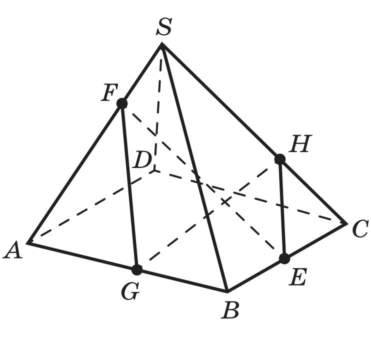


Рис. 30

8. Параллельные прямая и плоскость

Цель обучения — определить понятие параллельности прямой и плоскости; установить различные случаи взаимного расположения прямой и плоскости; сформулировать и доказать признак параллельности прямой и плоскости; научить распознавать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве и доказывать их параллельность.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ прямая AB_1 параллельна плоскости CED_1.

Решение. Прямая AB_1 не лежит в плоскости CED_1 и параллельна прямой ED_1, лежащей в этой плоскости (рис. 31). Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости прямая AB_1 параллельна плоскости CED_1.

Задача 11. Дан параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости α.

Решение. Прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AB, лежащей в этой плоскости (рис. 32). Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости прямая CD параллельна плоскости α.

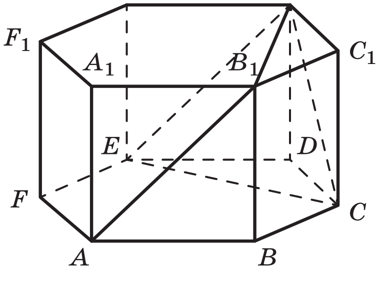


Рис. 31

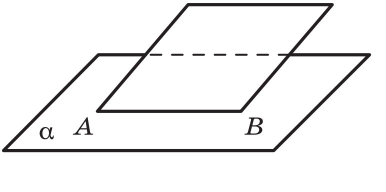


Рис. 32

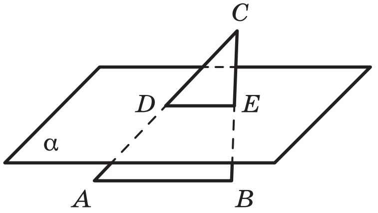


Рис. 33

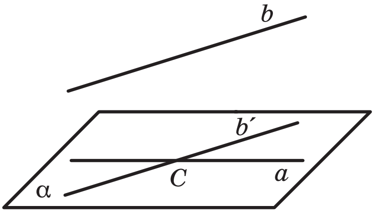


Рис. 34

Задача 13. Через середины двух сторон треугольника проведена плоскость, не совпадающая с плоскостью этого треугольника. Докажите, что эта плоскость параллельна третьей стороне треугольника.

Решение. Пусть D и E — середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC (рис. 33). Плоскость α проходит через точки D, E и не совпадает с плоскостью этого треугольника. Так как отрезок DE является средней линией треугольника ABC, то он параллелен стороне AB этого треугольника. Следовательно, прямая AB параллельна прямой DE. Значит, по признаку параллельности прямой и плоскости прямая AB параллельна плоскости α.

Задача 15*. Укажите способ, как через одну из двух скрещивающихся прямых провести плоскость, параллельную другой прямой.

Решение. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 34). Через какую-нибудь точку C прямой a проведем прямую b', параллельную прямой b. Через две пересекающиеся прямые a и b' проведем плоскость α. Так как прямая b параллельна прямой b', лежащей в плоскости α, то прямая b будет параллельна плоскости α.

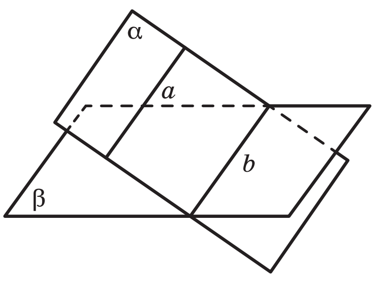


Рис. 35

Задача 16*. Докажите, что если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

Решение. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и прямая b является линией пересечения этих плоскостей (рис. 35). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости α. Кроме этого, прямая b лежит в плоскости β, а прямая a не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая a и подавно не пересекается с прямой b. Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны.

Задача 17*. Докажите, что для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ линия пересечения плоскостей SAB и SCD параллельна плоскости основания этой пирамиды.

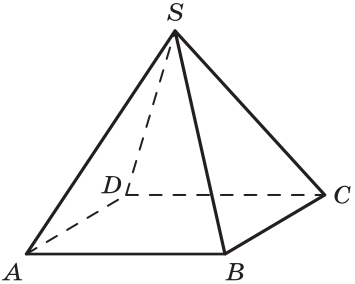


Рис. 36

Решение. Плоскость SAB проходит через прямую AB, параллельную плоскости SCD, и пересекает эту плоскость (рис. 36). Следовательно, линия пересечения этих плоскостей будет параллельна прямой AB. Значит, она будет параллельна и плоскости ABC.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. Запишите ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, скрещивающиеся с диагональю AC_1.

2. Докажите, что ребра AD и BC тетраэдра $ABCD$ скрещиваются.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите ребра, параллельные ребру BC.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите ребра, параллельные плоскости ABB_1.

5*. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ докажите, что линия пересечения плоскостей SAB и SDE параллельна плоскости основания этой пирамиды.

Вариант 2

1. Запишите ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, скрещивающиеся с диагональю BD_1.

2. Докажите, что ребра AB и SC четырехугольной пирамиды $SABCD$ скрещиваются.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите ребра, параллельные ребру AB.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите ребра, параллельные плоскости BCC_1.

5*. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ докажите, что линия пересечения плоскостей SBC и SEF параллельна плоскости основания этой пирамиды.

9. Параллельные плоскости

Цель обучения — определить понятие параллельности двух плоскостей; установить различные случаи взаимного расположения двух плоскостей; сформулировать и доказать признак параллельности двух плоскостей; научить распознавать взаимное расположение двух плоскостей в пространстве и доказывать их параллельность.

Рекомендации по решению задач

Задача 6. Докажите, что у параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны плоскости: а) ABC и $A_1B_1C_1$; б) BDA_1 и CB_1D_1.

Решение. а) Пересекающиеся прямые AB и AD плоскости ABC соответственно параллельны прямым A_1B_1 и A_1D_1 плоскости $A_1B_1C_1$ (рис. 37). Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

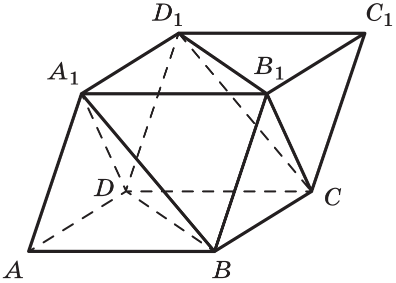


Рис. 37

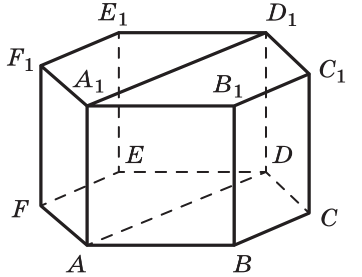


Рис. 38

б) Пересекающиеся прямые A_1B и A_1D плоскости BDA_1 соответственно параллельны прямым CD_1 и CB_1 плоскости CB_1D_1 (рис. 37). Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей плоскости BDA_1 и CB_1D_1 параллельны.

Задача 7. Докажите, что у правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны плоскости: а) ABC и $A_1B_1C_1$; б) BCC_1 и FEE_1; в) BCC_1 и ADD_1; г) BDD_1 и AEE_1; д) ACB_1 и ED_1F_1.

Решение. а) Пересекающиеся прямые AB и BC плоскости ABC соответственно параллельны прямым A_1B_1 и B_1C_1 плоскости $A_1B_1C_1$ (рис. 38). Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

б) Пересекающиеся прямые BC и BB_1 плоскости BCC_1 соответственно параллельны прямым FE и FF_1 плоскости FEE_1 (рис. 38). Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей плоскости BCC_1 и FEE_1 параллельны.

в) Пересекающиеся прямые BC и BB_1 плоскости BCC_1 соответственно параллельны прямым AD и AA_1 плоскости ADD_1 (рис. 38). Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей плоскости BCC_1 и ADD_1 параллельны.

г) Пересекающиеся прямые BD и BB_1 плоскости BDD_1 соответственно параллельны прямым AE и AA_1 плоскости AEE_1 (рис. 39). Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей плоскости BDD_1 и AEE_1 параллельны.

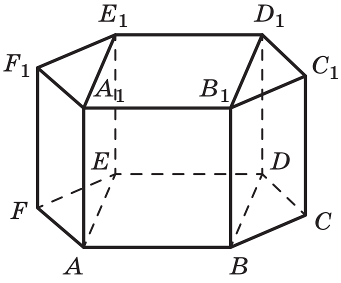


Рис. 39

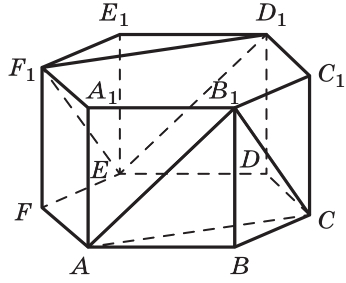


Рис. 40

д) Пересекающиеся прямые AC и AB_1 плоскости ACB_1 соответственно параллельны прямым F_1D_1 и ED_1 плоскости ED_1F_1 (рис. 40). Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей плоскости ACB_1 и ED_1F_1 параллельны.

Задача 8*. Докажите, что если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью (рис. 9.6), то их линии пересечения параллельны.

Решение. Пусть плоскости α и β пересечены плоскостью γ, a и b — их соответствующие линии пересечения (рис. 41). Прямые a и b лежат в одной плоскости (плоскости γ) и не пересекаются, так как лежат в параллельных плоскостях α и β. Следовательно, прямые a и b параллельны.

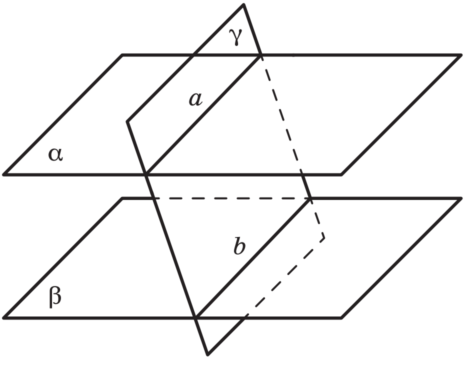


Рис. 41

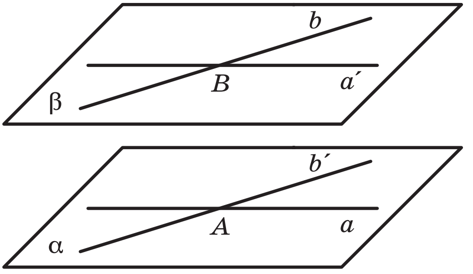


Рис. 42

Задача 11*. Даны две скрещивающиеся прямые. Как через них провести параллельные плоскости?

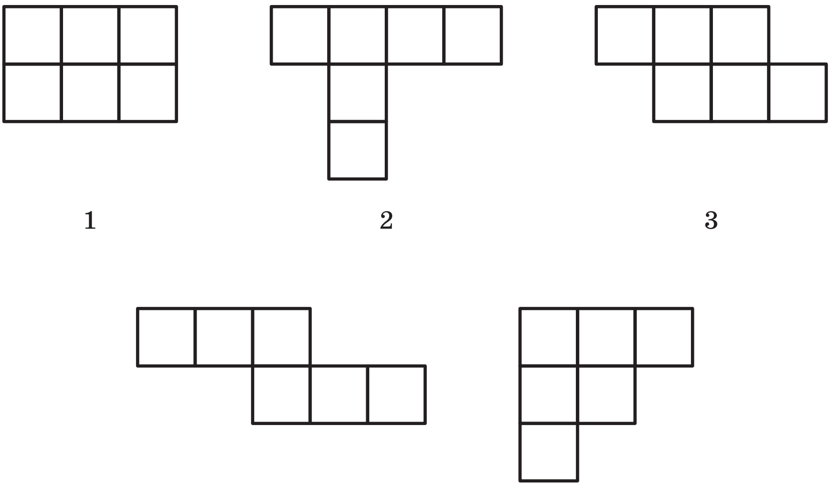
Решение. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 42). Через какую-нибудь точку A прямой a проведем прямую b', параллельную прямой b. Через какую-нибудь точку B прямой b проведем прямую a', параллельную прямой a. Через две пересекающиеся прямые a и b' проведем плоскость α. Через две пересекающиеся прямые b и a' проведем плоскость β. Так как пересекающиеся прямые a и b' плоскости α соответственно параллельны прямым a', b, лежащим в плоскости β, то плоскости α и β будут параллельны по признаку параллельности двух плоскостей.

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Изобразите правильную шестиугольную призму. Сколько у нее вершин (В), ребер (Р), граней (Г)?

2. На рисунке 43 укажите развертки куба.



1 2 3 4 5

Рис. 43

3. Какую часть ребер правильного тетраэдра должны отсекать плоскости, чтобы в результате получился усеченный тетраэдр?

4*. Докажите, что ребра AB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ скрещиваются.

5*. Докажите, что ребро BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ параллельно грани ACC_1A_1.

6*. Докажите, что грани ABB_1A_1 и DEE_1D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны.

Вариант 2

1. Изобразите правильную шестиугольную пирамиду. Сколько у нее вершин (В), ребер (Р), граней (Г)?

2. На рисунке 44 укажите развертки куба.

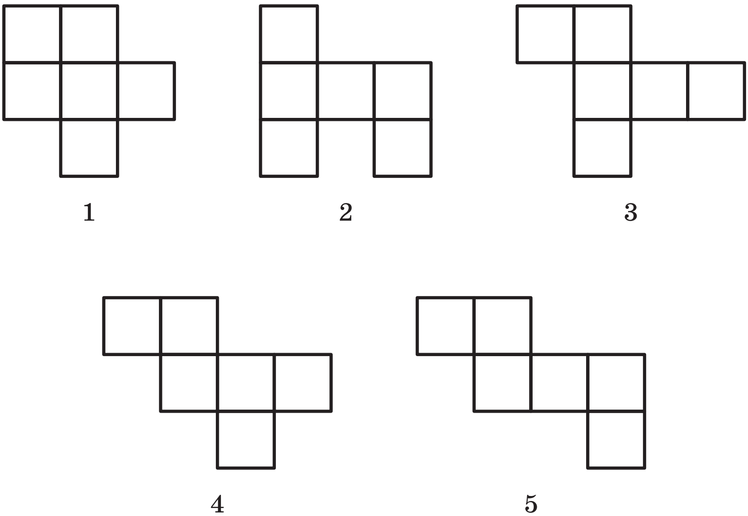


Рис. 44

3. Какую часть ребер октаэдра должны отсекать плоскости, чтобы в результате получился усеченный октаэдр?

4*. Докажите, что ребра AB и B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ скрещиваются.

5*. Докажите, что ребро BC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ параллельно грани SAD.

6*. Докажите, что грани BCC_1B_1 и EFF_1E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны.

Глава III
Изображение пространственных фигур

10. Параллельное проектирование

Цель обучения — определить понятие параллельного проектирования; сформулировать и доказать его свойства; научить находить параллельные проекции точек и прямых.

Рекомендации по решению задач

Задача 10*. Сохраняются ли при параллельном проектировании: а) длины отрезков; б) величины углов? Приведите примеры.

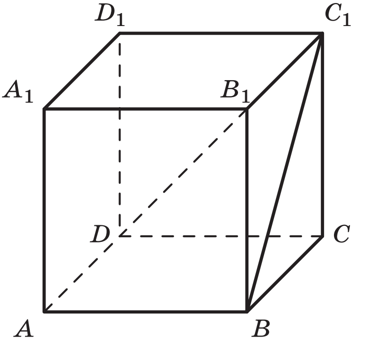


Рис. 45

Решение. а) Нет. Например, для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 45) параллельной проекцией отрезка BC_1 на плоскость ABC в направлении прямой CC_1 является отрезок BC, длина которого меньше длины отрезка BC_1. Параллельной проекцией отрезка BC на плоскость ABC_1 в направлении прямой CC_1 является отрезок BC_1, длина которого больше длины отрезка BC.

б) Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 45) параллельной проекцией угла BC_1D на плоскость ABC в направлении прямой CC_1 является угол BCD, который больше угла BC_1D. Параллельной проекцией угла BCD на плоскость BC_1D в направлении прямой CC_1 является угол BC_1D, который меньше угла BCD.

11. Параллельные проекции плоских фигур

Цель обучения — изучить параллельные проекции плоских фигур; научить изображать параллельные проекции плоских фигур.

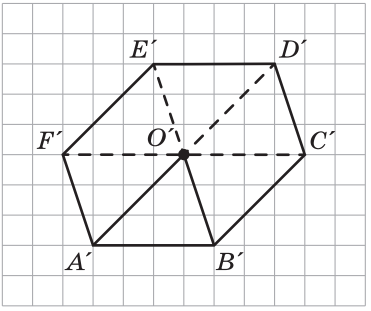


Рис. 46

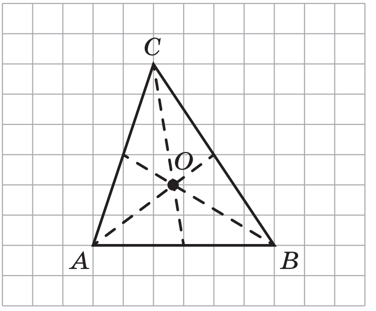


Рис. 47

Рекомендации по решению задач

Задача 9. На рисунке 11.5 изображена параллельная проекция $A'O'B'$ правильного треугольника AOB, являющегося частью правильного шестиугольника $ABCDEF$. Изобразите всю параллельную проекцию $A'B'C'D'E'F'$ правильного шестиугольника.

Решение. Искомая параллельная проекция показана на рисунке 46.

Задача 10. На рисунке 11.6 изображена параллельная проекция правильного треугольника. Изобразите параллельную проекцию центра его описанной окружности.

Решение. Искомая параллельная проекция центра O описанной окружности показана на рисунке 47.

Задача 11. На рисунке 11.7 изображена параллельная проекция квадрата. Изобразите параллельную проекцию центра окружности, вписанной в этот квадрат.

Решение. Искомая параллельная проекция центра O вписанной окружности показана на рисунке 48.

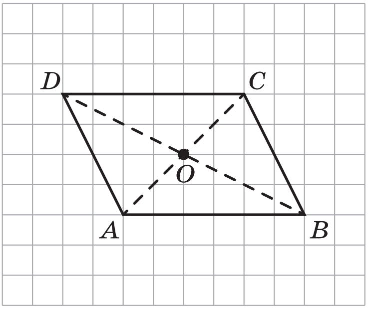


Рис. 48

12. Изображения многогранников

Цель обучения — привести примеры изображений многогранников; научить изображать многогранники, используя параллельное проектирование.

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Изобразите куб, все грани которого не параллельны плоскости проектирования.

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 49.

Задача 2. Изобразите прямоугольный параллелепипед, две грани которого параллельны плоскости проектирования.

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 50.

Задача 3. Изобразите правильную треугольную призму, боковая грань которой параллельна плоскости проектирования.

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 51.

Задача 4. Изобразите правильную треугольную призму, основание которой параллельно плоскости проектирования.

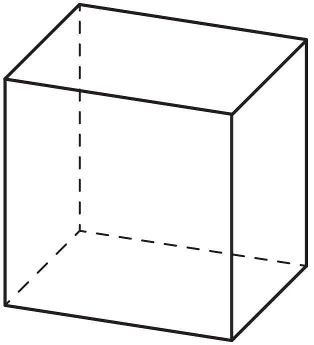


Рис. 49

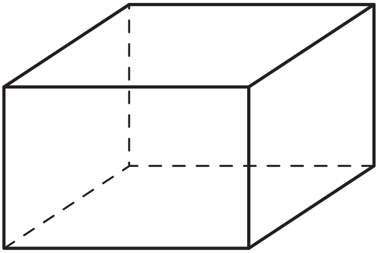


Рис. 50

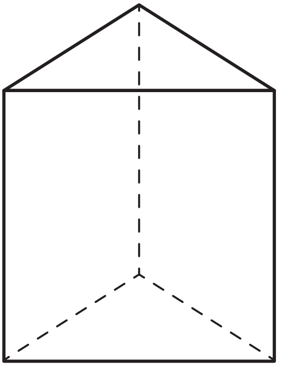


Рис. 51

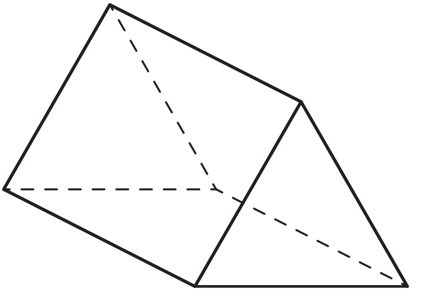


Рис. 52

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 52.

Задача 5. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду.

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 53.

Задача 6. Изобразите правильную шестиугольную призму, боковая грань которой параллельна плоскости проектирования.

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 54.

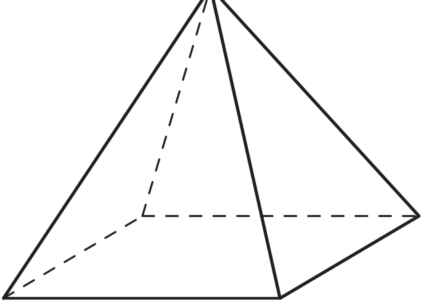


Рис. 53

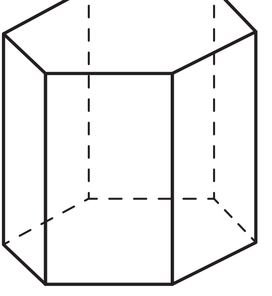


Рис. 54

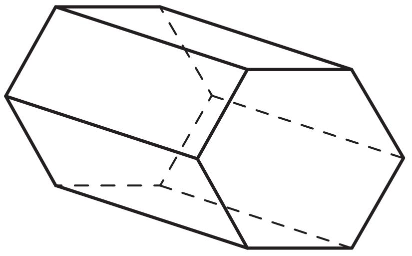


Рис. 55

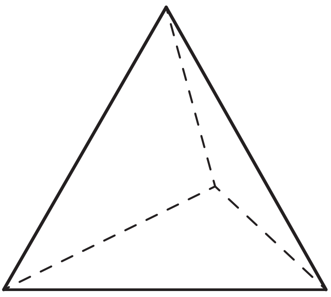


Рис. 56

Задача 7. Изобразите правильную шестиугольную призму, основание которой параллельно плоскости проектирования.

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 55.

Задача 9*. Изобразите параллельную проекцию правильного тетраэдра, одна грань которого параллельна плоскости проектирования.

Решение. Пример такого изображения представлен на рисунке 56.

Задача 10*. Возможен ли многогранник с таким изображением, как показано на рисунке 12.6?

Решение. Через вершину A_1 проведем плоскость, параллельную плоскости ABC (рис. 57). Она пересекает грани этого многогранника по отрезкам A_1D, DE, EF, соответственно параллельных ребрам AC, BC, AB. Если бы такой многогранник был возможен, то в сечении этой плоскостью должен был получиться треугольник. Однако полученные отрезки A_1D, DE, EF не образуют треугольник. Значит, такой многогранник невозможен.

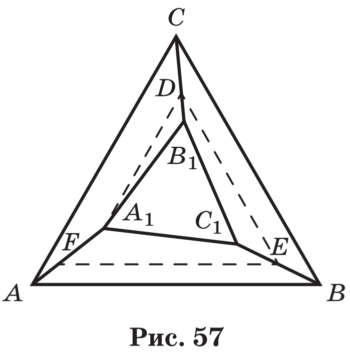


Рис. 57

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите параллельную проекцию отрезка AB_1 на плоскость ADD_1 в направлении прямой BD.

2. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите параллельную проекцию прямой BC_1 на плоскость DEE_1 в направлении прямой AF.

3. Какой фигурой может быть параллельная проекция ромба?

4. На рисунке 58 изображена параллельная проекция вершин A, B, C правильного шестиугольника $ABCDEF$. Изобразите всю параллельную проекцию этого шестиугольника.

5*. На рисунке 59 изображена параллельная проекция трех ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Изобразите весь куб.

Вариант 2

1. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите параллельную проекцию отрезка BC_1 на плоскость ABB_1 в направлении прямой AC.

2. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите параллельную проекцию прямой AB_1 на плоскость CDD_1 в направлении прямой EF.

3. Какой фигурой может быть параллельная проекция квадрата?

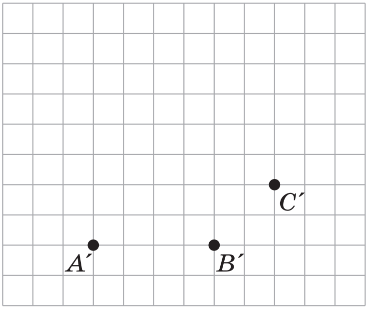


Рис. 58

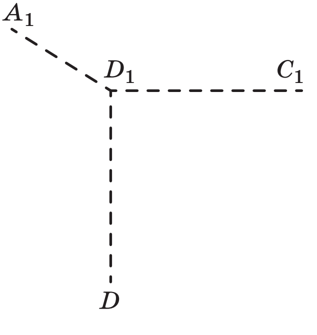


Рис. 59

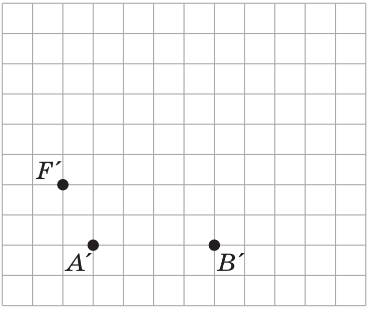


Рис. 60

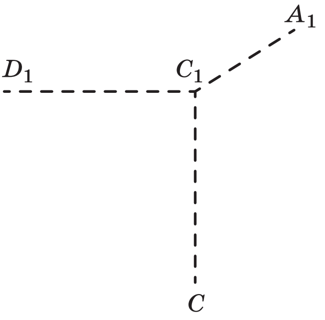


Рис. 61

4. На рисунке 60 изображена параллельная проекция вершин A, B, F правильного шестиугольника $ABCDEF$. Изобразите всю параллельную проекцию этого шестиугольника.

5*. На рисунке 61 изображена параллельная проекция трех ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Изобразите весь куб.

13. Сечения многогранников

Цель обучения — рассмотреть сечения многогранников плоскостями; определить диагональные сечения призмы и пирамиды; научить распознавать виды сечений многогранников.

Рекомендации по решению задач

Задача 4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) правильный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник; г)* прямоугольный треугольник; д)* тупоугольный треугольник?

Решение. а) Если плоскость отсекает от ребер куба, выходящих из одной вершины, равные отрезки, то в сечении получается равносторонний треугольник (рис. 62, а).

б) Если только два из отсекаемых отрезков равны, то в сечении получается равнобедренный треугольник (рис. 62, б).

в) Если все три отсекаемых отрезка не равны, то в сечении получается разносторонний треугольник (рис. 62, в).

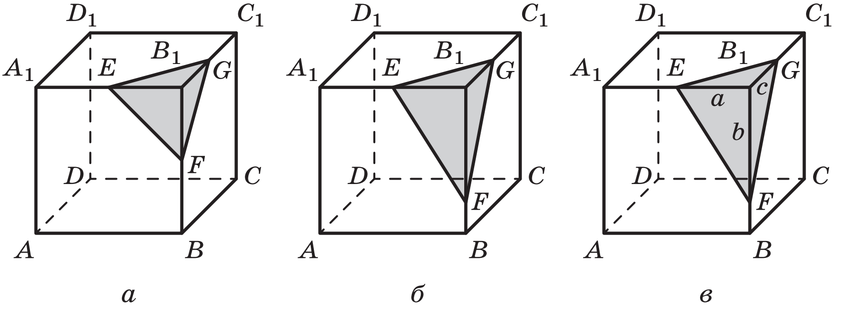


Рис. 62

г)*, д)* Докажем, что в сечении куба плоскостью не может получиться прямоугольный или тупоугольный треугольник. Обозначим длины отрезков B_1E, B_1F, B_1G, отсекаемых плоскостью от ребер куба, соответственно a, b, c (рис. 62, в). По теореме Пифагора $EF^2 = a^2 + b^2$, $EG^2 = a^2 + c^2$, $FG^2 = b^2 + c^2$. Таким образом, квадрат каждой стороны треугольника EFG меньше суммы квадратов двух других сторон. Следовательно, данный треугольник — остроугольный.

Задача 5. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) квадрат; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) ромб; д) трапеция; е)* четырехугольник, отличный от параллелограмма и трапеции?

Решение. а) Если плоскость сечения параллельна грани куба, то в сечении получается квадрат (рис. 63, а).

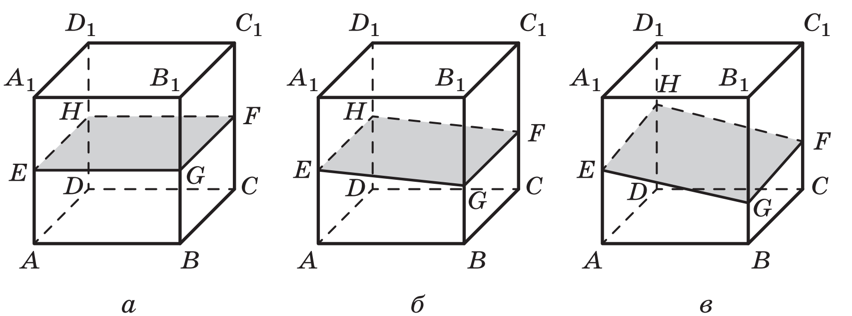


Рис. 63

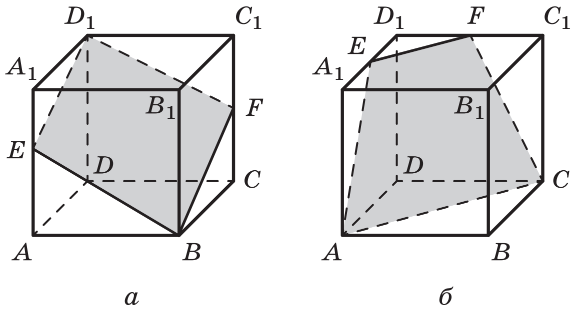


Рис. 64

б) Если плоскость сечения параллельна ребрам двух параллельных граней куба, но не параллельна этим граням, то в сечении получается прямоугольник (рис. 63, б).

в) Если плоскость сечения пересекает четыре параллельных ребра куба и не параллельна оставшимся ребрам, то в сечении получается параллелограмм (рис. 63, в).

г) На рисунке 64, а показан пример сечения, являющегося ромбом, E, F — середины ребер соответственно AA_1 и CC_1.

д) На рисунке 64, б показан пример сечения, являющегося трапецией, E, F — середины ребер соответственно A_1D_1 и C_1D_1.

е)* Нет. Если плоскость пересекает четыре грани куба, то среди них есть две параллельные грани. Следовательно, в четырехугольнике, являющемся сечением куба этой плоскостью, должны быть две параллельные стороны.

Задача 6. Может ли сечением куба плоскостью быть: а) пятиугольник; б)* правильный пятиугольник?

Решение. а) На рисунке 65 показан пример сечения, являющегося пятиугольником $EFGHD_1$.

б)* Нет. Если плоскость пересекает пять граней куба, то среди них есть две пары параллельных граней. Следовательно, в пятиугольнике, являющемся сечением куба этой плоскостью, должны быть две пары параллельных сторон. У правильного пятиугольника параллельных сторон нет.

Задача 7. Может ли сечением куба плоскостью быть: а) шестиугольник; б) правильный шестиугольник?

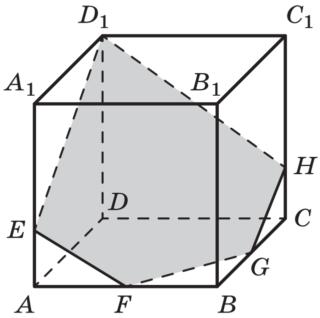


Рис. 65

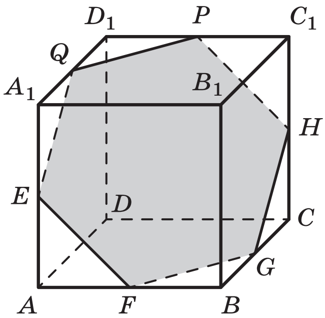


Рис. 66

Решение. а), б) Да. На рисунке 66 показан пример сечения, проходящего через середины ребер, являющегося правильным шестиугольником $EFGHPQ$.

Задача 8. Может ли сечением куба плоскостью быть многоугольник с числом сторон большим шести?

Решение. Нет, так как у куба всего шесть граней.

Задача 9. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться: а) правильный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник; г)* прямоугольный треугольник; д)* тупоугольный треугольник?

Решение. а) Если плоскость отсекает от ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины тетраэдра, равные отрезки, то в сечении получается правильный треугольник (рис. 67, а).

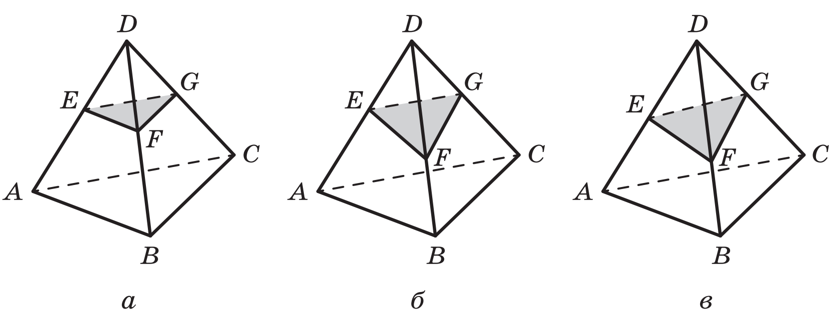


Рис. 67

б) Если плоскость отсекает от ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины тетраэдра, три отрезка, только два из которых равны, то в сечении получается равнобедренный треугольник (рис. 67, б).

в) Если плоскость отсекает от ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины тетраэдра, три неравных отрезка, то в сечении получается разносторонний треугольник (рис. 67, в).

г)*, д)* На рисунке 68 показан пример треугольника BFE, $AE > DE$. Если его вершину F приближать к вершине C тетраэдра, то угол BEF будет приближаться к острому углу BEC. Если его вершину F приближать к вершине D, то угол BEF будет приближаться к тупому углу BED. Между этими положениями вершины F найдется положение, при котором угол BEF прямой.

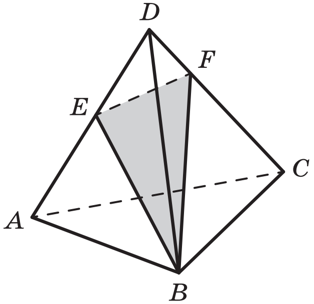


Рис. 68

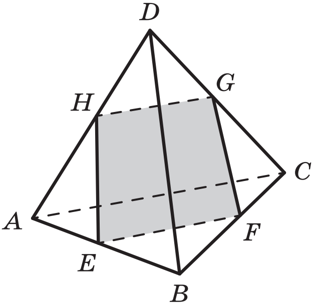


Рис. 69

Задача 10*. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться: а) равнобедренная трапеция; б) неравнобедренная трапеция?

Решение. а) На рисунке 69 показано сечение $EFGH$ правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной ребру AC и непараллельной ребру BD. В четырехугольнике $EFGH$ стороны EF и GH параллельны ребру AC, следовательно, параллельны друг другу, а стороны EH и FG не параллельны. Следовательно, четырехугольник $EFGH$ — трапеция.

Докажем, что эта трапеция равнобедренная. Так как прямая GH параллельна прямой AC, то в равностороннем треугольнике ACD $AH = CG$. Аналогично, так как прямая EF параллельна прямой AC, то в равностороннем треугольнике ABC $AE = CF$. Треугольники AEH и CFG равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $EH = FG$. Значит, трапеция $EFGH$ равнобедренная.

б) Из приведенного доказательства следует, что в сечении правильного тетраэдра плоскостью не может получиться неравнобедренная трапеция.

Задача 11*. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться многоугольник с числом сторон большим четырех?

Решение. Нет, так как у тетраэдра всего четыре грани.

Задача 12*. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?

Решение. Треугольник, четырехугольник, пятиугольник (рис. 70).

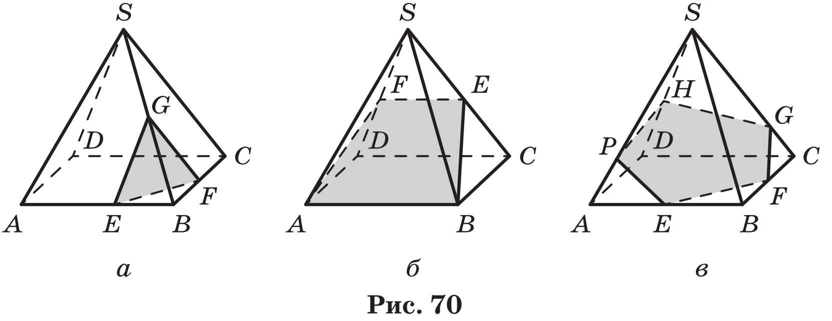


Рис. 70

14. Построение сечений куба

Цель обучения — познакомить учащихся с методами построения сечений многогранников; научить строить сечения куба.

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и A_1D_1. Определите его вид.

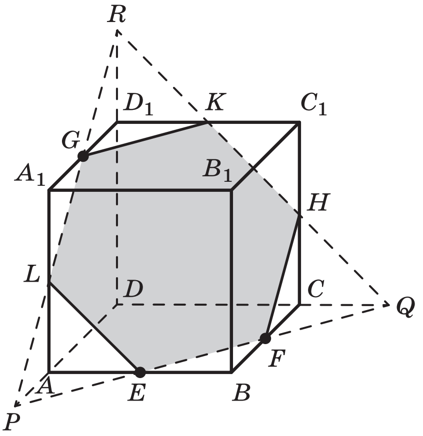


Рис. 71

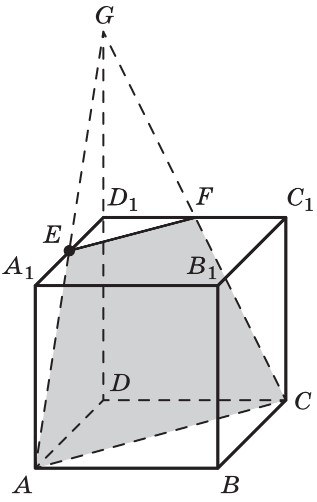


Рис. 72

Решение. Пусть E, F, G — середины ребер соответственно AB, BC и A_1D_1 (рис. 71). Проведем прямую EF и найдем точки P, Q ее пересечения соответственно с прямыми AD, CD. Проведем прямую PG и найдем точки L, R ее пересечения соответственно с прямыми AA_1, DD_1. Проведем прямую QR и найдем точки H, K ее пересечения соответственно с прямыми CC_1, C_1D_1. Соединим отрезками точки E и L, F и H, K и G. Полученный шестиугольник $EFHKGL$ будет искомым сечением.

Задача 2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину ребра A_1D_1. Какой вид оно имеет?

Решение. Пусть E — середина ребра A_1D_1 (рис. 72). Проведем прямую AE и найдем точку G ее пересечения с прямой DD_1. Проведем прямую CG и найдем точку F ее пересечения с прямой C_1D_1. Соединим отрезками точки E и F. Полученная трапеция $ACFE$ будет искомым сечением.

Задача 3. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины ребер AB и AD. Определите его вид.

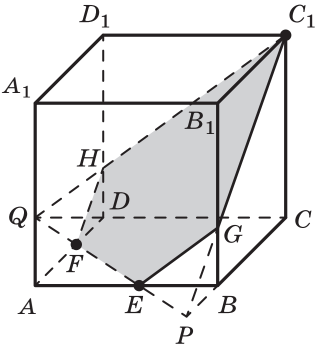


Рис. 73

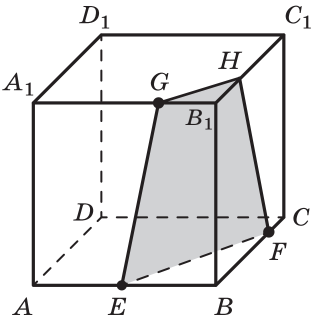


Рис. 74

Решение. Пусть E, F — середины ребер соответственно AB и AD (рис. 73). Проведем прямую EF и найдем точки P, Q ее пересечения соответственно с прямыми BC, CD. Проведем прямую PC_1 и найдем точку G ее пересечения с прямой BB_1. Проведем прямую QC_1 и найдем точку H ее пересечения с прямой DD_1. Соединим отрезками точки E и G, F и H. Полученный пятиугольник EGC_1HF будет искомым сечением.

Задача 4. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 14.14).

Решение. Проведем отрезки EF и EG (рис. 74). Через точку G проведем прямую, параллельную прямой EF, и найдем точку H ее пересечения с прямой B_1C_1. Соединим отрезком точки F и H. Полученный четырехугольник $EFHG$ будет искомым сечением.

Задача 5. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 14.15).

Решение. Проведем прямую EF и найдем точки P, Q ее пересечения соответственно с прямыми AD, CD (рис. 75). Проведем прямую PG и найдем точку H ее пересечения с прямой DD_1. Проведем прямую QH и найдем точку K ее пересечения с прямой CC_1. Соединим отрезками точки E и G, F и K. Полученный пятиугольник $EFKHG$ будет искомым сечением.

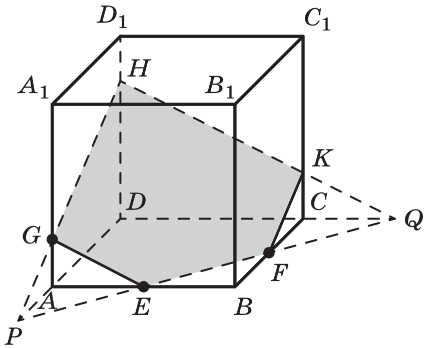


Рис. 75

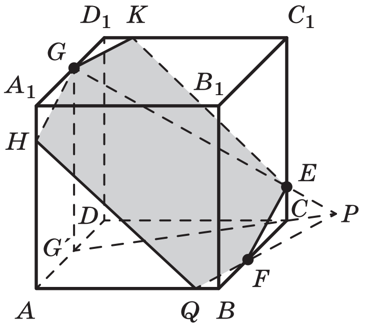


Рис. 76

Задача 6*. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 14.16).

Решение. Соединим отрезком точки E и F (рис. 76). Через точку G проведем прямую, параллельную прямой DD_1, и найдем точку G' ее пересечения с прямой AD. Проведем прямые GE, $G'C$ и найдем точку P их пересечения. Проведем прямую PF и найдем точку Q ее пересечения с прямой AB. Через точку G проведем прямую, параллельную прямой EF, и найдем точку H ее пересечения с прямой AA_1. Соединим отрезком точки H и Q. Через точку E проведем прямую, параллельную прямой QH, и найдем точку K ее пересечения с прямой C_1D_1. Соединим отрезком точки G и K. Полученный шестиугольник $FEKGHQ$ будет искомым сечением.

Задача 7. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F и параллельной прямой BA_1 (рис. 14.17).

Решение. Соединим отрезком точки E и F (рис. 77). Через точку E проведем прямую, параллельную прямой BA_1, и найдем точку G ее пересечения с прямой AA_1. Через точку F проведем прямую, параллель-

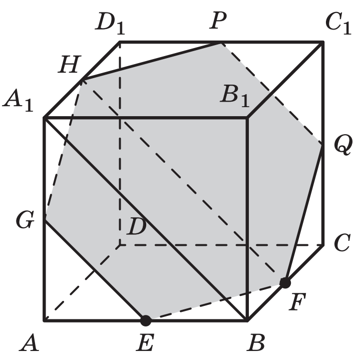


Рис. 77

ную прямой BA_1, и найдем точку H ее пересечения с прямой A_1D_1. Соединим отрезком точки G и H. Через точку H проведем прямую, параллельную прямой EF, и найдем точку P ее пересечения с прямой C_1D_1. Через точку P проведем прямую, параллельную прямой EG, и найдем точку Q ее пересечения с прямой CC_1. Соединим отрезком точки F и Q. Полученный шестиугольник $EFQPHG$ будет искомым сечением.

Задача 8. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной прямой BD_1 и проходящей через: а) точки E, F (рис. 14.18); б) прямую AB_1.

Решение. а) Через точку E проведем прямую, параллельную прямой BD_1, и найдем точку P ее пересечения с прямой AD_1 (рис. 78, а). Проведем прямую FP и найдем точку G ее пересечения с прямой A_1D_1. Через точку G проведем прямую, параллельную прямой EF, и найдем точку H ее пересечения с прямой A_1B_1. Соединим отрезком точки E и H. Полученный четырехугольник $EHGF$ будет искомым сечением.

б) Обозначим E точку пересечения прямых AB_1 и BA_1 (рис. 78, б). Через точку E проведем прямую, параллельную прямой BD_1, и найдем точку F ее пересечения с прямой A_1D_1. Соединим отрезками точку F с точками A и B_1. Полученный треугольник AB_1F будет искомым сечением.

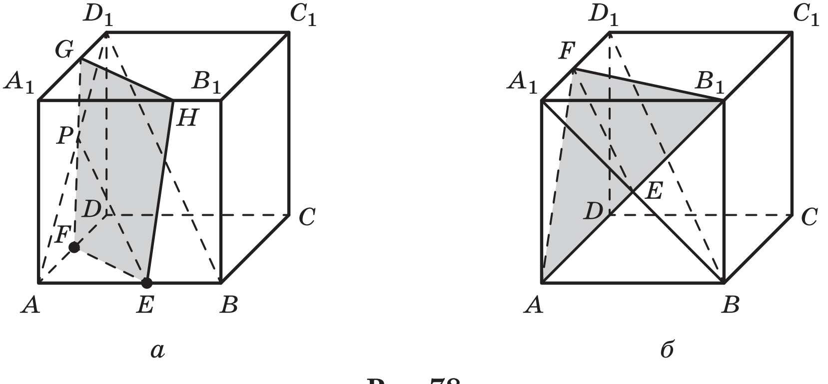


Рис. 78

Задача 9*. На рисунке 14.19 изображена фигура, состоящая из двух кубов. Постройте сечение этой фигуры плоскостью, проходящей через точки E, F, G, отмеченные на рисунке.

Решение. Искомое сечение показано на рисунке 79.

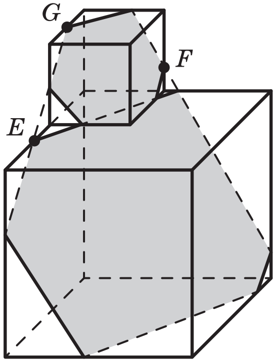


Рис. 79

15. Построение сечений призмы и пирамиды

Цель обучения — привести примеры и научить строить сечения призмы и пирамиды.

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Постройте сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, B и середину ребра A_1C_1 (рис. 15.7). Определите вид сечения.

Решение. Пусть D — середина ребра A_1C_1 (рис. 80). Соединим отрезком точки A и D. Через точку D проведем прямую, параллельную прямой AB, и обозначим E точку ее пересечения с пря-

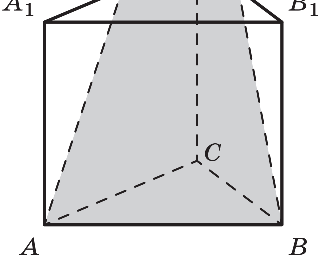


Рис. 80

мой B_1C_1. Соединим отрезком точки B и E. Полученный четырехугольник $ABED$ будет искомым сечением.

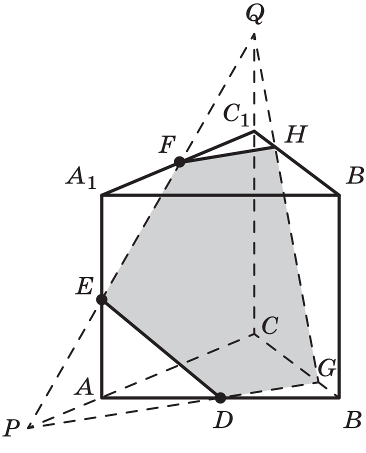


Рис. 81

Задача 2. Постройте сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1 и A_1C_1 (рис. 15.7).

Решение. Пусть D, E, F — середины ребер соответственно AB, AA_1, A_1C_1 (рис. 81). Соединим отрезком точки D и E. Проведем прямую EF и найдем точки ее пересечения P и Q с прямыми соответственно AC и CC_1. Проведем прямую PD и найдем точку G ее пересечения с прямой BC. Проведем прямую QG и найдем точку H ее пересечения с прямой B_1C_1. Полученный пятиугольник $DGHFE$ будет искомым сечением.

Задача 3. Постройте сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через прямую AB_1 и параллельной прямой BC_1.

Решение. Обозначим D точку пересечения прямых AB_1 и BA_1 (рис. 82). Через точку D проведем прямую, параллельную прямой BC_1, и найдем точку E ее пересечения с

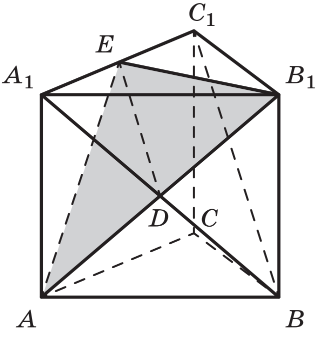


Рис. 82

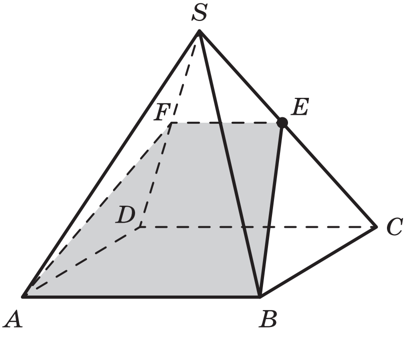


Рис. 83

прямой A_1C_1. Соединим отрезками точку E с точками A и B_1. Полученный треугольник AB_1E будет искомым сечением.

Задача 4. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через вершины A, B и середину ребра SC (рис. 15.8). Определите вид сечения.

Решение. Пусть E — середина ребра SC (рис. 83). Проведем отрезок BE. Через точку E проведем прямую, параллельную AB, и обозначим F ее точку пересечения с прямой SD. Соединим отрезком точки A и F. Полученная равнобедренная трапеция $ABEF$ будет искомым сечением.

Задача 5. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины ребер SA и SC (рис. 15.8).

Решение. Пусть E, F — середины ребер соответственно SC и SA (рис. 84). Обозначим O точку пересечения отрезков AC и BD. Проведем отрезки SO и EF. Обозначим P их точку пересечения. Проведем прямую BP и обозначим G точку ее пересечения с прямой SD. Соединим отрезками точку G с точками E и F. Полученный четырехугольник $BEGF$ будет искомым сечением.

Задача 6. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, B и C_1 (рис. 15.9). Определите вид сечения.

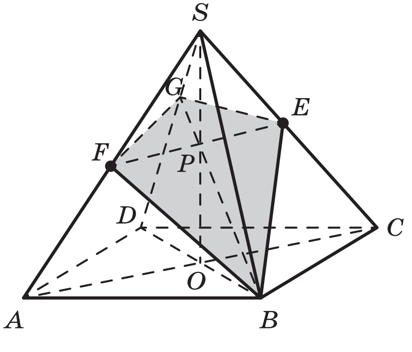


Рис. 84

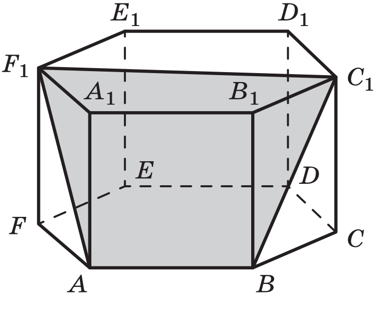


Рис. 85

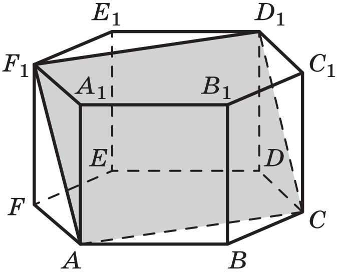


Рис. 86

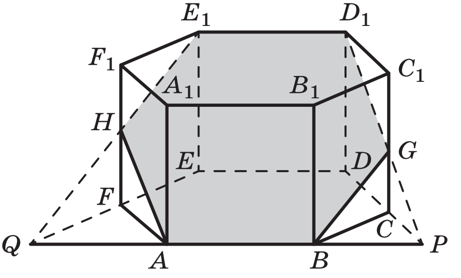


Рис. 87

Решение. Искомым сечением является равнобедренная трапеция (рис. 85).

Задача 7. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и D_1 (рис. 15.9). Определите вид сечения.

Решение. Искомым сечением является прямоугольник (рис. 86).

Задача 8. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, B и E_1 (рис. 15.9). Определите вид сечения.

Решение. Обозначим P и Q точки пересечения прямой AB соответственно с прямыми CD и FE (рис. 87). Проведем прямые PD_1, QE_1 и найдем точки G, H их пересечения соответственно с прямыми CC_1, FF_1. Соединим отрезками точки B и G, A и H. Полученный шестиугольник $ABGD_1E_1H$ будет искомым сечением.

Задача 9. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через прямую AB_1 и параллельной прямой: а) BC_1; б) BD_1; в) BE_1.

Решение. а) Через точку A проведем прямую, параллельную прямой BC_1, и обозначим O_1 точку ее пересечения с прямой B_1E_1 (рис. 88). Соединим отрезком точки F и E_1. Полученная равнобедренная трапеция будет искомым сечением.

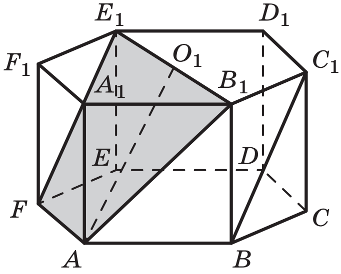


Рис. 88

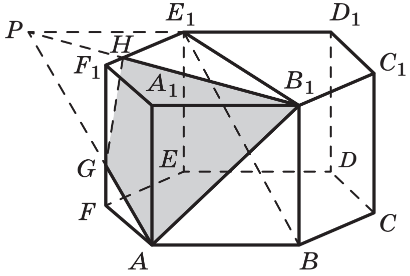


Рис. 89

б) Искомым сечением является та же самая трапеция (рис. 88).

в) Через точку A проведем прямую, параллельную прямой BE_1, и найдем точку P ее пересечения с прямой D_1E_1 (рис. 89). Проведем прямые PA, PB_1 и найдем точки G, H их пересечения соответственно с прямыми FF_1, F_1E_1. Соединим отрезком точки G и H. Полученный четырехугольник AB_1HG будет искомым сечением.

Задача 10. Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершины A, F и середину ребра SC (рис. 15.10). Определите вид сечения.

Решение. Обозначим G середину ребра SC (рис. 90). Через точку G проведем прямую, параллельную прямой AF, и обозначим H точку ее пересечения с прямой SD. Найдем точки P, Q пересечения прямой AF соответственно с прямыми BC, DE. Проведем прямые PG, QH и найдем точки K, L их пересечения соответственно с прямыми SB, SE. Соединим отрезками точки A и K, F и L. Полученный шестиугольник $AKGHLF$ будет искомым сечением.

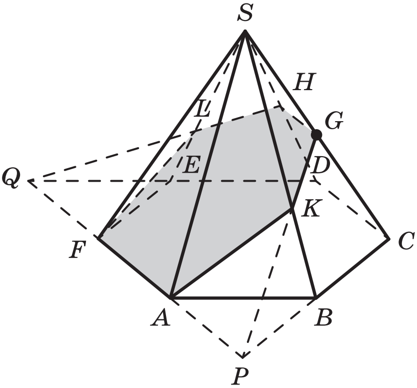


Рис. 90

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Может ли параллельной проекцией трапеции быть параллелограмм?

2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер BC, CC_1 и вершину A_1.

3. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины B, C, E_1.

4. Постройте сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BB_1 и параллельной прямой BC_1.

5*. Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершины B, F и середину ребра SD.

Вариант 2

1. Может ли параллельной проекцией параллелограмма, отличного от прямоугольника, быть прямоугольник?

2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1 и вершину C_1.

3. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, F, C_1.

4. Постройте сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершину B, середину ребра AA_1 и параллельной прямой AC_1.

5*. Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину ребра SE.

Глава IV
Углы и расстояния в пространстве

16. Угол между прямыми. Перпендикулярность прямых

Цель обучения — рассмотреть понятие угла между двумя прямыми в пространстве; определить понятие перпендикулярности прямых; научить решать задачи на нахождение величин углов.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить темы «Угол между прямыми», «Перпендикулярность прямых» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 6*. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и AC; б) AC и BD_1.

Решение. а) Прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AD плоскости ABC (рис. 91). Следовательно, она перпендикулярна прямой AC, лежащей в этой плоскости.

б) Прямая AC перпендикулярна прямым BD и BB_1 плоскости BDD_1. Следовательно, она перпендикулярна прямой BD_1, лежащей в этой плоскости.

Задача 13*. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — точка пересечения диагоналей основания. Докажите, что прямая SO перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости основания этой пирамиды.

Решение. Треугольник SAC равнобедренный ($SA = SC$), SO — его высота (рис. 92). Следовательно, прямая SO перпендикулярна прямой AC. Аналогично, прямая SO перпендикулярна прямой BD. Таким образом, прямая SO перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости ABC. Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача 14*. Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ прямые SA и BD перпендикулярны.

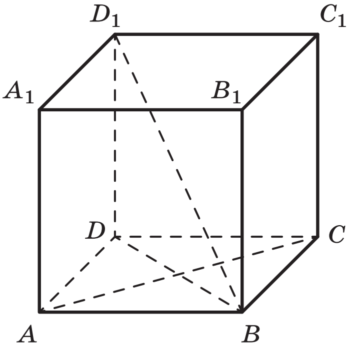


Рис. 91

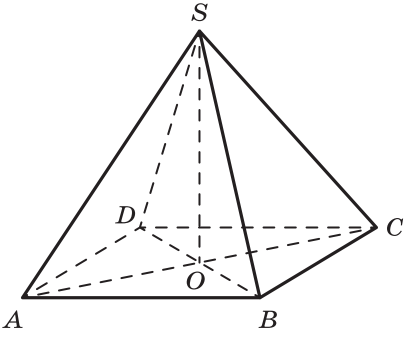


Рис. 92

Решение. Обозначим O точку пересечения диагоналей основания пирамиды (рис. 92). По доказанному выше, прямая BD перпендикулярна прямой SO. Кроме этого, прямая BD перпендикулярна прямой AC. Таким образом, прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости SAC. Следовательно, она перпендикулярна прямой SA, лежащей в плоскости основания этой пирамиды.

Задача 16*. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точка O — точка пересечения наибольших диагоналей основания. Докажите, что прямая SO перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости основания этой пирамиды.

Решение. Треугольник SAD равнобедренный ($SA = SD$), SO — его высота (рис. 93). Следовательно, прямая SO перпендикулярна прямой AD. Аналогично, прямая SO перпендикулярна прямой BE. Таким образом, прямая SO перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости ABC. Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача 17*. Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ прямые SA и BF перпендикулярны.

Решение. Обозначим O точку пересечения наибольших диагоналей основания пирамиды (рис. 93). По доказанному

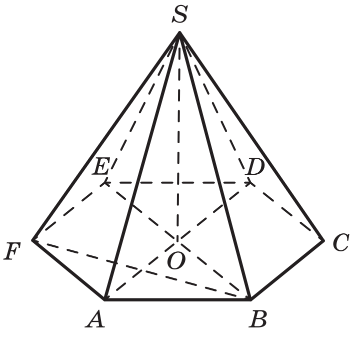


Рис. 93

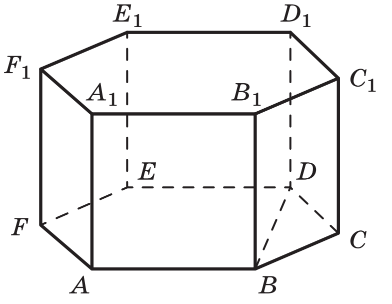


Рис. 94

выше прямая SO перпендикулярна любой прямой плоскости ABC, следовательно, она перпендикулярна прямой BF. Кроме этого, прямая BF перпендикулярна прямой AD. Таким образом, прямая BF перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости SAD. Следовательно, она перпендикулярна прямой SA, лежащей в этой плоскости.

Задача 20. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ боковое ребро перпендикулярно любой прямой, лежащей в плоскости основания этой призмы.

Решение. Рассмотрим, например, боковое ребро AA_1 (рис. 94). Оно перпендикулярно прямым AB и AF плоскости ABC. Следовательно, оно перпендикулярно любой прямой, лежащей в этой плоскости.

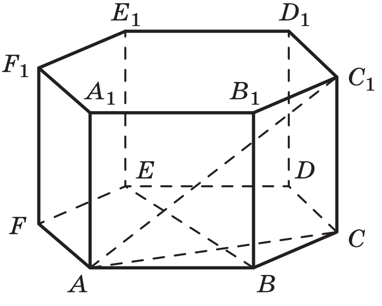


Рис. 95

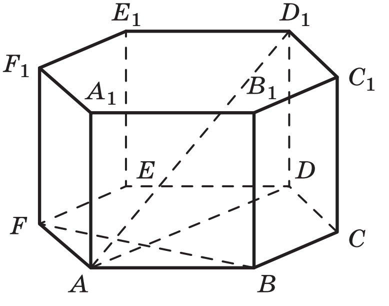


Рис. 96

Задача 21. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ прямые: а) AC_1 и BE; б) AD_1 и BF перпендикулярны.

Решение. а) Прямая BE перпендикулярна прямым AA_1 и AC (рис. 95). Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ACC_1. В частности, она перпендикулярна прямой AC_1.

б) Прямая BF перпендикулярна прямым AA_1 и AD (рис. 96). Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ADD_1. В частности, она перпендикулярна прямой AD_1.

17. Расстояние от точки до прямой

Цель обучения — определить понятие расстояния от точки до прямой в пространстве; рассмотреть примеры и научить решать задачи на нахождение расстояния от точки до прямой.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Расстояние от точки до прямой» учебника геометрии 7—9-го классов.

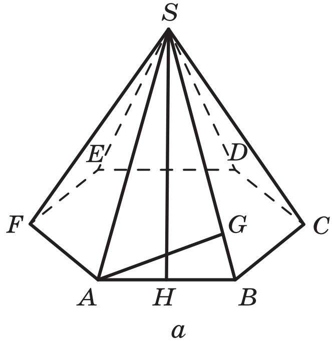
Рекомендации по решению задач

Задача 5*. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 17.16). Найдите расстояние от вершины A до прямой: а) SB; б) SC; в) SD.

Решение. а) Высота SH треугольника SAB равна $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ (рис. 97, а). Расстояние AG от вершины A до прямой SB равно $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

б) Высота SH треугольника SAC равна $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (рис. 97, б). Расстояние AG от вершины A до прямой SC равно $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$.

в) Расстояние от вершины A до прямой SD равно высоте равностороннего треугольника SAD и равно $\sqrt{3}$.



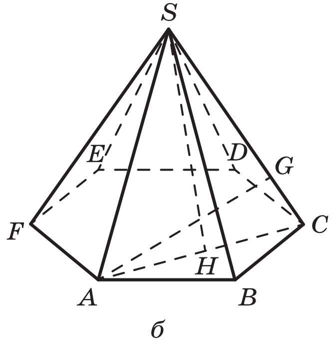


Рис. 97

Задача 6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1 (рис. 17.17). Найдите расстояние от вершины A до прямой: м)* B_1C_1; н)* C_1D_1; п)* BE_1; р)* BC_1; т)* CE_1.

Решение. м) Обозначим O точку пересечения диагоналей BE и CF основания призмы (рис. 98). Прямая AO параллельна прямой B_1C_1. Следовательно, расстояние от вершины A до прямой B_1C_1 равно расстоянию от точки O до прямой B_1C_1. Это расстояние равно высоте OH равнобедренного треугольника OB_1C_1. Оно равно $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

н) Расстояние от вершины A до прямой C_1D_1 равно длине отрезка AC_1 и равно 2.

п) Расстояние от вершины A до прямой BE_1 равно высоте AH прямоугольного треугольника ABE_1 (рис. 99), для которого $AB = 1$, $AE_1 = 2$, $BE_1 = \sqrt{5}$, $AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

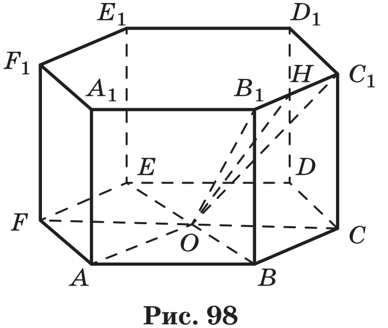


Рис. 98

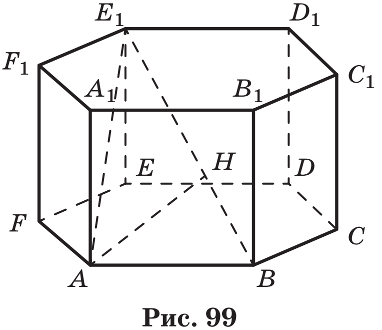


Рис. 99

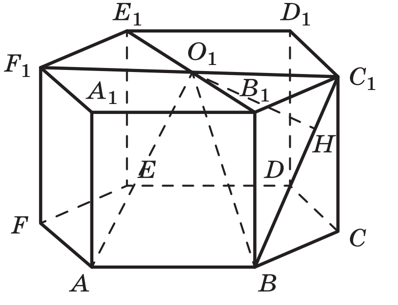


Рис. 100

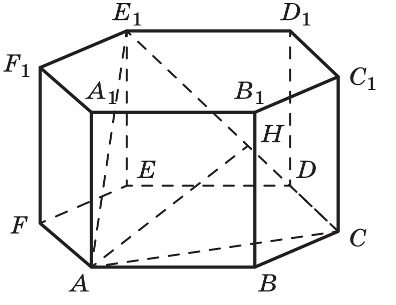


Рис. 101

р) Обозначим O_1 точку пересечения диагоналей B_1E_1 и C_1F_1 основания призмы (рис. 100). Прямая AO_1 параллельна прямой BC_1. Следовательно, расстояние от вершины A до прямой BC_1 равно расстоянию от точки O_1 до прямой BC_1. Это расстояние равно высоте O_1H равнобедренного треугольника O_1C_1B. Оно равно $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

т) Расстояние от вершины A до прямой CE_1 равно высоте AH равнобедренного треугольника ACE_1 (рис. 101), для которого $AC = \sqrt{3}$, $AE_1 = CE_1 = 2$, $AH = \frac{\sqrt{39}}{4}$.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и BA_1.

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — точка пересечения диагоналей основания. Докажите, что прямая SO перпендикулярна прямой AC.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и CD_1.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины B до прямой A_1C_1.

5*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.

Вариант 2

1. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и CD_1.

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точка O — точка пересечения диагоналей основания. Докажите, что прямая SO перпендикулярна прямой BD.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AF_1 и BC_1.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины C до прямой A_1B_1.

5*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой BE_1.

18. Перпендикулярные прямая и плоскость

Цель обучения — определить понятие перпендикулярности прямой и плоскости; сформулировать и доказать признак перпендикулярности; рассмотреть примеры и научить решать задачи на распознавание и доказательство перпендикулярности прямой и плоскости.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.2) данные прямая и плоскость перпендикулярны: а) AA_1 и $A_1B_1C_1$; б) AB и BCC_1; в)* AB_1 и BCD_1; г)* BD_1 и ACB_1.

Решение. а) Прямая AA_1 перпендикулярна пересекающимся прямым A_1B_1 и A_1D_1 плоскости $A_1B_1C_1$ (рис. 102). Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

б) Прямая AB перпендикулярна пересекающимся прямым BC и BB_1 плоскости BCC_1 (рис. 102). Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

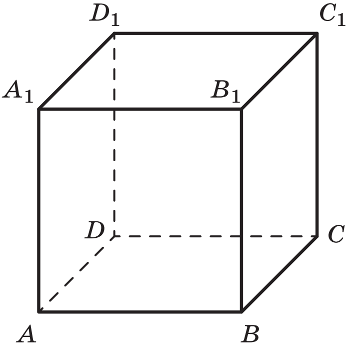


Рис. 102

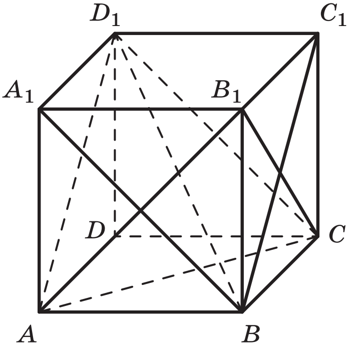


Рис. 103

в) Прямая AB_1 перпендикулярна прямой BA_1 (рис. 103). Кроме того, прямая BC перпендикулярна плоскости ABB_1, следовательно, перпендикулярна прямой AB_1. Таким образом, прямая AB_1 перпендикулярна пересекающимся прямым BA_1 и BC плоскости BCD_1. Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

г) Прямая AB_1 перпендикулярна плоскости BCD_1 (рис. 103). Следовательно, она перпендикулярна прямой BD_1, лежащей в этой плоскости. Аналогично, прямая CB_1 перпендикулярна плоскости ABC_1. Следовательно, она перпендикулярна прямой BD_1, лежащей в этой плоскости. Таким образом, прямая BD_1 перпендикулярна пересекающимся прямым AB_1 и CB_1 плоскости ACB_1. Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

Задача 10. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 18.4) данные прямая и плоскость перпендикулярны: а) AA_1 и ABC; б) AB и BDD_1; в) AC и CDD_1; г) AC и BEE_1; д) AD и CEE_1; е) AB_1 и BDE_1; ж) AD_1 и BFA_1.

Решение. а) Прямая AA_1 перпендикулярна пересекающимся прямым AB и AF плоскости ABC (рис. 104). Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

б) Прямая AB перпендикулярна пересекающимся прямым BB_1 и BD плоскости BDD_1 (рис. 104). Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

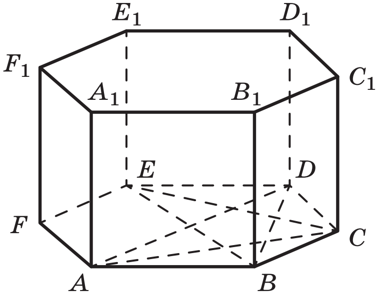


Рис. 104

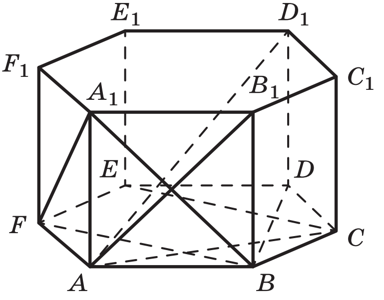


Рис. 105

в) Прямая AC перпендикулярна пересекающимся прямым CC_1 и CD плоскости CDD_1 (рис. 104). Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

г) Прямая AC перпендикулярна пересекающимся прямым BB_1 и BE плоскости BEE_1 (рис. 104). Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

д) Прямая AD перпендикулярна пересекающимся прямым CC_1 и CE плоскости CEE_1 (рис. 104). Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

е) Прямая AB_1 перпендикулярна прямой BA_1 (рис. 105). Кроме того, прямая BD перпендикулярна плоскости ABB_1, следовательно, перпендикулярна прямой AB_1. Таким образом, прямая AB_1 перпендикулярна пересекающимся прямым BA_1 и BD плоскости BDE_1. Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

ж) Прямая BA_1 перпендикулярна плоскости AB_1D_1 (рис. 105). Следовательно, она перпендикулярна прямой AD_1, лежащей в этой плоскости. Аналогично, прямая FA_1 перпендикулярна плоскости AF_1D_1. Следовательно, она перпендикулярна прямой AD_1, лежащей в этой плоскости. Таким образом, прямая AD_1 перпендикулярна пересекающимся прямым BA_1 и FA_1 плоскости BFA_1. Следовательно, она перпендикулярна этой плоскости.

Задача 11*. Докажите, что прямая, проходящая через центры O и O_1 оснований правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 18.4), перпендикулярна плоскостям этих оснований.

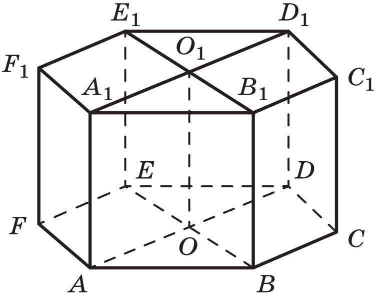


Рис. 106

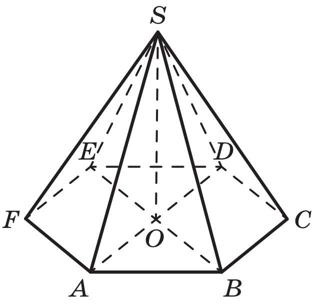


Рис. 107

Решение. Прямая OO_1 перпендикулярна пересекающимся прямым AD и BE плоскости ABC (рис. 106). Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC основания призмы.

Задача 12*. Докажите, что прямая, проходящая через вершину S правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ и центр O ее основания (рис. 18.5), перпендикулярна плоскости этого основания.

Решение. Прямая SO перпендикулярна прямым AD и BE плоскости ABC (рис. 107). Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC основания пирамиды.

19. Ортогональное проектирование. Перпендикуляр и наклонная

Цель обучения — определить понятие ортогонального проектирования; сформулировать и доказать теорему о трех перпендикулярах; рассмотреть примеры и научить решать задачи на нахождение ортогональных проекций и на доказательство перпендикулярности прямых.

Рекомендации по решению задач

Задача 4. Используя теорему о трех перпендикулярах, докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19.6) перпендикулярны прямые: а) AB_1 и BD_1; б) AC_1 и BD; в) AD_1 и CA_1.

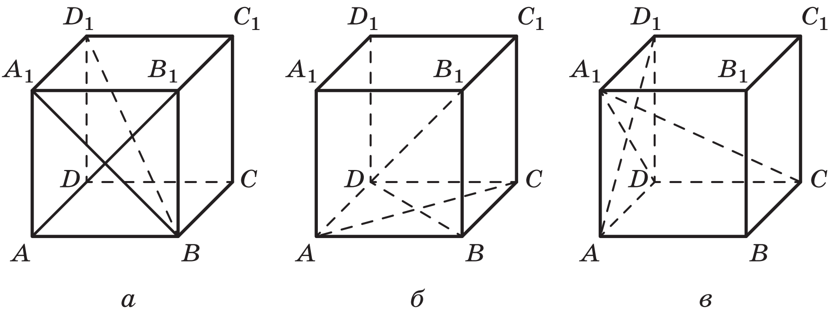


Рис. 108

Решение. а) Ортогональной проекцией прямой BD_1 на плоскость ABB_1 является прямая BA_1, перпендикулярная прямой AB_1 (рис. 108, а). Следовательно, прямая BD_1 перпендикулярна прямой AB_1.

б) Ортогональной проекцией прямой AC_1 на плоскость ABC является прямая AC, перпендикулярная прямой AB (рис. 108, б). Следовательно, прямая AC_1 перпендикулярна прямой BD.

в) Ортогональной проекцией прямой CA_1 на плоскость ADD_1 является прямая DA_1, перпендикулярная прямой AD_1 (рис. 108, в). Следовательно, прямая CA_1 перпендикулярна прямой AD_1.

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер соответственно CD и A_1D_1 (рис. 19.7). Докажите, что прямые AE и BF перпендикулярны.

Решение. Ортогональная проекция BG прямой BF на плоскость ABC перпендикулярна прямой AE (рис. 109). Следовательно, прямая BF также перпендикулярна прямой AE.

Задача 6. Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. 19.8) боковое ребро SA перпендикулярно диагонали основания BD.

Решение. Ортогональной проекцией прямой SA на плоскость ABC является прямая AC, перпендикулярная прямой BD (рис. 110). Следовательно, прямая SA также перпендикулярна прямой BD.

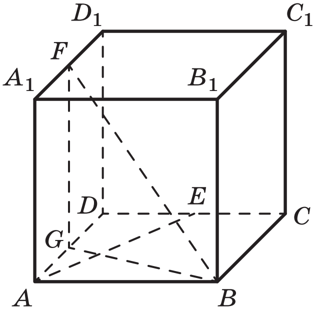


Рис. 109

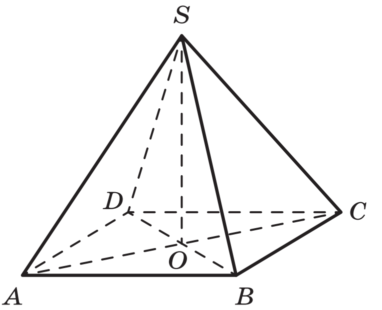


Рис. 110

Задача 7. Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (рис. 19.9) боковое ребро SA перпендикулярно диагонали основания BF.

Решение. Ортогональной проекцией прямой SA на плоскость ABC является прямая AD, перпендикулярная прямой BF (рис. 111). Следовательно, прямая SA также перпендикулярна прямой BF.

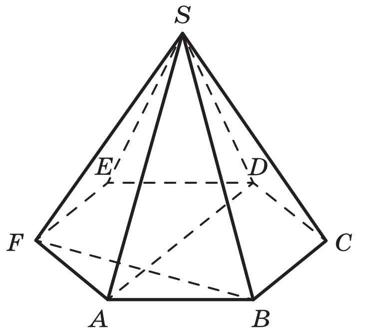
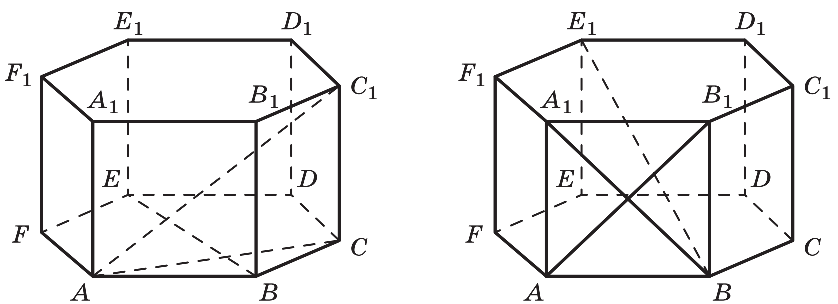


Рис. 111

Задача 8. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 19.10) перпендикулярны прямые: а) AC_1 и BE; б) AB_1 и BE_1.



а *б*

Рис. 112

Решение. а) Ортогональной проекцией прямой AC_1 на плоскость ABC является прямая AC, перпендикулярная прямой BE (рис. 112, а). Следовательно, прямая AC_1 также перпендикулярна прямой BE.

б) Ортогональной проекцией прямой BE_1 на плоскость ABB_1 является прямая BA_1, перпендикулярная прямой AB_1 (рис. 112, б). Следовательно, прямая BE_1 также перпендикулярна прямой AB_1.

Задача 9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19.11) изобразите ортогональную проекцию на плоскость ACC_1 отрезка: а) DD_1; б) BA_1; в) DB_1.

Решение. а) Искомой проекцией является отрезок OO_1 (рис. 113).

б) Искомой проекцией является отрезок OA_1 (рис. 113).

в) Искомой проекцией является отрезок OO_1 (рис. 113).

Задача 10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 19.12) изобразите ортогональную проекцию на плоскость BCC_1 отрезка: а) AA_1; б) AB; в) AC_1.

Решение. а) Искомой проекцией является отрезок DD_1, соединяющий середины ребер соответственно BC и B_1C_1 (рис. 114).

б) Искомой проекцией является отрезок BD (рис. 114).

в) Искомой проекцией является отрезок DC_1 (рис. 114).

Задача 11*. Докажите, что если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости,

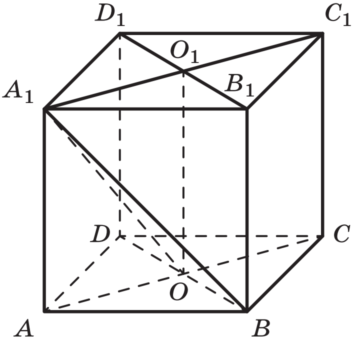


Рис. 113

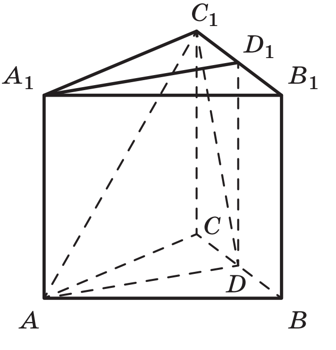


Рис. 114

то она перпендикулярна ортогональной проекции этой наклонной на данную плоскость.

Решение. Пусть b — прямая, лежащая в плоскости π, прямая a — наклонная к этой плоскости, пересекающая плоскость π в некоторой точке B. Выберем на прямой a какую-нибудь точку A, отличную от B, и обозначим A' ее ортогональную проекцию на плоскость π (рис. 115). Прямая a', проходящая через точки A', B, будет ортогональной проекцией наклонной a.

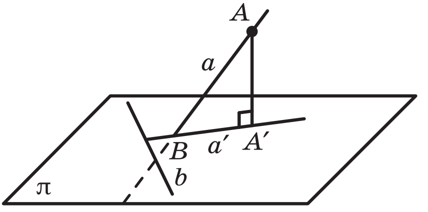


Рис. 115

Так как прямая AA' перпендикулярна плоскости π, то она будет перпендикулярна прямой b. Так как прямая b перпендикулярна прямой a, то она будет перпендикулярна и плоскости, определяемой прямыми a и AA'. Следовательно, прямая b будет перпендикулярна прямой a', лежащей в этой плоскости.

Задача 12*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите сечение плоскостью, проходящей через вершину A и перпендикулярной прямой BE, где E — середина ребра: а) A_1B_1; б) A_1D_1.

Решение. Искомые сечения показаны на рисунке 116, а, б, где F, G — середины соответствующих ребер.

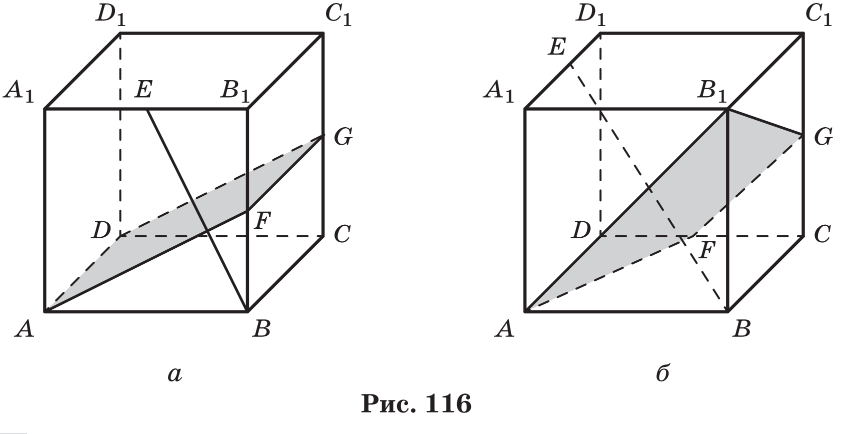


Рис. 116

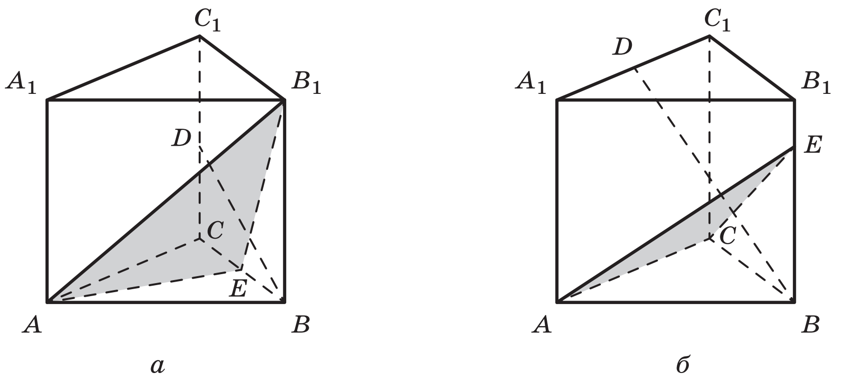


Рис. 117

Задача 13*. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проведите сечение плоскостью, проходящей через вершину A и перпендикулярной прямой BD, где D — середина ребра: а) CC_1; б) A_1C_1.

Решение. а) Искомое сечение показано на рисунке 117, а. Точка E — середина ребра BC.

б) Искомое сечение показано на рисунке 117, б. Отрезок B_1E равен одной четвертой.

Задача 14*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ проведите сечение плоскостью, проходящей через вершину A и перпендикулярной прямой: а) DE_1; б) BE_1.

Решение. Искомые сечения показаны на рисунке 118, а, б.

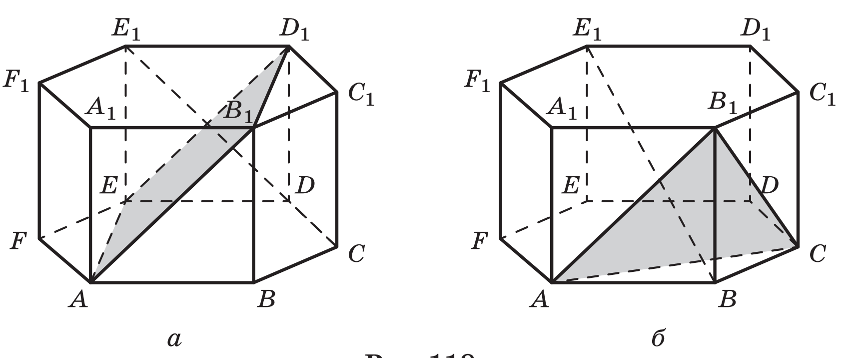


Рис. 118

20. Расстояние от точки до плоскости

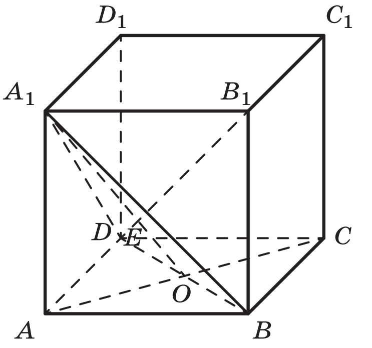
Цель обучения — определить понятие расстояния от точки до плоскости; рассмотреть примеры и научить решать задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости.

Рекомендации по решению задач

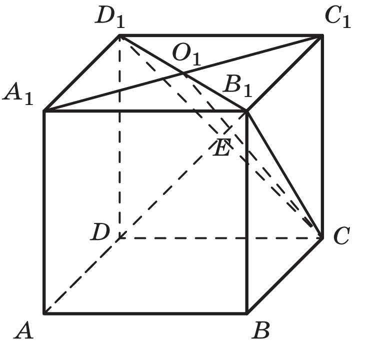
Задача 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от вершины A до плоскости: в)* BDA_1; г)* CB_1D_1.

Решение. в) Обозначим O точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ (рис. 119, а). Напомним, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости BDA_1. Обозначим E точку пересечения прямых AC_1 и A_1O. Длина отрезка AE равна искомому расстоянию от вершины A до плоскости BDA_1. Для ее нахождения рассмотрим прямоугольный треугольник OAA_1. В этом треугольнике $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $AA_1 = 1$, $OA_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Тогда высота AE этого треугольника равна $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

г) Обозначим O_1 точку пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 119, б). Пусть E — точка пересечения прямых AC_1 и CO_1. Длина отрезка AE равна искомому расстоянию от вершины A до плоскости CB_1D_1. Так как диагональ



а



б

Рис. 119

куба равна $\sqrt{3}$, а длина отрезка C_1E равна $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, то длина отрезка AE равна $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 3*. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O_1 — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 20.8). Найдите расстояние между прямой AO_1 и плоскостью BDC_1.

Решение. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра O_1E, опущенного из точки O_1 на плоскость BDC_1 (рис. 120). Оно равно $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

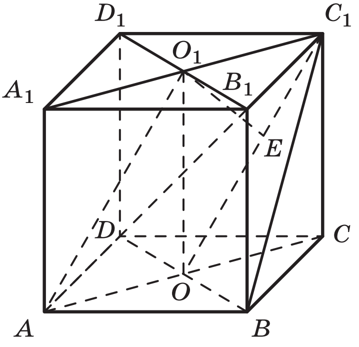


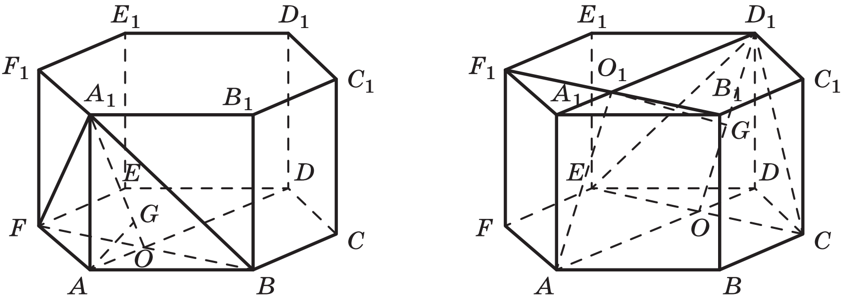
Рис. 120

Задача 4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 (рис. 20.10), найдите расстояние от вершины A до плоскости: з)* BFA_1; и)* CED_1.

Решение. з) Обозначим O точку пересечения прямых BF и AD (рис. 121, а). Расстояние от точки A до плоскости BFA_1 равно высоте AG прямоугольного треугольника OAA_1. В этом треугольнике $AO = \dfrac{1}{2}$, $AA_1 = 1$, $OA_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, высота AG равна $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

и) Обозначим O точку пересечения прямых CE и AD, O_1 — точку пересечения прямых B_1F_1 и A_1D_1 (рис. 121, б). Расстояние от точки A до плоскости CED_1 равно длине перпендикуляра O_1G, опущенного из точки O_1 на плоскость CED_1. $O_1G = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Задача 6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1



а *б*

Рис. 121

(рис. 20.10), найдите расстояние между плоскостями: д)* AB_1F_1 и CED_1.

Решение. Искомое расстояние равно расстоянию от вершины A до плоскости CED_1, которое найдено при решении задачи 4. Оно равно $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Задача 11*. Докажите, что если боковые ребра пирамиды равны, то ее высота проходит через центр окружности, описанной около основания этой пирамиды.

Решение. Пусть SO — высота пирамиды, A и B — две вершины основания пирамиды (рис. 122). Докажем, что $OA = OB$. Действительно, прямоугольные треугольники SOA и SOB равны по гипотенузе и катету ($SA = SB$,

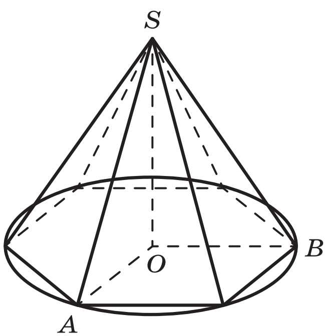


Рис. 122

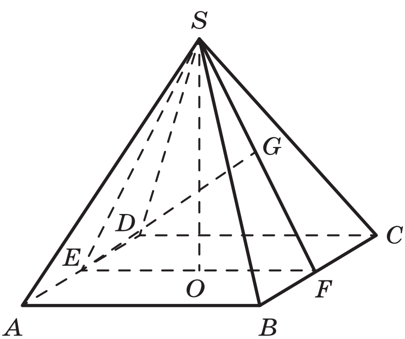


Рис. 123

SO — общий катет). Следовательно, $OA = OB$. Так как вершины A и B были взяты произвольно, то это означает, что расстояния от точки O до вершин основания пирамиды равны, т. е. точка O является центром окружности, описанной около основания этой пирамиды.

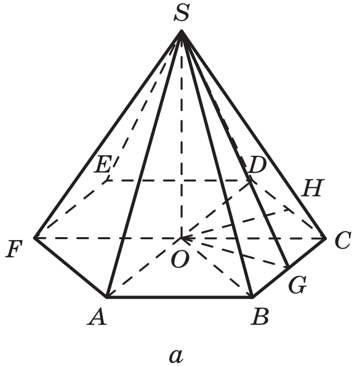
Задача 14*. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Решение. Обозначим E, F середины ребер соответственно AD и BC (рис. 123). Искомое расстояние равно высоте EG равнобедренного треугольника SEF. Оно равно $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 15*. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от вершины A до плоскости: а) SBC; б) SCD.

Решение. а) Обозначим O центр основания пирамиды, G — середину ребра BC (рис. 124, а). Искомое расстояние равно высоте OH прямоугольного треугольника SOG. В этом треугольнике $SO = \sqrt{3}$, $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Следовательно, $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

б) Пусть O — центр основания пирамиды, P, Q — середины ребер соответственно AF, CD (рис. 124, б). Искомое



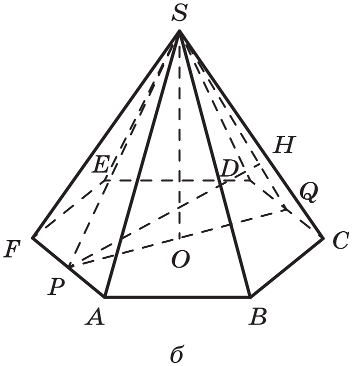


Рис. 124

расстояние равно высоте PH равнобедренного треугольника SPQ. В этом треугольнике $SP = SQ = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $PQ = \sqrt{3}$, $SO = \sqrt{3}$. Следовательно, $PH = \frac{2\sqrt{15}}{5}$.

Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 3.

2. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая CC_1 перпендикулярна прямой AD.

3. Докажите, что равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, имеют равные ортогональные проекции на эту плоскость.

4*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до плоскости CFA_1.

5*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB и перпендикулярной прямой DB_1.

Вариант 2

1. Найдите высоту правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 3.

2. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая CD перпендикулярна прямой AD_1.

3. Докажите, что если две наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, имеют равные ортогональные проекции, то эти наклонные равны.

4*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины B до плоскости ADC_1.

5*. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведите сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AA_1 и перпендикулярной прямой BC_1.

21. Угол между прямой и плоскостью

Цель обучения — определить понятие угла между прямой и плоскостью; научить решать задачи на нахождение углов.

Рекомендации по решению задач

Задача 3*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.4) найдите косинус угла между прямой BC_1 и плоскостью DA_1C_1.

Решение. Рассмотрим единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 125). Обозначим E точку пересечения плоскости DA_1C_1 и прямой BD_1. Прямая C_1E будет ортогональной проекцией прямой BC_1 на плоскость DA_1C_1. Искомый угол равен углу BC_1E. В прямоугольном треугольнике BC_1E $BC_1 = \sqrt{2}$, $C_1E = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Следовательно, $\cos\angle BC_1E = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 5*. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 (рис. 21.5), найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

Решение. Обозначим O центр основания пирамиды, E, F — середины ребер соответственно AD, BC (рис. 126). Искомый угол равен углу SEO. В прямоугольном треугольнике SEO $EO = \dfrac{1}{2}$, $SE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\cos\angle SEO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

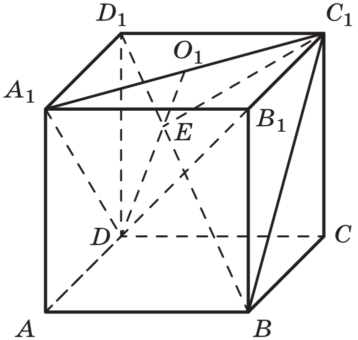


Рис. 125

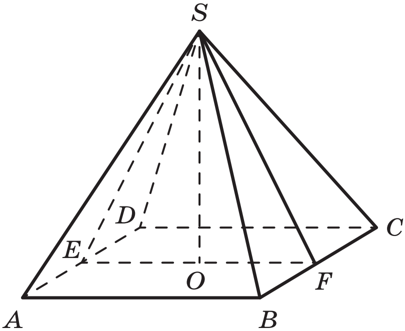


Рис. 126

Задача 12*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 (рис. 21.9), найдите косинус угла между прямой AD_1 и плоскостью ABB_1.

Решение. Ортогональной проекцией прямой AD_1 на плоскость ABB_1 является прямая AB_1 (рис. 127). Искомый угол равен углу B_1AD_1. В прямоугольном треугольнике B_1AD_1 $AB_1 = \sqrt{2}$, $AD_1 = \sqrt{5}$. Следовательно, $\cos\angle B_1AD_1 = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

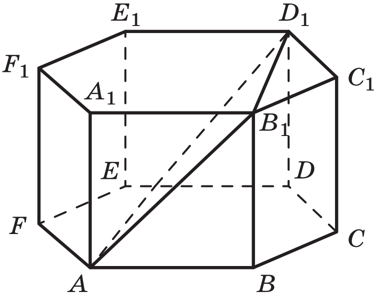


Рис. 127

22. Двугранный угол. Угол между плоскостями

Цель обучения — определить понятия двугранного угла и угла между плоскостями; сформулировать и доказать признак перпендикулярности двух плоскостей; научить находить углы и доказывать перпендикулярность плоскостей.

Рекомендации по решению задач

Задача 14*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCD_1.

Решение. Линией пересечения данных плоскостей является прямая BD_1 (рис. 128). Плоскость ACB_1 перпендикулярна прямой BD_1 и пересекает данные плоскости по прямым AF и CE. Угол между этими прямыми равен 60°. Следовательно, угол между данными плоскостями равен 60°.

Задача 16*. Найдите косинус двугранного угла, образованного соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 (рис. 22.8).

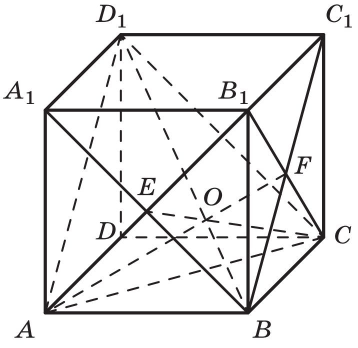


Рис. 128

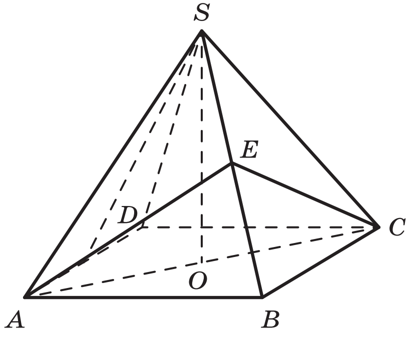


Рис. 129

Решение. Обозначим E середину ребра SB данной пирамиды (рис. 129). Угол AEC является линейным углом двугранного угла, образованного боковыми гранями SAB и SBC. В треугольнике ACE $AC = \sqrt{2}$, $AE = CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов находим $\cos\angle AEC = -\frac{1}{3}$.

Задача 17*. Найдите косинус двугранного угла, образованного соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. 22.9).

Решение. Из вершин A и C пирамиды опустим перпендикуляры соответственно AG и CG на прямую SB (рис. 130). Угол AGC является линейным углом двугранного угла, образованного боковыми гранями SAB и SBC. В треугольнике ACG $AC = \sqrt{3}$, $AG = CG = \frac{\sqrt{15}}{4}$. По теореме косинусов находим $\cos\angle AGC = -\frac{3}{5}$.

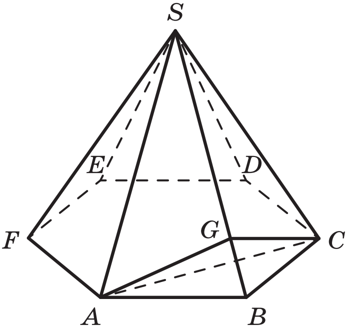


Рис. 130

23. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Цель обучения — определить понятие расстояние между двумя скрещивающимися прямыми; научить находить это расстояние.

Рекомендации по решению задач

Задача 5*. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 23.12), стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми: а) SA и BC; б) SA и CD.

Решение. а) Расстояние между прямыми SA и BC равно расстоянию между прямой BC и плоскостью SAD (рис. 131). Оно равно $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Расстояние между прямыми SA и CD равно расстоянию между прямой CD и плоскостью SAF (рис. 131). Оно равно $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

Задача 6*. Для октаэдра $ABCDEF$ (рис. 23.13), все ребра которого равны 1, найдите расстояние между прямыми AE и BF.

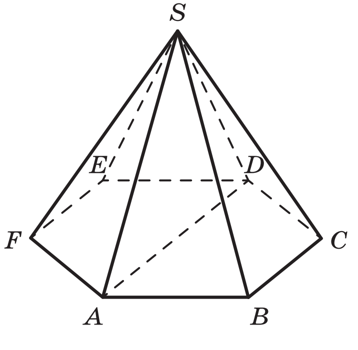


Рис. 131

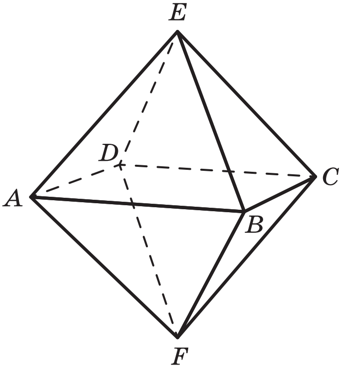


Рис. 132

Решение. Расстояние между прямыми AE и BF равно расстоянию между параллельными плоскостями ADE и BCF (рис. 132). Оно равно $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

Задача 7*. Докажите, что для любых двух скрещивающихся прямых общий перпендикуляр существует и единственен.

Решение. Пусть a и b — две скрещивающиеся прямые. Через какую-нибудь точку прямой b проведем прямую a', параллельную прямой a. Через прямые a' и b проведем плоскость β (рис. 133).

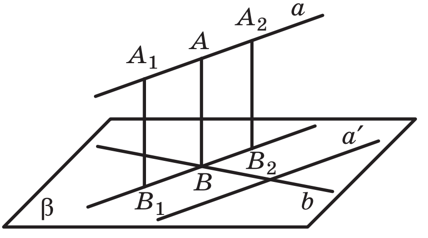


Рис. 133

Она будет параллельна прямой a. Из каких-нибудь двух точек A_1, A_2 прямой a опустим перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2 на плоскость β. Обозначим B точку пересечения прямой B_1B_2 с прямой b. Через точку B проведем прямую, параллельную прямым A_1B_1, A_2B_2. Обозначим A ее точку пересечения с прямой a. Отрезок AB будет искомым общим перпендикуляром к прямым a, b. Действительно, он перпендикулярен плоскости β, следовательно, перпендикулярен прямым b и a'. Значит, перпендикулярен прямым a и b.

Докажем, что общий перпендикуляр к данным скрещивающимся прямым единственен. Действительно, он должен лежать в плоскости $A_1A_2B_2$. Следовательно, один его конец должен совпадать с точкой B, но тогда другой его конец должен совпадать с точкой A. Значит, этот общий перпендикуляр будет совпадать с отрезком AB.

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между прямыми AA_1 и BD_1.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SAB и ABC.

4*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины B до прямой C_1D_1.

5*. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и SC.

Вариант 2

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между прямыми BC и AC_1.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой BC_1 и плоскостью ACC_1.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SBC и ABC.

4*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до прямой E_1F_1.

5*. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми AF и SB.

24*. Площадь сечения

Цель обучения — сформулировать и доказать теорему о площади ортогональной проекции фигуры; научить применять ее для нахождения площадей сечений многогранников.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Площадь» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Найдите площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через: г)* вершины A, C и середину ребра A_1D_1; д)* середины ребер AB, BC, A_1D_1; е)* середины ребер AB, BC, DD_1.

Решение. г) Искомым сечением является равнобедренная трапеция $ACEF$ (рис. 134, а).

$AC = \sqrt{2}$, $EF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, высота GO равна $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Площадь трапеции равна $1\dfrac{1}{8}$.

д) Искомым сечением является правильный шестиугольник $EFGHPQ$ (рис. 134, б), сторона которого равна $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Площадь этого шестиугольника равна $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

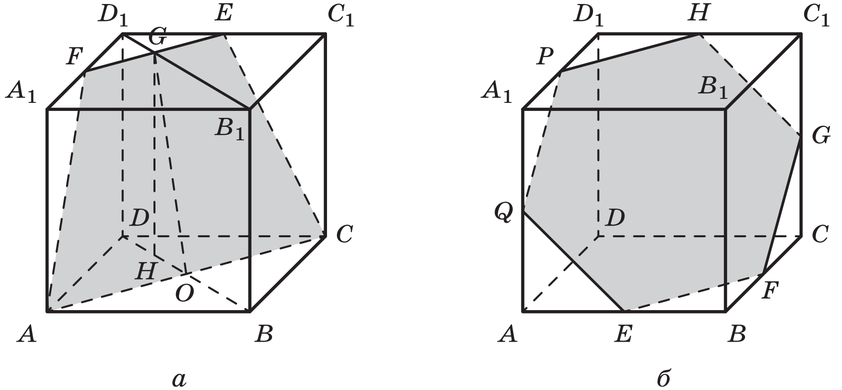


Рис. 134

е) Искомым сечением является пятиугольник $EFHGI$ (рис. 135). Для нахождения его площади воспользуемся теоремой о площади ортогональной проекции.

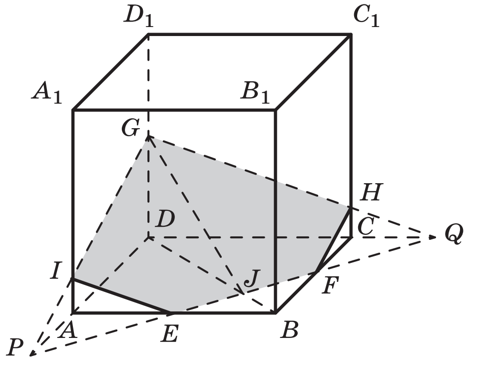


Рис. 135

Ортогональной проекцией этого пятиугольника на плоскость ABC является пятиугольник $AEFCD$, площадь которого равна $\frac{7}{8}$. Угол между плоскостью сечения и плоскостью проектирования равен углу GJD. Его косинус равен $\frac{3\sqrt{11}}{11}$. Следовательно, площадь сечения равна $\frac{7\sqrt{11}}{24}$.

Задача 3. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, плоскостью, проходящей через: в)* середины ребер AA_1, BB_1, A_1C_1; г)* середины ребер AB, AA_1 и A_1C_1.

Решение. в) Искомым сечением является равнобедренная трапеция $DEFG$ (рис. 136, а). $DE = 1$, $FG = \frac{1}{2}$, высота GH равна $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Следовательно, площадь сечения равна $\frac{3\sqrt{7}}{16}$.

г) Искомым сечением является пятиугольник $DGHFE$ (рис. 136, б). Он состоит из двух равных прямоугольных трапеций $DGPE$ и $FHPE$. Основания этих трапеций

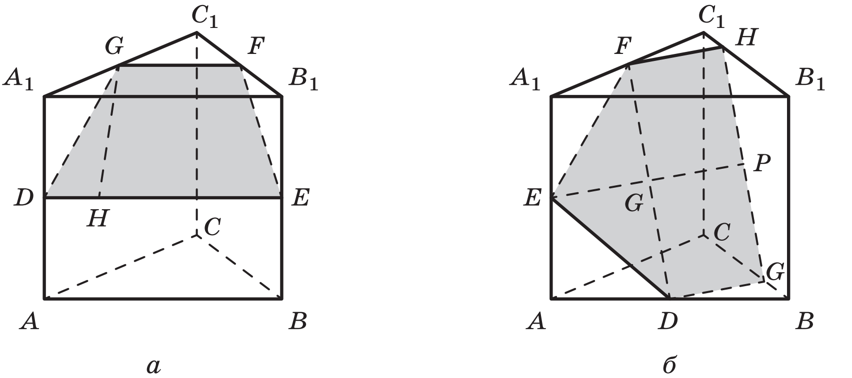


Рис. 136

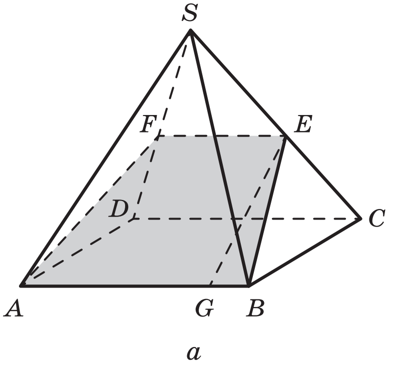
равны $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, высоты DQ и FQ равны $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Следовательно, площадь сечения равна $\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$.

Задача 4. Найдите площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, плоскостью, проходящей через: г) вершины A, B и середину ребра SC; д)* вершину A и середины ребер SB и SD.

Решение. г) Искомым сечением является равнобедренная трапеция $ABEF$ (рис. 137, а). $AB = 1$, $EF = \dfrac{1}{2}$, высота EG равна $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$. Следовательно, площадь сечения равна $\dfrac{3\sqrt{11}}{16}$.

д) Искомым сечением является четырехугольник $AEGF$ (рис. 137, б). Его диагонали AG, EF перпендикулярны и равны соответственно $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ и $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, площадь сечения равна $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Задача 6. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, плоскостью, проходящей через точки: г)* A, B и D_1.



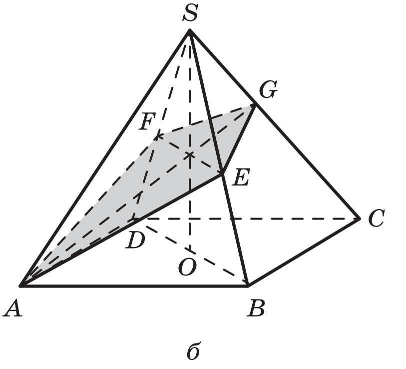


Рис. 137

Решение. Искомым сечением является шестиугольник $ABGD_1E_1H$ (рис. 138). Он состоит из двух равных равнобедренных трапеций $ABGH$ и D_1E_1HG.

Основания этих трапеций равны 1 и 2, высоты равны 1. Следовательно, площадь сечения равна 3.

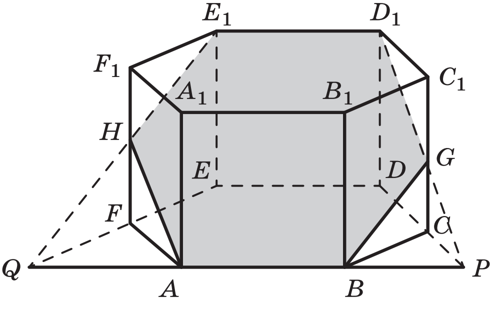


Рис. 138

Глава V
Симметрия

25. Центральная симметрия

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием центральной симметрии; научить распознавать центрально-симметричные фигуры; находить центры симметрии.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Центральная симметрия» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 10*. Докажите, что центрально-симметричный многогранник имеет четное число вершин, ребер и граней.

Решение. Для каждой вершины центрально-симметричного многогранника имеется центрально-симметричная вершина. Следовательно, все вершины такого многогранника разбиваются на пары центрально-симметричных вершин. Значит, число вершин центрально-симметричного многогранника четно. Аналогично, число ребер и граней центрально-симметричного многогранника четно.

Задача 11*. На рисунке 25.9 изображен тетраэдр. Изобразите центрально-симметричный ему тетраэдр с центром O.

Решение. Центрально-симметричный тетраэдр изображен на рисунке 139.

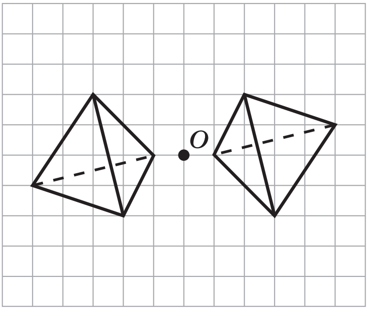


Рис. 139

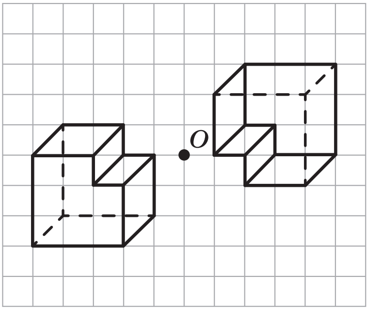


Рис. 140

Задача 12. На рисунке 25.10 изображен многогранник. Изобразите центрально-симметричный ему многогранник с центром O.

Решение. Центрально-симметричный многогранник изображен на рисунке 140.

26. Осевая симметрия

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием осевой симметрии; научить распознавать фигуры, имеющие ось симметрии; находить оси симметрии.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Осевая симметрия» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 4. Сколько осей симметрии имеет: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр? (рис. 26.9.)

Решение. а) Октаэдр имеет 3 оси симметрии, проходящие через противолежащие вершины, и 6 осей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер. Всего 9 осей симметрии.

б) Икосаэдр имеет 15 осей симметрии, проходящих через середины противолежащих ребер.

в) Додекаэдр имеет 15 осей симметрии, проходящих через середины противолежащих ребер.

Задача 5*. Приведите примеры фигур, у которых: а) есть центр симметрии, но нет оси симметрии; б) есть ось симметрии, но нет центра симметрии.

Решение. а) Параллелепипед, отличный от прямоугольного параллелепипеда.

б) Правильная четырехугольная пирамида.

Задача 6*. Изобразите пирамиду, симметричную правильной треугольной пирамиде $SABC$ относительно прямой, содержащей высоту SO (рис. 26.10). Какой многогранник будет общей частью этих пирамид?

Решение. Искомая пирамида $SA'B'C'$ изображена на рисунке 141. Общей частью пирамид $SABC$ и $SA'B'C'$ будет правильная шестиугольная пирамида.

Задача 7*. Изобразите призму, симметричную правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой OO_1, проходящей через центры окружностей, описанных около оснований этой призмы (рис. 26.11). Какой многогранник будет общей частью этих призм?

Решение. Искомая призма изображена на рисунке 142. Общей частью призм будет правильная шестиугольная призма.

Задача 8*. Изобразите куб, симметричный кубу $ABCDA_1B_1C_1D_1$ относительно прямой, проходящей через противолежащие вершины B и D_1 (рис. 26.12). Какой многогранник будет общей частью этих кубов?

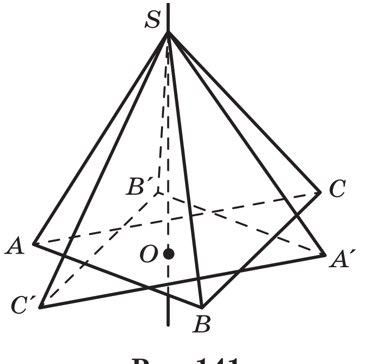


Рис. 141

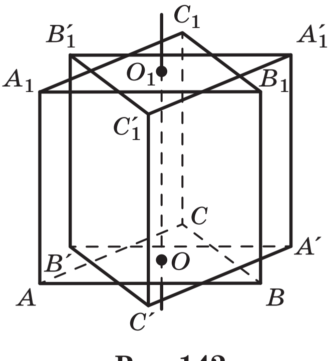


Рис. 142

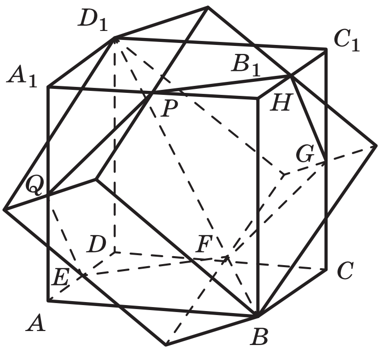


Рис. 143

Решение. Искомый куб изображен на рисунке 143. Общей частью кубов будет многогранник, составленный из двух правильных шестиугольных пирамид с вершинами B, D_1 и общим основанием $EFGHPQ$.

27. Зеркальная симметрия

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием зеркальной симметрии; научить распознавать зеркально-симметричные фигуры; находить плоскости симметрии.

Рекомендации по решению задач

Задача 4*. Сколько плоскостей симметрии имеет: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр? (рис. 27.9.)

Решение. а) Октаэдр имеет 3 плоскости симметрии, проходящие через противолежащие ребра, и 6 плоскостей симметрии, проходящих через середины противолежащих ребер и перпендикулярных этим ребрам. Всего 9 плоскостей симметрии.

б) Икосаэдр имеет 15 плоскостей симметрии, проходящих через противолежащие ребра.

в) Додекаэдр имеет 15 плоскостей симметрии, проходящих через противолежащие ребра.

Задача 5*. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть центр симметрии, но нет плоскости симметрии; б) есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии.

Решение. а) Наклонный параллелепипед имеет центр симметрии, но может не иметь плоскости симметрии.

б) Пирамида, в основании которой параллелограмм, может иметь ось симметрии, но не имеет плоскости симметрии.

Задача 6*. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть плоскость симметрии, но нет центра симметрии; б) есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

Решение. а) Правильная треугольная пирамида имеет плоскости симметрии, но не имеет центра симметрии.

б) Правильная треугольная пирамида имеет плоскости симметрии, но не имеет осей симметрии.

Задача 7*. Изобразите призму, зеркально-симметричную правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно плоскости BCC_1 (рис. 27.4). Какой многогранник будет объединением этих призм?

Решение. Искомая призма изображена на рисунке 144. Объединением призм является четырехугольная призма $ABDCA_1B_1D_1C_1$.

Задача 8*. Изобразите пирамиду, зеркально-симметричную правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны, относительно плоскости ABC (рис. 27.7). Какой многогранник будет объединением этих пирамид?

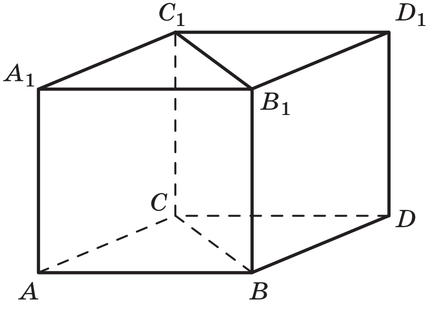


Рис. 144

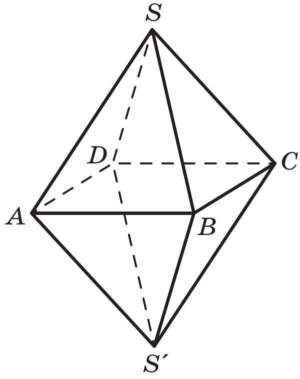


Рис. 145

Решение. Искомая пирамида изображена на рисунке 145. Объединением пирамид является октаэдр.

28. Поворот. Симметрия n-го порядка

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием поворота и симметрии n-го порядка; научить изображать фигуры, полученные поворотом данных фигур; находить оси симметрии n-го порядка.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить темы «Поворот», «Симметрия n-го порядка» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 12*. Сколько и каких осей симметрии у октаэдра (рис. 28.7)?

Решение. Шесть осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противолежащие ребер; четыре оси симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противолежащих граней; три оси 4-го порядка, проходящие через противолежащие вершины.

Задача 13*. Сколько и каких осей симметрии у икосаэдра (рис. 28.8)?

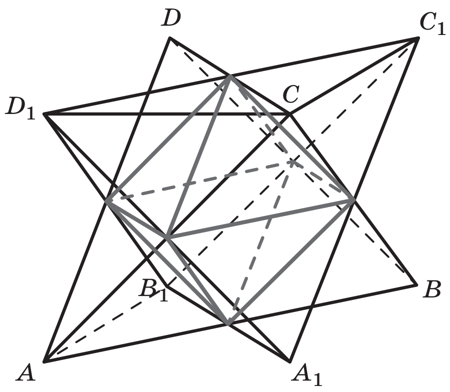


Рис. 146

Решение. Пятнадцать осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противолежащих ребер; десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противолежащих граней; шесть осей симметрии 5-го порядка, проходящих через противолежащие вершины.

Задача 14*. Сколько и каких осей симметрии у додекаэдра (рис. 28.9)?

Решение. Пятнадцать осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противолежащих ребер; десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через противолежащие вершины; шесть осей симметрии 5-го порядка, проходящих через центры противолежащих граней.

Задача 15*. Правильный тетраэдр повернут на угол 90° вокруг прямой, проходящей через середины его противолежащих ребер. Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и повернутого?

Решение. На рисунке 146 показан тетраэдр $ABCD$ и тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$, полученный из него указанным поворотом. Их общей частью является октаэдр.

Задача 16*. Куб повернут вокруг прямой, проходящей через две его противолежащие вершины, на угол 60°. Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?

Решение. Общей частью исходного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и куба, повернутого вокруг прямой BD_1 на угол $60°$, является правильная шестиугольная бипирамида, составленная из двух правильных пирамид с вершинами D, B_1 и общим основанием $EFGHPQ$ (рис. 147).

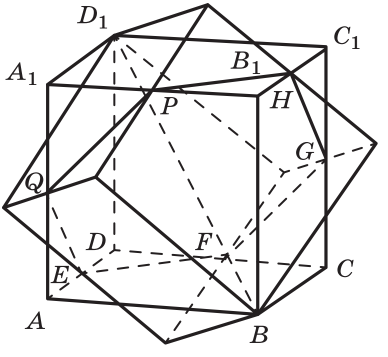


Рис. 147

Контрольная работа 4

Вариант 1

1. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, плоскостью, проходящей через вершины A, D, E_1. Найдите его площадь.

2*. Постройте сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1 и вершину C_1. Найдите его площадь.

3*. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ и центрально-симметричную ей пирамиду относительно середины высоты SO. Какой многогранник является общей частью этих пирамид?

4. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная треугольная призма?

5*. Куб повернули вокруг прямой, проходящей через центры противолежащих граней, на угол 45°. Какой многогранник является общей частью исходного куба и повернутого?

Вариант 2

1. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, плоскостью, проходящей через вершины B, C, D_1. Найдите его площадь.

2*. Постройте сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер BC, CC_1 и вершину A_1. Найдите его площадь.

3*. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ и зеркально-симметричную ей пирамиду относительно плоскости, проходящей через середину высоты SO и перпендикулярной этой высоте. Какой многогранник является общей частью этих пирамид?

4. Сколько осей симметрии имеет правильная треугольная призма?

5*. Правильную четырехугольную пирамиду повернули вокруг прямой, содержащей ее высоту, на угол 45°. Какой многогранник является общей частью исходной пирамиды и повернутой?

Ответы

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. A. **2.** FG. **4.** В = 7, Р = 12, Г = 7. **5*.** 10.

Вариант 2

1. H. **2.** AB. **4.** В = 6, Р = 10, Г = 6. **5*.** 18.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. а, в). **3.** 30. **4.** 20. **5*.** Октаэдра.

Вариант 2

1. а, в). **3.** 30. **4.** 12. **5*.** Октаэдра.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

2. Икосододекаэдр. **3*.** 14 граней, 6 квадратных и 8 треугольных. **5*.** Пятиугольной призмы.

Вариант 2

2. Кубооктаэдр. **3*.** 32 грани, 20 треугольных и 12 пятиугольных. **5*.** Октаэдра.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. BC, CD, BB_1, DD_1, A_1B_1, A_1D_1. **3.** EF, B_1C_1, E_1F_1. **4.** DE, D_1E_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1.

Вариант 2

1. AD, CD, AA_1, CC_1, A_1B_1, B_1C_1. **3.** DE, A_1B_1, D_1E_1. **4.** EF, E_1F_1, AA_1, DD_1, EE_1, FF_1.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. AD_1. **2.** ED_1. **3.** Отрезком или параллелограммом.

Вариант 2

1. BA_1. **2.** DC_1. **3.** Отрезком или параллелограммом.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. $60°$. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **5*.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Вариант 2

1. $60°$. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **5*.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1. $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **4*.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **5*.** Сечение показано на рисунке 148.

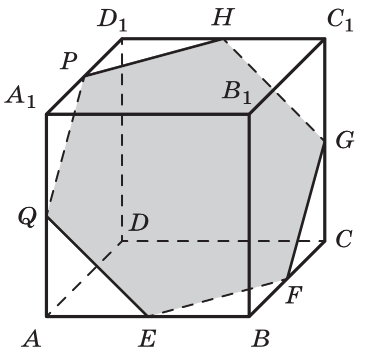


Рис. 148

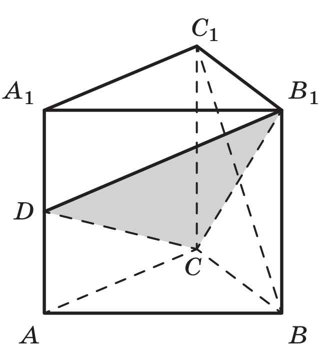


Рис. 149

Вариант 2

1. $2\sqrt{2}$. **4*.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **5*.** Сечение показано на рисунке 149.

Контрольные работы

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. В = 12, Р = 18, Г = 8. **2.** 4. **3.** Одну третью.

Вариант 2

1. В = 7, Р = 12, Г = 7. **2.** 3, 4, 5. **3.** Одну третью.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Нет. **2.** Сечение показано на рисунке 150.

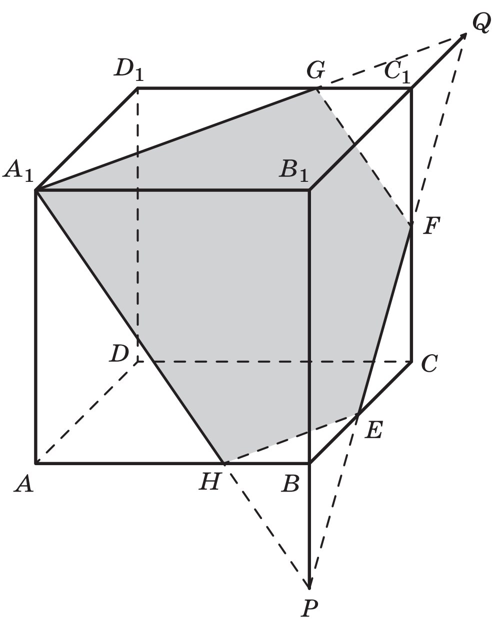


Рис. 150

3. Сечение показано на рисунке 151.

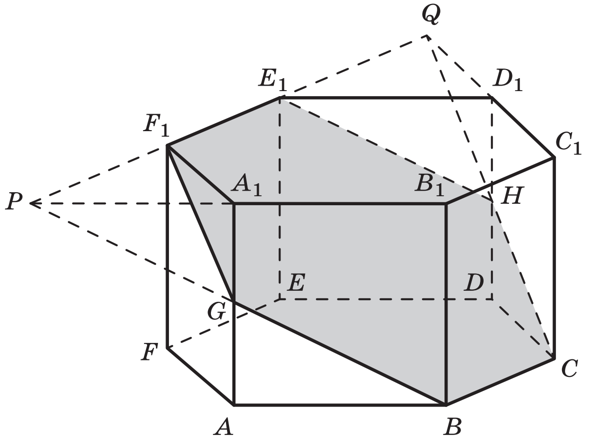


Рис. 151

4. Сечение показано на рисунке 152.

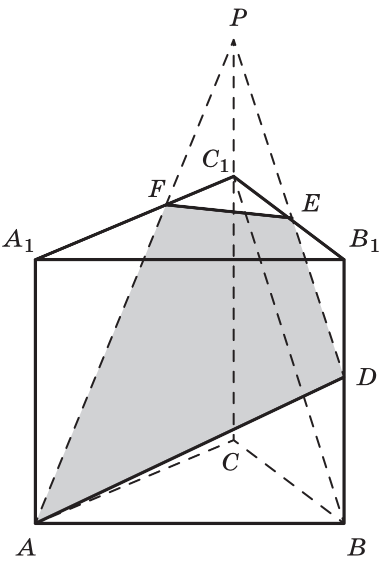


Рис. 152

5. Сечение показано на рисунке 153.

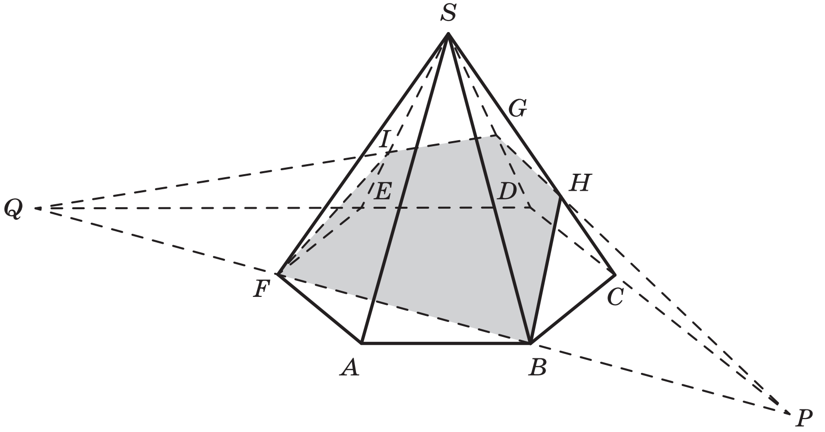


Рис. 153

Вариант 2

1. Да. **2.** Сечение показано на рисунке 154.

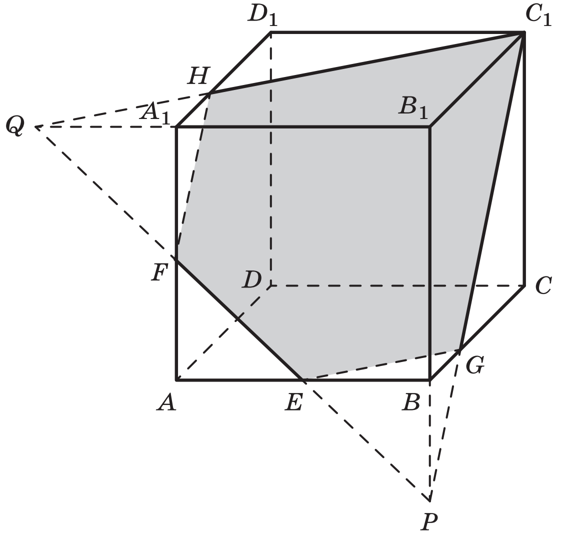


Рис. 154

3. Сечение показано на рисунке 155.

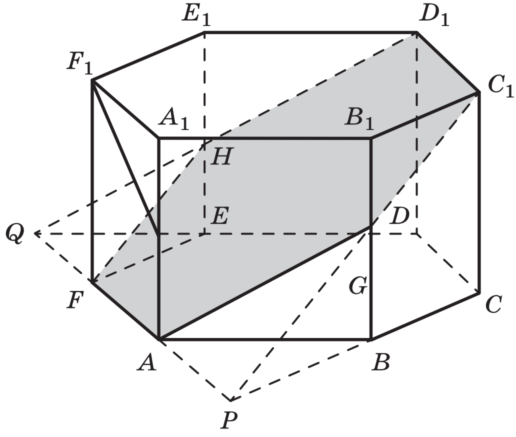


Рис. 155

4. Сечение показано на рисунке 156.

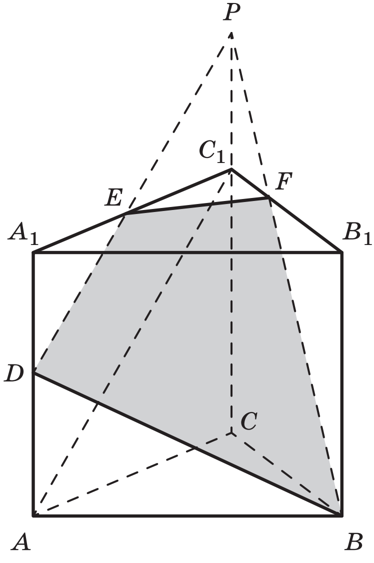


Рис. 156

5. Сечение показано на рисунке 157.

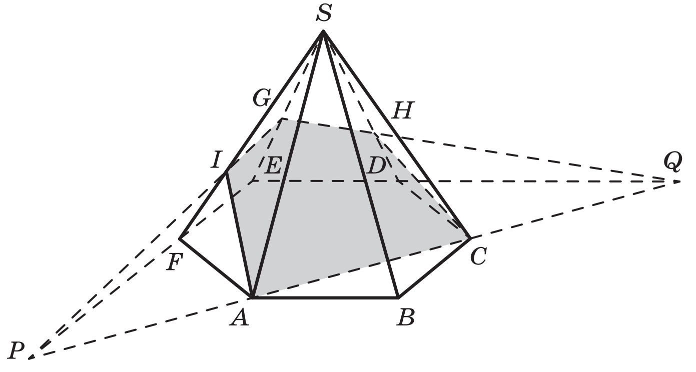


Рис. 157

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4*.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **5*.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Вариант 2

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4*.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **5*.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Контрольная работа 4

Вариант 1

1. Искомое сечение изображено на рисунке 158. Его площадь равна $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

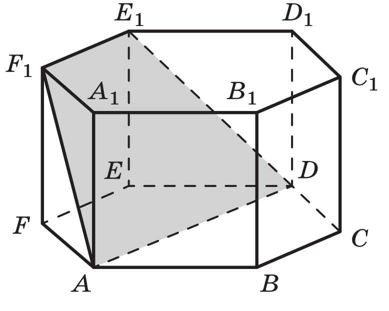


Рис. 158

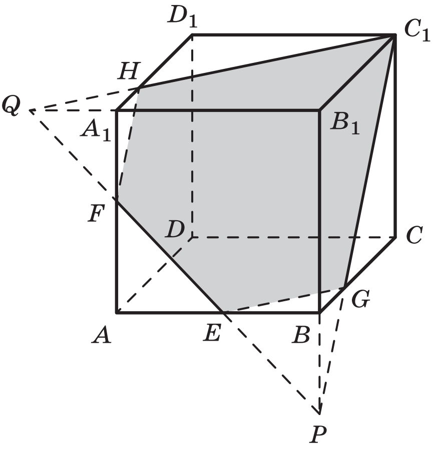


Рис. 159

2. Искомое сечение изображено на рисунке 159. Его площадь равна $\dfrac{7\sqrt{17}}{24}$.

3. Искомая пирамида $OA'B'C'D'$ изображена на рисунке 160. Общей частью двух пирамид является правильная четырехугольная бипирамида $SEFGHO$.

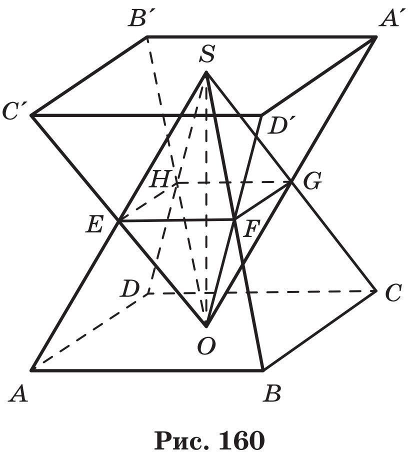


Рис. 160

4. 4. 5. Правильная восьмиугольная призма.

Вариант 2

1. Искомое сечение изображено на рисунке 161. Его площадь равна $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

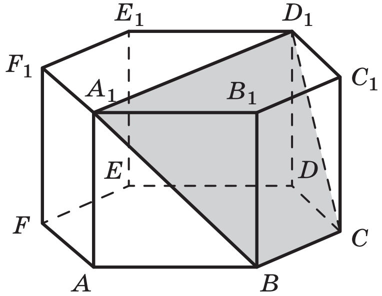


Рис. 161

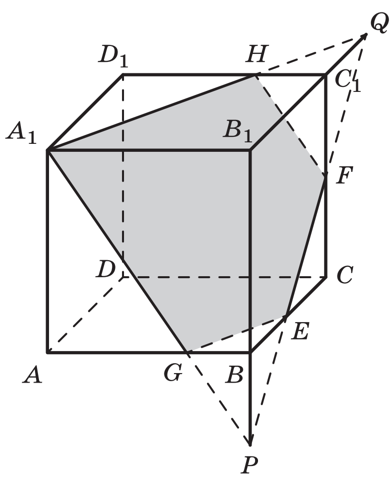


Рис. 162

2. Искомое сечение изображено на рисунке 162. Его площадь равна $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

3. Искомая пирамида $OA'B'C'D'$ изображена на рисунке 163. Общей частью двух пирамид является правильная четырехугольная бипирамида $SEFGHO$.

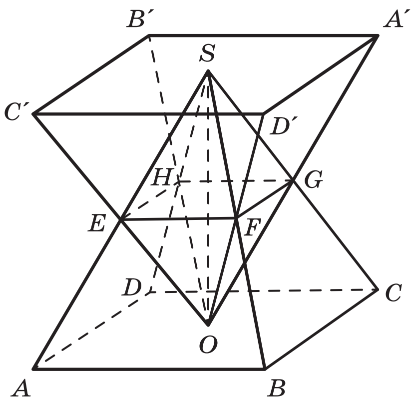


Рис. 163

4. 3. 5. Правильная восьмиугольная пирамида.

Оглавление

Методическое издание

Смирнов Владимир Алексеевич,
Смирнова Ирина Михайловна

Геометрия
Базовый и углубленный уровни

10 класс

Методическое пособие для учителя

Редактор *С. В. Бахтина*
Художественное оформление *Э. В. Алексеев*
Внешнее оформление *Н. А. Новак*
Компьютерная верстка: *Э. В. Алексеев*
Корректор *С. О. Никулаев*

Подписано в печать 28.11.19. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 6,61. Тираж 150. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3
тел. (495)181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Приобрести книги издательства
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
можно в магазине по адресу:
Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181-60-77, e-mail: shop@blbz.ru
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются
Коммерческим департаментом издательства:
тел. (495)181-53-44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано в