МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Э.И. Александрова

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ *в начальной школе*

1 класс

Пособие для учителя

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

Александрова, Э.И.

Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс: Пособие для учителя. — — электрон. текст. дан. (36 Мб) — 1 опт. компакт. диск (CD-ROM).

Методическое пособие предназначено прежде всего учителям начальных классов, но будет полезно воспитателям детских садов, работающим в подготовительной группе, студентам и преподавателям педколледжей, педучилищ и факультетов начальных классов, а также учителям математики основной школы, методистам — всем, кто интересуется вопросами образования и новыми технологиями обучения.

Пособие содержит описание целей, методов, форм организации и общения детей, новых методических приемов, которые помогут учителю при реализации требований ФГОС НОО.

Минимальные системные требования:
Pentium III 1 ГГц (или аналог от AMD), 256 Мб ОЗУ, видеокарта с 32 Мб памяти, 64 Мб свободного места на HDD, 32x CD-ROM, клавиатура, мышь.
Windows 2000sp4/XPsp3/Windows Vista/Windows 7, Windows 8,
Adobe Acrobat Reader версии 7.0 и выше.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
Тел.: (495) 181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

ОТ АВТОРА

Уважаемые коллеги!

Предлагаемое методическое пособие является частью учебно-методического комплекта по математике, включающего учебник для 1-го класса (в двух книгах), рабочие тетради, прописи и ... огромное желание воспитать в детях любовь к школе, желание учиться, интерес к математике, научить мыслить и рассуждать, приобрести навыки общения и сотрудничества.

Данное пособие — первое в серии таких пособий под общим названием «Методика обучения математике в начальных классах». В нем подробно описана методика обучения детей в 1-м классе по системе развивающего образования: рассмотрены психологические особенности шестилеток, различные учебные ситуации, часто возникающие на практике, и возможные действия учителя, а также методические приемы, обеспечивающие реализацию целей обучения, приведено большое количество практических заданий, даны методические рекомендации по всем темам программы.

Наиболее эффективным это пособие окажется для тех, кто прошел переподготовку на авторских курсах повышения квалификации. Однако при подготовке его мы ориентировались и на тех учителей, которые, не имея возможности получить специальную подготовку, хотят тем не менее работать по программе развивающего образования.

Эта программа не только существенно повысит качество математических знаний и уровень развития математического мышления у младших школьников, но и откроет в вас самих новые способности, даст толчок к новым идеям, сделает ваше общение с детьми радостным и приятным.

Успехов вам, дорогие мои учителя!

Думаю, что желание познать новое пересилит страх перед ним, а мы вам всегда поможем.

I. ОСОБЕННОСТИ НОВОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

> Школьным педагогам сегодня как никогда необходимо учиться гибкости, нестандартности мышления, трудному преодолению его ригидности, ибо слишком сложен, необычно многогранен взаимозависимый мир человечества, формирующий молодое поколение по своему образу и подобию. Поэтому такими ценными становятся сегодня для учителей острое чувство нового, отказ от консерватизма, готовность к пересмотру привычной педагогической философии, несостоятельность которой дорого обходится обществу.
>
> *У. Глассер. Школы без неудачников.*

В этой книге рассказано об особенностях нового курса обучения математике в начальной школе, разработанного в рамках системы развивающего образования. Этот курс был апробирован в течение десяти лет в школах Украины, Белоруссии и Казахстана, где традиционно большинство детей обучаются с 6 лет.

Для того чтобы помочь учителю разобраться в особенностях представленного курса математики и его отличиях от аналогичных программ развивающего образования (РО) других авторов, хочется прежде всего выделить некоторые соображения, которые легли в основу этого курса. Соображения, о которых пойдет речь, были высказаны разными учеными, в разное время, в разных странах, но все они взаимосвязаны, все они об одном — об обучении и воспитании ребенка, и прежде всего в начальной школе, поскольку именно она является фундаментом всей системы образования, а младший школьный возраст — решающий в дальнейшем развитии личности.

Л. С. Выготский, А. Н. Леонтьев, Э. В. Ильенков, Д. Б. Эльконин, В. В. Давыдов, П. Я. Гальперин, В. В. Репкин, Ф. Г. Боданский, А. К. Дусавицкий, Г. А. Цукерман — вот далеко не полный список тех ученых, стараниями которых родились на свет идеи, лежащие в основе данного курса математики.

ОБЩИЙ ОБЗОР ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИДЕЙ, РЕАЛИЗУЕМЫХ В ЭТОМ КУРСЕ

В сложившейся у нас системе образования долгое время доминировал обезличенный подход к учащимся. То, что мы называли образованием, не более чем накапливание информации с опорой на вторичную функцию мозга — память, в то время как его основной функцией является мышление. В процессе обучения (математике или физике) мы чаще всего связываем мышление с решением задач, которые предполагают точный ответ. Он может быть либо верным, либо неверным, однако сам ответ и его форма нередко значат для ученика и учителя больше, чем способ его получения, чем логические рассуждения на пути к нему, что фактически обесценивает мыслительный процесс. Гораздо реже детям предоставляется возможность задуматься над тем, как может быть получен тот или иной результат, как самому придумать такую же задачу, как научить других придумывать и решать те или иные задачи, всегда ли может быть получен однозначный правильный ответ.

Дети, которые приходят в школу с представлением о том, что на многие вопросы можно ответить по-разному, вскоре эту уверенность теряют. В традиционной школе детей фактически приводят к мысли, что на уроке главное — правильные ответы, ничто иное не имеет ценности по сравнению с правильным ответом, а основной их источник — учителя или учебники. Однако в демократической школе, как и в демократическом обществе, многие проблемы не имеют однозначных решений.

«Процесс постановки проблем, поиска ***разумных*** альтернатив и реализация наилучших решений, — считает американский ученый У. Глассер, — и есть подлинный процесс демократического образования. Развитая память еще не есть образованность, точная информация еще не есть знания. Определенность и механическое зазубривание, запоминание — враги живой мысли, они убивают творчество и сводят на нет оригинальность мышления».

Откройте наши учебники математики, и вы увидите альтернативу традиционному механическому зазубриванию, например, таблиц сложения и умножения и многого другого.

Предложенному способу работы над ними предшествовали многолетние исследования и эксперименты автора, были обследованы тысячи детей. Такого подхода к изучению таблиц и их последовательности вы не найдете нигде, если только его уже не используют другие.

Конечно, ребенку и в традиционной школе приятно осознавать, что он отвечает правильно, но, если точность ответа основана лишь на механическом запоминании, это не приносит истинной радости познания. Мы лишь тогда испытываем настоящее удовлетворение, когда наша правота является результатом самостоятельных рассуждений, собственного мнения и принятия соответствующего решения. Реализация такого подхода к обучению, при котором ребенок живет с ощущением пусть маленького, но личного успеха, испытывая при этом и уверенность в себе, составляет суть настоящего курса математики, с первых страниц которого вы, без сомнения, это обнаружите.

Потребность ребенка в любви, в чувстве собственного достоинства, в ощущении значимости собственного «Я», чувство уверенности в своих силах и положительной оценке со стороны окружающих — все это и составляет одну из важнейших потребностей человека — осознания себя личностью.

«Либо человек живет с ощущением успеха, испытывая уверенность в себе и внутреннее удовлетворение, либо считает себя неудачником, отчаянно пытаясь избавиться от преследующего его чувства психологического дискомфорта» (У. Глассер). Не это ли создает предпосылки для его конфронтации с обществом в форме преступности или ухода в себя? А ведь ни один ребенок не должен иметь в школе клеймо неудачника!

Однако сегодняшняя система отбора детей в школу, а затем, начиная с пятого класса, в гимназии — разве она не навешивает на ребенка этот ярлык?!

До школы большинство детей интуитивно осознают себя личностями, независимо ни от каких обстоятельств их жизни. Они надеются добиться признания в школе, рассчитывают заслужить любовь и уважение со стороны учителей и одноклассников и сохранить или усилить любовь близких. И если эти надежды рушатся у ребенка, фактически не переступившего порога школы, то не надо далеко искать причин крушения светлого детского оптимизма, а ведь успех или поражение ребенка во многом зависит именно от первых лет обучения. Возраст 10 лет является критической точкой отсчета, и, хотя детям можно помочь на любом этапе обучения, самое главное — не упустить время в начальной школе.

Обычная школа со своим упором не на развитие мышления, а на запоминание и механическую зубрежку провоцирует неуспеваемость, и поэтому она ***больше всего*** бьет как раз по детям, которые получили хорошую дошкольную подготовку. Если до школы взрослые радовались их интересным словам и выражениям, бесконечным «почему?», изобретательности в прямом и переносном смысле, то, придя в школу, дети вдруг обнаруживают, что успех может быть обеспечен в основном хорошей памятью, а не умением мыслить, высказывать идеи, творчески подходить к заданию, учиться с интересом.

Этот курс математики создает условия для того, чтобы научить детей думать. Вряд ли в классах, обучающихся по настоящей программе, вы найдете ребенка, который бы не старался думать и работать в меру своих сил (а здесь есть место для любого ребенка), если он видит, как мы, взрослые, ценим его достижения. А вот если ребенок постоянно познает горечь поражения, то вряд ли у него останется надежда на успех в будущем. У него должны быть ***гарантии*** на успех. И именно это учтено как в подходе к обучению, так и в содержании курса математики. Однако нужно помнить, что для обучения по данной программе нельзя отбирать детей по способностям (от этого страдают не только учащиеся, это оказывает пагубное, разрушительное воздействие и на учителя), нельзя ставить детям отметок (существуют разработанные Г. А. Цукерман способы оценивания), нельзя не опираться на дошкольный опыт ребенка, нельзя не учитывать ни в методах обучения, ни в формах общения психологические особенности учеников начальных классов. Знакомство с учебниками подтвердит возможность реализации этих тезисов.

Характерной особенностью данного курса математики, в отличие от аналогичных курсов развивающего образования (по системе Д. Б. Эльконина—В. В. Давыдова), является его направленность на ***воспитание, развитие личности*** ребенка на основе вышеописанных идей, а формирование теоретического мышления составляет лишь средство для достижения образовательной цели. Образцы воспитания не задаются извне, а реализуются через формы сотрудничества в ходе усвоения математики.

СОДЕРЖАНИЕ, МЕТОДЫ, ФОРМЫ ОРГАНИЗАЦИИ И ОБЩЕНИЯ ДЕТЕЙ

> Взрослые никогда ничего не понимают сами, а для детей очень утомительно без конца им все объяснять и растолковывать.
>
> *А. де Сент-Экзюпери*

Новые цели и задачи определяют новое содержание, которое представляет собой ***систему научных теоретических понятий***, а следовательно, и новый ***метод*** обучения, называемый ***квазиисследовательским***. Понятия задаются не в готовом виде, не в форме определений или правил. Ребенок как бы повторяет в процессе изучения ход и результаты соответствующего научного исследования. Он становится маленьким ученым, делающим свое собственное открытие. Мастерство взрослого заключается не в том, чтобы доступно и наглядно объяснить ему то или иное понятие, лежащее в основе принципа действия, а, во-первых, в способности создавать такие учебные ситуации, когда у ребенка появляется ***потребность*** именно в этом понятии или способе действия, тогда ребенок стоит на границе между ***знанием*** и ***незнанием*** (а не наоборот, что характерно для традиционной школы), во-вторых, в способности ***организовать сотрудничество детей***, в ходе которого и происходит открытие и усвоение понятия, в-третьих, в способности организовать, направлять и поддерживать содержательный ***учебный диалог*** между детьми (Г. А. Цукерман).

Это становится возможным для учителя лишь тогда, когда он принимает принципиально иную, чем в традиционной школе, педагогическую позицию, когда он способен сам включиться в диалог лишь как ***один из*** его участников, чьи высказывания, мнения, оценки открыты для критики в той же степени, что и высказывания других участников диалога.

УЧИТЕЛЬ В СИСТЕМЕ РАЗВИВАЮЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Останься тих, когда твое же слово
Калечит плут, чтоб уловлять глупцов,
Когда вся жизнь разгружена и снова
Ты должен все воссоздавать с основ.
Умей поставить в радостной надежде
На карту все, что накопил трудом.
Все потерять, и нищим стать, как прежде.
И никогда не пожалеть о том.

Р. Киплинг

Новое содержание начального образования и метод его реализации требуют учителя нового типа, владеющего принципиально новой технологией, основной задачей которого является не передача знаний учащимся, как в традиционном классе, а организация собственной деятельности учащихся по овладению способами анализа и обобщения учебного материала (В. В. Давыдов).

Исследования А. К. Дусавицкого показали, что меняются как квалификационные, так и профессиональные характеристики такого учителя. Например, важнейшими для учителя развивающего образования оказываются такие качества личности, как способность и потребность в рефлексии (осмыслении) собственной деятельности, способность к ***сопереживанию***, чувство юмора, способность решать возникшие противоречия ненасильственным способом и многие другие. Именно эти качества обеспечивают диалогическую, а не монологическую позицию в отношениях с детьми.

Совершенно очевидно, что овладение учителем принципиально новой системой обучения, требующей, прежде всего, психологической подготовки и вообще психологической готовности учителя к ней, — задача не из легких. Успешность ее решения зависит, в первую очередь, от того, насколько учитель осознал потребность в овладении именно этой системой обучения и насколько эта его потребность сочетается с активными шагами в этом направлении и поддержкой окружающих его коллег, администрации школы, методических служб.

Система развивающего образования, отличаясь от традиционной по всем основным составляющим, характеризующим любую систему (целям, содержанию, методам, формам организации и общения), требует специальной ***подготовки*** или ***переподготовки*** учителя или, по крайней мере, тщательного изучения не только учебников и библиотеки по развивающему образованию, но и видеозаписей работы коллег, прошедших специальную подготовку. Совершенно недопустимо, чтобы учитель приступал к систематической работе, имея на руках лишь учебники и желание работать. Опыт сотрудничества с учителями, овладевающими этой системой обучения, показывает, что никакие талантливо написанные книги по развивающему образованию и даже лекции авторов не заменят реального проживания учителем тех чувств, эмоций, способов анализа, которые проектируются в системе постоянно действующего семинара по переподготовке учителей, во время которого сама система осваивается в адекватной форме группового диалога, где принципы развивающего образования рефлексируются самими его участниками. Новый метод подготовки учителя, разработанный под руководством А. К. Дусавицкого, предполагает одновременное усвоение учителем механизмов развивающего образования, где нет разрыва между психологией развивающего образования, педагогикой и знаниями, умениями и навыками, между индивидуальностью учителя и его профессиональной деятельностью.

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ШЕСТИЛЕТОК

Реализация описываемого курса математики для четырехлетней начальной школы требует прежде всего учета психологических особенностей шестилеток. Известно, что у большинства детей в это время еще не существует учебной мотивации, несмотря на то, что познавательная потребность как один из компонентов выражена достаточно ярко, а социальные мотивы учения практически отсутствуют. Характеризуя интеллектуальную и речевую сферу шестилеток, необходимо отметить слабое развитие процесса обобщения и плохо развитую речь. Низкий уровень сенсомоторной координации свидетельствует о том, что в психофизиологическом плане ребенок еще не созрел, мелкая моторика находится в развитии. Как показывают многочисленные психолого-педагогические исследования, шестилетние дети и значительная часть семилетних детей нуждаются в психологическом развитии, способствующем психологической готовности к школе. Именно она определяет успешность школьного обучения. Отсюда следует, что ***главной целью обучения детей шестилетнего возраста является целенаправленное формирование у них полноценной психологической готовности к школьному обучению,*** которая характеризуется явно выраженной внутренней позицией школьника, учебной мотивацией, относительно развитым процессом обобщения, речевым развитием и развитой сенсомоторной координацией ребенка.

Из сказанного выше понятно, что система развивающего образования в понимании Д. Б. Эльконина, В. В. Давыдова и их последователей как нельзя лучше ориентирована на необходимое психологическое развитие ребенка и адекватна его целям и задачам.

Количество часов, рекомендуемое на изучение данного учебного предмета по годам обучения, является ориентировочным и должно быть скорректировано не только в соответствии с тем учебным планом, по которому работает школа, но и с учетом подбора детей в классе, а также с личными качествами учителя, определяющими темп совместной работы.

Отношения ребенка со взрослыми, со сверстниками и с самим собой составляют, как известно, ядро его психологической готовности к школьному обучению, и именно эти отношения находятся в центре внимания учителя, организующего деятельность учащихся по овладению способами анализа и обобщения учебного материала, что и позволяет говорить о нем как об учителе нового типа, когда он предстает перед ребенком сначала в позиции равного партнера, а лишь затем в позиции взрослого как взрослого (4–5-й классы и далее).

Однако для осознанной организации собственной деятельности детей учитель должен отчетливо представлять характеристики основных типов детей, поступающих в первый класс, опираясь на которые он может управлять процессом развития личности ребенка, его воспитанием, организуя при этом три основных типа игр: сюжетно-ролевую, игру по правилам и режиссерскую, что позволит педагогу включать на предметном материале детей того или иного типа для достижения основной цели обучения. В зависимости от того, как ребенок принимает школьную действительность, психологи выделяют следующие группы детей:

1. **Предучебный тип.**

Дети предучебного типа готовы решать посильные учебные задания, но лишь в присутствии взрослого, именно учитель в данном случае ответствен прежде всего за то, будет ли для ученика значимым учебное содержание, его смысловая сторона или формальная. Кстати, одна из самых тяжелых учительских «болезней» как раз и связана с чрезмерным увлечением тем, ***где и как*** писать, а не ***что*** писать. Эту группу детей на первых этапах обучения необходимо выделить, так как они, как правило, нуждаются в лично к ним обращенном действии учителя — взгляде, слове, жесте.

2. **Учебный тип.**

Дети, которые способны самостоятельно анализировать учебное содержание, поэтому некоторые из них пренебрегают несодержательной стороной процесса обучения — рядом школьных требований, что осложняет адаптацию к школе. Известна другая крайность, в которую попадает учитель, особенно в системе РО, — это полное игнорирование норм орфографического режима, вместо того чтобы сконструировать их вместе с детьми.

3. **Дошкольный тип (коммуникативный).**

Дети такого типа склонны к демонстративности, страдают дефицитом внимания. Их поведение направлено на то, чтобы их заметили. Игровое общение со сверстниками фактически не сформировано.

Эта группа детей, как и часть предыдущей, не только игнорирует школьные требования, но и любой учебный материал превращает в игровой, всегда находя себе партнера. Эти дети сами не видят своих ошибок, мешают проведению урока в его традиционном понимании. Учиться могут только в игровой форме. Именно они ***особо*** нуждаются во внеклассных играх.

Эти дети, как правило, отказываются работать в группе, и учителю, несмотря на то, что он предоставляет ребенку возможность выбора формы работы, важно определить мотив, лежащий в основе сделанного выбора, с тем, чтобы помочь ребенку вступить в сотрудничество с другими детьми, научить его общаться. Например, роль так называемого «спикера» — докладчика от группы — могла бы удовлетворить такого ребенка во время урока, а после уроков — участие в театральных постановках.

4. **Псевдоучебный тип.**

Дети этого типа характеризуются интеллектуальной робостью, отказом от содержательного анализа, стремлением к копированию по образцу. Они занимают позицию исполнителя. Участие такого ребенка в групповой форме обучения, поощрение содержательной, творческой работы благоприятно скажутся на его психологической готовности.

Знание учителем основных типов детей на основе принятия ими школьной жизни позволит ему с самого начала учитывать особенности каждого ребенка при организации работы над учебным материалом, даст возможность корректировать тот или иной тип. Известно, что наиболее трудными для коррекции являются псевдоучебный и коммуникативный типы, причем в каждом из этих случаев необходимо хвалить, поощрять содержательную работу и любые, даже незначительные, проявления самостоятельности. Однако во втором случае важнее всего не наказывать, воздерживаться от порицания, поскольку даже наказание воспринимается ребенком коммуникативного типа как проявление к нему внимания, чего он беспрерывно ждет от учителя.

Дети дошкольного типа не должны приниматься в школу, однако если они там все-таки оказались, то чуть ли не единственным средством должно стать «доигрывание» как на уроке, так и во внеклассной работе. «Доигрывание» в классе должно способствовать овладению программным материалом (игра на предметном материале с использованием любимых игрушек или любимых ролей).

Очевидно, что мастерство учителя состоит в том, чтобы при организации групповых форм работы над предметным содержанием оптимально учитывать, к какому типу относится ребенок, а определить тип сможет школьный психолог, опираясь на специальные методики выявления основных типов развития.

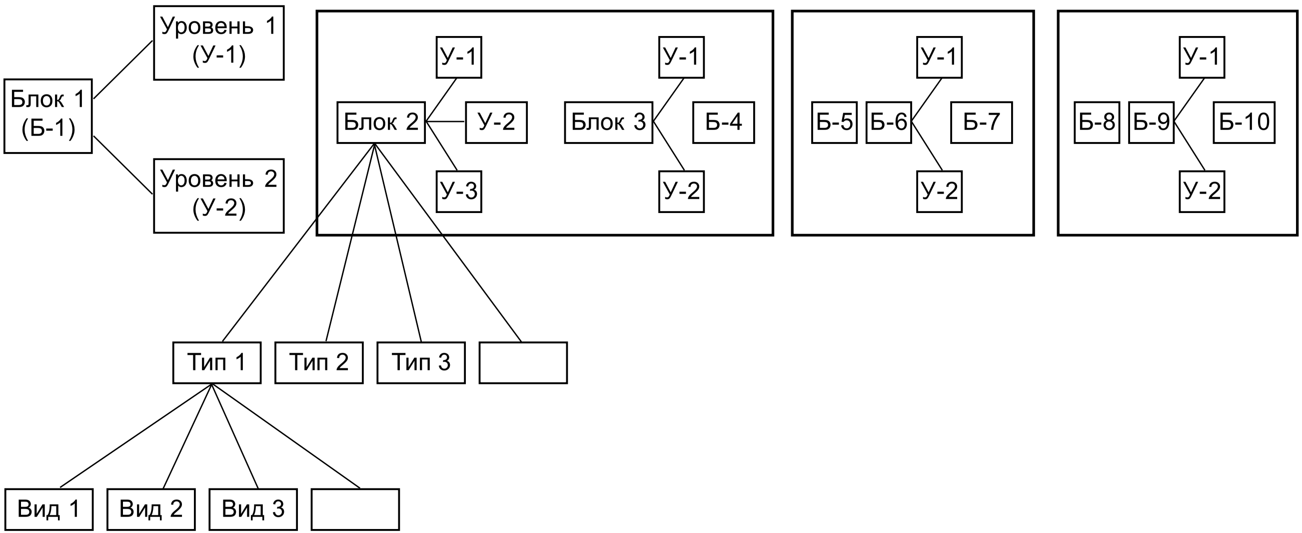
Таким образом, становится понятным тот факт, что от того, как будет организован учителем ***первый год*** обучения шестилетнего ребенка, будут зависеть его ***последующие успехи*** не только в школе, но и в жизни, поскольку именно ***начальная школа является фундаментом всей системы непрерывного образования.***

Огромное значение для формирования интереса к математическому содержанию и процессу его изучения, для отработки основных учебных действий, позволяющих решать учебные задачи, имеет подбор специальных, специфических для системы РО заданий, последовательность которых определяется структурой учебной деятельности.

Большое число заданий в учебниках предоставляет ребенку возможность выбора. По тому, какие задания он отобрал для самостоятельного выполнения, можно установить, на каком этапе осмысления понятия он находится, на какой из 16 возможных уровней своего продвижения он ориентируется.

Согласно указанным уровням, можно выделить 10 основных блоков заданий (в первом блоке — 2 уровня, во втором блоке — 3 уровня, в третьем блоке, в шестом и девятом — 2 уровня, а в остальных блоках — по одному), причем внутри каждого блока имеются упомянутые типы заданий, а внутри каждого типа — виды заданий.

Таблица, отражающая принцип подбора и конструирования заданий, учитывающая 16 уровней осмысления ребенком изучаемых понятий



Первый блок — это задания, которые уже выполнены кем-то, а ребенку нужно их оценить. (Учителями этот блок назван ***оценочным***.)

1-й уровень — задания выполнены кем-то с использованием графической модели.

2-й уровень — задания выполнены кем-то без использования графической модели. Для того чтобы оценить правильность выполнения задания, ребенку сначала нужно построить графическую модель.

Второй блок — ***исполнительный.*** Эти задания ребенку нужно выполнить самому.

1-й уровень — ребенок выполняет задание сам, но ему дан готовый ответ.

2-й уровень — ребенок выполняет задание сам, но ему дается несколько ответов, среди которых один правильный, а остальные получены в результате типичных ошибок.

3-й уровень — ребенок сам выполняет задание и сам доказывает правильность его выполнения.

Третий блок — ***рефлексивный.*** Это задания на придумывание самим ребенком таких же заданий, как те, которые ему предлагались автором (на уроке — учителем). Этот блок позволяет выяснить, умеет ли ребенок выделять существенные связи и отношения.

Четвертый блок — ***рефлексивно-методический***. Это задания типа «как научить других придумывать такие же задания».

Пятый блок — ***диагностический.*** Это задания с «ловушками» (можно выделить несколько типов «ловушек»: «ловушки» на способ, «ловушки», связанные с недостающими или лишними данными, и др.).

Шестой блок — ***рефлексивно-диагностический.*** Это задания на придумывание детьми таких же «ловушек», что позволяет определить, насколько ребенок видит «ошибкоопасные» места.

Седьмой блок — ***методико-диагностический,*** в котором ребенок думает над вопросом, как научить других придумывать задания с «ловушками».

Восьмой блок — это так называемые ***олимпиадные задачи***, к которым относятся задачи, не выходящие за рамки изучаемых понятий по годам обучения, но требующие нестандартных способов решения.

Девятый блок — это задания на ***придумывание*** детьми своих ***олимпиадных задач*** по аналогии с данными.

Десятый блок предлагает ребенку ***научить*** других придумывать ***олимпиадные задачи.***

Как было сказано, все эти блоки адекватны уровням овладения учащимися тем или иным понятием и дают возможность детям с разными математическими способностями почувствовать свои силы. В основе принципа конструирования ***типов*** заданий лежит математическое понятие обратной задачи. Типовые различия наиболее характерны для второго и пятого блоков, видовые же связаны с заменой данных, сменой величин, сюжетов и т. п.

Введение описанных заданий позволяет не только учить ребенка думать, развивать интуицию, воображение, но и включать эмоции, ставить новые исследовательские задачи и создавать атмосферу сотворчества и соразмышления.

Останься прост, беседуя с царями,
Останься честен, говоря с толпой,
Будь прям и тверд с врагами и друзьями,
Пусть все в свой час считаются с тобой.

Р. Киплинг

ОТЛИЧИЯ НОВОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ ОТ ВСЕХ ДЕЙСТВУЮЩИХ

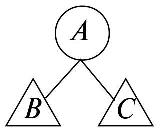
Все отличия данного варианта реализации концепции развивающего образования сводятся к трем основным характеристикам, связанным с развертыванием математического содержания, методическими подходами, учетом жизненного опыта ребенка и меняющихся социальных условий.

Рассмотрим их в указанной последовательности.

I. **Логика построения курса и его наполнение** во многом отличаются от предлагаемых другими авторами. Рассмотрим основные отличия, связанные с математическим содержанием.

В первом классе дети учатся сравнивать предметы не только по цвету, материалу, форме, количеству, длине, площади, объему, массе, но и по расположению в пространстве, по назначению, по «красоте» и еще ряду признаков, из которых впоследствии выделяются величины — длина, площадь, объем, масса, количество, угол.

Буквы латинского алфавита (в отличие от других авторов, которые используют только русский алфавит) вводятся в самом начале обучения, что позволяет использовать естественный знаковый математический язык. Вводятся и новые значки, которых не существует в математической культуре, но которые помогают ребенку более глубоко осознать смысл рассматриваемого понятия, в частности понятия части и целого. Например:



Всякий новый знак, схема, равно как и новое понятие, появляются лишь тогда, когда возникает осознанная потребность именно в этом знаке, схеме, понятии, и выглядят как придуманные самим ребенком.

Перед введением понятия числа (целого неотрицательного) включена тема «Какие бывают мерки», позволяющая детям исследовать окружающие их предметы— носители величин — на возможность их использования в качестве мерки.

Введение однозначных, а затем и многозначных чисел в разных системах счисления опирается на спроектированную жизненную ситуацию, а исторический аспект числа служит предметом исследования, а не наоборот, как это сделано у других авторов. При таком подходе ребенку не придется при раскрытии понятия отказываться от своего дошкольного опыта.

При введении действия сложения (вычитания) многозначных чисел в разных системах счисления последовательно рассматриваются этапы его выполнения:

1) прикидка: дети определяют, ничего не вычисляя, в каких разрядах будет «переполнение» (переход через разряд), а в каких — нет (для вычитания это «разбиение» разрядов);

2) определение количества цифр в результате выполнения действия (в традиционной программе это делается лишь при делении многозначных чисел);
3) определение цифры в каждом разряде, что с неизбежностью приводит детей к мысли о необходимости конструирования таблицы сложения (вычитания).

Такой же подход используется и при введении действия умножения (деления), причем без всякого ограничения на число разрядов. Это позволяет значительно поднять уровень вычислительных навыков при выполнении любого арифметического действия.

Введение десятичных дробей раньше обыкновенных (но после изучения всех действий с любыми многозначными числами) принципиально отличает данный курс от других. Это позволяет не только заново осмыслить принцип образования любого многозначного числа в любой системе счисления, но и значительно сократить время на выполнение действий с натуральными числами за счет конструирования действий с десятичными дробями. Действия с натуральными числами становятся средством для действий с дробями и глубже осознаются в этом новом качестве. Поэтому если к концу 3-го класса дети выполняют все действия с многозначными числами, то уже в 1-м полугодии 4-го класса они свободно владеют всеми действиями не только с многозначными числами, но и с любыми позиционными систематическими дробями в любых системах счисления, в том числе и в десятичной (десятичными дробями).

Следующей отличительной особенностью является подход к обучению решению задач. В 1—4-м классах дети не решают задачи по действиям. Решение записывается либо выражением, либо уравнением, но и то и другое составляется с опорой на схему.

Особое место занимает геометрический материал. Он вписан в логику развертывания основного материала. В содержание включены не отрывочные сведения из геометрии, а те геометрические понятия, которые являются органической частью курса, а также составной частью умений, лежащих в основе работы с другими математическими понятиями.

И хотя речь не идет о формировании самих геометрических понятий, тем не менее создается база для такого формирования.

Основная работа приходится на 1-й и на 4-й классы. В результате дети будут уметь (на конец 4-го класса) измерять, строить отрезки, владеть понятием числовой прямой, луча, уметь находить периметр любых плоских фигур, составлять формулы для нахождения периметра многоугольников и по формулам нахождения периметра восстанавливать форму фигуры. Дети будут владеть способом нахождения площадей любых фигур, разбивая их на такие фигуры, площади которых они умеют находить. Дети смогут находить объемы любых геометрических тел: призмоподобных (призмы + цилиндры) или пирамидоподобных (пирамиды + конусы), опираясь исключительно на практические действия.

II. **Особенности методических подходов** настолько многообразны, что не представляется возможным охарактеризовать их во всей полноте. Остановимся лишь на основных.

Придуман и реализован принцип, лежащий в основе конструирования новых типов заданий (описан на с. 15), что позволило превратить традиционно скучнейшие вычисления в увлекательное занятие, где ребенок не только исполнитель, но и автор. Он начинает сам придумывать задания, и уже есть немало сборников задач и упражнений, придуманных детьми, но самым трудным оказывается не столько придумать задание, сколько задуматься над тем, как научить других придумывать такие задания. Следствием такого подхода стало практически полное снятие проблемы вычислительных навыков.

В 4-м классе дети рассматривают признаки делимости, подход к изучению которых отличается от общепринятого.

Учебники отличаются от остальных не только описанным содержанием, они также необычны по форме. В них есть обращения ко взрослым, есть задания с ответами-«перевертышами», есть задания для девочек и задания для мальчиков. Есть система вопросов, ориентированных не на результат, а на способ его получения.

В учебники включены разделы: «Проверь себя!», «Это интересно», «Задачи на смекалку» (олимпиадные задачи).

Красной нитью через весь курс математики проходят задания, которые называются заданиями с «ловушками»: с недостатком или избытком данных, с ошибочными условиями или способами рассуждения (софизмами) и др. Они позволяют глубже осознать способ действия и оценить свои знания.

Разработан новый способ обучения делению многозначных чисел, не имеющий аналогов в отечественной методике, где на смену подбору цифры в частном с помощью округления пришел способ опоры на «подсказку». Это позволило не только значительно облегчить процедуру подбора и сократить ее время, но и сразу обучать делению любого многозначного на любое многозначное, что, в свою очередь, сокращает и время обучения.

В учебниках нет сказочных персонажей, кроме учебника 1-го класса, где герои романа-сказки Н. Носова «Приключения Незнайки и его друзей» необходимы для мотивации. Сказки, включенные в учебник, служат мотивационной «ловушкой», позволяющей «увидеть» уже знакомое математическое содержание в нематематическом тексте.

III. **Учет жизненного опыта и социальных условий** состоит в следующем.

Учебные программы должны отвечать жизненному опыту ребенка, иначе у него не развивается учебная мотивация. Поэтому прежде всего надо обратить внимание читателя на то, что, в отличие от других авторов, дошкольный опыт ребенка встроен в логику построения курса, а не оторван от нее. Нельзя не учитывать желания ребенка продемонстрировать свои старания, не унижая в то же время тех, чьи успехи, прямо скажем, совсем невелики. Это как раз и удалось сделать, как нам кажется. Придуманы такие задания, выполняя которые каждый ребенок, независимо от богатства или бедности своего дошкольного опыта, может быть равноправным участником процесса. Довольны все.

Известно, что преподавание ряда предметов, имеющих лишь косвенное отношение к жизни детей, неизбежно приводит к потере интереса к учебе и росту неуспеваемости. Даже в тех случаях, когда для нас, взрослых, очевидна связь текущего материала с жизнью, это не означает, что и ученики ее видят. Думать так — серьезное заблуждение. Поэтому в данный курс математики, в частности в учебник

4-го класса (чем старше становятся дети, тем актуальнее звучит вопрос о связи знаний с жизнью), включены задачи с экономическим содержанием, работа с рекламами и т. д.

Отличительной особенностью курса является и его связь с другими предметами, в частности с изучением русского языка. Лингвистические понятия (например, понятия сильной и слабой позиции и др.) способствуют более глубокому пониманию математических связей, и наоборот, математические понятия (например, понятие мерки и др.) помогают осмыслить структуру родного языка.

СОВЕТЫ УЧИТЕЛЯМ И РОДИТЕЛЯМ

Умей мечтать, не став рабом мечтаний,
И мыслить, мысли не обожествив,
Равно встречай успех и поруганье,
Не забывая, что их голос лжив.
Умей принудить сердце, нервы, тело
Тебе служить, когда в твоей груди
Все пусто, все уже сгорело,
И только воля говорит — иди.

Р. Киплинг

1. Старайтесь найти в ребенке то, за что его можно похвалить, а не то, за что поругать.
2. Знайте, что ребенку тогда интересно с вами, когда вам интересно с ним.
3. Давайте возможность каждому ребенку сделать свое маленькое открытие.
4. Если ребенку тяжело, то найдите для него такое задание, которое ему по силам.
5. Не навязывайте ребенку своих форм работы, он должен выбрать их сам.
6. Чем выше уровень эмоционального комфорта, тем больше шансов на успех в учебе.
7. Вместо отметок — главной причины школьных бед (они акцентируют в большей степени провалы в учебе, чем успех) — пользуйтесь рекомендуемой системой оценивания в РО.

8. Помните, что ошибка одного может породить мысль другого. Не пугайтесь детских ошибок.

9. Не бойтесь сделать вид, что вы что-то не понимаете, этому всегда можно и нужно найти разумное обоснование.

10. Не бойтесь признаться в том, чего сами не знаете.

11. Не пытайтесь объяснить ребенку то, до чего он может додуматься сам.

12. Вступайте в диалог с детьми только в том случае, если у вас есть разумные аргументы «за» или «против» высказываний детей.

13. Не требуйте от ребенка словесных формулировок и обобщений до того, как он выполнит предметное действие или какое-либо задание.

14. Знайте, что учебники носят рефлексивный характер: дети вместе со взрослыми конструируют их содержание. Ребенок работает не с картинками из учебника, а с реальными предметами (фигурами), изображенными в нем.

15. Помните, что неудачи в жизни имеют две причины — недостаток любви и заниженная самооценка, а значит, ребенок особенно остро нуждается в чувстве собственного достоинства. Просто любите детей и не бойтесь им показать это.

Пожелание учителям и родителям:

Владей собой среди толпы смятенной,
Верь сам в себя наперекор вселенной
И маловерным отпусти их грех.
Пусть час не пробил, жди не уставая,
Пусть лгут жрецы, не снисходи до них,
Умей прощать и не кажись, прощая,
Великодушней и мудрей других.

Р. Киплинг
и присоединившаяся
к нему *Э. И. Александрова*

Если ребенок любит математику независимо от своих достижений в ней, если он с удовольствием и интересом учится, если умеет войти в контакт, отстоять свою точку зрения и мужественно сносит поражения, значит, то, о чем мечтал автор, создавая этот курс, состоялось.

II. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В 1-М КЛАССЕ

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ В 1-М КЛАССЕ

(Планирование предлагается в соответствии с программой четырехлетней начальной школы.)

4 ч × 30 нед. = 120 ч

(Из них 8 ч включено в курс «Введение в школьную жизнь»)

I полугодие (58 ч)

Тема 1. Выделение свойств предметов через их сравнение. Отношение равенства и неравенства (58 ч)

1. Выделение признаков предметов через их сравнение. Сравнение по длине, толщине, цвету, материалу, форме. Отрезок как носитель длины .... 1 ч
2. Сравнение по выделенным признакам. Отношения «равно», «неравно», слова-синонимы для обозначения этих отношений. Способы сравнения по длине. Проверочная работа .... 2 ч
3. Выделение признаков предметов через их сравнение по длине, ширине, цвету, форме, материалу .... 2 ч
4. Подбор предметов, равных или неравных по разным признакам, моделирование отношений с помощью полосок. Проверочная работа .... 3 ч
5. Периметр. Сравнение периметров разных фигур. Знаки «равно», «неравно». Проверочная работа .... 2 ч

   Площадь. Сравнение площадей. Способы сравнения. Проверочная работа .... 2 ч

6. Перекраивание фигур. Равновеликие и равносоставленные фигуры .... 2 ч
7. Контрольная работа. Анализ работы .... 1 ч
8. Сравнение объемов. Графическое моделирование: от копирующего рисунка к схеме .... 3 ч
9. Переход от схемы к сравнению предметов и наоборот. Способы сравнения объемов путем переливания .... 3 ч
10. Сравнение предметов по всем известным признакам. Отрезок, луч, прямая .... 3 ч
11. Опосредованное сравнение объемов с помощью кубиков .... 2 ч
12. Работа со знаками «=», «≠». Введение знаков «>», «<». Введение буквенной символики как средства фиксации признака, по которому сравнивают одни и те же предметы. Рефлексия способов сравнения .... 3 ч
13. Сравнение по массе. Способы сравнения .... 2 ч
14. Проверочная работа .... 1 ч
15. Сравнение групп предметов .... 1 ч
16. Сравнение по другим признакам: по составу частей, из которых состоит рисунок, по расположению .... 2 ч
17. Способы сравнения по количеству. Проверочная работа .... 2 ч
18. Угол. Сравнение углов по величине. Треугольник .... 3 ч
19. Понятие величины. Буквы латинского алфавита. Проверочная работа .... 2 ч
20. Работа по прописям (часть 1-я). Подготовка к написанию цифр и букв .... 3 ч
21. Анализ способа написания цифры 1 .... 1 ч
22. Сравнение цифр по составу частей. Написание цифр 7 и 4 .... 1 ч
23. Цифра 3. Составление формул с помощью букв, обозначающих свойства предмета, и знаков «=», «≠», «>», «<». Рефлексия отношений .... 2 ч
24. Цифры 5 и 2. Опосредованное сравнение, заданное через схему или формулу .... 4 ч

25. Цифры 6 и 9. Сравнение величин с помощью схем и формул. Переход от сравнения предметов к схемам, формулам и обратно .... 3 ч
26. Цифры 8 и 0. Проверочная работа .... 2 ч

II полугодие (54 ч)

Тема 2. Действия сложения и вычитания (42 ч)

1. Уравнивание величин: переход от неравенства к равенству. Моделирование отношений с помощью схемы и формулы. Введение знаков «+», «−» .... 3 ч
2. Переход от неравенства к равенству и наоборот .... 3 ч
3. Рефлексия способов уравнивания и соотнесение их с конкретными условиями. Текстовые задачи на уравнивание. Переходы от текста к схеме и формуле и наоборот .... 5 ч
4. Свойства отношений равенства и неравенства ($A = B \Rightarrow A + C = B + C$; $A = A$; $A = B \Rightarrow B = A$; $A = B$ и $B = C \Rightarrow A = C$) .... 3 ч
5. Описание процесса уравнивания с помощью графической модели (схемы) и знаковой (формулы) .... 2 ч
6. Задача восстановления целого по частям (на разных величинах). Конструирование буквенно-графической модели с «лучиками» Переход от одних моделей к другим. .... 3 ч
7. Текстовые задачи на понятие части и целого. Введение значков для обозначения целого и части на схемах и в формулах. Подбор числовых значений букв в формулах .... 4 ч
8. Название компонентов при сложении и вычитании, их соотнесение с понятием части и целого. Переместительный закон сложения .... 1 ч
9. Превращение величины в части и в целое. Относительность этих понятий .... 2 ч
10. Скобки как знак, показывающий другую последовательность выполнения операций над величинами: $A - B - C = A - (B + C)$ .... 1 ч
11. Понятие нулевой величины .... 1 ч

12. Проверочная работа .... 2 ч
13. Понятие уравнения. Решение текстовых задач путем составления:
    а) выражения вида $x = ...$;
    б) уравнения вида $a + x = в$, $a - x = в$, $x - a = в$ .... 4 ч
14. Переход от формул к числовым выражениям с опорой на дошкольное представление ребенка о числе и наоборот. Примеры с «секретами».
    Сравнение числовых выражений. Восстановление части по целому и другой части. Связь между компонентами сложения и вычитания .... 5 ч
15. Контрольная работа. Анализ контрольной работы .... 2 ч
16. Рефлексия изученного. Решение задач и уравнений. Проверочная работа .... 2 ч

Тема 3. Введение числа (12 ч)

1. Какие бывают мерки. Подбор мерок, удобных для измерения данной величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой .... 2 ч
2. Задача опосредованного сравнения:
    а) с помощью посредника, равного одной из величин;
    б) с помощью посредника-меры. Число как результат измерения .... 2 ч
3. Выбор меры, удобной для измерения длины, площади, объема, массы, углов, количества .... 6 ч
4. Знакомство с названиями стандартных мер .... 1 ч
5. Знакомство с другими величинами: скорость, время, стоимость .... 1 ч

ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ УЧЕБНИКА И УЧЕБНЫХ ТЕТРАДЕЙ

Для работы с учебником очень важно понимать его отличие от традиционных учебников, служащих, как правило, для передачи информации. Это отличие состоит в следующем:

1) Данный учебник, прежде всего, носит ***рефлексивный*** характер. В школе дети должны работать не с рисунками в учебнике, а с ***реальными*** предметами. Желательно, чтобы каждый ребенок имел возможность работать с предметным материалом. Если такой возможности нет и учитель использует демонстрационные пособия, то с ними работает ***не учитель***, а ***дети*** (по очереди выходя к доске), с их помощью показывая, как они мыслят. Дома ребенок вместе со взрослым продолжает работать над содержанием тех заданий, которые он выполнял в классе, т. е. восстанавливает с помощью учебника в памяти то, что происходило в классе. Например, если дети совместно с учителем в классе работали над содержанием задания № 5, то и домой учитель задает № 5 (или аналогичный).

2) Учебник ориентирован на ***совместную*** работу взрослого и ребенка или детей между собой. Первоклассник не учится сам, зоной его ближайшего развития является общение со взрослыми и со сверстниками, именно поэтому вхождение ребенка в учебную деятельность может быть только ***совместным*** со взрослыми (в классе — с учителем, дома — с родителями или с другими людьми, выполняющими их обязанности) и сверстниками. К ребенку постепенно переходят функции взрослого. Он не только приобретает в совместной коллективно распределенной деятельности знания и умения, а учится строить свои отношения, приобретает способность брать на себя обязательства и принимать решения, учится способности к рефлексии, к осознанию того, что делает, и многим-многим другим человеческим качествам.

В учебнике есть тексты, предназначенные взрослому (обозначенные определенным значком), и тексты, обращенные к ребенку, которые «озвучивает» тоже взрослый, есть указания на то, как лучше организовать работу над каждым заданием: индивидуально или в группе из 2–4 человек. Кроме этого, есть «ключи» к выполнению целого ряда заданий, которые даны в форме перевертыша[1]. Именно «***под ключом***» содержатся ***все теоретические выводы***.

3) ***Овладение*** тем или иным понятием ***начинается*** не с определения понятия, не с правила оперирования этим понятием, а ***с решения учебно-практической задачи*** с опорой на ранее приобретенные умения. Задумываясь над основанием собственных умений, ребенок овладевает обобщенными способами действий, лежащими в основе этого умения, и тем самым он приобретает необходимые знания, которые может конкретизировать при решении целого класса частных задач. Речь идет не о переходе от знаний к умению, а затем к навыку (ЗУН), а от умений к знанию как основанию умения, а от него к навыку (УЗН), что соответствует детской логике и позволяет сформировать ***качественно иные знания и навыки.***

В основе формирования таких навыков лежит не многократное повторение однотипных упражнений, а осмысление ребенком того, от чего, от каких конкретных действий зависят правильность и скорость выполнения того или иного задания. Согласно принятому определению, навыки — «это автоматизированные действия, приуроченные к конкретным особенностям ситуации... но пока они неосознанны, их нельзя передать другому человеку... Высшей формой навыка являются те навыки человека, компоненты которых предварительно осознаются, ***осмысленно расчленяются*** (здесь и далее выделено нами. — *Авт.*) и ***объединяются в системы, отвечающие обобщенным особенностям*** объективной ситуации формирования навыка. В таком случае человек в процессе автоматизации и функционирования навыка сохраняет возможность ***сознательного контроля за своими действиями*** и по мере надобности ***может сравнительно легко их перестраивать.*** ...навыки являются не только итогом, но и условием творческой деятельности

[1] Для того чтобы ученик мог сначала сам поразмышлять над поставленными вопросами и, лишь перевернув учебник, мог соотнести собственную точку зрения с позицией автора.

человека»[1]. Именно переход от умения к знанию, а от него к навыку позволяет сформировать навык гибким и осознанным.

4) Формирование научного, теоретического, критического мышления как составная часть формирования личности в целом — непростая задача. Возврат к одному и тому же понятию несколько раз на новом уровне — это прием, который учит такому мышлению. Поэтому работа над тем или иным понятием предполагает три уровня, ***условно*** формулируемые так: делаю сам, и это у меня отлично получается (создание ситуации успеха), думаю над тем, как я это делаю (это рефлексия на способ), думаю над тем, как научить других делать как я (более высокий уровень рефлексии и использование различных личностных качеств).

Исходя из сказанного, обратите внимание на то, что работа с числом появляется раньше, чем дети задумываются над тем, а что же такое число, откуда оно взялось, каким оно может быть и т. д. Развитие понятия числа от натурального до действительного происходит на протяжении всего школьного курса математики.

5) Отбор материала для изучения далеко не случаен. Он обусловлен необходимостью не только дать ребенку определенный объем знаний, но и четко выстроить логику его развертывания.

Логика развертывания учебного материала построена таким образом, чтобы решение одной задачи с необходимостью требовало решения другой задачи (знания должны быть обоснованы необходимостью и идти от потребности самого ребенка). Это возможно лишь там, где возникает учебная задача. ***Дочисловой период содержит 6 основных учебно-практических задач***, решение которых приводит к овладению детьми новыми способами действий при сравнении предметов по разным признакам. В связи с этим совершенно ***недопустимо*** со стороны учителя что-либо переставлять, ***изменять*** как в последовательности изучения материала, так и в самом содержании.

Предложенный материал дает возможность для организации совместной работы, для подключения чувств,

[1] Философский словарь. — М., 1968.

эмоций ребенка. Ведь научить думать, развивать интуицию, воображение возможно лишь тогда, когда включаются эмоции. Формирование личности ребенка начинается с воспитания у него интереса к окружающим его людям и к изучаемому материалу. Именно групповая, совместная работа детей дает возможность увидеть друг друга, узнать друг друга ближе, вызвать интерес, и все это на предметном, в частности ***математическом***, ***материале***.

Опираясь на вышесказанное, важно отметить, что новый учебник математики, о котором идет речь, содержит большое количество разнообразных заданий, обеспечивающих более тщательную и постепенную отработку основных учебных действий, посредством которых ребенок решает возникающие перед ним учебные задачи.

6) Чтобы учебник был интересным, в него включен не только обязательный материал. Интересный учебник не заменят ни хрестоматии, ни научно-популярные книги, ***он доступен всем.*** Объем его увеличен не за счет многократного повторения однотипных упражнений, а за счет включения в него разнообразных, нетрадиционных заданий, по аналогии с которыми ребенок не только придумывает свои, но и размышляет над тем, как научить других придумывать такие же задания.

7) Интерес, который мы хотим воспитать, предполагает свободу выбора, поэтому в учебнике ребенку дана ***возможность выбора*** «своего» материала, как предметного (для девочек и для мальчиков), так и по степени трудности.

8) Дети любят загадки, ведь без вопросов ответы бесполезны. Научить ребенка ставить вопросы значит научить ***учить-ся***, т. е. учить себя, поэтому вопросы сопровождают практически все задания, характер которых многоплановый.

9) В учебнике нет сказочных героев, которые действуют на протяжении всей книги, но перед каждой новой темой, чтобы заинтересовать ребенка и создать необходимую мотивацию, используется сюжет про Незнайку и коротышек из сказки Н. Носова «Приключения Незнайки и его друзей». Чтобы ***сформировать учебную мотивацию***, нужно сначала привлечь ребенка сказочным сюжетом, а потом помочь ему увлечься математикой. Поэтому на первых порах, пока дети

маленькие, необходимо использовать конкретный сказочный или реальный сюжет, который бы, заинтересовав, вынуждал ребенка начать работать. Важно, чтобы ребенок захотел решать математическую задачу. Но как только дети начали работать, все лишнее нужно сразу отбросить.

10) В учебник включены тексты сказок (например, сказка «Два жадных медвежонка» в теме «Уравнивание величин»). Однако сказка не предназначена для введения понятия. Она читается после того, как завершено формирование того или иного понятия. С ее помощью учитель увидит, насколько глубоко ребенок овладел данным понятием, сможет ли он усмотреть ***в нематематических текстах математические связи*** и отношения.

11) В учебник включена специальная рубрика «Проверь себя», формирующая ***способность к самоконтролю***, а также разработана система нетрадиционных заданий, которыми насыщен весь учебник, — это так называемые задания с «ловушками», имеющие свою классификацию и в соответствии с ней свое назначение. Именно они позволяют систематически организовывать рефлексию собственных действий, ставить новые исследовательские задачи, подключать эмоции ребенка, строить содержательное общение детей. Использование «ловушек» (найди «ловушку», придумай «ловушку», научи других придумывать «ловушки») является не только эффективным средством воспитания, но и «портативным» диагностическим средством, показывающим учителю качество детских знаний.

12) Учебник математики впервые сопровождается комплектом из четырех разрезных рабочих тетрадей. ***Учебные тетради и специальные математические прописи*** предназначены в первую очередь для учащихся 1-х классов общеобразовательных школ, работающих по программе развивающего образования (система Д. Б. Эльконина—В. В. Давыдова), и ***являются приложением к учебникам математики***. Они с успехом ***могут быть использованы*** в школах, работающих ***по любым программам***, детских садах и даже при домашнем обучении. Родители, как и учителя, найдут в них новое содержание и много интересных заданий, способствующих развитию у ребенка логического мышления, интереса и желания учиться.

Рабочие тетради не только помогут организовать работу ребенка на уроке и дома, но и сохранят драгоценное время учителя, так как содержат большое количество необходимого разрезного раздаточного материала, который учитель вынужден изготавливать сам к каждому уроку.

Правая сторона каждой тетради отрезная, левая — сохраняет логику построения материала, давая ребенку возможность «восстанавливать» тетрадь, придумывая свое содержание.

Тетради содержат проверочные и контрольные работы.

13) В каждой рабочей тетради в конце есть специальные страницы — «***Справочник ошибок***». Неважно, что дети не всегда вначале каким-либо образом смогут описать «ошибкоопасные» места (словесно или в знаковой форме). Важно, что они должны с первых шагов задуматься над тем, какие ошибки можно допустить при выполнении того или иного учебно-практического действия, попытаться понять причину и характер ошибок, как своих (если они есть), так и чужих, и придумать способы их обнаружения.

Формирование такой способности к самопроверке даст возможность развить способность к контролю собственного способа действия и на его основании приведет не только к оценке самого способа действия, но и к самооценке, оценке изменений в самом себе. Таким образом мы пытаемся решить задачу воспитывающего обучения математике.

14) В соответствии с идеями развивающего образования (РО) предлагаемый материал не может быть структурирован поурочно, т. е. нет и не может быть дозировки, рекомендуемой для классной и для домашней работы. Объем работы на уроке определяется сложившейся ситуацией, которая зависит от особенностей именно ваших детей.

Поработав с новым учебником, вы, конечно, убедитесь в том, что он необычен как по содержанию, форме изложения, так и по целевому предназначению.

К сожалению, у некоторых работников образования сложилось искаженное представление о программе развивающего обучения по системе Д. Б. Эльконина—В. В. Давыдова. Они полагают, что эта программа рассчитана лишь на развитых детей с высокой психологической готовностью к школе, с такой дошкольной подготовкой, при которой ребенок идет в школу, умея хорошо читать, считать и писать. Эти заблуждения связаны прежде всего с непривычными для учителя как содержанием начального математического образования, так и формами организации и общения детей в процессе обучения.

Программа не только ***не требует*** никакого ***специального отбора*** детей, но и была неоднократно опробована (как целиком, так и частично) в классах, где обучались дети с тяжелыми нарушениями речи (г. Екатеринбург, школа-интернат № 58), во вспомогательной школе-интернате № 3 г. Харькова (Украина), в коррекционных классах г. Сочи, г. Лисичанска (Украина) и других. Благодаря этим многолетним экспериментам удалось, как нам кажется, создать такую программу и пособия, которые дали возможность быть ***успешным*** каждому ребенку.

Логика построения курса, задания для детей и технология обучения разработаны таким образом, что дают возможность обучать в одном классе как слабого ребенка, так и одаренного. Каждый ребенок из предложенных ему заданий может сам выбрать те, которые максимально отвечают способностям, темпераменту и интересам (принципы составления этих заданий описаны выше). А это, в свою очередь, позволит вам создавать ситуацию успеха для каждого ученика.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К УЧЕБНИКУ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ 1-ГО КЛАССА

Часть I. КАК СРАВНИВАТЬ ПРЕДМЕТЫ ПО РАЗНЫМ ПРИЗНАКАМ

Для введения понятия величины, лежащего в основе понятия действительного числа, необходимо, чтобы ребенок научился мысленно отделять свойство предмета от самого предмета. В этом и заключается основная цель дочислового периода и назначение первой из трех частей программы первого класса.

Необходимость сравнения по какому-либо признаку возникает в ситуации восстановления какого-либо объекта, обладающего изучаемыми свойствами.

Именно задача восстановления (а затем и воспроизведения) вынуждает ребенка выделить свойства предметов и сконструировать способы их сравнения по выделенному признаку.

Сначала ребенок выполняет практическое действие сравнения различных реальных предметов, которые можно взять в руки, а затем объектов, которые нельзя взять в руки (например, отрезков, рисунков и т. п.), по различным признакам: цвету, форме, материалу, назначению, длине, площади, объему, массе, количеству, углам.

Сравнивая предметы по тому или иному признаку, дети устанавливают отношение равенства или неравенства (на первых порах фиксируя результат сравнения с помощью слов «они одинаковые, равные, их столько же» или «они неодинаковые, разные, неравные» и т. д.).

Необходимо заметить, что чем больше ***слов-синонимов*** для описания отношений равенства и неравенства будет использовать учитель, тем легче будет детям «переводить» тексты арифметических задач на язык математики.

Предмет является носителем величины (длины, площади, объема, массы). Саму длину (площадь и др.) нельзя взять в руки, отделив от предмета. Ее можно представить только в мысленной, а не предметно-чувственной форме. Обнаружить умение ребенка мысленно отделять свойство предмета от самого предмета можно будет при введении букв для обозначения величин (буквой в математике обозначают не предмет, а его свойство). Если ребенок предлагает обозначить соответствующую величину первой буквой названия предмета — носителя этой величины, то, вероятно, ребенок не различает предмет и его свойство. Например, сравнивая по массе яблоко и грушу, дети могут предложить массу яблока обозначить буквой Я, а массу груши — буквой Г.

Необходимо напомнить, что дети все делают сами, своими руками, даже если у них получается медленно и не очень аккуратно, ведь в этом заключается успех изучения всего дальнейшего материала.

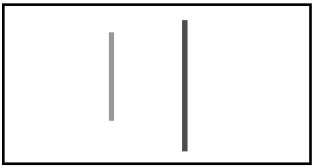
Глава 1. СРАВНЕНИЕ ПО ДЛИНЕ, А ТАКЖЕ ЦВЕТУ, ТОЛЩИНЕ, МАТЕРИАЛУ, ФОРМЕ

Цель первых, вводных уроков: введение понятия длины.

На первом уроке вы используете мотивационный прием, читая детям выдержки из романа-сказки Н.Носова «Приключения Незнайки и его друзей» или рассказывая о Знайке, придумавшем воздушный шар, и предлагаете детям изготовить для воздушного шара сначала сетку. Для того чтобы ребенок мог представить, что необходимо для изготовления сетки, вы предлагаете рассмотреть большую цветную картинку, которую демонстрируете всему классу, и показываете, какие нитки для чего нужны. На ней должны быть изображены нитки двух цветов и разной длины: одни — поперечные, другие — продольные.

После этого вы показываете детям две нитки разного цвета, разной длины, но изготовленные из одинакового материала и одинаковой толщины (для постановки задачи лучше использовать разноцветные шнурки), и предлагаете подобрать из большого набора нарезанных ниток (шнурков, проволок, лесок) разного цвета, толщины, качества (шелковые, хлопковые, синтетические, как рыболовная леска, тонкая проволока и т. д.) такие же, т. е. подходящие, нитки. В предлагаемом наборе из 10–15 штук должно быть много подходящих разноцветных ниток (шнурков). Это задание в свернутом виде представлено в учебнике и в учебной тетради под № 1.

Учитель прикрепляет цветные нитки-образцы (шнурки) на таком фоне, чтобы они были отчетливо видны.



Теперь нужно обсудить с детьми, какую нитку вы сначала начнете подбирать: длинную или короткую. Помните, что в вашем вопросе нельзя нитки называть по цвету, так как в таком случае цвет станет существенным признаком, а в данной ситуации он не важен. Например, дети предложат начать подбирать с короткой. Тогда подбор длинной нитки будет служить закреплением и покажет вам, приняли дети способ действия или нет.

Предложите поднять руку тем детям, которые хотели бы подобрать подходящие для сетки нитки. Наверняка рук будет много, поэтому предложите такую форму общения: «Вас много, и всем хочется подбирать подходящие нитки, поэтому давайте договоримся: я буду показывать нитку, а вы будете говорить мне, подходит ли она для изготовления сетки или нет».

Теперь вы начинаете поочередно предлагать детям нитки, заведомо не подходящие только по одному из признаков, в такой последовательности:

1) подходит по толщине, цвету, материалу, но короче;
2) подходит по длине, цвету, материалу, но не подходит по толщине;
3) подходит по длине, толщине, цвету, но не подходит по материалу;
4) подходит по длине, толщине, материалу, но не подходит по цвету.

На доску прикреплять эти нитки нельзя. Пусть они лежат сначала у вас на столе, но обратите внимание на то, чтобы дети, сидящие за первой партой, их не видели.

Длина первой нитки не сильно отличается от образца. Предлагая детям, держите ее горизонтально. Каждый раз, видя неподходящую нитку, дети должны доказать, почему она не годится. Для этого дети выходят к доске и прикладывают нитку к образцу. Сравнивая нитки по длине, дети должны их натянуть, а такую работу удобнее делать в паре. Это одна из возможностей вовлечь детей в парную работу. «Что же у нее не подходит, ведь она тоже красная?» — удивляетесь вы. Дети должны сказать, что у нее длина не подходит, т. е. нитка длиннее (или короче), чем нужная. Не забудьте попросить провести по длине пальчиком.

Важно дать возможность ребенку осознать его способ действия при подборе ниток, поскольку именно длина нитки, ее толщина и материал, из которого она изготовлена, определяют возможность ее применения для изготовления сетки. Цвет значения не имеет. Отвергая ту или иную нитку, ребенок вынужден будет называть признак, по которому предлагаемая вами нитка не подходит. Вы же пытайтесь «доказать», что она подходит, ориентируясь на те признаки, по которым нитки одинаковые. Обратите внимание, что ребенок объясняет не с места, показывая пальцем, а обязательно выходит к доске. Это должно стать правилом.

Предлагая нитку нужной длины, вы как бы забываете о толщине и пытаетесь убедить детей, что эта нитка подходит, ведь длина у нее такая же. Дети отвергают данную нитку, так как у нее, скажут они, другая толщина.

— То длина не подходит, то толщина... (В это время вы перебираете на столе нитки, шнурки и т. д.) Что за дети такие, все им не так... (Это «ворчанье» необходимо для того, чтобы у слабых детей было время на обдумывание.) Теперь точно нашла: и длина, и толщина — все подходит, не придеретесь. А красавица какая!

И вы предлагаете детям шелковую тесьму, которой завязывают коробки конфет.

— Опять не подходит? Ну, все! Ищите сами. (Вывешиваете все нитки на доску.) Идите и выбирайте. А вы уверены, что эта нитка подходит?

Доказывая, ребята снова проговаривают все признаки.

— По каким признакам мы сравнивали эту нитку с другими?

Дети сами называют признаки, по которым можно сравнивать нитки.

— Для того чтобы другие смогли подбирать такие же нитки, чему их надо научить? (Сравнивать по длине, толщине, материалу и цвету.)

Делать это нужно ***быстро и весело***, каждый раз удивляясь, радуясь и сомневаясь, сопровождая свои сомнения вопросами: «Так по какому признаку она отличается от нужной нитки?» или «По каким признакам эти нитки оказались разными? Одинаковыми?»

У детей речь еще слабо развита, вряд ли они смогут четко и внятно аргументировать свои ответы. На данном этапе очень важно применять следующий ***методический прием***: после ответа ребенка, каким бы он ни был, вы очень доброжелательно говорите: «Правильно ли я тебя поняла?» — и далее фактически даете образец правильной речи. Однако ***помните:*** 1) ни в коем случае ***не нужно требовать повторения*** за учителем поодиночке или хором того, как нужно правильно говорить; 2) любые свои слова ребенок должен ***сопровождать действием,*** показывая, ***как*** он узнает, какая нитка подходит, а какая нет; 3) несмотря на еще бедную речь ребенка, речь самого учителя должна быть богата ***синонимами,*** главное, чтобы ребенок понимал, что вы хотите сказать.

После обсуждения того, как сравнивать нитки по разным признакам, вы предлагаете детям дома подобрать такие же по длине нитки, как и у вас. Дети с удовольствием примут ваше предложение. «Но у меня, — продолжаете вы, — только 6 таких ниток, а вас в классе много. Как быть?» Необходимо дать детям возможность обсудить эту проблему. Предложений может быть несколько, их нужно все выслушать. Дети могут предложить взять катушку ниток, нарезать такие же по длине и раздать всем ребятам. Высказавших такое предложение нужно похвалить, но сказать, что, к сожалению, катушки с нитками нет. Самостоятельно или с вашей помощью дети выходят на изображение нитки на бумаге. Опять надо дать детям возможность самостоятельно нарисовать данную нитку на бумаге. Это может быть как групповая, так и парная или индивидуальная работа. Каждый ребенок вправе выбирать сам. В результате может получиться любая линия: отрезок, кривая. После обсуждения приходим к выводу, что нитку нужной длины ***удобнее*** нарисовать в виде отрезка такой же длины и с ним сравнивать остальные. Длина нитки, таким образом, будет соответствовать длине отрезка.

Таким образом, с первых уроков начинается работа по различению разных свойств предметов — величины и формы. Так, для сравнения ниток по длине необходимо придать им ***одинаковую форму***, например форму отрезка прямой.

После этого на доске с помощью детей нужно начертить отрезок и предложить из нарезанных ниток подобрать такие же по длине. Дети поочередно ***парами*** выходят к доске и показывают остальным, как они подбирают из ниток, подходящих по толщине и качеству (материалу), равные по длине отрезку.

Вслед за этим необходимо каждой группе, паре или конкретному ребенку дать 10—15 нарезанных цветных ниток, среди которых достаточно подходящих, и предложить им подобрать самостоятельно нужные нитки, предварительно договорившись друг с другом об организации работы по отбору. Это **задание № 2** (РТ-1).

Дети сами должны выбрать способ работы: индивидуальный, парный или групповой — с тем, чтобы учитель смог увидеть детей, которые не хотят работать в группе. Именно отказ работать в группе может быть симптомом личностных проблем ребенка (демонстративность поведения, желание обратить на себя внимание, страх и неумение общаться с другими детьми и т. п.). Задача учителя и психолога — разобраться в детских проблемах и помочь ребенку, «заманивая» его для работы в группе.

Дети, которые участвовали в работе группы, должны оценить свой способ работы, сообщив, как она была организована, т. е. предметом осмысления становятся ***способ организации работы в группе и способ сравнения*** по заданному признаку.

Помните, если ребенок работал в группе над решением той или иной задачи, то необходимо предоставить ему возможность ***проверить себя:*** а сам-то он мог бы решить аналогичную задачу? В случае затруднения он может обратиться к товарищам по классу или к учителю.

Заключительным этапом работы должно стать обсуждение того, какие ошибки могут быть допущены при... Далее следует уточнение: например, при сравнении ниток по длине, или толщине, или цвету, или материалу. Таким образом, уже с первых дней обучения у детей будет формироваться ***действие контроля*** за собственным способом действия.

При подведении итогов вы спрашиваете у детей: «Как вы научите родных сравнивать нитки по длине? По толщине? По материалу?»

Домашнее задание после каждого урока будет выглядеть примерно так: «Расскажи дома, что мы делали в классе. Научи родных тому, чему научился сам». Вы задаете на дом номера заданий, с которыми дети развернуто работали в классе.

Напоминаем! На первом этапе обучения ***учебник*** служит для того, чтобы дети дома ***вспомнили,*** что они делали в классе. Соответствующие задания ***в учебной тетради*** необходимы либо для работы в классе, либо для ***воспроизведения*** всех действий, произведенных ребенком на уроке. Некоторые задания во время урока ребенок выполнял совместно с другими детьми, теперь же дома он пробует их сделать сам.

Так, в **заданиях № 1 и 2** дети дома могут наклеить прямо в тетрадь подобранные нитки.

Задания № 3, 4, 5 и 6 требуют сначала совместной работы детей в классе (см. учебник), затем индивидуальной — дома (см. тетрадь), однако помните, что если кто-либо в классе хочет делать сам или в паре, — отказывать нельзя. Задания помогут ребенку, работая с длиной, отвлечься от остальных признаков ниток. Здесь уместно использовать шнурки, веревки, проволоку и т. д. Важно, чтобы ребенок, говоря о длине, показывал ее пальчиком.

После выполнения **задания № 3** предложите детям вновь посмотреть на него, обратившись к ним с вопросом: «Что интересного вы заметили?»

Дети могут заметить, что одни линии — замкнутые геометрические фигуры (у них концы совпадают), а другие — незамкнутые, разомкнутые. Конечно, дети своими словами объясняют это, однако учитель может использовать упомянутый ранее прием, вводя необходимые слова, термины: «Правильно ли я тебя поняла? Ты хотел сказать, что...»

Возможно, кто-то из детей знает названия некоторых из нарисованных фигур: прямоугольник, отрезок, окружность (дети могут сказать «круг», и пока можно оставить это слово, хотя круг должен иметь площадь, а окружность — нет, но позже мы будем говорить об этих различиях), ломаная, треугольник (как замкнутая ломаная из трех звеньев), кривые (замкнутые и незамкнутые). Все эти сведения ***специально не нужно навязывать*** детям, однако имеет смысл предложить им подумать над тем, какие вопросы они хотели бы задать, глядя на эти фигуры.

После выполнения **задания № 5** вы можете организовать выставку детских работ, которые, поверьте, будут удивительными. Ведь детской фантазии нет предела. Это задание можно предложить выполнить дома с родителями.

Задание «Проверь себя!» предназначено для самостоятельной работы.

Предложите детям самим придумать, как вы сможете узнать, какие отрезки каждый из них считает одинаковыми по длине. Эту работу дети выполняют в учебной тетради и, отрезав правую часть, сдают учителю. Дома по учебнику они могут рассказать, как они выполняли это задание.

Глава 2. СРАВНЕНИЕ ПО ДЛИНЕ, ШИРИНЕ, ЦВЕТУ, ФОРМЕ И ЧТО ТАКОЕ ПЕРИМЕТР

В этой главе рассматривается не только сравнение по длине, толщине, цвету и материалу, но и по ширине (полоски), форме, вводится понятие ***периметра*** как ***длины границы любой плоской фигуры.***

Пока у ребенка не будет сформирована учебно-познавательная мотивация, мы будем использовать сюжет о Незнайке и его друзьях. Для введения способов сравнения по указанным признакам нужно вернуться к исходному сюжету о коротышках, которые собираются путешествовать на воздушном шаре, и предложить детям изготовить корзину, состоящую из дна и бортика. Учитель должен заранее заготовить модель корзины достаточно крупного размера, чтобы каждый ребенок мог отчетливо видеть бортик и дно.

Задавая в качестве образцов бортик — полоску-прямоугольник — и дно — квадрат (**задание № 7**), мы побуждаем ребенка выделять признаки, по которым он невольно сравнивает эти фигуры, подбирая из готовых заготовок такую же полоску, как данная (**задание № 8**), а затем дно, подходящее к бортику (**№ 22, 23** РТ-1).

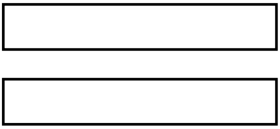
Методика работы аналогична подбору ниток, только теперь, кроме длины, которую, без сомнения, увидят дети, появляется сравнение по ширине и по форме.

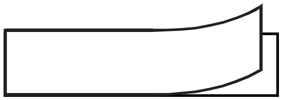
Задание № 9 (РТ-1) показывает, какие признаки из рассмотренных «удерживает» в своей голове ребенок. Делается вывод о необходимости научиться сравнивать предметы по разным признакам.

Задание № 10 (РТ-1) предлагает проверить, может ли ребенок отвлечься от всех свойств полоски, кроме длины, понимает ли он, что цвет и ширина не имеют значения, т. е. могут быть любыми, если нужна вторая полоска ***такой же длины.*** Об этом важно побеседовать с ребенком. Важно при сравнении по длине употреблять ***слова-синонимы***: такая же длина, одинаковые по длине, равные по длине, равной длины и др.

Все рисунки ребенок здесь и далее выполняет карандашом ***от руки*** (без линейки!). После того как ребенок покажет, что у этих полосок одинаково (проведет пальчиком по длине), вы задаете вопрос: «А как другому человеку определить, что вы увидели у этих полосок одинаковое, если вас рядом не будет?» Дети приходят к выводу, что хорошо бы от пальчика остался след. В этом может помочь фломастер — длину нужно выделить поярче.

Чтобы доказать, что вторая полоска ***равна*** по длине ***первой,*** эти полоски нужно вырезать и либо приложить друг к другу, либо наложить одну на другую:

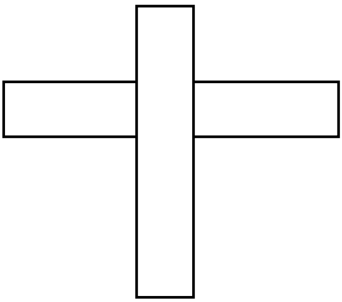
а) 

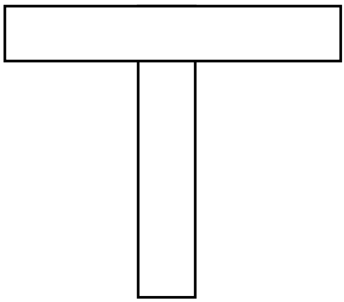
б) 

Для осознания детьми своего способа действия вы берете две полоски ***разного*** цвета и предлагаете детям научить вас, как же узнавать, одинаковая или разная длина у данных полосок.

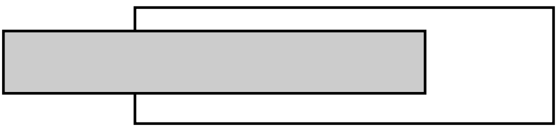
Дети будут стремиться ***показать,*** как это сделать. Необходимо предложить им ***не показать,*** а ***объяснить словами***, ***как*** нужно действовать (это важно для развития речи и осмысления способа действия).

Первое, что они скажут: «Нужно полоски наложить друг на друга (или приложить друг к другу)». Вы немедленно выполняете данное указание, накладывая полоски друг на друга (или прикладывая их) следующим образом:





Тогда дети попытаются объяснить, что полоски нужно положить друг на друга по длине. Тогда вы сделаете так:



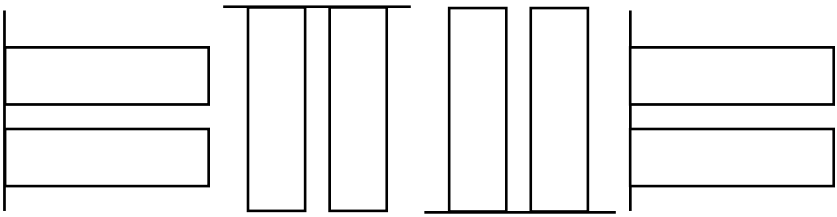
Дети опять скажут, что вы делаете не так. Поскольку полоски разного цвета, то вы просите уточнить: выше или ниже опустить одну из полосок, и затем опустите или поднимете выше (или ниже), чем необходимо.

Все эти манипуляции необходимы для того, чтобы дети искали подходящие слова, описывающие способ. Развитие речи будет происходить не вследствие пересказа чужих слов, а в связи с собственным поиском таких речевых оборотов, которые были бы понятны человеку, не владеющему данным способом.

После выполнения данного задания предложите детям выполнить следующее. Его нельзя оторвать во времени от предыдущего.

В **задании № 11** (РТ-1) ребенок должен произвести действие оценки по отношению к тому, как это задание могло быть выполнено другими.

Понятно, что, предлагая такое задание, мы рассчитываем на то, что оно поможет увидеть разные способы выполнения **задания № 10**, выяснить, что удобнее изображать либо одну полоску под другой (горизонтально), либо как-то иначе. Главное, чтобы концы полосок оказались на одном и том же уровне:



Цвет и ширина полосок могут быть любые.

Таким образом, темой обсуждения с детьми становится ***способ*** изображения равных по длине полосок.

Задание № 12 (РТ-1) аналогично предыдущим. Важно, чтобы ребенок ***самостоятельно*** рисовал, раскрашивал и вырезал, так как это необходимо для развития. Если будут работать руки, то заработает и голова. Поэтому не пытайтесь, помогая ребенку, делать за него. Пусть будет не так красиво, не так аккуратно, главное — самостоятельно.

Только не заставляйте ребенка многократно повторять одно и то же. Важно, чтобы ребенок не переутомлялся, не терял интерес. Он обязательно научится! Не сомневайтесь в нем! Хвалите его, даже если у него не совсем удачно получается!

Задание № 13 (РТ-1) поможет детям, которым нужно больше времени на осмысление. Ребенку важно научиться видеть и длину, и цвет, не обращая внимания на ширину.

Игру дети могут придумать любую и сделают это лучше нас, например можно представить, что это образцы блоков для строительства дома, и обсудить, какие пойдут на фундамент, на перегородки и т. д.

В **задании № 14** (РТ-1) важно обсудить ***способ изображения*** разных по длине полосок, именно ***способ*** является ***предметом исследования*** детей.

Задание позволяет проверить, могут ли дети абстрагироваться от других свойств полосок (ширины, цвета и др.).

Поиск ответа на вопрос: «Как научить других рисовать полоски одинаковой ширины?» — развивает речь ребенка, позволяет осмысливать свой собственный способ действия. Искать ответ он может как в групповой, так и в индивидуальной форме. Здесь рекомендуем руководствоваться только желанием ребенка.

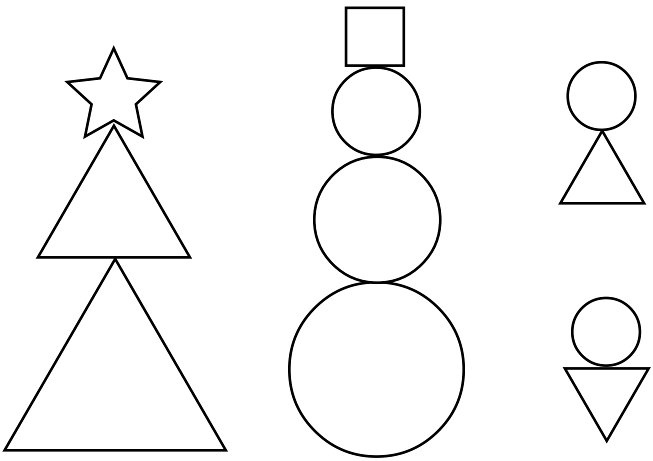
При проверке выполнения **задания № 14** (15 РТ-1) вы должны не соглашаться с выбором ребенка, мотивируя тем, что он выбрал полоски разной длины, а нужны ***одинаковые*** полоски. Вы как будто случайно опускаете слова «по ширине». Пусть ребенок доказывает, что он выполнил задание верно, выбрав полоски, разные по длине, так как в условии сказано, что они должны быть одинаковыми только ***по ширине,*** а все остальные признаки (длина, цвет, материал) могут быть любыми.

Задание № 15 (16 РТ-1) подводит некоторый итог предыдущим. Оно позволяет увидеть, выделяет ли ребенок свойства предметов (полосок, в частности). Какие? Может ли он сравнивать по одному из признаков или видит одновременно несколько?

Если теперь вы покажете полоски и попросите детей их сравнить, то у них обязательно должен возникнуть вопрос: «А по какому признаку?»

Задание № 16 (17 РТ-1). Здесь одинаковые по форме предметы отличаются фактически размерами. Ребенок может выполнять задание в паре с другим ребенком или самостоятельно. Главное — спросите у него: «Как ты узнаешь, какие фигуры имеют одинаковую форму, а какие — разную? Научи меня!»

Лишними фигурами ребенок может назвать ромбик (параллелограмм) и звездочки, отнеся при этом в одну группу три круга, в другую — три треугольника, в третью — три квадрата, а в четвертую — три прямоугольника (полоски), из которых он может сложить елочку, снежную бабу и т. д., если вы предложите ему поиграть в игру: «Что из этих фигур может получиться?» Дома можно попросить изготовить из данных фигур аппликацию. Дети с удовольствием выполняют данную работу.



Задание № 17 требует прежде всего умения определять, по какому признаку могли оказаться одинаковыми данные фигуры (пусть дети обсудят это в группах):

1) по длине;

2) и 4) по форме;

3) и 5) по ширине;

2) и 5) по цвету.

Дети могут сказать, что все эти фигуры одинаковые по назначению, по материалу (из бумаги), иногда дети говорят: «Они одинаковые, потому что все они фигуры (геометрические)» и т. д.

Задание № 18 требует от ребенка осмысления уже рассмотренных признаков предметов.

Работа с этим заданием ведется не по учебнику и не по тетради, а на доске.

Сначала прочтите с детьми ту главу в сказке, в которой описывается встреча Незнайки с архитектором Кубиком, который строил дома с колоннами, и предложите детям достроить один из таких домов.

На доске аппликация — дом с колоннами (см. рисунок в учебнике). Дом и колонны должны быть увеличены в размере, как и все наглядные пособия. Полоски, предлагаемые для подбора подходящей, лежат на столе учителя, ***вне видимости*** детей.

Учитель поочередно должен предлагать колонны, которые, как ему кажется, подходят (описание мотивационного приема см. при введении длины), причем предлагать колонны нужно в строго определенном порядке:

1. Колонну ***такую же***, как данные, ***по цвету***, ***форме***, ***материалу*** и ***ширине***, но с ***другой длиной*** (лучше короче).

Дети будут говорить, что она не подходит, но учитель, удивляясь, может не соглашаться, мотивируя, например, тем, что она тоже желтая (тоже из бумаги и т. п.). Дети должны доказать, путем приложения или наложения, что она короче, т. е. длина у нее меньше.

! Все при этом делать быстро, весело!

2. Следующую колонну нужно как бы невзначай выбрать ***такой же длины,*** но уже меньше ***по ширине.*** Остальные признаки полностью совпадают (цвет, материал).

Обсуждение и доказательства со стороны детей обязательны, как здесь, так и далее, и должны сопровождаться показом: пальчиком пройти по длине, ширине.

3. Следующая колонна должна быть предложена ***такой же длины и ширины***, из того же ***материала***, но ***другого цвета.***

4. Затем предлагаете колонну ***такой же длины, ширины, цвета,*** но из ***другого материала*** (например, из клеенки).

5. Выражая одновременно восторг и сожаление, вы сетуете на то, что раньше не заметили «красавицу». И берете колонну другой формы, но совпадающую по длине, ширине и цвету с нужной. Дети опять ее отвергают.

«Отчаявшись», вы, наконец, предлагаете детям самим подобрать подходящую колонну.

Дети выбирают нужную и доказывают, почему она подходит к этому дому. Доказывая, дети снова проговаривают все признаки, по которым можно сравнивать предметы.

Подведя итог выполнению задания, учитель задает сформулированные в учебнике вопросы и предлагает ***дома*** показать родным, как нужно подбирать подходящую колонну и доказывать, почему другие колонны не подходят. (Колонны, которые ребенок должен вырезать, есть в **№ 19** РТ-1.)

Задание № 19 требует от ребенка придумывания или подбора фигур или предметов, которые нужно сравнить по какому-либо признаку. Оно может выполняться совместно с другими детьми.

Если проанализировать сам способ придумывания, то станет понятно, что действовать можно по-разному:

1) можно взять любые два предмета и предложить сравнивать их по какому-либо свойству, которое должен назвать ребенок;

2) сначала ребенок может выбрать свойство, по которому он сам умеет сравнивать, а затем подобрать предметы, обладающие этим свойством, после чего предложить сравнить эти предметы по выбранному свойству;

3) можно выбирать не только свойства (признаки) предметов, но и то отношение, которое может быть установлено при сравнении (отношение равенства или неравенства); причем задать это отношение можно не только в словесной форме, но и ***с помощью*** равных или неравных ***полосок (предметное моделирование)***.

Другими словами, задание, придуманное ребенком, может выглядеть так:

1) ребенок показывает ***один предмет*** (одну полоску или другую фигуру) и предлагает подобрать другой предмет, ***такой же по высоте (форме, размеру, цвету и т. п.)***, или подобрать предмет, неравный этому по длине, ширине и т. д.;

2) ребенок показывает ***два*** предмета и называет признак, по которому их нужно сравнить;

3) ребенок просит другого подобрать два предмета, ***одинаковые*** или ***разные*** по какому-либо из признаков, который он называет.

Если вы предлагаете сравнить по длине два предмета, важно, чтобы по остальным признакам эти предметы отличались друг от друга. Только в этом случае будет понятно, умеет ли уже ребенок мысленно выделять отдельные свойства предметов. Поэтому вы заранее должны продумать, какие предметы предложите детям для выбора. Очевидно, что если предметы, например, одинаковы по материалу, то они должны отличаться по всем остальным признакам: по цвету, размеру и др.

Если дети предложат однотипные задания, расстраиваться не нужно. Вы сами на уроках предлагайте детям разные виды заданий. А потом еще раз предложите детям придумать задания на сравнение — и увидите, сколько интересного придумают ваши дети.

На ***моделировании отношений с помощью полосок*** остановимся подробнее. Эта тема не включена в учебник в явном виде, но она имеет очень большое значение для введения графического моделирования.

Для того чтобы дети научились ***моделировать отношения*** равенства — неравенства при сравнении предметов по разным признакам с помощью полосок, можно предложить им ***игру*** «в молчанку». Вы предлагаете без слов и всем одновременно сообщить о том, равны ли, например, мяч и теннисный шарик по форме, по материалу, по размерам или нет. Поиграв несколько раз, нужно обсудить, кто как показывал, и после обсуждения необходимо прийти к идее использования полосок. Это будет не очень трудно сделать, так как последнее время дети постоянно работали с длинами полосок. Если дети не предложат данного способа, то можно будет воспользоваться **еще одним приемом** РО: «Ребята в другом классе, — говорите вы, — предложили вот такой способ. Как вы думаете, можно его использовать или нет?»

Дальше надо договориться о том, как с помощью полосок показать результат сравнения по какому-либо признаку.

Вы должны прийти к выводу, что это можно сделать с помощью их ***длины*** (а тогда ширина и другие признаки значения иметь не будут).

Теперь для игры необходимо раздать каждому ребенку наборы полосок разной длины, цвета и ширины (среди них должны быть полоски, одинаковые по длине, но различные по всем другим признакам, в том числе и ***разной*** ширины). Дети, сравнивая мяч и теннисный шарик по форме, показывают, что они равны, с помощью полосок одинаковой длины. Если дети не могут сообщить об отношении равенства с помощью полосок этого набора, значит, им еще трудно абстрагироваться от всех остальных признаков при сравнении по длине. Тогда важно дать детям возможность обсудить способ сообщения в группе, а затем сопоставить групповые решения данной задачи.

Таким образом, предложенная игра «в молчанку» может выглядеть так: вы показываете два предмета, называя признак, по которому их нужно сравнить, а дети показывают установленное отношение с помощью ***длин*** полосок. Понятно, что относительно такой игры «в молчанку» можно предложить детям и обратные варианты игры. Например, учитель сообщает, что группы детей в другом классе сравнивали пары предметов, которые у них были на партах, и показывали результат сравнения с помощью полосок. У одной группы, говорит учитель, были для сравнения вот такие предметы (показывает), и вот какие полоски дети держали в руках:

«Как вы думаете, — спрашивает учитель, — по какому признаку дети сравнивали эти предметы?» Вариаций может быть много. Вот здесь вы можете проявлять свое творчество.

Очевидно, необходимо организовать со своими детьми аналогичное групповое придумывание заданий для детей из другого класса, или для родителей, или для ребят из других групп — неважно для кого, но важна мотивация. С придуманными заданиями обязательно нужно поработать.

Проверочная работа покажет, каждый ли ребенок научился сравнивать предметы по тем признакам, с которыми уже работали. Эта проверочная работа фактически повторяет задания учебника, только не требует обсуждения, а помогает учителю выявить тех детей, которые еще не умеют сравнивать предметы по тому или иному признаку. При желании можно проверить, может ли ребенок с помощью ограниченного набора полосок показывать выявленное отношение, и понять, какие дети, умея сравнивать, не могут пока использовать полоски для сообщения, а могут только зафиксировать отношение словами «равно — неравно» или «одинаковые — неодинаковые». Тем не менее ***останавливаться*** на этом специально ***не нужно***, «натаскивая» детей на таких заданиях. Впереди еще предстоит сравнение предметов по другим признакам, а значит, дети, которые осмысливают медленнее, чем другие, получат дополнительную возможность и время на овладение таким опосредованным способом фиксации отношений.

При анализе проверочной работы важно выделить, какие ошибки можно было допустить, какие ошибки допустили, как их обнаружить, и занести их (по возможности) в справочник ошибок.

Следующие виды заданий посвящены **сравнению периметров разных фигур**.

Задание № 20 переводит работу по подбору полоски-бортика в подбор дна для корзины, следовательно, нужно опять вернуться к исходному сказочному сюжету и снова рассмотреть модель корзины. После этого можно группам раздать заготовку бортика и несколько заготовок дна и предложить подобрать подходящее дно. Дети будут действовать по-разному (прикладывать бортик к дну, катить дно по бортику и т. д.). Все способы потом нужно обсудить, но главное, чтобы дети определили, что должно быть у бортика и дна одинаковым, показали это сначала пальчиком, а потом оставили на бумаге след – навели фломастером. Необходимо, чтобы дети обосновали, почему они так считают. Пусть дети попробуют назвать этот признак (имеется в виду длина границы фигуры, так как термин «периметр» пока не вводится).

Подбирая подходящее к бортику дно, дети прежде всего вынуждены выделить ***существенный*** признак: они должны будут сравнить ***длину полоски*** и ***длину границы квадрата***, т. е. фактически ***периметр.***

Слово «периметр» произошло от двух греческих слов, одно из которых обозначает окружность, а другое — «измеряю вокруг», и обозначает длину замкнутого контура.

Чаще всего этот термин применяется к треугольнику и многоугольнику и в этом случае означает сумму длин всех сторон. Из данного определения следует, что в общем случае длина границы по контуру любой фигуры и есть периметр, так, например, длина окружности — это и есть периметр круга.

Если ребенок имеет дело с фигурой, вырезанной из бумаги, то он сначала должен пройтись пальчиком по всему контуру, по всей границе, а затем «оставить след» от показа границы в виде линии, проведенной фломастером (ручкой, карандашом) вдоль контура. Когда фигура изображена на бумаге, то длина границы уже обозначена.

Итак, на этом этапе ***самое главное***, чтобы ребенок мог ***показать длину границы*** и ***выделить ее цветом***. В **задании № 20** речь идет о границе квадрата. Заменив квадрат на круг, прямоугольник и другие фигуры (см. **задание № 21**), ребенок будет сравнивать длину полоски с длиной границы каждой из фигур, используемых в качестве дна.

Если поставить задачу: подобрать к бортику дно не вырезая, у детей возникнет потребность в конструировании нового способа действия. Поэтому нужно предложить детям для сравнения на выбор разные средства: нитки, проволоку, резинку, ленточку. Надеемся, что дети, попробовав использовать каждое из этих средств, убедятся в том, что проволокой действовать удобнее всего, так как она легко ***меняет форму***, но при этом удерживает ее. Также дети должны прийти к выводу, что выполнять такую работу легче в паре.

Выбрав проволоку, равную по длине полоске, ребенок придает ей форму дна и, таким образом, сравнивает длину границы дна с длиной бортика (или наоборот). Не забывайте задавать вопросы, восхищаясь: «Как же это у тебя получается? Научи меня!» Желательно иметь для такой работы не только раздаточный материал для каждого ребенка (ведь очень важно, чтобы каждый ребенок все делал своими руками), но и демонстрационные пособия, на которых дети смогут у доски показать свой способ сравнения.

Для длины границы фигуры предложите детям придумать свои названия. Запишите предложения детей в нашу «методичку» на последнюю отрывную страницу и пришлите — это всегда интересно! Если дети ничего не смогли придумать — не отчаивайтесь, значит, еще не время, а если они смогли придумать какое-либо название, то не нужно сразу вводить слово «периметр». Пусть дети поживут некоторое время со своим придуманным названием, и только потом скажите, что для того, чтобы все понимали, о чем идет речь, настоящие математики назвали длину границы фигуры периметром, что в переводе с греческого обозначает «обойти вокруг».

Кстати, детям очень нравится это словосочетание — «настоящие математики». Фактически отталкиваясь от необходимости введения какого-либо термина, значка или символа, дети сначала придумывают свои названия или обозначения, а затем, когда они осознают необходимость их «стандартизации» (договора об общем, понятном всем термине, знаке или символе), мы вводим их в математическую культуру, в мир тех понятий, знаков и символов, которые уже есть в математике, т. е. являются ***общепринятыми.***

Задания № 22—25 посвящены работе над понятием ***периметра***.

Ребенок, вырезая фигуры, должен обязательно навести поярче фломастером границу (контур) каждой фигуры, длина которой и есть периметр.

При сравнении периметров можно предложить детям придумать свои способы сравнения и без посредника (проволоки). Например, можно катить круг по сторонам треугольника, отметив начало.

Результат сравнения нужно продолжать показывать с помощью длин полосок.

После того как дети попробуют нарисовать фигуры с одинаковым периметром (**№ 25**), нужно обязательно обсудить, как научить других придумывать такие же фигуры, т. е. с таким же периметром. Ведь важен не столько результат, сколько ***способ действия*** и ***способ организации такого действия*** (что-то удобнее делать в группах, что-то — в парах, а что-то — самому).

Подводя ***итоги***, также акцентируйте внимание ***на способах действия*** и не забывайте, что подведение итогов не есть словесное описание того, как нужно сравнивать фигуры или предметы. Ребенок должен сначала ***показать***, ***как*** он сравнивает, сопровождая собственные ***действия*** словами, и ***оценить сам себя***: ***чему*** он ***уже научился*** из того, ***что не умел раньше***, или ***что*** он еще ***не умеет сейчас.*** Пусть дети пытаются осмысливать ***изменения в самих себе***.

Проверочная работа поможет детям осознать свой способ действия и оценить свои знания.

Заключительным этапом работы должны стать обсуждение того, какие ошибки могут быть допущены при сравнении периметров фигур, и занесение их в справочник ошибок.

Неоднократно показывая результат сравнения с помощью полосок или сообщая о нем с помощью слов «равны» или «неравны», нужно прийти к выводу, что этот способ не совсем удобен, ведь под рукой не всегда есть полоски и не всегда удобно сообщать словом. Вы предлагаете «свернуть» этот способ сообщения, придумав специальные знаки.

Пусть сначала дети придумают свои значки для сообщений о равенстве и неравенстве, а затем вы покажете, какие знаки используют «настоящие математики» (= и ≠).

Глава 3.
СРАВНЕНИЕ ПО ПЛОЩАДИ

Площадь — одна из основных величин, связанных с геометрическими фигурами. В простейших случаях измеряется числом заполняющих плоскую фигуру единичных квадратов, т. е. квадратов со стороной, равной единице длины.

Вычисление площадей было уже в древности одной из важнейших задач практической геометрии (разбивка земельных участков). За несколько столетий до нашей эры древнегреческие ученые располагали точными правилами вычисления площадей, которые в «Началах» Евклида облечены в форму теорем. При этом площади многоугольников определялись теми же приемами разложения и дополнения фигур, какие сохранились в школьном преподавании.

Вычисление площади многоугольника сводится к вычислению площади равновеликого ему квадрата, который может быть получен посредством надлежащих прямолинейных разрезов и перекладывания полученных частей.

Для сравнения по площади на первых порах лучше ***не брать*** прямоугольники, так как у них есть длина и ширина, которые дети уже умеют сравнивать. А значит, они могут свести сравнение прямоугольников по площади к сравнению по длине и ширине, так как если их стороны совпадут, то и площади будут равны. Следовательно, у детей не возникнет потребности говорить о новом свойстве — площади, что является необходимым условием для введения нового понятия.

Для введения понятия «площадь» нужно взять фигуры, у которых нет в явном виде длины и ширины, такие, как круг, эллипс, фигуры произвольной формы.

Для ***введения понятия площади*** перед детьми ставится конкретно-практическая задача на восстановление, решение которой с необходимостью требует операции ***сравнения*** (**задание № 26**, а в РТ-2 **задание № 1** (26)). Используя сюжет сказки, вы предлагаете детям изготовить бочку, в которую коротышки будут собирать резиновый сок, с заданными дном и обручем. Не забудьте показать детям картинку бочки, чтобы они могли осмыслить задание.

Напоминаем, что в классе (а по возможности и дома) дети должны работать не с чертежами или рисунками в учебнике или тетради, а с реальными предметами, которые каждый ребенок должен «пропустить» через свои руки. Учебником и тетрадями дети могут воспользоваться дома, восстанавливая способ и показывая родителям, как они в классе определяли, где дно бочки, а где обруч.

Поэтому вы заранее должны вырезать разноцветные круги разного диаметра, а также подобрать какие-нибудь кольца (можно воспользоваться колечками для карнизов, колечками для ключей, а также сделать кольца из проволоки), которые сыграют роль обруча для бочки. Обруч — это прообраз окружности, у которой есть длина, но нет площади, а как правило, дети путают окружность с кругом, не различая, где круг, а где окружность.

Диаметры подходящего круга — дна бочки — и подходящего кольца — обруча для бочки — должны соответствовать друг другу, т. е. длина окружности (обруча) должна совпадать с периметром круга (дна бочки). Это нужно для того, чтобы дети могли увидеть различие между кругом и окружностью, не отвлекаясь на размер.

Показывая, какое дно было у бочки и каким был обруч, вы предлагаете детям подобрать из заготовок (4—5 кругов и столько же колец) подходящие (такие же). Решая задачу на восстановление способом ***подбора,*** ребенок будет вынужден задаться вопросом: «А по какому признаку?»

Подбирая из заготовок круги, равные по площади дну бочки, а также обручи, равные по периметру (или по диаметру) образцу, ребенок должен показать, что у них оказалось одинаковым. У круга ребенок должен показать ***площадь,*** поглаживая ладошкой поверхность фигуры, а у окружности — длину, проводя по ней пальчиком. Если дети скажут, что одинаковой должна быть форма, то надо предложить им круги большей или меньшей площади.

Потом пусть дети сами придумают название признака. Запишите предложения детей в нашу «методичку» на последнюю отрывную страницу и пришлите нам. Это очень интересно.

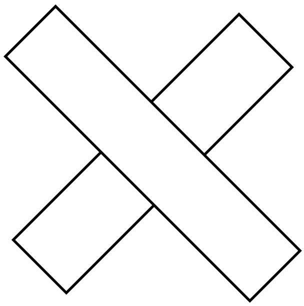
Теперь детям нужно предлагать различные задания на сравнение по площади.

Сначала берем фигуры, ***одинаковые по форме*** и по площади, но разные по цвету (они при наложении должны совпасть), или фигуры, одинаковые по форме, но разные по площади, такие, чтобы одна фигура помещалась внутри другой. Круги очень легко накладывать друг на друга, поэтому лучше давать детям разносторонние многоугольники, так как, прежде чем сделать вывод об отношении площадей, их придется покрутить в руках, прикладывая разными сторонами и углами (**задания № 27, 28, 29, 30).**

Задания № 27—30 предназначены для практических действий ***каждого*** ребенка, благодаря которым дети сравнивают различные геометрические фигуры по площади, причем для их сравнения не требуется перекроя фигур. Нужно только найти такое их положение, при котором либо фигуры совпадают при наложении, либо одна полностью умещается в другой. Площади сравниваемых фигур либо окажутся равными, либо одна будет больше или меньше другой.

Ребенок идет от практических действий. Он ***сначала приобретает умение действовать***, на которое потом наложится ***знание как основание этого умения***. Не забывайте каждый раз после выполненного ребенком практического действия восхищаться и удивляться: «Как это у тебя так получается? Вот здорово! Научи меня. Как ты узнаешь, у какой из этих фигур площадь больше (меньше)? Как бы ты научил другого делать так, как умеешь сам?» и т. д.

Задавая каскад подобных вопросов, учитель дает возможность детям ***осознать собственный способ действия*** и ***сопоставить его*** со способами действия других детей, давая при этом время на раздумье за счет описанного методического приема, при котором учитель, условно говоря, охает, ахает, удивляется, восхищается, подходит к каждой паре, группе, интересуясь их удачей.



Основной способ непосредственного сравнения по площади — наложение. Важно, чтобы дети представляли, что стоит за словами «сравнение наложением»: «Как это сравнить фигуры по площади наложением?

Так?

Неправильно? А как же нужно? Могли бы вы описать словами эти способы сравнения? Кто умеет сравнивать? Попробуйте меня научить. Как я должна это делать?» Пытаясь научить другого, ребенок осмысливает свой способ действия.

Задание № 32 поможет детям, которым нужно большее время на осмысление, осознать свой способ действия. Она является конкретно-практической задачей для введения понятия площади. Вы предлагаете детям изготовить фонарики, такие же, как делали дети в другом классе, по вот такой заготовке. Как определить, какие заготовки из набора подойдут для изготовления фонариков, а какие нет? Подбирая заготовки способом наложения, дети проводят ладошкой по поверхности фигуры, показывая, что́ у кругов должно быть одинаковым.

На следующем этапе можно предлагать для сравнения по площади фигуры, ***разные по форме*** (и по цвету), но ***равные по площади*** **(задания № 34, 35, 37, 39)**. Детям об этом, естественно, сообщать не нужно. В связи с этим возникает вопрос: «Как изготовить учителю (а значит, и ребенку) такие фигуры?»

Надо вырезать две одинаковые разноцветные фигуры, одну из них разрезать на части, а затем части переставить и получить новую по форме и цвету фигуру, но с той же площадью **(задания № 33, 36, 38, 40)**, затем вырезать полученную фигуру из цельного листа.

Теперь при наложении таких фигур для сравнения по площади будут торчать «куски». У детей будут разные способы наложения, но «куски» будут торчать у всех. ***Возникает необходимость*** изобретения ***нового способа*** сравнения. Дайте возможность детям самостоятельно его изобрести. Для этого вы должны заготовить достаточно большое количество фигур для сравнения, чтобы в случае неудачного отрезания «кусков» ребенок мог взять еще одну пару фигур.

В результате обсуждения вы должны выйти на несколько способов сравнения таких фигур:

1) У ***одной*** из двух фигур разного цвета срезать лишнее и заполнить вторую фигуру. Накладывать нужно так, чтобы не было просветов. Это можно делать долго. Но детей через это надо провести (конечно, в разумных пределах). Тогда предметом исследования станет задача: как положить одну фигуру на другую так, чтобы меньше пришлось отрезать.

2) Срезать лишнее сразу у ***двух*** фигур (фигуры обязательно должны быть разного цвета) и сравнить между собой отрезанные части. Если они опять содержат выступающие части, то опять их отрезать, и так до тех пор, пока

оставшиеся части либо совпадут, либо одна полностью уместится в другой.

Помните, сравнивая предметы по выделенному признаку, ребенок устанавливает отношение равенства или неравенства, показывая это отношение с помощью длин полосок или знаков.

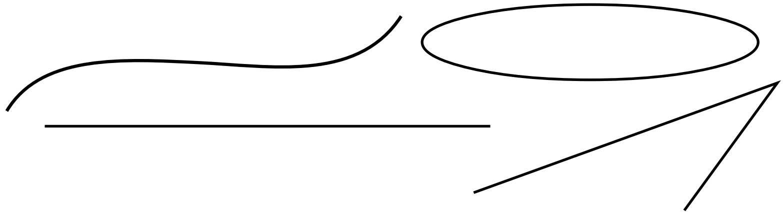
Теперь дети уже будут уметь сравнивать предметы по цвету, форме, материалу, длине (ширине, высоте) и площади.

Задание № 33 требует «волшебного» преобразования, при котором меняется форма одного из треугольников, но не меняется площадь.

Здесь уместно использовать сюжет о Волшебном городе, в который попали на воздушном шаре коротышки. В этом городе у коротышек есть такие сказочные геометрические фигуры и вещи, которые могут совершать чудесные превращения: они меняют свою форму, но остаются самими собой.

С такими превращениями дети уже сталкивались, но не рассматривали их как превращения. Нитка могла принимать разную форму, сохраняя длину.

Перед выполнением данного задания можно предложить детям совершить различные волшебные превращения с нитками одинаковой длины (каждому ребенку раздать по одной). О длине, конечно, ничего сообщать не нужно, дети не должны знать, что длина ниток одинаковая. Вы предлагаете эту нитку выложить на столе (дети сидят группами), придавая ей любую форму, которую можно несколько раз изменить. Например, вот так:

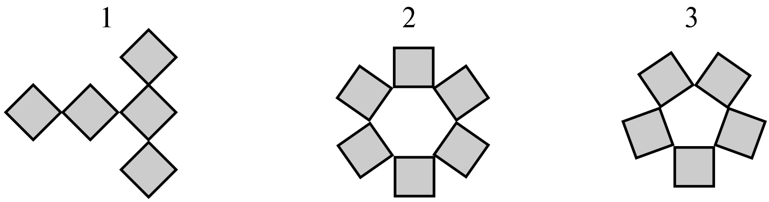


Фактически ребенок может трансформировать одну и ту же нитку, которая при этом не меняет длину ($A = A$ — это свойство рефлексивности, где A — длина нитки). Затем нужно предложить сравнить длины ниток у разных детей между собой и сделать вывод, что форма меняется, а длина нет.

После этого можно продолжить волшебные превращения с треугольниками.

Задание № 34 требует перекраивания фигур и сравнения их фактически по частям. Фигуры окажутся равносоставленными (состоят из одинаковых частей), а значит, равновеликими (одинаковой площади). Задание предполагает парную работу.

Задание № 35 содержит «ловушку»: при сравнении последних фигур в каждой строчке в фигуре 1 можно насчитать 6 квадратов (три по горизонтали и три по вертикали, посчитав дважды квадрат, находящийся на пересечении)



и счесть ее равной по площади фигуре 2 (во второй строчке), а не фигуре 3 (в третьей строчке).

В этом задании, как и в предыдущем, дети имеют дело с ***равновеликими*** и ***равносоставленными фигурами***, не называя их пока этими терминами.

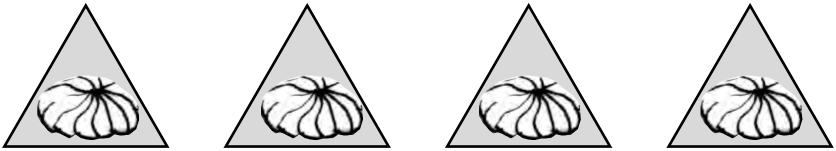
При выполнении **заданий № 36–40** дети не только продолжают сравнивать площади различных фигур, но и знакомятся с терминами «равновеликие фигуры» и «равносоставленные».

Равновеликие фигуры — две фигуры в евклидовой плоскости, имеющие равные площади. ***Равносоставленные фигуры*** — два многоугольника M_1 и M_2 такие, что их можно разрезать на многоугольники так, что части, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны частям, составляющим M_2. Для евклидова пространства равновеликость фигур означает равенство объемов; равносоставленность многогранников определяется аналогично равносоставленности многоугольников.

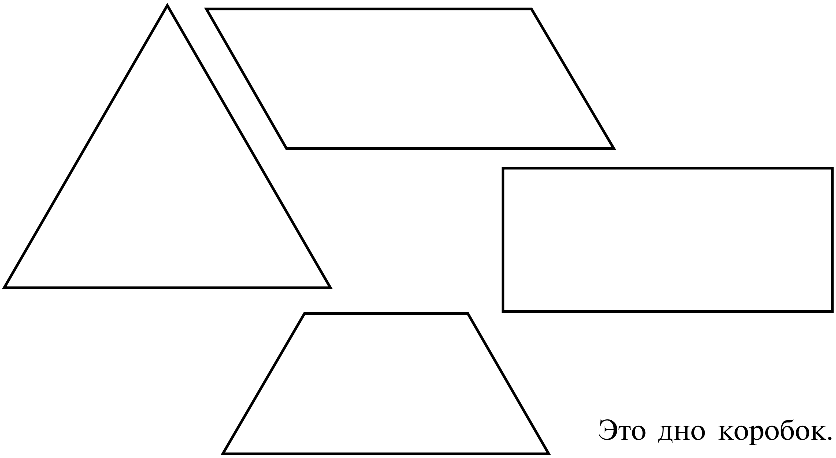
Равносоставленные фигуры являются равновеликими.

В дополнение к тем заданиям, которые выполняли дети, осмысливая способы сравнения площадей различных фигур, можно предложить и задания следующего типа:

Кондитер испек пирожные с кремом в форме равностороннего треугольника:



Эти пирожные нужно уложить в коробки разной формы:

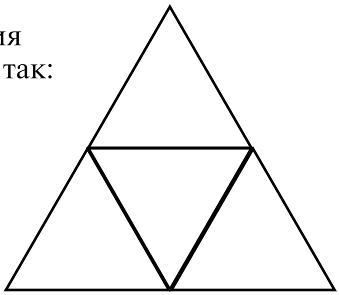


Это дно коробок.

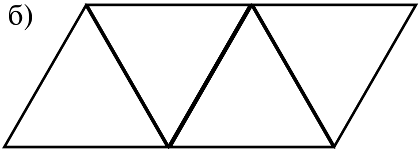
Вопрос звучит так: «В какие из данных коробок их можно уложить, не повредив крем?» или так: «В каких из данных коробок хватит места для пирожных, чтобы они все вошли и не помяли друг друга?»

Для выполнения этого задания вы должны заранее заготовить наборы фигур: «пирожные» и «коробки» — и раздать их детям. Дети должны ***выполнять*** это задание ***практически***.

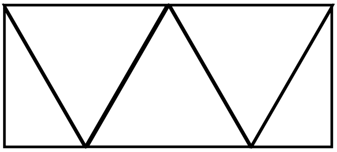
а) Способ расположения пирожных выглядит так:



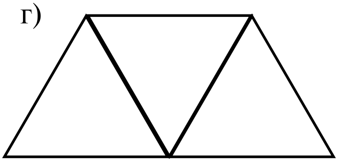
б)



в)



г)



Одно пирожное разрезать. Не подходит.

Что оказалось одинаковым у трех коробок? Площади оснований (дна).

Помните, дети должны уметь выполнять лишь практические действия (причем совсем необязательно самостоятельно), необходимые для сравнения площадей. Ни в коем случае ***нельзя требовать*** от них ***словесных определений*** понятий площади, равновеликости и равносоставленности фигур. К этим понятиям дети будут еще не раз возвращаться, поэтому постепенно начнут употреблять термины в своей речи при выполнении практических действий вслед за учителем. Однако зазубривать определения этих понятий нельзя.

Главное, чтобы ребенок понимал, что у фигуры можно изменить форму, сохраняя при этом ее площадь, а значит, разные по форме фигуры могут иметь одинаковую площадь, в чем можно убедиться путем наложения одной фигуры на другую с последующим перекраиванием одной из них или обеих фигур, если этого требует ситуация.

Задание № 41 подводит итог предыдущей работе по сравнению предметов по разным признакам.

После выполнения проверочной и контрольной работ не забудьте обсудить, какие ошибки можно допустить при сравнении фигур по длине, площади, а также периметров фигур, как их обнаружить, и зафиксируйте их в справочнике ошибок.

Глава 4.
СРАВНЕНИЕ ОБЪЕМОВ

В этой главе вводится понятие объема (емкости, вместимости). Объем — это величина, характеризующая размер геометрического тела.

Как и в предыдущих случаях, перед детьми должна быть поставлена ***конкретно-практическая задача***, требующая ***подбора*** двух одинаковых по объему (вместимости) сосудов, т. е. ***задача, вынуждающая*** ребенка ***к действию*** сравнения объемов двух или более сосудов.

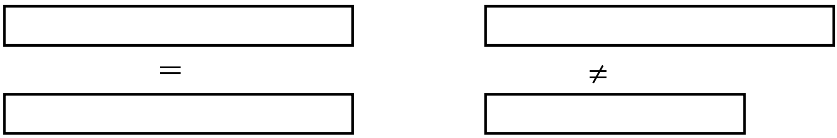
Для постановки такой задачи вы используете тот же сюжет о Незнайке. Прочитав детям главу о том, как малыши собирали резиновый сок, вы ставите перед ними следующую задачу: для изготовления воздушного шара понадобится собрать две вот такие бочки сока. Вместо бочек можно использовать банки или другие сосуды. Но трудность состоит в том, что такая «бочка» только одна. Можно ли для сбора резинового сока использовать другие «бочки»?

Вы показываете детям еще 2 «бочки», имеющие другую форму, но такой же объем (об объеме детям, конечно же, говорить не нужно). Дети наверняка предложат промерить водой и сравнить, одинаковое количество воды войдет или нет. Это свойство вмещать то или иное количество и есть вместимость, или объем, сосуда. После этого ***дети***, а не учитель, ***выполняют практическое действие***: налив воды в одну банку, они переливают ее в другую. Если вошла вся вода, то объемы этих сосудов одинаковы (равны), а вот форма — разная. Необходимо детям задать вопрос: «По какому признаку вы предлагаете сравнивать банки (бочки)?» Обратите внимание, что ***вода***, с которой работают дети, должна быть ***подкрашена***.

Решив эту задачу, нужно предложить каждой паре детей сравнить объемы двух сосудов разной формы и сделать вывод, отвечая на вопрос: «Как научить других сравнивать сосуды (банки, емкости) по объему (вместимости, емкости)?» Слова в скобках используйте как синонимы. Здесь же уместно предложить детям взять в руки такие две полоски, с помощью которых можно сообщить об отношении между объемами — одинаковые они или разные.

Если объемы (вместимость) банок одинаковые, то дети должны поднять две полоски, одинаковые по длине, а если разные, то разные, неравные. Полоски, как и раньше, являются предметными моделями.

Теперь, сравнивая объемы, площади или длины каких-либо предметов, мы можем сообщить результат сравнения с помощью длин двух полосок:



Важно при этом различать две ситуации (задачи), в одной из которых нужно сравнить вместимость (объем, емкость) сосудов, а в другой — объем жидкости (подкрашенной воды) или сыпучего вещества (песок, соль, мелкая крупа и т. д.), содержащих в данных емкостях (которые могут быть заполнены частично). Объем жидкости дети чаще называют количеством жидкости (воды, например).

Сами емкости (сосуды), с которыми работают дети, могут быть одинаковой формы (**задания № 42, 44, 45, 48, 49**) и разной (**задания № 42, 43, 45, 46, 47, 50**).

Сравнивать объемы воды в сосудах дети будут чуть позже. После введения понятия объема дети учатся графически моделировать отношения равенства − неравенства.

Введение графической модели (схемы) или графическое моделирование отношений равенства — неравенства

Для подведения детей к использованию графической модели опять необходимо задать конкретно-практическую задачу. Вы показываете детям две разные по объему «фигуристые» банки или бутылки и просите детей с помощью рисунка показать, что объем одной банки больше объема другой. Опыт показывает, что дети начинают рисовать форму банок, т. е. ***делают копирующий рисунок***. Тогда вы подходите к детям и начинаете «придираться»: то форма не такая, то горлышко слишком узкое и так далее, т. е. дети должны осознать бессмысленность такого изображения (копирующего рисунка), тем более что банки при сравнении по объему можно использовать разные по форме, но одинаковые по объему.

А потом начинаете диалог:

Учитель: — Что вы хотели сообщить рисунком?

Дети: — В каком отношении находятся объемы банок.

Учитель: — А как мы сообщали о результатах сравнения?

Дети: — С помощью длин полосок.

— Попробуйте нарисовать, в каком же отношении находятся объемы банок.

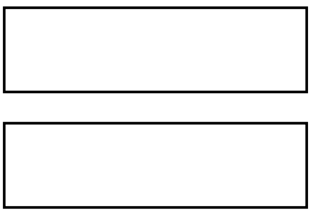
Если дети нарисовали полоски, то можно продолжать разговор дальше. Если снова стали рисовать банки, нужно дать время для обсуждения в группах и прийти к выводу о неудачности такого способа.

— Нужно ли рисовать форму банок или легче нарисовать полоски?

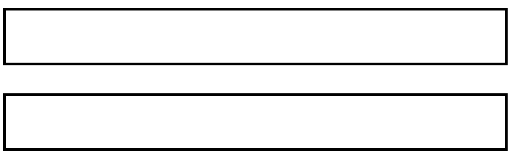
Дети: — Легче нарисовать полоски.

Учитель: — Нарисуйте.

Окажется, что разные дети нарисовали полоски, разные по длине и ширине, одни — пару таких полосок:



Другие — таких:



Учитель: «Какой же длины и ширины можно рисовать полоски?». Обсуждая этот вопрос, дети придут к выводу, что полоски должны быть одинаковыми или разными по длине в зависимости от результата сравнения, а вот ширина полоски значения не имеет.

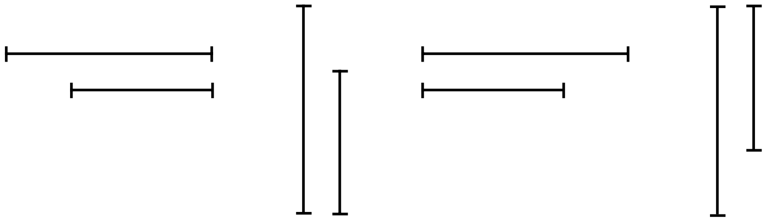
Если же в вашем классе есть дети, которые считают, что ширина важна, то вы снова обращаетесь к вырезанным полоскам. У детей на парте их должно быть три: две одинаковой длины и одна другой (с разной шириной у всех трех). Вы предлагаете с помощью этих полосок показать результат сравнения каких-либо объектов по определенному признаку. Все дети легко выполняют это задание. После этого вы просите детей сложить каждую полоску пополам, чтобы она стала ***у́же,*** и показать результат сравнения. Очевидно, что дети смогут выполнить и это задание. Но вы должны сильно удивиться: «Как это у вас получается? Ведь полосочка изменилась по ширине». Дети должны прийти к выводу, что ширина не важна, так как мы показываем отношение с помощью длины полоски. Если необходимо, то такую работу можно повторить несколько раз. Если сворачивать полоски по длине несколько раз, то ширина будет уменьшаться, превращая полоску в модель отрезка.

Учитель: «Если ширина может быть любой, то полоску какой ширины мы будем рисовать?»

Для осознания того, что ширину можно совсем не рисовать, можно предложить детям такое задание: «По моей команде изобразите в тетради результат сравнения площадей фигур» (они должны быть равны). После выполнения задания темой обсуждения должна стать скорость выполнения: почему одни нарисовали быстрее, а другие медленнее. В результате вы приходите к выводу, что удобнее ширину вообще не рисовать, а изображать только длину полоски. Если величины (длина, площадь, объем) оказались одинаковыми, то изображают равные по длине отрезки, а если неодинаковыми, то и отрезки неодинаковые.

Таким образом ***вводится изображение величин с помощью отрезков***.

Дети, без сомнения, смогут научить этому других, показывая, как изобразить два равных или неравных по длине отрезка. Очень важно, чтобы ребенок осознал сам способ изображения, при котором отрезки должны быть фактически параллельными и один конец должен при мысленном наложении совпадать с другим:

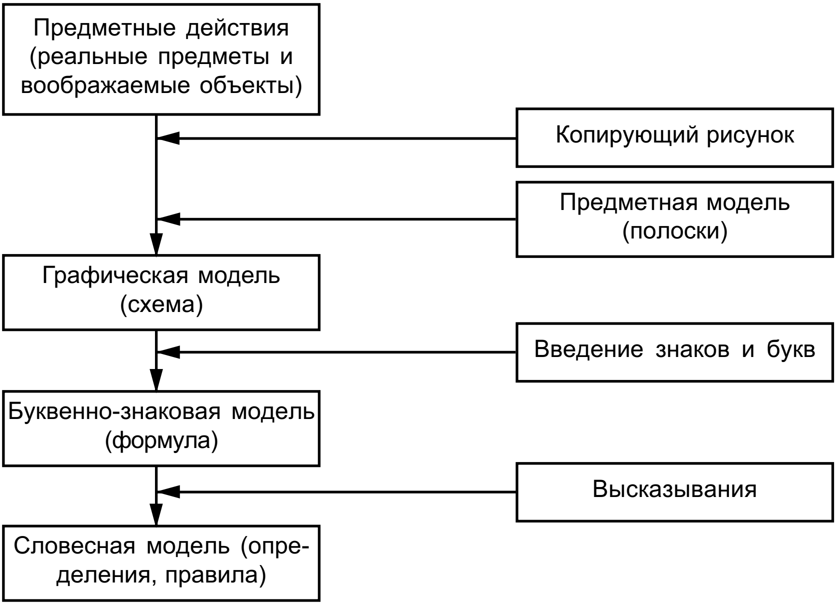


Конечно, дети найдут свои слова при объяснении способа. Важно понимать, что, в отличие от традиционного подхода, при котором дети сначала рассказывают, как нужно делать, а лишь затем начинают действовать, в РО все с точностью до наоборот — ***сначала ребенок выполняет практическое действие,*** а лишь ***затем*** «учит» других делать так, как умеет делать сам, т. е. ***объясняет, как нужно действовать***, что эффективно развивает речь ребенка. Ведь для объяснения другому человеку нужно будет подобрать, найти такие слова, которые были бы ему понятны. Отсюда следует, что задача учителя — внимательно слушать ребенка, играя роль непонимающего человека для того, чтобы действовать в соответствии с объяснением ребенка. Тогда и будет понятно, насколько осмысленно выполняет ребенок практическое действие.

Теперь вы можете предлагать детям для решения три обратных задания:

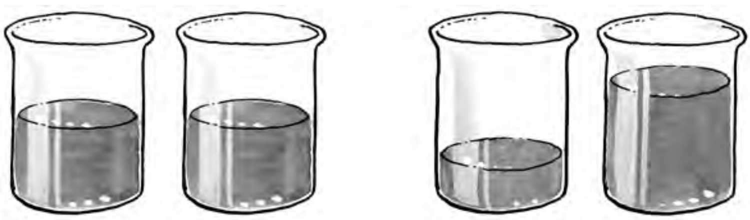
1) Даны предметы и величина. Нужно построить схему (**№ 43**).
2) Даны схема и предметы. Надо узнать величину (**№ 45**).
3) Даны схема и величина. Нужно подобрать предметы (**№ 45**).

Подведем итоги наших рассуждений. Сначала ребенок осуществляет практическое действие с предметами (сначала реальными, а затем и воображаемыми), которое назовем ***предметным действием***, от которого ребенок с опорой сначала на копирующий рисунок, а затем и на предметную модель переходит к ***графической модели***, а от нее после введения математических знаков и букв для обозначения величин он перейдет к описанию этих действий с помощью формул, т. е. к буквенно-знаковой модели, и затем (значительно позже) к словесным моделям (правилам, определениям и т. д.).



Введение схемы в **задании № 43** дает возможность продолжить работу с объемами.

Если сосуды одинаковы по форме и размерам, т. е. одинаковы по всем признакам, то сравнивать количество (объем) жидкости можно по уровню:

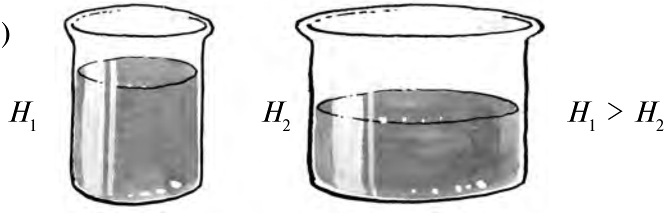


$V_1 = V_2$[1] или $V_1 < V_2$

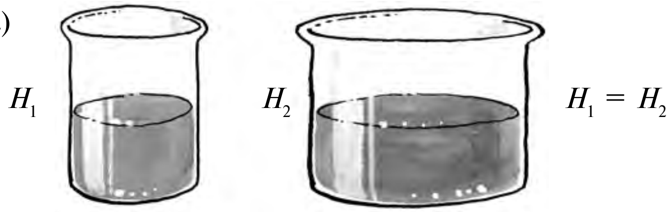
[1] Здесь и далее формулы записаны для учителя. Дети пока никаких формул не пишут, поскольку буквы для обозначения величин еще не вводились.

Если же сосуды разные по форме, то определить по уровню отношение объемов воды в них невозможно, в чем дети должны убедиться. Для этого вам необходимо подобрать пары сосудов, для которых отношение объемов может не соответствовать отношению уровней:

1)



2)



1) $H_1 > H_2$, а $V_1 < V_2$, или $V_1 > V_2$, или $V_1 = V_2$;
2) $H_1 = H_2$, а $V_1 > V_2$ или $V_1 = V_2$.

Примечание. Все формулы написаны только для учителя.

В такой ситуации необходимо предложить детям найти новые способы, позволяющие сравнить объемы жидкостей, находящихся в сосудах разной формы, и обсудить все их предложения. При этом все слова должны сопровождаться действиями. Можно обсуждение организовать таким образом: одна группа рассказывает свой способ, а другая группа выполняет то, что они говорят. Этот способ более эффективен и интересен. Не жалейте на такую работу время. Она скоро даст свои результаты.

Для организации работы нужно каждой группе дать не только два сосуда разной формы с водой, но и различные дополнительные банки, которые могут пригодиться в процессе измерения (специально обращать на них внимание детей не нужно).

При обсуждении результата обязательно нужно отметить способ работы в группе. Идет ориентация ***не на результат,***

а на способ получения результата. Дети ищут разные способы разрешения ситуации и, главное, ***не боятся ошибиться!*** Ведь ошибка одного порождает мысль другого. Поэтому каждый ребенок чувствует себя комфортно.

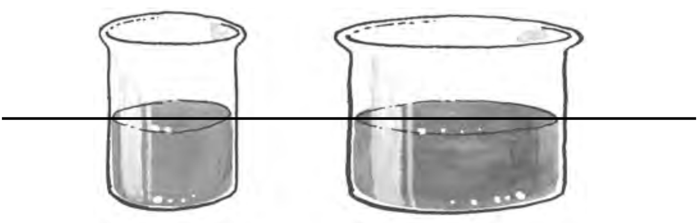
Итак, как же можно сравнить объемы воды в сосудах разной формы при различном соотношении уровней?

Способы сравнения:

1) Имеем две одинаковые пустые баночки. Выливаем воду из данных сосудов в эти баночки, сравниваем уровни и делаем вывод.
2) Можно использовать одну любую баночку. Выливаем в нее воду сначала из одного сосуда, делаем отметку уровня воды и выливаем обратно, потом выливаем в нее воду из другого сосуда, сравниваем, делаем вывод.
3) Можно взять сосуд, равный одному из данных, и свести к первому случаю одним переливанием.
4) Можно в одном из данных сосудов пометить уровень воды и вылить из него воду. В него налить воду из второго данного сосуда, сравнить и сделать вывод.

Напомним, что **задания № 44–48** выполняются с реальными сосудами, а не по картинкам в учебнике. Учебник поможет дома восстановить содержание работы в классе.

Ситуация, при которой уровень воды в сосудах разной формы одинаковый, воспринимается детьми как «ловушка», так как слабый ребенок, как правило, ориентируется на одинаковый уровень (**№ 50**).

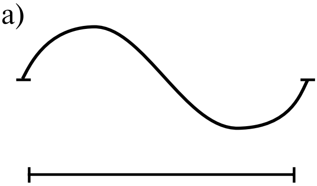


Можно предложить детям придумать «ловушку» для ситуации, когда форма сосуда одинакова и объем воды одинаковый, а можно подумать, что воды разное количество. Такая «ловушка» представлена в **задании № 49**, смысл которого в проверке того, сформирована ли у детей логическая операция сохранения, не отождествляет ли ребенок величину и форму. Если перевернуть одну из бутылок с водой, то количество воды сохраняется, меняя лишь форму (а изменение формы влечет за собой изменение уровня). Здесь-то и важно посмотреть, кто из детей не отделяет в своем сознании форму от величины.

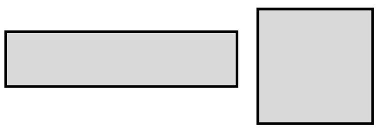
Если ребенок считает, что воды стало больше в перевернутой бутылке, то это означает, что у ребенка отсутствует логическая операция сохранения. Кстати, бутылку можно не переворачивать, а просто положить или поднять выше другой.

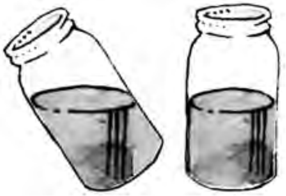
При обсуждении с детьми результатов сравнения важно не только обосновать сохранение величины (мы ничего не добавляем и ничего не выливаем, говорят дети), но и понять, в связи с чем возникает мысль о том, что в перевернутой бутылке воды больше. Здесь же можно предложить детям придумать свои задания с «ловушками» ***с другими величинами: длиной*** — например, взять две одинаковые по длине нитки, которым придать разную форму (рис. *а*); ***площадью*** — например, взять два одинаковых прямоугольника, один из них разрезать и превратить в квадрат или взять один прямоугольник, обвести его на листе бумаги, а затем разрезать его и получить квадрат, который также обвести — оставить его «след» (рис. *б*); ***объемами*** — например, предложить детям не бутылки, а две одинаковые баночки без крышек, чтобы нельзя было перевернуть, тогда изменить уровень можно, либо подняв одну банку выше другой, либо наклоняя одну из банок до тех пор, пока вода не поднимется (рис. *в*), или налить воды в один сосуд, а затем перелить в сосуд ***другой*** формы, чтобы зрительно воды казалось больше или меньше (рис. *г*).

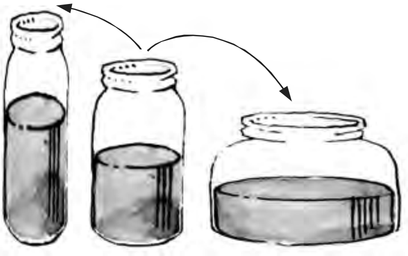
а)



б)



в) 

г) 

Вслед за этим можно предложить детям **задания № 51–52**, из которых только **№ 52** может быть выполнен с опорой на рисунок, но не в учебнике, с тем чтобы по мере необходимости фигуры можно было вырезать (трапеции, например). Задания по отдельности нужно раздать в группы для проверки своей точки зрения, ее обсуждения и обоснования ложного вывода. Каждая группа после выполнения своей части из задания № 52, зная правильный ответ, предлагает другим группам сделать свой вывод, т. е. организуется межгрупповое обсуждение. Вывод, который должны сделать дети: не всегда можно верить своим глазам, они могут обманывать, а значит, всегда нужно проверять и доказывать свою точку зрения.

Задание № 53 рассчитано на то, что, задавая, например, отношение между величинами одинаковыми по длине полосками, дети могут подбирать такие сосуды, которые на глаз могут казаться разными по объему (вместимости), а на самом деле оказаться одинаковыми, и наоборот. Эта игра поможет учителю увидеть, кто из детей различает величину и форму, а кто нет, для того чтобы можно было далее отслеживать этих детей на предмет появления и у них операции сохранения.

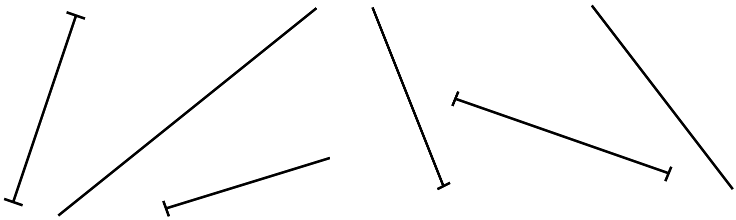
Задание № 54 предполагает переход от схемы, фиксирующей отношение при сравнении двух предметов по какому-либо признаку, к подбору соответствующих предметов.

Геометрические понятия (прямая, луч, отрезок, ломаная)

Умение выделять различные признаки и показывать их дает возможность дальше работать с абстрактными фигурами, такими, которые в руки не возьмешь, например с прямой, кривой, отрезком. Дети должны научиться выделять их признаки. Эту работу нужно начинать тогда, когда учитель видит, что дети к этому готовы, а значит, предлагаемые задания могут быть перенесены на более поздний срок.

Задания № 55—58 ориентированы на выделение признаков, существенных для таких геометрических фигур, как прямая, отрезок и луч, которые предстают перед ребенком как некие условные предметы, которые можно сравнивать по наличию начала и конца у каждой из этих фигур.

Вы заранее должны нарисовать на доске отрезки, лучи и прямые в произвольном порядке. Точно такие же рисунки вы раздаете группам. Все линии должны быть различны по длине. Это условие необходимо выполнить для того, чтобы длина линии не выступала на первый план и не стала существенным признаком при сравнении этих фигур.



Вы предлагаете детям распределить эти линии по группам (классифицировать по какому-либо признаку), но перед этим обсудить способ работы. При обсуждении результата обязательно нужно обговорить способ работы в группе и способ фиксации результата разбиения.

«По каким признакам вы сравнивали эти фигуры?»

Д е т и: «У одних есть черточки, у других нет».

«А что это за черточки?»

Д е т и: «Начало и конец».

«У каких же фигур есть начало и конец?»

Обратите внимание, что дети не с места показывают пальчиком, а выходят к доске и с помощью указки показывают отрезки, у которых есть начало и конец, и лучи, у которых есть только начало. (Термины — названия фигур — пока употреблять не нужно.)

После этого вы обращаете внимание на прямую. Дети говорят, что у этой линии нет начала и нет конца.

«Как это нет? А я вот вижу. Вот тут конец, вот тут начало», — убежденно говорите вы и показываете:

«Я же вижу!» Эти слова являются «доказательством» того, что у прямой есть начало и конец.

Именно этот аргумент дает возможность детям осознать назначение черточек, которые и есть свидетельство того, что фигура ограничена, а отсутствие этих черточек сообщает о возможности ее продления.

После этого предложите детям придумать свои названия для этих фигур. И увидите, что детскому творчеству не будет предела, даже если им известны настоящие названия этих фигур. Запишите, пожалуйста, эти названия на последнюю страничку «методички» и пришлите нам.

Например, однажды в одном из классов г. Харькова, несмотря на то, что дети прямую уже называли прямой, отрезок — отрезком, прямую линию назвали «слепым» отрезком (концы отрезка во время обсуждения много раз задевали мелом, и они превратились в точки — «глаза»:). А в одном из классов Москвы дети прямую назвали бесконечником (у нее нет концов): , а луч — начальником (у него есть только начало): .

Не вводите сразу общепринятых названий, пусть дети поработают со своими. Ведь это их открытие, а поэтому оно очень ценно.

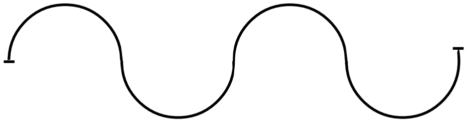
Но ведь наличие ограничений, т. е. начала и конца, или их отсутствие не является единственным существенным признаком прямой, отрезка прямой и луча.

Для того чтобы дети осознали все существенные признаки, а именно еще и форму, можно предложить следующий методический прием.

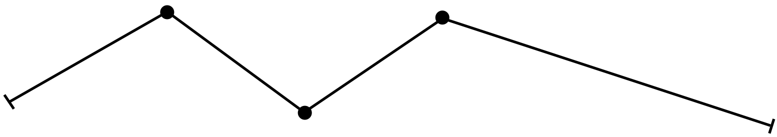
Вы спрашиваете детей, перед глазами которых были отрезки, прямые и лучи: «Правильно ли я вас поняла: если у фигуры есть начало и конец — это отрезок?»

Как правило, дети отвечают утвердительно.

Тогда учитель чертит отрезок кривой, тоже называя его словом «отрезок», мотивируя тем, что здесь есть начало и конец.



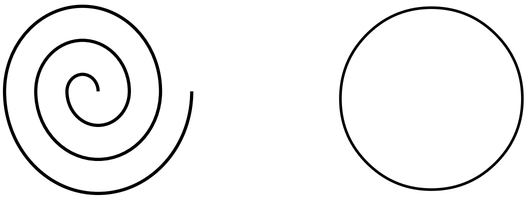
Как правило, дети возражают: «Это не отрезок! Там должно быть прямо!» — говорят они. Тогда вы, «прислушиваясь» к ним, чертите ломаную,



утверждая, что теперь это отрезок, ведь здесь «все прямо».

Дети, возражая, должны доказать, что это не один отрезок, а несколько, только у них конец одного совпадает с началом другого в том месте, где «излом». «Это сломанная прямая», — говорят дети.

Наконец вы соглашаетесь и говорите: «А если у линии нет изломов и нет начала и конца, значит, это прямая?» Дети соглашаются, а вы чертите окружность или кривую линию.



После обсуждения, которое должно проходить весело и интересно (помните, что вы играете роль непонимающего человека), предложите им придумать свои названия и для этих фигур.

Вообще в математике прямую линию считают частным случаем кривой, однако на уровне 1-го класса определений давать не нужно. Дети должны владеть геометрическим материалом на уровне представлений, которые позволили бы ребенку использовать его как составную часть умений.

Задания № 56—58 необходимы для того, чтобы проверить, различают ли дети геометрические фигуры, могут ли выделить их существенные признаки. Организовать работу с **заданием № 56** учитель может по своему усмотрению: либо используя прием классификации, либо по вопросам учебника. Помните, что для обсуждения все фигуры должны быть изображены на доске.

Опосредованное сравнение объемов с помощью кубиков

Теперь мы снова возвращаемся к сравнению объемов (**№ 59—60**).

В начале урока вы создаете ситуацию успеха, предлагая сравнить по объему две стеклянные банки. Любой ребенок к этому времени справится с этим заданием. Все дети будут довольны и убеждены, что по объему могут сравнить любые сосуды. Вы радуетесь вместе с детьми и предлагаете сравнить по объему две бумажные коробки. Дети в растерянности, ведь воду туда не нальешь. Возникает задача, которую надо решать. Решением задачи станет ***открытие новых способов сравнения***. После группового обсуждения дети приходят к выводу, что сравнить объемы можно с помощью либо сыпучих веществ (песок), либо кубиков (**задания № 59, 60**). Однако если одну коробку поставить в другую и она полностью поместится в первой, то тогда ничего насыпать не надо. А если она умещается по длине и ширине, а по высоте выше или ниже первой, то тогда надо искать новый способ сравнения.

Коробки нужно подобрать или склеить с учетом всех случаев. Главное, чтобы на глаз сравнить объемы было трудно.

Итак, выбор способа сравнения в каждом конкретном случае будет зависеть от условий, в которых решается рассматриваемая задача.

Не следует забывать о том, ***что не вы сами демонстрируете*** детям способы сравнения объемов, а дети ***в группе или в паре сами*** решают все поставленные задачи.

Способы ***сравнения*** объемов с помощью кубиков:

1) В каждую коробку уложить плотно кубики. Посчитать количество кубиков в каждой коробке, сравнить числа и на основании этого сделать вывод — этот способ, как правило, используют дети, умеющие считать и сравнивать числа. А можно и не считать, а вынимать по одному из каждой коробки одновременно.
2) ***Одновременно*** укладывать по одному кубику в две коробки. Какая заполнится быстрее, там объем меньше (можно организовать интересную игровую ситуацию, при которой один ребенок заполняет быстрее, чем другой, бо́льшим числом кубиков, отсюда можно сделать неверный вывод, — подстроить «ловушку»).
3) Уложить одинаковые кубики в одну из двух коробок, не считая. Потом эти же кубики переложить в другую коробку. Если останутся лишние кубики, то объем первой коробки больше, а если не хватит, то объем первой коробки меньше.

В дальнейшем, когда мы начнем измерять величины (объемы, в частности), то дети столкнутся с единицами измерения объемов: кубическим сантиметром (1 см^3 — это объем куба со сторонами в 1 см), кубическим дециметром (дм^3) и т. д., причем один кубический дециметр и называют литром (1 дм^3 — 1 л), но о соотношениях между единицами объема и другими величинами речь пойдет значительно позже.

Введение знаков «<», «>» и буквенной символики

Как уже было сказано раньше, буквы обозначают не сам предмет, а его свойство, величину, поэтому основная задача при введении буквенного обозначения состоит в том, чтобы помочь ребенку ***мысленно отделить свойство предмета от самого предмета***. Выделенное в результате сравнения отношение равенства или неравенства должно быть обобщено в формуле, т. е. в буквенно-знаковой записи.

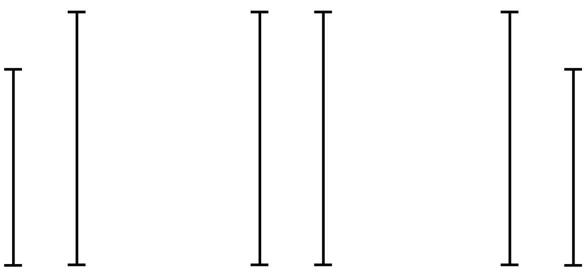
Удобнее вводить буквенные обозначения, используя предметы, которые можно сравнить по длине, площади и объему.

Задание № 61 предназначено для ***введения знаков*** «<», «>» ***и буквенных обозначений величин*** и в связи с этим для введения формул. ***Формула*** — комбинация математических знаков, выражающая какое-либо предложение.

Для постановки конкретно-практической задачи вы ставите перед детьми два сосуда, которые должны быть одинаковыми по объему, разными по высоте и площади основания (см. рис.), и просите сравнить их по какому-либо признаку, изобразив результат сравнения с помощью схемы. В каждой группе должны быть одинаковые пары баночек.

Раздав баночки, вы быстро проходите по классу и шепотом договариваетесь с группами, по какому признаку они будут сравнивать.

При сравнении у разных групп получаются разные схемы. (Если у вас работало больше трех групп, не забудьте перед началом обсуждения выяснить с ребятами, у каких групп получились одинаковые схемы, и рассортировать схемы по данному признаку.)



Возникает проблема. Как такое могло произойти? Почему это могло произойти? Нужно дать возможность детям обсудить этот вопрос. Обязательно найдутся ребята, которые скажут, что разные группы сравнивали по разным признакам и даже какая схема сообщает о сравнении по высоте, какая — по объему, а какая — по площади донышек. Тогда возникнет вопрос: чем дополнить схему, чтобы другим людям было понятно, по каким признакам мы сравнивали эти сосуды, когда строили каждую из схем?

Возникает потребность в буквенном обозначении ***признака***, а ***не предмета.***

Предложите детям придумать, как на схеме показать, по какому признаку сравнивали предметы. Кто-то нарисует рядом со схемой предметы, кто-то напишет словом, кто-то воспользуется первой буквой слова—названия признака. После обсуждения всех предложений вы придете к выводу, что удобнее обозначать одной буквой (так быстрее), а затем познакомите ребят с буквами латинского алфавита, которые используют для обозначения: H — высота, L — длина, P — периметр, V — объем, S — площадь, а после введения других величин: M — масса, N — количество. (Сразу эти буквы вводить не нужно.) Дети дополняют свои схемы буквами и записывают с вашей помощью ***формулу***. Используя вопросы **№ 58**, вы подводите детей к необходимости введения знаков «<», «>».

Но тут возникает новый вопрос: а как различать, о величине ***какого*** сосуда идет речь в каждой формуле и схеме? Нужно ввести индексы: S_1 и S_2, V_1 и V_2, H_1 и H_2 или $S_{н}$ и $S_{в}$, $V_{н}$ и $V_{в}$, $H_{низ.}$ и $H_{выс.}$ — эта идея без труда рождается в головах детей.

Далее вы предлагаете детям четыре обратные задачи:

1) на восстановление предметов по схеме и формуле (**№ 63**);
2) на восстановление предметов и схемы по формуле (**№ 64**);
3) на восстановление предметов и формулы по схеме;
4) на восстановление схемы и формулы при сравнении предметов по определенному признаку (**№ 65**).

Глава 5.
СРАВНЕНИЕ ПО МАССЕ

Для введения понятия массы вы вновь рассматриваете сказочный сюжет.

Итак, сказочный сюжет: «Знайка вместе с друзьями готовился к путешествию на воздушном шаре. Перед тем как надуть шар теплым воздухом, Знайка велел коротышкам наполнить несколько мешков песком и положить их в корзину». Не забудьте обсудить с детьми, с какой целью в корзину нужно класть мешки с песком, можно ли вместо песка в мешок насыпать соль или положить другой груз и по какому признаку нужно сравнить мешки между собой, если в полет нужно взять несколько одинаковых мешков. Чаще всего в этом случае дети говорят, что мешки должны быть одинаковыми по тяжести или по весу. Учитель сообщает, что «настоящие математики» скажут: «Мешки должны быть одинаковыми ***по массе***, или ***массы*** этих мешков одинаковые». А как определить, одинаковые они по массе или нет? Оказывается, для этого нужен специальный прибор – весы. Вам нужно заранее найти ***чашечные*** весы. Они ***необходимы*** для всей дальнейшей работы. Но если вы видите, что вашим детям не нужны больше сказочные ситуации, что им интересна сама математика, то можете использовать сразу для постановки конкретно-практической задачи **задание № 66**.

Для того чтобы ребенок «увидел» массу и осознал, что сравнить массы предметов невозможно по внешним признакам и даже не всегда возможно руками почувствовать разницу в массе, можно предложить детям игру «Могут ли глаза обманывать» (**задание № 66**).

Вы заранее должны подобрать два внешне абсолютно ***одинаковых*** пустых ***непрозрачных*** пластмассовых кубика. В одном из них делается маленькое отверстие, через которое в кубик добавляется немного воды или соли. **Внимание!** Дети этого знать не должны. Другими словами, заранее дети не должны ***ни видеть кубики***, ***ни*** тем более ***держать*** их в руках. От этого зависит ***успех*** вашего урока.

Вы предлагаете сравнить кубики и проходите по клас_ су мимо каждого ребенка, ***показывая*** кубики как можно ближе, но в руки их ***не даете***. Дети должны убедиться в том, что кубики одинаковы по всем признакам: по цвету, форме, размеру. Нельзя затягивать работу по сравнению, нельзя строить никаких схем! Нужно ***быстро*** пробежать по классу и бодрым, уверенным голосом убедить детей: «Вы точно определили, молодцы, кубики абсолютно одинаковые». От быстрого темпа зависит успех!

Убедив детей в том, что кубики одинаковые, вы просите детей закрыть глаза и не подглядывать. Сами кладете кубики на весы и закрываете их ***разноцветными колпачками***, которые и увидят дети, открыв глаза.

«По какому признаку сравнивают предметы под колпачками?» — спрашиваете вы. «По массе», — ответят дети. «Под каким колпачком лежит предмет с большей массой? Под красным или зеленым?» (Цветные колпачки нужны как раз для того, чтобы «не увязнуть» в словах «слева», «справа».) Дети отвечают. Вы выражаете недоумение: «Вы же не видите, что я положила на весы?! Как же вы определяете, где масса больше? Неужели? Вот это да!.. Как же вы это узнаете? Куда вы смотрите?»

Весь этот каскад вопросов необходим для того, чтобы «потянуть» время, которое всегда необходимо на осмысление тем детям, которые думают медленнее других. Все это нужно делать ***весело***, ***эмоционально***. Ответ, который должны дать дети, выглядит примерно так: «Раз чашка весов ниже, значит, там тяжелее груз, значит, масса его больше».

Теперь-то и спросите детей: «Как вы думаете, а что там может лежать? Что я могла положить на весы?»

Как правило, дети говорят: «Кубики и еще что-то». Чаще запоминается последнее, что видел. Если вдруг они этого не скажут, то всегда можно натолкнуть их на этот ответ, задав дополнительно вопрос: «А кубики я могла положить на весы?»

Каково же бывает их удивление, когда ребенок, высказавший предположение о том, что там лежат кубики и «еще что-то», снимает колпачки и на чашках дети видят внешне два абсолютно одинаковых кубика! Вся описываемая ситуация необходима для того, чтобы вызвать у ребенка эмоциональную реакцию, поразить его воображение, заранее навязав образ двух абсолютно одинаковых предметов (кубиков).

Так, автор этих строк, проигрывая описанную ситуацию в разных классах, столкнулась с двумя разными, но схожими реакциями детей. Когда убирались цветные заставки (здесь колпачки), все замирали, а тот, кто высказал предположение о том, что там лежат кубики и «еще что-то», начинал либо говорить вслух сам с собою: «Этого не может быть! Я же вижу, что они одинаковые!» и т. п., либо молча осматривать, обнюхивать лежащие кубики и, будучи в полном недоумении, вдруг кричал: «Я понял! В кубике, наверное, что-то есть, и поэтому он тяжелее!» (Эврика!)

Такое эмоциональное проживание ребенком ситуации сравнения дает возможность понять, что могут быть такие свойства предметов, которые скрыты от внешнего взгляда, и масса — один из них. О ней нельзя судить, не положив сравниваемые предметы на весы. Только положение чашек весов, ***а не размеры и внешний вид***, может дать ответ на вопрос, что тяжелее или легче. Вспомните задачки на смекалку: «Что тяжелее, килограмм ваты или килограмм железа?», «Курица на одной ноге весит килограмм, сколько весит курица на двух ногах?» и т. п.

Кроме этого, важно, чтобы ребенок убедился и в том, что, взяв в руки предметы, не всегда можно установить, в каком отношении находятся их массы. Для этого поиграйте с детьми в такую игру: одному из детей завяжите глаза, после чего на глазах остальных сначала положите на весы два предмета, а потом дайте в руки ребенку с завязанными глазами. Массы этих предметов должны отличаться совсем незначительно, а значит, с помощью рук почувствовать разницу будет невозможно. Причем когда будете класть предметы на руки ребенку, постарайтесь незаметно нажать на один из предметов, чтобы создать ощущение тяжести в более легком предмете или в предмете, который по массе был таким же, как второй. Тогда доказательным результатом сравнения по массе должны быть показания весов (положение чашечек).

Здесь же можно предложить **задание № 72.** Интересные рассуждения были сделаны одним из детей на открытом уроке. В ответ на заданный одноклассником вопрос, который теперь представлен в этом задании, а именно: «Почему одна чашка весов опускается ниже другой, когда на них лежит разный по массе груз, а рука — нет, хотя груз на ладошках разный по массе?», ребенок предположил, что, «наверное, есть невидимые силы, которые держат руку и не дают ей упасть».

Вслед за этой игрой предложите детям задания такого типа:

Вы кладете на весы разные предметы, массы которых могут находиться в разных отношениях: $M_1 > M_2$, $M_1 = M_2$, $M_1 < M_2$, причем предметы должны быть подобраны такими, чтобы если $M_1 < M_2$, то размеры первого пусть будут больше размеров второго (или равны). Глядя на весы, дети должны нарисовать схему, показывающую, в каком отношении находятся массы этих предметов. Такие задания будут выглядеть как ***задания с «ловушками»*** (**№ 69**).

Кроме «ловушек», связанных с размерами сравниваемых предметов, нужно рассмотреть и «ловушку», связанную с положением чашек весов. Так, большей массе соответствует меньшее расстояние чашки весов до поверхности стола, на котором они стоят, а поэтому нужно сделать попытку бо́льшую массу изобразить меньшим отрезком. Пусть дети докажут, что так изображать отношение между массами нельзя. Это поможет тем, у кого остались проблемы с построением схем, осознать, о чем должны рассказывать отрезки, которые они рисуют.

Рассмотренные выше задания дают возможность сконструировать обратное задание, т. е., изобразив отрезками (схемой) отношение между массами двух предметов, предложить детям подобрать подходящие предметы **(№ 67).**

Для выполнения этого задания вы должны ***тщательно*** продумать, какие предметы вы предложите детям для выбора. Среди них ***обязательно*** должны быть такие, которые могут поставить ребенка ***в тупик***. Что имеется в виду? У части детей наверняка остается представление о том, что больший по массе предмет должен быть и бо́льшим по размерам, что, например, дерево легче, чем металл, а значит, деревянный предмет всегда легче металлического, и т. д.

Наряду с предыдущими типами заданий, можно предложить перейти от формулы к схеме и от нее к предметным действиям **(№ 68)**.

Для того чтобы проверить, «не привязалась» ли буква «в голове» у ребенка к предмету (буква обозначает величину), нужно предложить следующее задание. На две чашки весов положить, например, яблоко и грушу, одинаковые по массе, и попросить детей начертить схему отношений масс данных предметов. Далее нужно посмотреть, какой буквой предложат дети обозначить отрезки. Если буквами «Я» и «Г», то скорее всего они ориентируются на предметы, а не на свойство. Далее меняем предметы местами и опять чертим схему. Она получается такой же. Вы ставите проблему: «А как помочь другому человеку по схеме увидеть, что предметы поменяли местами?» После обсуждения приходите к выводу, что нужно ввести индексы:

$$M_2 = M_1 \text{ или } M_я = M_г \text{ и } M_г = M_я.$$

Очень важно провести с детьми опыт Пиаже. Вы заранее лепите из пластилина два одинаковых шарика и просите детей сравнить их по массе. Дети кладут их на весы и убеждаются, что они по массе равны. Тогда вы берете один шарик и на глазах у детей превращаете в тонкую лепешку. Возникает вопрос: чья теперь масса больше — шарика или лепешки? Дайте детям возможность обсудить и прийти к какому-либо выводу, обосновав его. Как правило, бывает несколько мнений: пластилина больше в лепешке, так как она шире шарика; пластилина больше в шарике, так как он толще; масса одинаковая.

Спор разгорается. Но он обязательно должен закончиться на предложении кого-нибудь из ребят: «А давайте мы шарик и лепешку взвесим». Тогда вы соглашаетесь и играете роль человека, который сам не уверен в результате взвешивания. Вы должны «завести» детей, довести их до эмоционального напряжения. Для этого вы можете несколько раз подходить к весам, почти класть на них предметы, но в последний момент отдергивать руки, переживая, что же все-таки тяжелее. В итоге вы мужественно решаетесь взвесить, ваш класс уже гудит, и тут вы бросаете предметы на весы так, чтобы чашечки сильно задвигались. Все замирают, и, когда они останавливаются на одинаковом уровне, следует облегченный вздох.

Очень важно, чтобы дети могли обосновать, почему же масса осталась одинаковой: мы ничего не добавляли и ничего не отнимали, а только изменили форму. Тут уместно вспомнить про Волшебный город, в котором предметы меняют свою форму, но остаются самими собой, и выяснить, могут ли наши шарики жить в этом городе. Можно предложить детям самостоятельно еще несколько раз изменить форму предметов из пластилина с тем, чтобы убедиться, что изменение формы не влияет на массу.

Будьте готовы к тому, что после ваших обсуждений найдется ребенок, который скажет: «А мне все-таки кажется, что в лепешке пластилина меньше». Это было уже не раз. Если ребенок сам ничего не пояснил, то ***не надо*** его спрашивать, как он рассуждал. Воспользуйтесь еще одним приемом РО, спросите класс: «Как вы думаете, как рассуждал (и называете имя ребенка)?» Дело в том, что если это ребенок одаренный, то он часто не может объяснить свои нестандартные (а иногда и гениальные) мысли, он просто чувствует, что это так, а если ребенок слабенький, ему тем более трудно объяснять. А этот прием очень часто помогает. В данной ситуации дети сказали: «А ведь когда вы делали лепешку, частички пластилина прилипли к рукам. Значит, в лепешке пластилина меньше. Просто на этих весах это не заметно». Конечно, такой ребенок достоин похвалы, но останавливать на этом внимание всего класса особо не нужно.

Задания № 73, 74, 78 помогут ребенку глубже осознать, что же такое масса и как по-разному можно сравнивать по массе различные предметы. Если у детей не получится выполнить № 73 и № 74, не расстраивайтесь, а занесите их в **«*Тетрадь нераскрытых секретов*»**, а позже вновь вернитесь к этим заданиям, может, даже в конце года. Но попробовать выполнить нужно обязательно. Помните, что важен не столько результат, сколько процесс получения результата.

Рассуждая относительно задачи Льюиса Кэрролла (**№ 78**), дети вместе с родителями даже проводили эксперименты, хотя ответ прост: обезьяна и груз всегда будут в равновесии.

Задания № 70, 71, 75, 76, 77, 79 позволяют конкретизировать и осмыслить все способы сравнения по разным признакам.

Напомним, что выполнение указанных заданий требует действий с реальными предметами, а не с картинками в учебнике.

И последнее, не забывайте предлагать детям придумывать свои задания, давая тем самым возможность осмысливать изученное, развивая способность к рефлексии, помня при этом и о формировании действия контроля. Это значит, что, работая над тем или иным заданием, каждый раз необходимо поднимать вопрос об «ошибкоопасных» местах, предлагая при этом задания с «ловушками». В свою очередь, некоторые дети наверняка смогут придумать и свои «ловушки» с тем, чтобы обнаружить «ошибкоопасное» место.

Все ошибки нужно фиксировать в конце учебной тетради в символической форме, придуманной самими детьми в совместной работе.

А все задания, придуманные детьми, можно собирать в отдельной тетради, которая станет вашим авторским сборником задач.

Глава 6. СРАВНЕНИЕ ГРУПП ПРЕДМЕТОВ ПО ОТНОШЕНИЮ К КОМПЛЕКТУ. СРАВНЕНИЕ ПО КОЛИЧЕСТВУ

Для введения сравнения групп предметов сначала необходимо ввести понятие комплекта, включающего составные части, а затем научиться сравнивать комплекты по ***составу*** частей. При сравнении комплектов по составу (набору) частей будет иметь значение не цвет, не размер частей, а только их набор. Это даст возможность сравнивать разные группы предметов по отношению к определенному комплекту, включающему тот или иной набор частей.

Для постановки конкретно-практической задачи вы используете сюжет о том, как Незнайка после крушения воздушного шара попал в Зеленый город, где познакомился с Синеглазкой, Снежинкой и другими малышками, которые приготовили для него угощенье. Для каждого гостя была поставлена тарелка, в которую положили 2 пирожных, 3 рогалика и 1 пирожок.

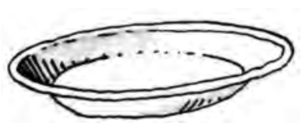
Вы заранее должны заготовить необходимые пособия (можно условно заменить пирожки ромбами, пирожные — кружочками, рогалики — полукругами, а тарелки — большими кругами или одноразовыми бумажными тарелками). Главное, чтобы проигрывание сюжета было не по картинке в учебнике или в тетради. Картинка поможет ребенку дома восстановить в памяти и показать родителям, что происходило в классе. Все действия дети должны осуществлять практически. Они должны держать в руках тарелки и те предметы, которые будут заменять пирожные, рогалики и пирожки.

Вы ставите перед детьми проблему: «Хватит ли пирожных, рогаликов и пирожков, чтобы каждому достался полный ***комплект*** сладостей?»

При этом можно предложить детям любое количество тарелок (исходя из конкретных возможностей). Но тогда рогаликов нужно взять в три раза больше, чем тарелок (так как на каждую тарелку нужно положить по 3 рогалика), пирожных взять в два раза больше, а вот пирожков пусть либо не хватит, либо останется лишний.

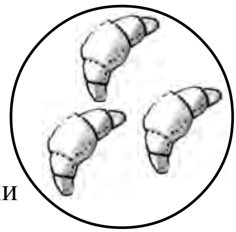
Фактически речь идет о подготовке к пониманию количественного аспекта числа как характеристики множества (совокупности), которое в традиционном обучении, как правило, связано только с пересчетом, который, как известно, может вестись не только штуками, но и парами, тройками, пятерками, дюжинами и т. д. Другими словами, дети в дальнейшем должны будут понять, что число зависит не только от самой величины, но и от выбранной единицы счета или измерения (мерки).

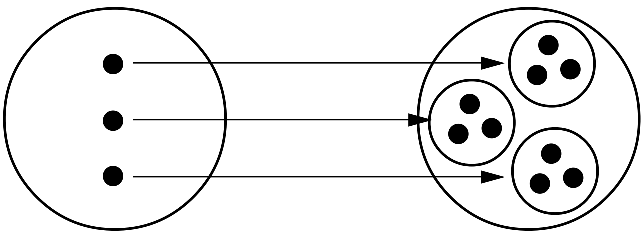
На данном этапе дети должны научиться, говоря языком математики, устанавливать взаимно-однозначное соответствие между двумя множествами: множеством A — множеством тарелок — и множеством B — множеством рогаликов (пирожных, пирожков), элементом которого является не ***один*** рогалик, а ***три***.



Тарелка

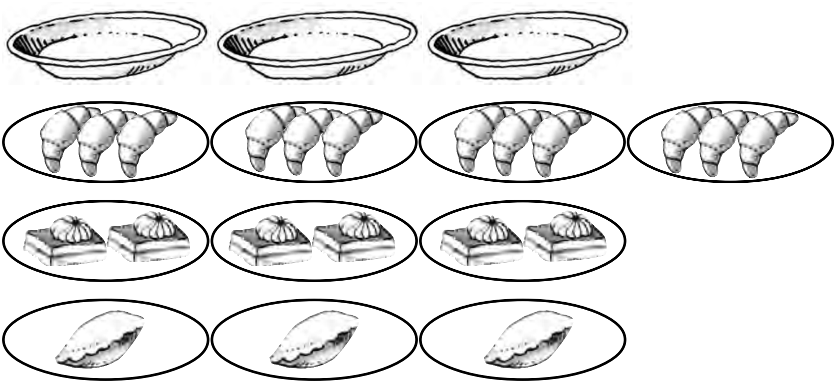
Рогалики





(Этот рисунок сделан для учителя.)

Дети, чтобы соотнести множество (группу, совокупность) рогаликов (пирожных, пирожков) с множеством тарелок, должны, проанализировав образец — тарелку с угощением, ***расположить*** предметы так, чтобы было видно, что каждая тарелка соотносится с 3 рогаликами, 2 пирожными, 1 пирожком.

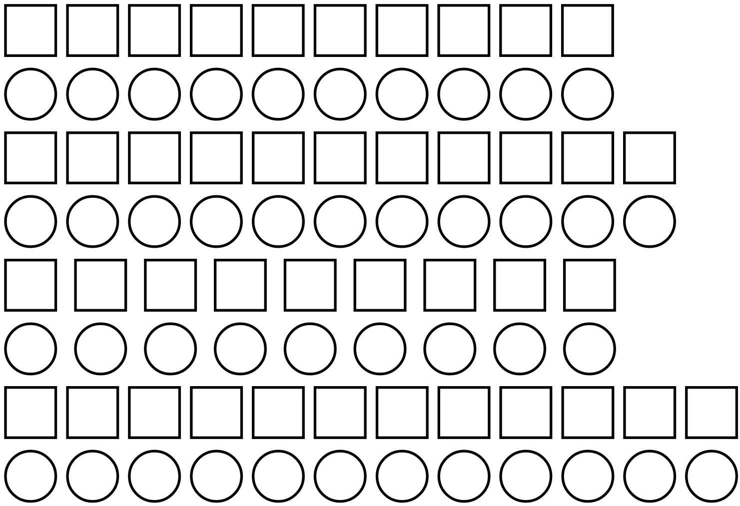


Это дает возможность сравнить эти группы предметов по количеству. Понятно, что они будут равны, если число рогаликов (пирожных, пирожков) будет кратно числу тарелок. Дети не должны пересчитывать все предметы и делить одно число на другое, хотя не исключается способ сравнения этих групп предметов путем пересчета числа тарелок, троек рогаликов (дети обводят по 3 или составляют их кучками), пар пирожных и пирожков. Тогда необходимо задаться вопросом: «Нужно ли было пересчитывать предметы, если их все равно нужно разбить на группы?»

Решение аналогичных задач на сравнение (соотношение) групп предметов между собой с опорой на их сравнение с комплектом-образцом будет (с необходимостью) требовать на копирующем рисунке соединения линиями тех предметов, которые относятся к одному комплекту (образуют один комплект).

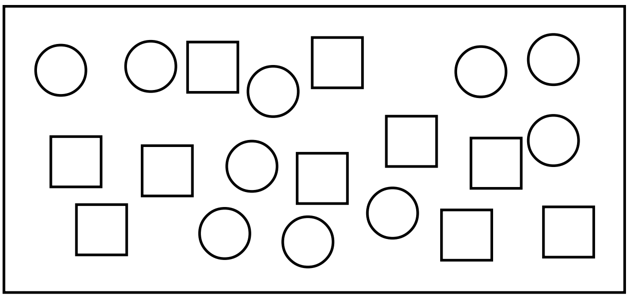
Для нахождения ***такого способа*** соотнесения можно предложить следующее задание. На доске нарисовать (или прикрепить вырезанные фигуры), расположив друг под другом, несколько рядов, например, квадратиков и кружочков.

а) б) в) г)

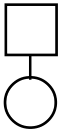
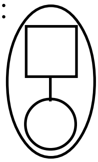


Рядом в сторонке, на магнитной доске или фланелеграфе, прикрепить беспорядочно штук 9—10 квадратиков (или других фигур) и соответственно 9—10 кружков (или других фигур, отличных от первых).

д)



Вы предлагаете сравнить группы предметов (рис. *а—г*), и договариваетесь с детьми о том, что они будут хлопать (поднимать руки вверх), если количество квадратов и кружков одинаковое, и топать (опускать руки), если их количество разное. Только делать все нужно быстро и весело. Показывая поочередно рисунки 1—4, а затем их же беспорядочно, дети будут топать и хлопать, после чего вы, не делая паузы, показываете рисунок *д*. Дети, естественно, не смогут так быстро отреагировать, а значит, уместен вопрос: «Почему, когда я показывала те рисунки (*а*—*г*), вы быстро хлопали и топали, а теперь нет? В чем тут дело? Как вы узнавали, одинаковое количество кружков и квадратиков или разное? Куда вы смотрели?»

Рассуждая, дети придут к выводу, что определить, одинаковое или разное количество кружков и квадратиков, им помогало расположение. «А как показать на рисунке то, о чем вы говорите?» Дети соединяют или обводят квадратик и кружок так:  или так: 

Поэтому, чтобы ответить на вопрос, одинаковое или разное количество квадратов и кругов на рисунке *д*, их нужно расположить по-другому, если они вперемешку. «А если они нарисованы, тогда как быть?» — интересуетесь вы (или кто-нибудь из детей). «Тогда их нужно соединить попарно».

Теперь можно предложить детям выполнить **задания № 80—83.** Обращаем ваше внимание на то, что при сравнении группы ваз с группой цветов в **задании № 81** (для девочек) будет сделан вывод, что эти группы относительно комплекта неравны: группа ваз больше, чем группа цветов (так как цветов не хватает): $A > B$ или $B < A$, где A — группа ваз, B — группа цветов.

Здесь-то вы и должны «засомневаться» в правильности вывода, ведь цветов много, а ваз мало. К аналогичному выводу придут и мальчики.

Дети могут сказать, что это была «ловушка», и должны доказать свою правоту, сравнивая группы по отношению к данному комплекту.

Предложите детям придумать свои такие же задания.

Не забывайте, что у детей при выполнении аналогичных **заданий № 82, 83** и в разделе «**Проверь себя**!» могут возникнуть трудности.

Сравнение по другим признакам: по составу частей, из которых состоит рисунок, по расположению

Задания № 84, **85** и **86** любят выполнять не только дети, но и взрослые. Эти задания включены не для занимательности, как может показаться несведущему, а для того, чтобы ребенок осмыслил способ выполнения таких заданий: мысленно нужно расчленить предмет на части, выделить признаки данного предмета, а затем сравнить с другими по выделенным признакам (по форме, цвету, составу частей, расположению в пространстве и т. д.).

Например, в **задании № 85** можно сначала отобрать предметы, подходящие по цвету, не обращая внимания на остальные признаки, затем из них подбирать предмет, подходящий по форме, а можно поступить и наоборот: сравнить предметы сначала по форме, не обращая внимания на цвет, а затем из них подбирать подходящие по цвету.

Аналогично выполняется и **задание № 48** математических прописей.

Можно предложить дополнительно задания типа «Что забыл нарисовать художник?» («Найди 10 различий», тесты Айзенка «Проверь свои способности».

Выполнив предложенные задания (в группе, паре или индивидуально — по выбору), дети смогут и сами придумать или подобрать в книжках аналогичные.

Как правило, дети с огромным удовольствием составляют такие задания. Главное, выполнив задание, дети непременно должны задаться вопросом: как научить других выполнять такие задания, т. е. научить находить подходящий предмет или обнаружить различие. Именно ответ на такой вопрос вынуждает ребенка осмыслить собственный способ действия и способы, используемые другими детьми.

Способы сравнения по количеству

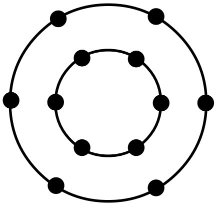
Вы раздаете каждой паре один листок белой бумаги и просите взять карандаши или фломастеры ***разного*** цвета. По вашей команде дети начинают рисовать на листе бумаги круги разного цвета (вот зачем понадобились разные цвета) и рисуют до тех пор, пока вы не скажете: «Стоп!» (Кругов должно быть достаточное количество.) Возникает вопрос: у кого кругов больше? Как доказать? В результате обсуждения дети находят несколько способов сравнения по количеству:

1) пересчитать и сравнить числа;
2) соединить парами;
3) зачеркивать по одному одновременно;
4) закрашивать по одному одновременно.

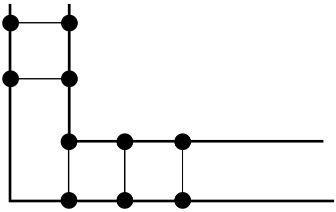
Теперь можно выполнять **задания № 87–91.**

Задание № 89 сначала каждый выполняет ***самостоятельно***, а затем рассматриваются ***способы*** выполнения, которые могут быть разные:

1) Ребенок ставит каждую точку напротив соответственной и соединяет их, показывая, что он нарисовал их столько же.



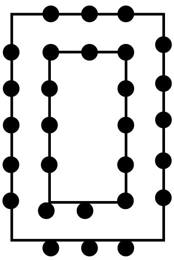
а)



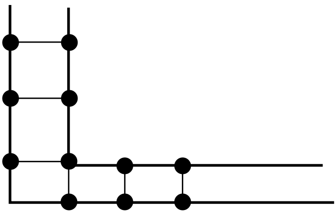
б)

Понятно, что задания на рисунках *б* и *в* с «ловушкой».

По аналогии с предыдущим заданием на рисунке дети могут выполнить задание так:

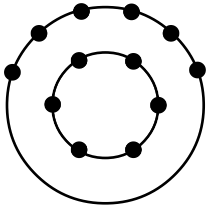


в)

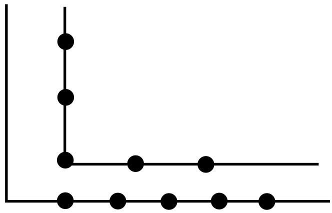


г)

2) Ребенок может пересчитать точки на одной фигуре, а затем нарисовать их столько же на другой:



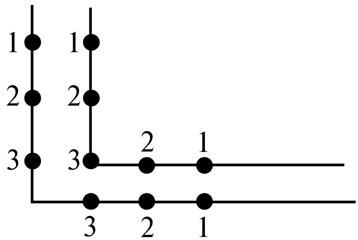
д)



е)

Опять же по аналогии с предыдущим заданием на рисунке дети могут выполнить так:

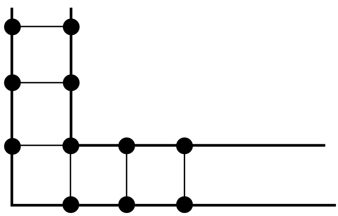
ж)



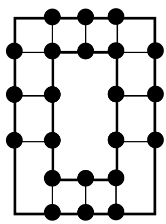
Числа — результат пересчета точек на сторонах угла.

Для доказательства истинности своей точки зрения нужно каждую точку на одной фигуре соединить с точкой на другой. Лишних точек быть не должно.

После выполнения этих заданий обязательно надо предложить детям придумать свои такие же задания, среди которых должны оказаться и задания с «ловушкой», когда одну и ту же точку (или другую фигуру) можно посчитать дважды в силу того, что она одновременно принадлежит и одной части фигуры, и другой (рис. *б* и *в*).



и



Не забудьте про анализ ошибок и их фиксацию в знаковой форме в справочнике ошибок.

Глава 7.
СРАВНЕНИЕ УГЛОВ

Есть несколько определений угла:

Угол — геометрическая фигура, которая состоит из двух лучей с общим началом.

Угол — геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки.

Угол — часть плоскости, заключенная между двумя лучами с общим началом. Этот угол еще называют плоским.

Угол — это мера поворота луча вокруг его начала до заданного положения.

Два угла называют равными, если они могут быть совмещены так, что совпадут их соответствующие стороны и вершины.

За единицу измерения углов принята 1/90 доля прямого угла, называемая ***градусом***.

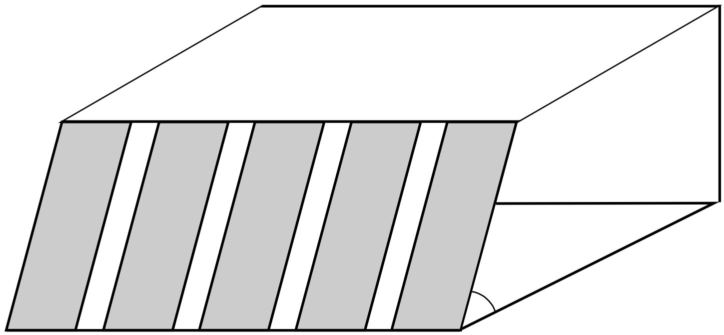
Используется и радианная мера угла: один ***радиан*** приписывается центральному углу, стороны которого высекают из единичной окружности дугу, длина которой равна ее радиусу.

В учебнике геометрии для 7—11 классов (автор Л. В. Погорелов) дано следующее определение угла: «Углом называется фигура, состоящая из точки — вершины угла и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки, — сторон угла».

Мы привели определения угла для того, чтобы вы представляли, как в математике определяют понятие «угол». Понятно, что никаких определений углов детям не дается. Вы включаете все эти слова в свою речь, сопровождая ее показом, а не объяснением того, что такое угол, сторона угла, вершина угла, величина угла.

Для введения понятия угла вновь воспользуемся сюжетом о Незнайке. Он вместе с друзьями попал в Солнечный город и удивился, увидев дома с наклонными колоннами. Дома были разной высоты, с колоннами, которые были прикреплены под разными углами. Но в трех домах не хватало по одной колонне. Не могли бы дети помочь восстановить эти колонны?

Для того чтобы восстановить колонну с таким же наклоном, как тот, который вы зададите на макете, детям фактически придется восстанавливать угол наклона (а похожую задачу на восстановление колонны дети уже решали). Приставляя недостающую колонну к дому, они вынуждены будут показать именно тот угол, о котором идет речь, изобразить который на плоскости (на доске, на бумаге) можно будет с помощью двух лучей, выходящих из одной точки, показывая эту точку и лучи соответственно на макете (см. рис.).



Вы должны заранее сделать макеты трех разных домов с наклоном колонн, равным 90°, 45° и бо́льшим 90°. Макет дома с наклоном колонн, равным 90°, у вас уже был, его вы и используете. Не забудьте, что теперь у каждого дома должно быть основание — прямоугольник.

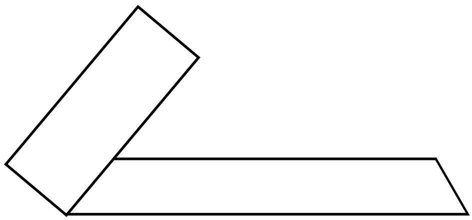
Чтобы решить поставленную задачу, необходимо вернуться к задаче с колоннами, которую дети уже решали. Выставляя модели домов, вы спрашиваете: «К какому дому мы быстро можем подобрать колонну? Как? По каким признакам мы умеем подбирать колонны?» Дети легко подбирают необходимую колонну, обосновывая свой выбор. Возникает ситуация успеха.

«А в этом городе колонны наклонные, под углом. Как их поставить под таким же углом, т. е. с таким же наклоном?»

Дети должны попробовать сделать это ***практически***, выбрав подходящую по всем остальным признакам полоску-колонну и наклонив ее под таким же углом, как данные (наложить или приложить к данной колонне и сдвинуть ее).

Дети, как и в предыдущих случаях, должны пальчиком показать угол, а значит, пройти пальчиком по длине (высоте) полоски-колонны и длине основания дома, который имеет форму прямоугольника.

Фактически речь идет о двугранном угле (между двумя плоскостями), который измеряется линейным углом. ***Двугранный угол*** — часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями (не принадлежащими одной плоскости) вместе с общей ограничивающей их прямой.



Когда дети подберут колонны к каждому дому, вы продолжаете сказочный сюжет: «Несмотря на то что в Солнечном городе нет одинаковых домов, на каждой улице все дома с одинаковым наклоном колонн. На одной улице дома вот с таким наклоном (и вывешиваете на доску рисунок — основания дома и колонны под определенным углом), на другой — вот с таким (снова вывешиваете) и т. д. Вы сможете подобрать колонны к таким домам?» Теперь вы предлагаете колонны (полоски) разной ***высоты***, ширины, цвета (но все прямоугольной формы), так как эти признаки для восстановления угла значения не имеют. При подборе колонн в дальнейшем необходимо обратить внимание на то, что если наклон больше, то угол меньше. Место обсуждения такого наблюдения вы определите в процессе работы.

После выполнения практических заданий (нужно, чтобы каждый ребенок ***сам*** наклонил колонну под определенным углом) вы начинаете разговор с детьми. Помните, что нельзя торопить детей с ответом, нельзя требовать каких-либо полных ответов, ведь ребенок только начинает осмысливать свои действия. При необходимости воспользуйтесь приемом РО — выслушав ребенка, спросите его: «Я тебя правильно поняла?» — и задайте образец правильной речи.

Итак, после выполнения практических действий вы задаете детям вопросы:

— Почему в предыдущей задаче с колоннами не возникала проблема наклона? Как стоят в этом доме колонны? (Прямо.) Под каким углом к основанию дома, к земле они стоят? Покажи.

Ребенок выходит ***к доске***, а ***не*** показывает ***с места***.

— Как назвать такой угол?

Дайте возможность детям подумать, как можно назвать угол, если колонны стоят ***прямо***. (Прямой.)

— Покажите ***прямой угол***. Найдите в классе, где прямые углы. Покажите их.

Необходимо следить, чтобы дети правильно показывали угол, проводя пальчиком по сторонам угла.

— Как другому человеку, не видя этого дома, поставить колонну под таким же углом? Как другим людям сообщить, под каким углом должны стоять колонны? Как такое сообщение можно послать по почте, ведь модель дома не пошлешь?

После обсуждения можно прийти к выводу, что угол можно нарисовать. А если задать угол 45°, то можно угол листа бумаги сложить пополам. Если будет желание, на это можно обратить внимание детей, тем более что дом с таким наклоном колонн они видели.

Пусть дети рисуют. После практического действия нужно обсудить: как они на чертеже изобразили колонны? Если дети изобразят угол, стороны которого отрезки, а не лучи, естественно задать вопрос:

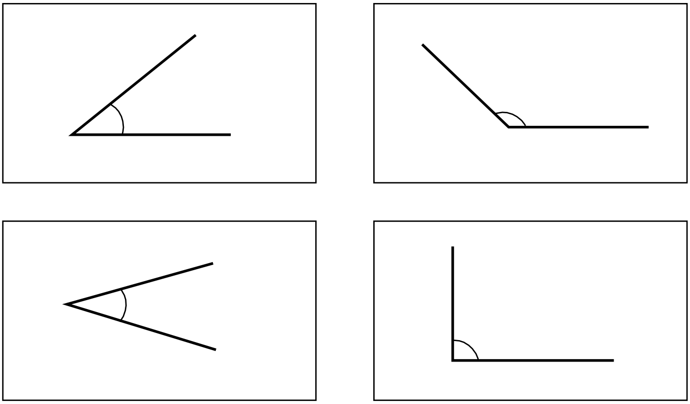
— Такой угол может быть только для колонн ***такой*** длины (высоты)? А если взять ***другие*** колонны, ***изменится ли угол***?

Здесь уместно вернуться к заданию, где дети подбирали колонны разной длины, но определенного наклона.

— Значит, ***длина*** (высота) ***колонны не имеет значения***. Как же это показать: отрезком или другой геометрической фигурой?

Итогом такого разговора должен стать вывод — изображать стороны угла лучше лучами, показывая тем самым, что длина сторон не влияет на величину угла. Луч показывает не на то, что длина бесконечно большая, а на то, что длина нам безразлична (этого детям можно не говорить). Сначала дети будут ***рисовать*** (от руки), а только затем чертить (с помощью линейки) углы, состоящие из двух лучей (сторон), выходящие из одной точки (вершины), закрашивая внутреннюю часть угла (пространство между колонной и основанием).

Следующая ситуация, которую вы предложите, поможет детям придумать способы, позволяющие изображать ***такие же*** по величине углы, как заданные. Для этого вы чертите на отдельных ***нелинованных листах*** столько разных углов, сколько групп образуется для работы (раздав по углу каждой группе), и предлагаете придумать способ, позволяющий нарисовать такой же угол.



Могут быть предложены следующие способы:

1) Вырезать угол (лучи можно продолжить до края листа, а можно и не продолжать, это не влияет на величину угла) и, взяв одну или другую часть, обвести ее на другом чистом листе. Очевидно, что теперь дети фактически перейдут к понятию плоского угла. Разрезав лист по лучам, дети получают два угла, две части плоскости. Оба этих плоских угла могут быть получены благодаря лучам, выходящим из одной точки. Если дети не обратят внимание на то, что, разрезав лист по лучам, они получают два угла, то заострять на этом внимание не нужно. Они в геометрии не один раз к этому вернутся.

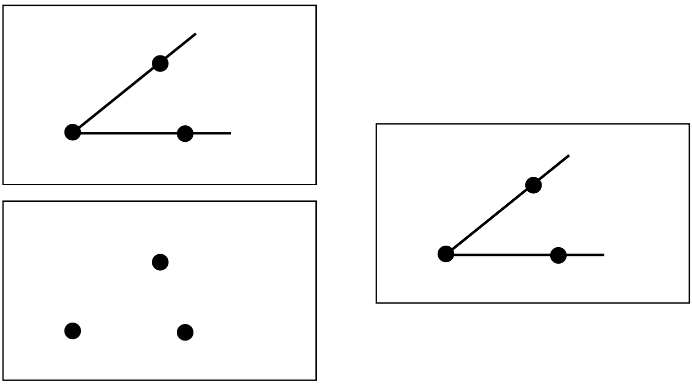
Помните, что на вырезанном плоском угле, который ребенок держит в руках, как и ранее, нужно навести фломастером стороны как след от показа этих сторон пальчиком.

2) Положить чистый лист ***под лист*** с заданным углом и проколоть его булавкой в трех местах: один прокол сделать в вершине и по одному проколу на лучах в любом месте.

Думаю, любому учителю понятно, почему достаточно двух точек для восстановления луча. Этот вопрос, если возникнет интерес, можно обсудить.

Затем вынуть нижний лист, на котором три точки.

Соединив точки на лучах с вершиной, получим угол, равный данному.



3) Положить чистый лист ***на лист*** с заданным углом и приложить, например, к окну так, чтобы листы просвечивались, и провести по тем же лучам лучи на чистом листе.

4) С помощью кальки или копирки продолжить лучи по другую сторону вершины, получив вертикальный угол, равный данному.

Конечно, этот способ вряд ли может быть найден самими детьми. Скорее, его дома могут показать родители. А можете показать и вы в классе.

Теперь можно предложить детям нарисовать прямой угол на ***клетчатой*** бумаге в тетради. Дети, скорее всего, увидят, что стороны клеточки образуют прямой угол.

— А хотите проверить, получился у вас прямой угол или нет? Для этого нам потребуется модель прямого угла. У кого она есть? Ни у кого. А хотите сделать?

И тут вы раздаете детям листочки разной формы и разного цвета. Форма обязательно должна быть произвольной (не прямоугольник). Дети берут в руки лист и складывают его, проводя пальчиками по линии сгиба. После этого дети еще раз складывают лист, но так, чтобы предыдущая линия сгиба наложилась сама на себя. В итоге у каждого ребенка в руках модель прямого угла. Но ведь у всех листы были разной формы и размера, наверное, и углы получились разные? Дети в группе сравнивают величины получившихся углов наложением. Оказывается, углы одинаковые. Это задание дети воспринимают как фокус. Теперь с помощью модели прямого угла дети могут проверить свои углы в тетрадках.

Позже, когда перед ребенком возникнет задача опосредованного сравнения углов, появится способ их измерения, для которого понадобятся мерки, что, в свою очередь, потребует изобретения специальной «линейки» — прибора для измерения углов, т. е. транспортира. С помощью транспортира, зная величину угла в градусах, дети смогут чертить угол, равный заданному.

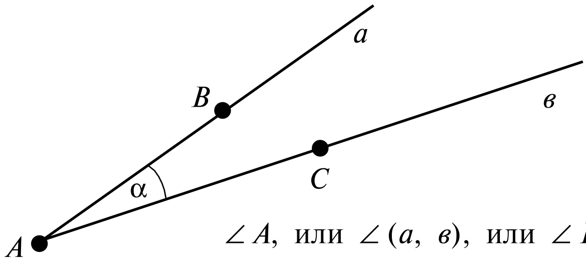
Итак, прежде чем приступить к выполнению заданий из учебника, дети должны научиться «видеть» углы, показывать стороны и вершину, вырезать углы и сравнивать их, накладывая один на другой так, чтобы вершины и стороны (лучи) совпадали.

В **заданиях № 92, 93, 95** и **96** для сравнения или построения углов, а также для обоснования своей точки зрения углы нужно вырезать, используя при этом рабочую тетрадь № 4.

Предлагая каждое из этих заданий, помните, что **сначала** дети должны его ***выполнить*** (в паре, индивидуально или в группе — по выбору!), а только **потом** ***обсуждать*** способ его выполнения, а не наоборот. Необходимость обсуждения способа выполнения задания возникает у ребенка тогда, когда перед ним стоит задача научить другого делать то, что он умеет делать сам. Проверить, насколько глубоко и адекватно понимает ребенок то, что делает, можно, как и прежде, благодаря предложению придумать свое такое же задание и выполнить его так, как он хотел бы, чтобы его сделали другие.

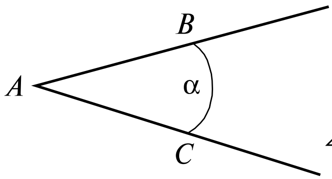
Требовать от детей заучивания букв греческого алфавита α (альфа), β (бэта), γ (гамма), φ (фи) и других для обозначения ***величины*** угла (**№ 95**) нет надобности.

Обратите внимание, что нельзя путать обозначение угла, которое задается указанием либо трех точек — вершины и двух точек на сторонах угла, либо одной точки — вершины, либо названий лучей, с помощью которых он образован, с обозначением его величины.



$\angle A$, или $\angle(a,\ в)$, или $\angle BAC$.

При этом сами точки B и C на лучах чаще не ставятся:



$\angle A = \alpha$ или $\angle BAC = \alpha$

Правда, часто вместо слов «величина угла» говорят «угол», т. е. вместо слов «величина угла равна α или равна 45°» говорят «угол равен 45° или угол α».

Треугольник

По определению ***треугольник*** — многоугольник с тремя сторонами и тремя вершинами; фигура, образованная тремя точками, ***не лежащими на одной прямой***, и тремя соединяющими их отрезками.

Название же, очевидно, произошло от того, что углов в треугольнике три, поэтому ребенок может ориентироваться только на наличие трех углов, чаще всего выделяя для себя лишь острые (меньше прямого) углы, потому что ребенок вряд ли выделяет существенные признаки треугольника — три вершины, не лежащие на одной прямой, три стороны, которые должны быть ***отрезками прямой***, и как следствие три угла (внутренних) при каждой вершине, каждый из которых, при необходимости, можно отрезать.

Если ваши дети будут испытывать трудности при распознавании треугольников, то лучше начать работу с **задания № 97**. Как и все остальные задания, дети его выполняют практически. Для этого вы им заранее раздаете модели треугольников.

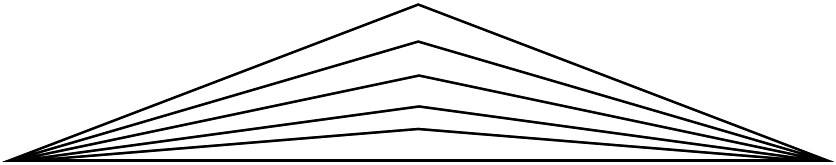
Задание № 94 содержит несколько «ловушек». Для работы над данным заданием все фигуры с их номерами нужно вынести на доску, а учебник будет нужен ребенку дома, как вы помните.

Фигура под номером 9 — не треугольник, так как ее стороны не являются отрезками. Обратите внимание, что в данном случае нельзя допускать обоснование, что у этой фигуры есть три угла, но стороны не являются отрезками, так как мы не можем здесь говорить об углах. Ведь угол образован двумя лучами, исходящими из одной точки, а луч является частью прямой.

Фигура под номером 10 также может вызвать столкновение мнений. Вот вам ситуация для организации разговора между детьми. Отойдите в сторону, не вставляйте свои комментарии и не руководите дискуссией. Пусть дети ведут ее сами. Только после завершения разговора вы вместе с детьми можете его проанализировать: как высказывали мнения, как обращались друг к другу, какие задавали вопросы.

Фигура под номером 11 — треугольник, который лучше нарисовать с углом при вершине, близким к 180°.

Тогда рисунок 12 можно интерпретировать как «вырожденный» треугольник, у которого вершина опускалась все ниже и ниже и «упала» на сторону:



Возможно, разгорится спор, который и завершится поиском в энциклопедическом словаре определения того, какую фигуру называют треугольником, что само по себе очень полезно, однако ни о каком зазубривании определений речь не идет.

Понятие величины. Буквы латинского алфавита

Используя вопросы и задания раздела «Проверь себя!», вы подводите детей к пониманию того, какие свойства предметов являются величиной, а какие нет. Дети уже знают, какими буквами латинского алфавита обозначают длину, массу, периметр, площадь, объем, количество. Теперь их нужно подвести к тому, что величины можно обозначать любыми буквами. Для этого вы предлагаете детям следующее задание: «Нарисуйте схему, чтобы она показывала, что одна величина больше другой». После выполнения задания вы задаете серию вопросов:

— Кто какие величины имел в виду? Кто какие буквы написал? А другие величины могли находиться в таком же отношении? Тогда какие могли быть написаны буквы?

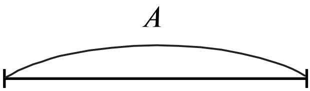
Необходимо обсудить все варианты детей и только после обсуждения прийти к следующему выводу. Если мы исследуем отношения между величинами, а какие бы мы величины ни сравнивали, они всегда будут находиться между собой в отношениях «больше», «меньше» или «равно», то не имеет значения, с какой конкретной величиной мы имеем дело и какой буквой ее обозначать. Следовательно, ее можно обозначить ***любой буквой***. Принято обозначать величины буквами латинского алфавита.

Далее можно вводить буквы латинского алфавита в следующей последовательности. Сначала буквы, которые по написанию и произношению совпадают с буквами русского алфавита (A, K, M, D, E, T, O). Затем буквы, которые по написанию совпадают, но отличаются по произношению (B, C, P). И, наконец, буквы, которые отличаются от русских как по написанию, так и по произношению (F, N, Q, R, L, G, S, V и др.).

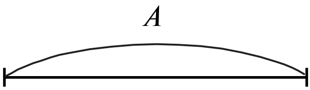
А какими буквами обозначать равные величины: одинаковыми или разными?

Давайте проведем небольшое исследование для того, чтобы ответить на один из самых трудных вопросов.

«У нас есть отрезок длиной A. (Для краткости мы будем говорить: есть ***величина А***.) ***Любая*** величина изображается с помощью отрезка:



Постройте такую же величину:

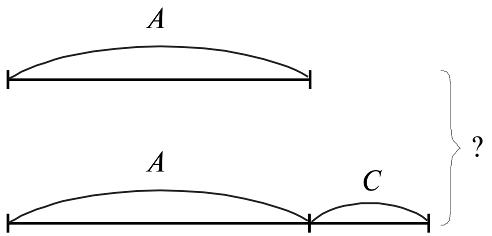


Какой буквой можно обозначить вторую величину? Можно любой? Почему?» Дайте возможность детям самим обсудить этот вопрос. Не спешите им все объяснять. Вполне возможно, что вашего объяснения вообще не потребуется, так как дети сами обоснуют свой выбор.

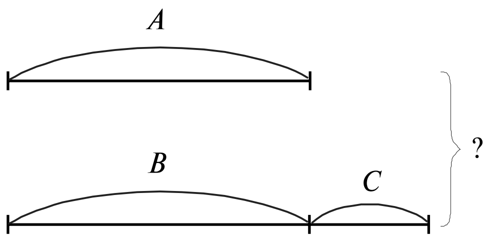
Вторую величину можно обозначить только ***такой же*** буквой. Эта длина уже обозначена буквой A и другой буквой обозначена быть не может. Это предметы могут быть разные, а их величины (например, длины) ***одинаковые*** **($A = A$).**

Появление равенства $A = A$ (свойство рефлексивности), а также $A = A$ (A тождественно A) связано с конкретно-практическими действиями сравнения двух предметов и преобразования одного предмета в другой. Удержание отношений этих действий адекватно сохранению величины, что необходимо для формирования понятия величины. Таких заданий в учебнике достаточно много: при сравнении ***по длине*** предлагается одной и той же нитке придавать разную форму, что не меняет длины; при сравнении ***по площади*** дети перекраивают фигуры, меняя форму, но сохраняя площадь; при сравнении ***по объему*** дети переливают одно и то же количество (объем) воды в сосуды разной формы; при сравнении ***по количеству,*** меняя расположение предметов в пространстве, дети обнаруживают сохранение количества, и т. д. Описывая эти преобразования формы предметов при сохранении величины, и могла появиться запись $A = A$ ($A \equiv A$), фиксирующая тождественные преобразования.

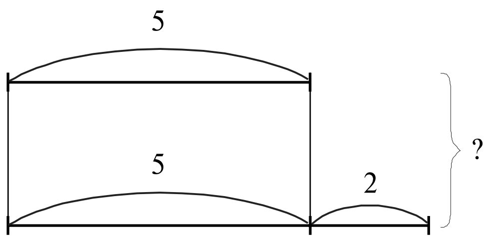
Решая задачу: «У Лены A карандашей, а у Коли тетрадей на C больше. Сколько карандашей и тетрадей у них вместе?», дети должны составить вот такую схему, где буквой A обозначены ***не карандаши, а количество*** карандашей. И если сказано, что тетрадей на C больше, то это означает, что их по ***количеству*** столько же, т. е. A, и еще C, т. е. $A + C$.



Дети могут, построив такую же схему, обозначить ***равные*** величины ***разными*** буквами A и B:

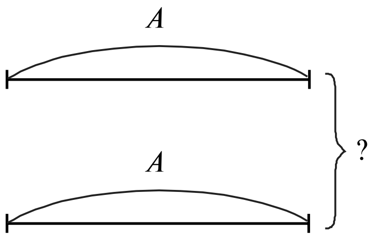


Значит, если дети обозначают буквой B количество тетрадей, то возникает опасение, что они ориентируются все-таки не на одинаковое ***количество***, а на разные предметы, т. е. A — это у них карандаши, а B — это тетради. Таким образом, буква «привязалась» к предмету, а не к величине, о чем мы говорили раньше. Ведь если у Лены 5 карандашей, а у Коли тетрадей на 2 больше, то схема будет иметь вид:



Здесь $A = 5$, а $C = 2$, значит, эта схема соответствует схеме 1.

Аналогично нужно рассуждать и в ситуации, когда у Лены A карандашей, а у Коли — столько же. Сколько карандашей у них вместе?



Но тогда неизбежно возникает вопрос: но ведь существует запись $A = B$; в какой ситуации она появляется?

В отличие от предыдущей ситуации, при которой одна величина обозначена буквой, а подбирается вторая ***такая*** же, которую и нужно обозначить ***той же*** буквой, нужно рассмотреть другую задачу. Есть две величины, обозначенные разными буквами, например A и B. При сравнении этих величин оказалось, что они равны. Например, пусть ручка имеет длину A, а тетрадь имеет длину B. При сравнении этих предметов оказалось, что их длины равны, следовательно, $A = B$. Это означает, что эти предметы взаимозаменяемые при измерении длины любого предмета. Можно ручкой измерять длину какого-то предмета, можно тетрадкой. Результаты будут одинаковые. Значит, теперь A можно заменять на B или B заменять на A, т. е. обозначить ***длину*** ручки и равную ей длину тетради одной и той же буквой A или B.

Работа над данной главой завершается проверочной работой с последующим составлением справочника ошибок, которые могут появляться при сравнении углов по величине (РТ-4).

Глава 8.
КАК ПИШУТСЯ БУКВЫ И ЦИФРЫ

Как пишутся буквы и цифры

При работе над данной главой вам понадобятся математические прописи.

Прописи, с которыми будет работать ребенок, необычные: они не только содержат материал, помогающий ему овладеть навыком написания букв и цифр, но и носят развивающий характер. В отличие от всех существующих прописей, в основу обучения положено не копирование образца, когда буквы и цифры заданы в готовом виде, а формирование обобщенного способа их написания, включающего самостоятельное конструирование образца и способ его воспроизведения. Ребенок с помощью этих прописей превращается в исследователя, в собеседника, который учится сам и «учит» вас, как отличить красивые цифры от некрасивых, как зашифровать придуманные им записи, как отыскать нужную точку в нужном месте. Он узнает о том, какие бывают швы при шитье, как можно превращать геометрические фигуры в забавных животных и человечков. Он учится рисовать на клетчатой бумаге, осознает, как «рождаются» печатные буквы, и еще многое другое.

Тщательно подобранные задания не только окажут влияние на развитие логического мышления ребенка, его воображение и творчество, но и значительно повысят его интерес и желание учиться. Ведь он здесь не робот-исполнитель указаний взрослого, а выдумщик, фантазер, получающий радость от собственных наблюдений и открытий.

Прописи позволяют взрослому установить контакт с ребенком. Тексты, обращенные к ребенку, конечно же, читает взрослый, а специальные значки в начале прописей помогут вам понять способ работы и общения с ребенком. Идея прописей — создать общее представление о методе работы взрослого с ребенком, помочь ребенку принять позицию исследователя, способного в общении со взрослым совершать «открытия», анализировать способы выполнения заданий. Ребенок должен научиться предвидеть возможные ошибки, находить их благодаря специальным заданиям с «ловушками». Описанная здесь идея прописей реализуется на математическом материале, а конкретизированы и на материале обучения письму.

Работа над прописями не ограничивается лишь упомянутыми задачами. Она помогает развитию речи ребенка, абстрактного мышления, воображения и творчества, развивает способность к концентрации внимания, умение видеть, слышать, думать и говорить.

Описывая методику работы учителя над письмом, скажем, что речь будет идти о первоначальном письме-каллиграфии. Известно, что «для плодотворного обучения технической стороне письма необходим определенный уровень психофизиологического развития ребенка, и не только руки, как иногда считают, а прежде всего мышления, памяти, способности к зрительному пространственному восприятию объектов и т. п.»[1].

Не менее важна мотивационная сторона обучения. Сегодня, когда потребность в красивом почерке практически отпадает ввиду использования печатных машинок и компьютеров, располагающих десятками различных шрифтов, вопрос о том, зачем нужно учиться красиво писать, встает все с большей актуальностью. Как же сформировать у ребенка внутреннюю потребность в «аккуратном, разборчивом, эстетически выдержанном оформлении всех выполняемых записей»[2], являющуюся важнейшим условием успешного обучения каллиграфии? Можно ли сформировать каллиграфический навык без опоры на интеллект, как сугубо предметное, имитационное действие — написание по образцу?

Ответ на первый вопрос непрост, а на второй — прозрачен.

Рекомендуем учителю прочитать главу 4 «Методика обучения письму» в цитировавшейся книге и работы П. Я. Гальперина, в частности «Методы обучения и умственное развитие ребенка» (М: Изд-во Московского университета, 1985),

---

[1] «Русский язык в начальных классах. Теория и практика обучения» (М.: Просвещение, 1993. — С. 102).

[2] Там же.

чтобы понять всю глубину проблем, связанных с обучением письму.

Наша цель — показать учителю, как организовать работу с детьми по обучению каллиграфии как средство для формирования умения раскрыть строение (состав элементов и связь между ними) любого объекта новой области. Эксперимент, имеющий указанную цель, был проведен П. Я. Гальпериным в упоминаемой выше работе.

В настоящее время уже выпущено несколько вариантов прописей, в том числе и выполненные сотрудниками Центров развивающего обучения («Учимся писать» И. П. Старагина), однако принципиальных отличий в них нет, так как навык формируется либо имитационным действием, путем воспроизведения образца по опорным точкам, либо путем выделения опорных точек в заданном графическом знаке, либо конструированием букв из отдельных элементов.

Однако система развивающего образования Д. Б. Эльконина—В. В. Давыдова открыла новые возможности для формирования каллиграфического навыка. Рассмотрим их на примере обучения письму цифр. Суть подхода состоит в том, что ребенок в совместной деятельности с другими детьми (используется групповая форма работы) и со взрослыми (учителем, родителями, воспитателем в детском саду) сначала выделяет признак, по которому можно сравнить уже написанные «другими детьми» цифры (работа над выделением признаков предметов при сравнении составляет основную цель обучения в программе по математике в системе РО в первом полугодии 1-го класса).

Признак, который может быть рассмотрен, — «красота». Сравнение по «красоте» (**математические прописи**, задание № 60), включающее в себя сравнение по форме, размеру и расположению, позволяет ребенку выделить единицы контура — опорные точки двух видов:

а) начальная и конечная точки;

б) промежуточные точки, последовательное соединение которых позволяет воспроизвести нужный контур.

Очевидно, что для выделения ребенком указанного признака необходимо, чтобы в его сознании были сформированы понятия формы (первоначально — квадрата) и расположения (первоначально — места точки в квадрате), а также места нахождения или перемещения точки по сторонам и углам квадрата. Для этого предлагаются для совместной работы два типа заданий, когда ребенку необходимо либо рассказать о том, где находится уже поставленная кем-то точка, либо найти точку по заданному кем-то описанию ее места нахождения (**задания № 1—20**).

Так, в заданиях первого типа ребенку предлагается не только самому поставить точку в «нужном» месте или оценить, как это сделали другие, но самое главное — разобраться в том, как он это делает сам, как узнает, где правильно стоят точки, а где нет. Другими словами, продемонстрировать свою способность к оценке умения другого человека. Ребенок поставлен в ситуацию, когда необходимо понять и разобраться в самом себе: как у него это получается. Использование такого приема возможно лишь тогда, когда взрослый, предлагая это задание, как бы сомневается в успешности его выполнения им самим, и тогда для ребенка создается ситуация успеха. Ребенок сначала выполняет предложенное задание, а затем как бы задается вопросами: «А как же у меня это получается? Что же я такое знаю, что могу это сделать? Как научить других делать так же, как я?»

Понятно, что первоначально эти вопросы ставит перед ребенком взрослый, но по мере формирования такой способности (рефлексии) ребенок сможет и сам себе задавать такие вопросы, а это, как известно, есть способность к целеполаганию, т. е. к самостоятельной постановке целей.

Только обучая другого делать «как я», ребенок осмысливает собственные действия. Теперь ребенок готов самостоятельно выполнить это задание. Поэтому вслед за выполнением рефлексивного задания он готов к выполнению целого класса заданий, связанных с использованием этого способа действия. Описанный подход реализуется по отношению к точке и отрезку с учетом расположения, что с необходимостью приводит к выделению направления движения.

Любое из предлагаемых далее заданий типа «Дорисуй...» (**тренировочные задания с. 33—36; № 27**, **46—48** и др.), «Придумай...» (**№ 5, 17, 20, 21, 34, 36, 60** и др.), «Закончи...» (**№ 11, 15, 28, 29** и др.) и т. д. сопровождается анализом способа его выполнения при одновременном становлении и укреплении руки, улучшением координации движений, определения пространственных отношений между элементами.

Упражнения, необходимые для упомянутых целей, подобраны таким образом, что в действительности являются лишь средством для решения логических задач (**задания № 9**, **10**, **14**, **17**, **18**, **36**, **37**, **38**, **39**, **45**, **47**, **48** и др.).

Особое внимание нужно обратить на **задание № 42**. Отвечая на вопрос: «Как узнавать, что забывал дорисовать художник?», дети будут выделять все признаки, по которым сравниваются части рисунков. Этому же способствуют и многочисленные задания, рекомендованные для внеклассной работы, в которых нужно найти различия в двух рисунках, кажущихся одинаковыми. Как правило, дети любого возраста, начиная с 5–6 лет, проявляют большой интерес к таким заданиям, но одного интереса совершенно недостаточно. Необходимо не просто выполнить такое задание и найти указанное число различий, а проанализировать способ его выполнения вместе с теми, с кем работал ребенок, или с теми, кто уже его выполнил. Суть же способа — в выделении признаков, по которым эти рисунки можно сравнить. Это и позволит ребенку в дальнейшем «видеть» то, на что раньше он смотрел, но не видел элементы, составляющие этот рисунок, форму и расположение.

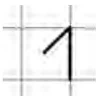
Учитель, организуя работу в классе, получает возможность использовать групповую работу, т. е. построить обучение в форме коллективно распределенной деятельности. Например, в 1-м классе «Школы сотрудничества» на Таганке дети разбились на группы по четыре человека. Каждая группа получила лист, на котором «другие дети» уже учились писать цифру 1. Ребенок, пришедший в 1-й класс, возможно, имеет некоторый опыт в написании цифр и букв, но при этом не умеет ни проанализировать графические образцы, ни воспроизвести их самостоятельно. Поэтому, опираясь на его собственный опыт и опыт других детей, оказывается возможным создать систему таких ситуаций, в которых ребенок совместно с другими детьми начинает анализировать красиво написанные цифры, сравнивая с «некрасивыми». Другими словами, обучение написанию цифр, в частности 1, начинается с того, что каждой группе детей из 3—5 человек учитель кладет лист, на котором кто-то уже учился писать цифру 1:

Понятно, что учитель, заготавливая такие листы, вписывал цифры, написанные по норме, «красивые», и цифры, написанные с учетом типичных детских ошибок, причем количество красиво написанных цифр должно быть не меньше числа детей в группе.

Отыскивая красиво написанные цифры, дети должны были придумать, как другие ученики, учитель, родители увидят, какие цифры они считают красивыми. Другими словами, дети должны были придумать способ фиксации красивых цифр. Вот что придумали дети: одна группа над красивыми цифрами ставила знак «+», над некрасивыми — «–». Другая — над каждой красивой цифрой писала первую букву имени ребенка, который ее обнаружил, а искать они договорились по очереди. Третья группа обводила в кружочек найденную красивую цифру. Четвертая — цветным фломастером наводила каждую красивую цифру, причем тоже по очереди. Всем детям, таким образом, было интересно не только увидеть найденные другими цифры, но и обсудить способ, который использовали группы для обозначения выбранных цифр. В последующих заданиях они опирались на последний способ, при котором, как сказали дети, ты заодно учишься писать.

Как известно, в системе Д. Б. Эльконина—В. В. Давыдова мало найти правильный ответ, надо доказать, что это так, и поэтому учитель применяет следующий прием. На доске или листе бумаги он вновь показывает детям написанные цифры. Учитель выбирает несколько чередующихся по «красоте» цифр, сопровождая показ вопросом: «Эта красивая? А эта?» и т. д. Дети хором отвечают: «Да, нет, да, нет». После чего уместен следующий вопрос: «Как же вы так быстро узнаете, какая цифра красивая, а какая нет?» Вот тут-то учитель предлагает для детских объяснений две цифры, которые отличаются только «носиками»: один длиннее, чем другой, написанный по норме. Ясно, что дети в качестве аргумента для доказательства будут опираться как раз на длину «носика», тогда учитель показывает еще одну единицу, но уже с «носиком» короче, чем надо (**№ 60**). Дети опять будут возражать и утверждать, что он короткий. Это позволит учителю задать свой главный вопрос: «Вы говорите: этот «носик» длинный, а этот короткий, а какой же он должен быть?» — и тогда дети самостоятельно сформулируют описание того, каким должен быть красивый «носик». Затем им вновь предлагают написанные «носики», среди которых опять есть красивые и некрасивые.

Интересно, что, выполняя это задание, группы в который раз оказались перед выбором способа обозначения. Одни навели только «носики», другие — «носики» с краем клетки, т. е. получилась написанная единица, но с неверно написанной наклонной палочкой.



В одной из групп дети навели два из четырех красивых «носиков» правильно, а два — вместе с «ножкой». В другой группе они навели лишь один «носик», да и тот пунктиром до половины. Традиционно работу представляет кто-нибудь из ее участников, но мы предложили детям другой способ анализа: по работе группы, без всякого комментария, мы попытались понять, как рассуждали дети данной группы и почему задание оказалось невыполненным по окончании работы других групп.

Вот какие предположения высказывали дети относительно работы группы, которая имела два правильно наведенных «носика», а два — нет: «Наверное, мнения разделились, кто-то считал так, а кто-то иначе. Вот и получилось разное. Одни не смогли доказать другим, как будет правильно». Относительно работы группы, которая фактически не справилась, были высказаны следующие предположения:

— Они хотели от нас чем-то отличиться, потратили время и поэтому начали наводить пунктиром, но не успели закончить.

— Они, наверное, не соглашались друг с другом.

— Они не смогли сделать.

Последнее мнение обсуждали особо, ведь можно было действительно подумать, что в группе собрались совсем неспособные, глупые дети, но класс-то знал, что там были очень смышленые ребята. После всех обсуждений дали слово обсуждаемой группе, и они с огромным огорчением сообщили, что мальчики, входящие в группу, все время ссорились и, конечно, ничего не успели.

Описанная ситуация дает возможность не только детям, но и учителю осознать, что успешность выполнения работы не всегда зависит от того, способные или неспособные дети решают данную задачу, важно не только ***как***, но и ***с кем*** ее решаешь.

В процессе анализа работы дети не только конструировали, но и уточняли, корректировали способ написания цифры, самостоятельно выделив «контрольные» точки, т. е. точки-ориентиры. Составив словесное описание способа, они практически в точности повторили данное в учебнике описание.

Домашнее задание было непривычным: одну-две строчки цифры «1» пишет кто-нибудь из взрослых, а другие две учащийся, после чего он должен, как и в классе, найти в этих строчках красиво написанные цифры.

Ситуация тоже оказалась необычной. Один из учеников обреченно произнес: «Мои родители не будут писать», другой со вздохом сказал: «Ну, все! Две строчки придется писать самому», а третий на замечание учителя о том, что написать-то может кто угодно, с «чертовинкой» в глазах спросил: «И прохожий?»

Когда на следующий день в классе дети снова писали строчку цифр 1, а затем выбирали красиво написанные, то одна девочка неожиданно для себя увидела, что красивых цифр у нее оказалось всего 4. Она умоляюще посмотрела на учителя и спросила: «Можно, я напишу еще одну строчку?» И с радостью принялась за работу. Таким образом, скучнейшая однообразная работа превратилась в удовольствие, и дети с завидным терпением ее выполняли, выбирая различные способы написания: не отрывая руки, с отрывом, начиная с «носика» и с наклонной палочки.

Дети теперь легко выделили опорные точки и выбрали удобные для себя начальную и конечную. Они оказались разными для правши: $\boxed{\nearrow \mathbf{1} \downarrow}$ и левши: $\boxed{\swarrow \mathbf{1} \uparrow}$.

Когда мы провели такую длинную, но интересную работу, оказалось, что дети без труда выбрали из ряда чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 такие, которые «похожи» по написанию на цифру 1. Это оказались цифры 7 и 4.

Такой подход позволил все цифры разбить на три группы: 1) 1, 7, 4; 2) 3, 5, 2; 3) 6, 9, 8 и 0.

Аналогичная работа может быть построена и с буквами, сначала печатными, а затем прописными, причем последовательность написания букв определялась составом и формой их элементов. Сначала дети из всех букв выбирали те, которые состоят только из палочек-отрезков, затем из выбранных только те, которые состоят лишь из вертикальных и горизонтальных, затем из них те, которые состоят только из двух элементов, затем из трех, и т. д.

Таким образом, все печатные буквы были разделены на следующие подгруппы:

1) Г и Т.
2) П, Ч, Н.
3) Е, Ё, Ш, Щ, Ц.
4) Х, У, Л, А, Д.
5) К, Ж.
6) И, Й, М.
7) О, С, Э, Ю.
8) Ь, Ъ, Р, Б, В, З, Ф, Я.

Итак, написание букв «так, как пишут взрослые», т. е. прописных, можно было теперь начинать и с элементов, из которых дети могут сконструировать буквы, а при необходимости можно всегда развернуть описанную работу. Правила списывания слов и предложений, данные в прописях, сначала конструируются вместе с детьми в групповой форме работы и служат для самоконтроля.

Написанные цифры — это собранный, точнее, собирательный образ дошкольного опыта ребенка. «Этот опыт, — писал Л. С. Выготский, — представляет материал, из которого создаются построения фантазии». Понятно, что, расширяя опыт ребенка, мы создаем прочные основы для его творческой деятельности. Именно так звучит первый педагогический вывод, к которому пришел Выготский, анализируя связь воображения и творчества, фантазии и реальности. Но в предложенных ребенку цифрах заложен не только его личный опыт, но и чужой. Воображение, как писал Выготский, «направляется чужим опытом, действует как бы по чужой указке, только благодаря этому может получиться тот результат, который получается в настоящем случае, т. е. то, что продукт воображения совпадает с действительностью. В этом случае оно становится средством расширения опыта ребенка и необходимым условием почти всякой умственной деятельности человека».

Действительно, сравнивая написанные цифры, доказывая, почему он считает, что эта цифра красивая, а рядом стоящая — нет, мозг ребенка начинает комбинирующую деятельность, которая основывается на сохранении в мозгу «следов от прежних возбуждений, и вся новизна сводится только к тому, что... мозг комбинирует их в такие сочетания, которые не встречались в его действительном опыте».

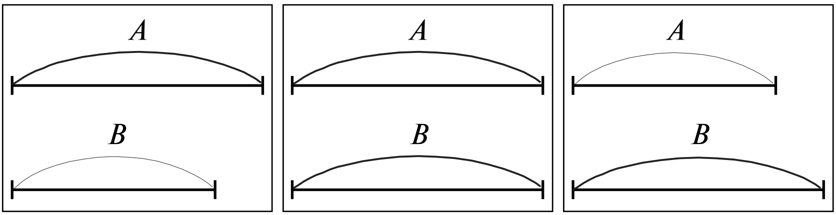
На наших глазах происходит именно то, что Л. С. Выготский называет диссоциацией и ассоциацией воспринятых впечатлений, когда человек, схватив целостность некоторого предмета, сначала как бы рассекает это целое на части, выделяя отдельные черты и оставляя без внимания другие, что лежит в основе абстрактного мышления, в основе образования понятий, а затем вновь объединяет в целое из диссоциированных и измененных элементов: ребенок, сталкиваясь с цифрой 1, сначала расчленяет ее на «носик» и «палочку», затем выделяет опорные точки при ее написании и, убедившись в том, что она у него получается, вновь соединяет эти элементы в единое целое, конструируя при этом — не только образец, но и способ его воспроизведения. Теперь ***конкретно-практическая задача*** — научиться писать цифру 1 — ***превращается в теоретическую учебную задачу — научиться выделять элементы*** (часть целого), ***находить опорные точки и выбирать удобное*** для своей руки ***направление движения*** по этим точкам, и тогда научишься ***писать красиво***. Именно ***эти три действия являются необходимым условием овладения обобщенным способом воспроизведения любого графического знака***, будь то цифра или буква.

Подбор величин по формулам равенства и неравенства. Переход от схемы к формуле и обратно. Свойства равенства и неравенства

Работа над восстановлением величин по схемам и формулам начинает дополнять уроки по обучению детей каллиграфии после 2–3 специальных уроков, которые необходимы для конструирования образцов написания первых 2–3 цифр, а это значит, что ребенок учится выделять ориентиры, которых достаточно для того, чтобы научиться красиво писать.

Основная задача данного этапа работы заключается в том, чтобы помочь ребенку осмыслить способы математического описания отношений между величинами с помощью схемы и формулы, а также восстановления величин, т. е. подбора предметов — носителей величин — по схеме или формуле. Это значит, что рассматриваются задания трех основных типов:

1) Даны предметы. Сравнивая их по тому или иному признаку, дети чертят схему, показывающую отношение между величинами, а затем описывают это отношение в знаковой форме:



$A > B$ или $B < A$ $\quad$ $A = B$ или $B = A$ $\quad$ $A < B$ или $B > A$

Важно, чтобы дети понимали, что буквами A и B могут быть обозначены любые величины: длина (высота, ширина, толщина, глубина, периметр и т. д.), площадь, масса, объем, количество, величина угла, а об отношении между ними можно сообщить словами: «выше — ниже», «шире — уже», «длиннее — короче», «глубже — мельче», «тяжелее — легче», «дороже — дешевле» и т. д. В математике все эти отношения описываются понятиями «больше — меньше». Отношение «равно — неравно» может быть в быту описано словами «столько же», «такие же», «одинаковые», «разные» и другими, употребляя которые ребенок должен понимать, о какой величине идет речь. Так, например, когда говорят: «Купили 6 таких же стульев», имеют в виду не их расцветку или форму, а, как правило, цену, по которой приобрели эти стулья. Или в задаче сказано: «Если сшили *a* таких же платьев», то речь идет опять-таки не о фасоне или расцветке ткани, а о расходе ткани на одно платье, и т. д. К заданиям первого типа относятся **№ 110**, **112**, **116**, **117**, **123**, **124**, **126**, **138**, **142**.

2) Дана схема, описывающая отношение между величинами, нужно подобрать соответствующие величины (т. е. предметы — носители этих величин) и записать формулу. К заданиям второго типа относятся **№ 114**, **119**, **121**, **122**, **128**, **129**, **132**, **136**, **138**.

3) Дана формула, описывающая отношение между величинами, нужно построить схему и подобрать соответствующие величины. К заданиям этого типа относятся **№ 110 (1)**, **111**, **113**, **118**, **120**, **124 (2)**, **125**, **127**, **130**, **131**, **132**, **133**, **134**, **135**, **140**, **141**.

Отбирая материал к уроку, нельзя использовать однотипные упражнения, как это принято в традиционной школе, для закрепления и формирования навыка. В данной системе обучения, одной из задач которой является развитие и формирование способности думать, рассуждать, мыслить, нужно для уроков подбирать задания разного типа из разных блоков, что даст ребенку возможность осмысливать изменение условий, влекущее за собой изменение способа действия, и устанавливать различные связи и отношения как между величинами, включенными в задание, так и между заданиями. Это позволит в дальнейшем осознать принцип, который положен в основу придумывания заданий по типу составления «обратных» задач, когда меняются «ролями» известные и неизвестные величины.

Для выполнения каждого из данных типов заданий хорошо использовать группу из 3—4 детей: один действует с предметами, молча демонстрируя ***способ*** их сравнения, другой описывает результат сравнения с помощью схемы, третий на основании либо схемы, либо увиденного способа сравнения величин обозначает их буквами и записывает формулу (равенства или неравенства), используя знаки «=», «>» и «<», а четвертый выступает контролером, при этом разные группы могут работать с разными величинами.

Обсуждение итогов работы каждой группы может происходить следующим образом: каждая группа называет величину, с которой она работала. Остальные дети по схеме и формуле определяют, какие предметы могла сравнивать группа и какие ошибки при сравнении, при составлении схемы или записи формулы она могла допустить.

После такой проверки можно предложить группам, парам или отдельным детям (по выбору) придумать свои задания на сравнение или восстановление величин по схеме и формуле. Придумав задание, каждый должен выполнить свое задание так, как он хотел бы, чтобы его выполнили другие, а затем организовать «аукцион» заданий, при котором каждый выбирает понравившееся ему (из придуманных детьми) задание.

Предложенные задания можно классифицировать и по другому основанию: большинство из перечисленных заданий позволяет детям познакомиться с основными свойствами равенств и неравенств, однако названий рассматриваемых свойств детям сообщать не нужно. Главное, что дети должны понять, что иногда непосредственного сравнения величин производить не нужно, чтобы узнать, в каком отношении они находятся, т. е. вывод можно сделать, опираясь на результаты сравнения этих величин с другими.

Так, если $A = B$, то $B = A$ (свойство симметричности), т. е. если A сравнили с B, то нет необходимости вновь брать в руки предметы, чтобы сравнивать B и A. Если же $A = B$, а $B = C$, то нет необходимости A и C сравнивать непосредственно, так как A наверняка будет равно C, — это свойство транзитивности равенства. Аналогично можно рассмотреть транзитивность неравенства: если $A > B$, а $B > C$, то $A > C$, и если $A < B$, а $B < C$, то $A < C$.

Тот факт, что буквой может быть обозначена любая величина, дает возможность приступить к использованию дошкольного опыта ребенка, а именно: после составления одной из формул $A > B$ или $A < B$ предлагать детям подбирать вместо букв подходящие числа. Здесь слово «подходящие» относится как ***к самому отношению*** (больше или меньше), так и к ***дошкольному опыту*** ребенка ($2 > 1$, или $275 > 164$, или $2000 > 1000$ и т. д.), что дает возможность каждому ребенку продемонстрировать свою дошкольную подготовку (ведь он так готовился к школе!) и при этом быть успешным при любом объеме дошкольных умений. Тогда дети, умения которых ограничивались счетом в пределах 4–5, так как с ними никто не занимался, получают возможность незаметно расширить круг собственных умений, «подтянуть» их до умений большинства детей — оперировать в пределах 10 и более.

Переход от букв к подходящим числам дает возможность и для обратных действий, при которых дети восстанавливают буквенные формулы с помощью числовых. Этот обратный переход можно задать следующим образом: «Дети в другом классе, — говорите вы, — вместо букв в формуле подобрали подходящие числа. Вот что они записали: $7 < 8$. Как вы думаете, какая была формула?» Дайте возможность обсудить это в группах.

В каждом из предложенных заданий (**№ 110–142**) нужно дать детям возможность осмыслить эти свойства, а это значит, ребенок должен научиться различать, при каких условиях можно сравнить две величины, ***не производя*** реального действия сравнения, т. е. когда нет необходимости брать в руки те предметы, которые нужно сравнивать, а можно определить, в каком отношении находятся величины, опираясь на свойства, описанные формулами. Если ребенок делает вывод только на основе рассуждений (без опоры на схему или конкретные величины), то это рассматривается как самый высокий уровень мышления, если же на основе схемы или тем более с опорой на конкретные величины, то это, безусловно, более низкий уровень.

По аналогии с предложенными заданиями дети (конечно, не все) должны и сами придумывать задания, в которых для вывода о том, одинаковы или неодинаковы рассматриваемые величины, сравнивать их непосредственно не нужно (**задания** типа **№ 126**, **131–135**, **140–142**).

В дополнение к указанным заданиям необходимо предложить выполнить задания с «ловушками»:

1) **№ 133**, **142 книга 1** (в группах, парах или поодиночке — по выбору самого ребенка), а затем предложить детям придумать свое задание с «ловушками»;

2) поставить двое весов: на одни весы положить одинаковые по массе предметы и на другие тоже. Записать либо $M_1 = M_2$ и $M_3 = M_4$, либо $A = B$ и $C = D$.

Возникает вопрос: можно ли, не взвешивая самих предметов, сравнить массы A и D (а следовательно, и B и D, A и C, B и C)? Если ребенок понимает свойство транзитивности, то он должен утверждать, что такого сравнения без взвешивания сделать нельзя, массы A и D могут оказаться как одинаковыми, так и разными.

Если ребенок обращает внимание только на знаки равенства, а связи между сравниваемыми величинами не видит (по условию второе равенство не связано с первым), то его вывод будет неверным, т. е. он будет утверждать, что $A = D$.

Тогда и возникает вопрос: как не ошибиться? Для этого следует сделать две записи и сравнить их.

I	II
$A = B$, а $B = D$ Сравнить A и D	$A = B$, а $C = D$ Сравнить A и D

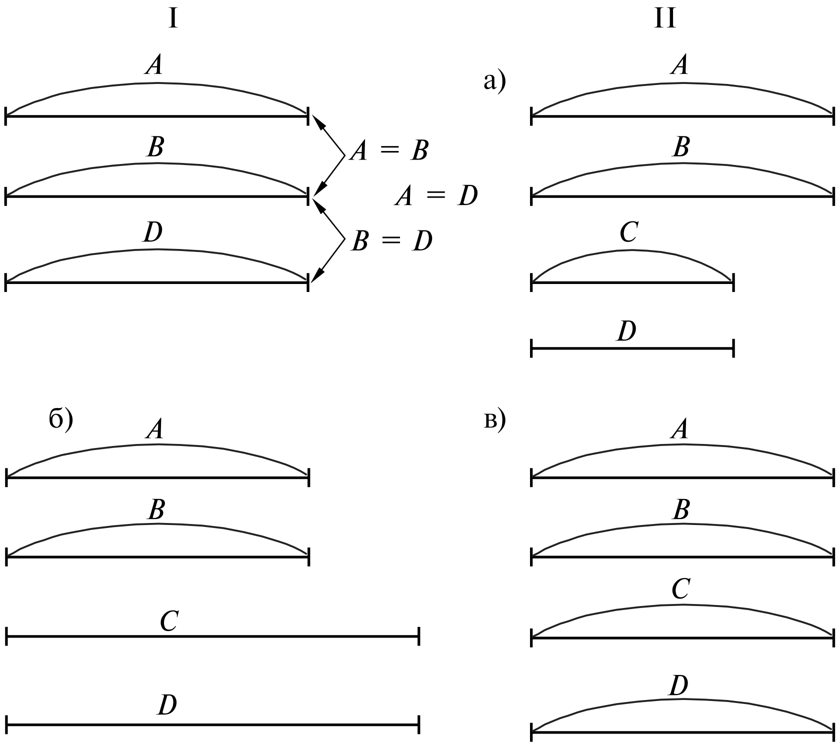
Первая позволяет без непосредственного сравнения сделать вывод: $A = D$, а вторая нет: может оказаться $A > D$, $A < D$, $A = D$, все будет зависеть именно от отношения между A и C.

Схема даст возможность обосновать свою точку зрения, а затем вновь вернуться к равенствам, по которым можно определить, во-первых, сколько величин участвует в сравнении и, во-вторых, как связаны эти величины между собой. Могут появиться, например, следующие записи и схемы:

I. $A = B, \quad B = D$

$A = B$

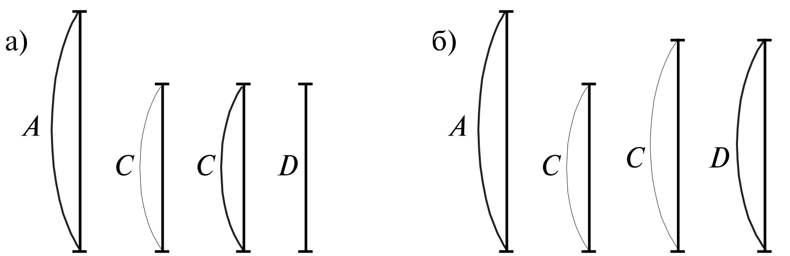
II. $A = B, \quad C = D$



Особое внимание следует уделить **заданиям № 131**, **132**, **134**, **135**, **140, 141**.

Рассмотрим одно из этих заданий, например **№ 131**.

По условию $A > C$ и $C = D$. По формулам, описывающим результат сравнения ***двух пар величин***, некоторые дети на схеме изображают соответственно ***4 величины*** так:



Здесь величина *C* изображается дважды.

Здесь величину *C* изображают ***разными*** по длине отрезками.

На самом деле, прежде чем изображать отрезками величины, нужно посмотреть, о скольких величинах идет речь (их столько, сколько ***различных*** букв используется в формуле). Ведь одинаковыми буквами обозначают одинаковые величины. Здесь участвовали в сравнении 3 величины. Какую из них изображать первой — не имеет значения, и это тоже необходимо обсуждать с детьми с помощью вопросов: «Как научить других по формулам чертить схемы?»

Ответ на этот вопрос и потребует осмысления того, сколько величин сравнивали, как это определить, с какой величины начать строить схему.

Однако ***важно помнить***, что обсуждение этих вопросов (как и ранее) следует начинать ***не до того, как дети собираются*** чертить схемы, а ***после того***, когда схемы к формулам готовы.

Традиционно же все делается наоборот: сначала дети говорят, обсуждают, как выполнять задание, а потом его делают, а в этой системе обучения ***нужно сначала*** сделать (осуществить практическое действие), а затем обсудить, как ты это сделал и как научить других делать то, что умеешь делать сам. Повторю, это коренное и ***принципиальное отличие*** нашего подхода к обучению.

Итогом работы над данной темой является составление справочника ошибок, в который как раз и включаются все возможные ошибки, которые были или могут быть (!) у детей. Фиксируя их в справочнике любым удобным для детей способом, необходимо каждый раз возвращаться к вопросам о происхождении этих ошибок, а также к способам их обнаружения и исправления, что является необходимым этапом дальнейшего предупреждения таких ошибок. Не нужно бояться делать различные пометки-значки в тетрадях в процессе научения. Так, в **задании № 131** между равенством и неравенством есть связь, и ее нужно показать, например, так:

$$\underline{A} > \underline{\underline{C}}, \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\underline{D}}}$$

Одной чертой, двумя и тремя черточками отмечены разные величины: их три.

Или так:

$$A > C,\ C = D.$$

Черточки, дужки-стрелочки — это значки, которые служат для самоконтроля в процессе выполнения задания. Когда дети научатся выполнять такие задания, овладев понятием, эти значки «отпадут», но могут появиться вновь как ***след*** от самопроверки по окончании работы.

Часть II.
КАК СКЛАДЫВАТЬ И ВЫЧИТАТЬ ВЕЛИЧИНЫ

Для введения операции сложения — вычитания над величинами и описания этих действий с помощью знаков «плюс» или «минус» рассматриваются две задачи: сначала задача уравнивания двух величин и затем задача восстановления целого по его частям и части по известным целому и другой части (одной или нескольким).

Работа над введением этих взаимообратных операций строится так же, как и ранее: от практических действий к графической модели, а от нее к буквенно-знаковой и наоборот.

Это значит, что сначала необходимо создать такую учебную ситуацию, которая требовала бы от ребенка конкретно-практического действия, приводящего к поиску способа выполнения такого действия. Необходимость описания этого способа действия для воспроизведения его в другом месте или в другое время потребует от ребенка: 1) конструирования графической модели, т. е. изображения с помощью отрезков суммы (или разности); 2) записи буквенного выражения, характеризующего величину, т. е. выражения, включающего знаки «плюс» или «минус».

Способность ребенка описывать операции сложения и вычитания величин даст возможность открыть для себя действия и способы выполнения этих действий сначала над однозначными числами, а затем и над любыми другими видами чисел. Например, умея складывать (вычитать) способом присчитывания (отсчитывания) по 1, по 2, по 3 и т. д., ребенок сталкивается с ситуацией, когда этот способ перестает срабатывать в явном виде (например, при рассмотрении сложения (вычитания) многозначных чисел). Так, при нахождении суммы 6372 и 4 к числу 6372 можно присчитать по единице число 4 и тем самым сложить эти числа, а при сложении 6372 и 4756 присчитывать по единице бессмысленно хотя бы потому, что очень долго. Это потребует от ребенка ***поиска*** нового способа действия — сложения «в столбик», т. е. ***поразрядного*** сложения.

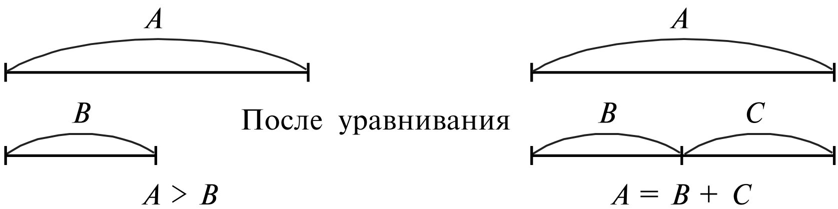
Как его открыть? Как сделать так, чтобы у самих детей родилась мысль именно о поразрядности выполнения действия? Вот тут-то и придет на помощь умение ребенка представлять графически[1] как многозначные числа, так и их сумму, ведь число является характеристикой величины, а изображать величины мы уже умеем. Итак, для выполнения действий с числами можно выполнить эти действия с соответствующими величинами, а затем описать новую величину с помощью числа, что и позволит впоследствии искать и найти способ действия над числами без обращения к величинам.

Своеобразие текстовых задач, предлагаемых на первых уроках введения уравнивания величин и действий сложения и вычитания величин, состоит в том, что данные в этих задачах представлены не числом, а с помощью реальных предметов. Учитель показывает, сколько воды в одной и другой банке. Именно такой подход, когда сначала исходные данные и способ решения задачи могут быть осмыслены через предметное практическое действие, осуществляемое самим ребенком, дает возможность в последующем при решении традиционных текстовых задач представлять ребенку в реальности то, о чем сообщается в задаче. При традиционном обучении ребенок за текстовой задачей не видит реальности, у него нет образа, и он не может ее решить.

Глава 1.
КАК УРАВНИВАТЬ ВЕЛИЧИНЫ (ПЕРЕХОД ОТ НЕРАВЕНСТВА К РАВЕНСТВУ И НАОБОРОТ)

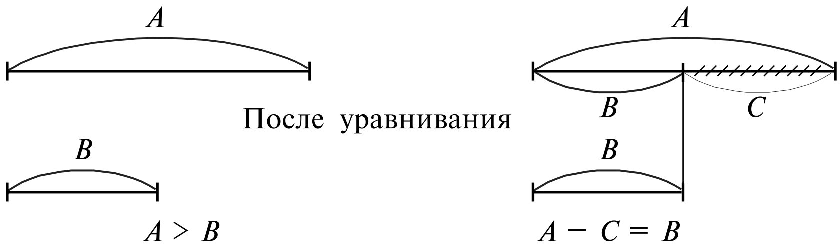
Основная задача этой главы в том, чтобы дети смогли найти три способа уравнивания:

1) путем увеличения одной (меньшей) величины до ее равенства с другой (большей), т. е. с помощью сложения:

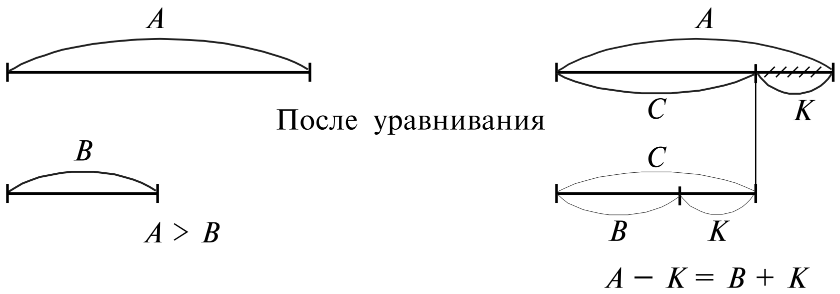


[1] Графическая модель, т. е. схема, изображается либо с помощью отрезков, либо с помощью плоских фигур, имеющих форму целого прямоугольника или его части, — об изображении многозначных чисел с помощью различных геометрических фигур мы поговорим немного позже.

2) путем уменьшения одной (большей) до ее равенства с другой (меньшей), т. е. с помощью вычитания:



3) путем уменьшения одной и увеличения другой на одну и ту же величину:



Третий способ предполагает свободное владение первыми двумя.

Итак, два первых способа уравнивания величин являются основными, их и будем рассматривать.

Постановку задачи, требующей уравнивания величин, начнем со сказочного сюжета о Незнайке.

Прочитайте или перескажите ту часть сказки, в которой рассказывается о том, как Винтик и Шпунтик изобрели автомобиль, который работал на газированной воде с сиропом (текст приведен в учебнике).

Результатом обсуждения возможных причин остановки машины станет постановка задачи, требующей уравнивания величин.

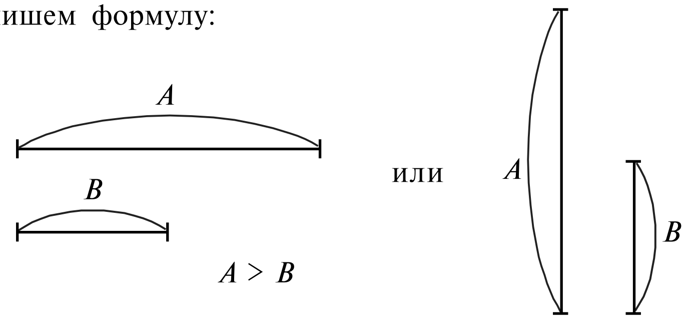
Нужно в бак долить столько сиропа, сколько его не хватает, чтобы бак стал полным.

Налейте воды (подкрашенной!) в две одинаковые банки так, чтобы одна из них была полная (но не до самого края, чтобы можно было при необходимости долить немного воды), а вторая заполнена примерно на 1/3. Объясните, показывая на полную и на неполную банку с водой, сколько сиропа должно быть и сколько сиропа осталось.

Условие работы «двигателя» — полная банка (бак). Если дети при обсуждении задачи уравнивания величин (здесь речь идет об объеме сиропа в банке, или, как говорят дети, о количестве сиропа) будут утверждать, что необязательно иметь полную банку (по аналогии с полным баком бензина для автомобилей), а достаточно только иметь всегда больше какого-то минимума в баке, объясните им, что речь идет не об обычном автомобиле, а о сказочном, который работал только при полном баке, в который добавлялся сироп синхронно с его расходом (слово «синхронно» употребляйте одновременно с другими синонимами. Главное, чтобы детям было понятно, о чем идет речь).

Теперь вместе с детьми переведите эту задачу на язык математики:

Есть две неравные величины (объемы воды в банках). Изобразим их, обозначив буквами (например, *A* и *B*), и запишем формулу:



$A > B$

В сюжетной задаче о баке нам нужно узнать, сколько сиропа нужно добавить в неполную банку, чтобы машина снова могла ехать. Эта же проблема на языке математики выглядит так: нужно уравнять величины так, чтобы меньшая величина *B* стала равна большей величине *A*.

Как это можно сделать?

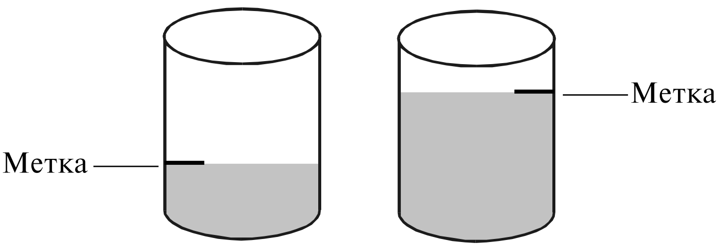
Сначала дети выполняют практическое действие, пытаясь в неполную банку долить воды до того же уровня, что и в первой банке, т. е. долить воды столько, сколько ее не хватало до полной банки. Проще говоря, проблема сначала выглядит так: что нужно сделать, чтобы в неполной банке воды стало столько же, сколько в полной банке? Ответ не заставит себя ждать, и дети тут же скажут, что воду нужно долить. Вы непременно выполняете практическое действие, доливая воды значительно меньше, чем нужно (или, наоборот, больше).

Если дети скажут, что этого мало, то долейте заметно больше, чем нужно (или отлейте больше, чем нужно). Именно тогда дети и смогут осмыслить то, что речь идет об определенном количестве — ни больше ни меньше.

Возникает новая задача: какое количество воды нужно долить, чтобы стало поровну?

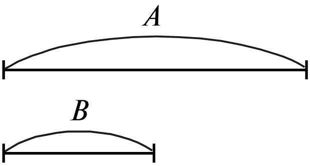
Первоначально дети будут пытаться показать прямо на банке эту разность при условии, что вы отметили уровень воды меньшего объема с помощью какой-либо метки. Иначе, как только вы дольете воды и уравняете объемы, опираясь на уровень воды (и это правильно, ведь банки-то одинаковые по всем признакам), вы не сможете отлить столько воды, сколько до этого налили. Другими словами, вы не сможете восстановить первоначальный объем (количество) воды без поставленной заранее метки. К этой мысли без труда придут и сами дети, если вы сначала без всяких меток на банках выполните их указание и дольете воды в одну из них. Невозможность восстановить прежний объем есть основание для рождения у детей мысли о метках на обеих банках.

Исходная практическая ситуация выглядит так:

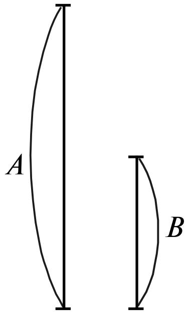


(Банки рисовать не нужно, они должны быть настоящие, рисовать нужно отрезки.)

Теперь вернемся к решению задачи: сколько же воды нужно долить в одну банку, чтобы ее (воды) стало столько же, сколько во второй? Поскольку дети уже умеют изображать величины, то предложите им сначала изобразить данные величины (объемы воды или количество воды) с помощью схемы, обозначив их буквами:

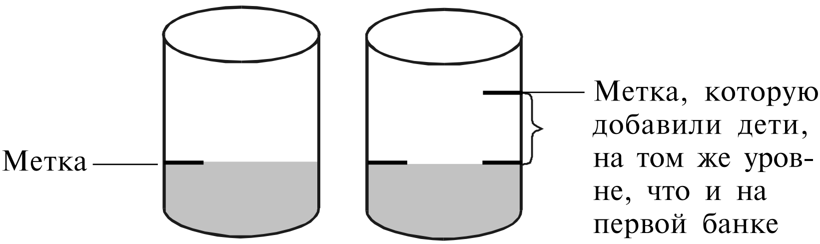


или

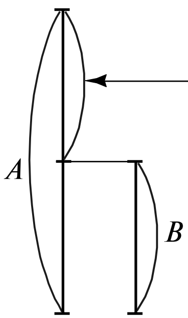


Затем запишите формулы: $A > B$ или $B < A$.

Теперь ответ на вопрос (сколько же нужно долить воды?) может быть показан на банках и на схеме: 1) на банках: от метки на одной банке до метки на другой или с помощью двух меток на одной банке, если вторая метка прикреплена детьми при сравнении:



На схеме эту же разность (разницу) дети могут показать так:



это тот объем воды, который нужно долить в банку с меньшим объемом (*B*).

Помните! ***Не*** банка *B*, а объем воды в банке — это *B*, банки-то одинаковые!

Показать то, ***сколько*** нужно долить воды, — это то же самое, что узнать, ***на сколько*** одна величина больше другой или меньше другой, — $A > B$ (на C). Чтобы узнать эту новую величину C, нужно от большей величины отнять меньшую, т. е. $C = A - B$.

Значит, если к величине B добавить разницу, а «настоящие математики» говорят «разность», — величину C, равную $A - B$, то получится величина, равная A.

$$A = B + C \ (1) \text{ или } A = B + (\overset{C}{\overbrace{A - B}}) \ (2)$$

Найти эту разницу, т. е. разность между величинами, и записать формулу (2) дети смогут лишь ***после*** введения знака «минус», который появится в задаче уравнивания через уменьшение способом № 2, описанным во вступлении ко второй части **(задание № 142 книга 2).** В этом задании задача уравнивания двух величин (двух масс) может быть решена двумя способами: увеличением или уменьшением. Речь в задании идет об уравнивании двух масс, а значит, на весах должно лежать что-нибудь сыпучее (крупа, соль и т. д.), чтобы можно было произвести ***практическое*** действие уравнивания: отсыпать часть соли или досыпать крупы. При описании обоих способов действий с помощью формул ребенку потребуется знак для обозначения действия уменьшения, по аналогии с необходимостью знака для обозначения действия увеличения. Этими знаками в математике являются, как известно, знаки «минус» (−) и «плюс» (+), необходимость введения последнего была рассмотрена во вводной задаче.

На графической модели, т. е. на схеме, дети, как правило, вычеркивают часть величины, которую нужно отнять, чтобы получить из большей величины величину, равную меньшей.

Все три способа даны под «ключом» в учебнике (для любых величин A, B и C).

В самом же **задании № 142 книга 2** речь идет о массе: $M_1 > M_2$. В учебнике под «ключом» даны следующие обозначения: вместо $M_1 - B$, вместо $M_2 - A$, а вместо $M_3 - C$.

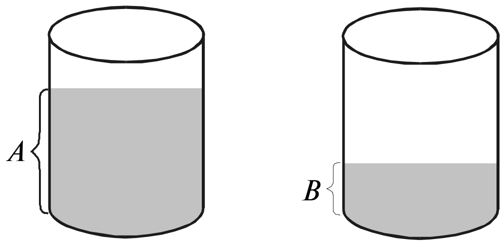
Задание № 143 можно предложить детям выполнить индивидуально, а затем обсудить результат в паре.

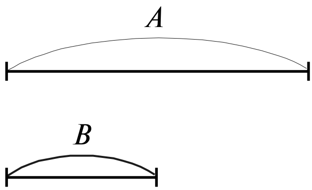
Задание № 144 можно рассматривать как задание с «ловушкой».

Сначала дети уравнивают воду в банках (помните, что дети должны работать с ***настоящими*** баночками и ***подкрашенной*** водой, а не по картинкам в учебнике или на доске), которые вы ставите на каждую парту для работы в паре или в группе из 4 человек. Дети ***сначала*** обсуждают способ уравнивания, а ***затем*** распределяют между собой ***обязанности***: двое переливают, один чертит схему, еще один по схеме пишет формулу. Если составить группу из 5 детей, то пятый может выполнять роль контролера, проверяющего, описывает ли схема способ действия и соответствует ли формула схеме.

Одна из групп демонстрирует результаты своей работы перед классом в следующей последовательности: сначала дети, которые выполняли практическое действие, показывают классу банки с водой (каждый держит по банке), а тот, кто отвечает за схему, чертит отрезки, соответствующие объемам.

Например:





A — объем (или количество) воды в первой банке.

B — объем воды во второй банке.

Обратите внимание!

Иногда дети говорят, что A — это первая банка, а B — вторая банка или A — это вода в первой банке, а B — вода во второй банке. Это может значить, что дети не различают предмет и свойство этого предмета, т. е. не могут мысленно отделить величину от предмета. Тогда следует задать вопросы, которые, возможно, помогут ребенку осмыслить ошибочность собственных суждений.

Вы говорите, к примеру: «Ты говоришь: A — это первая банка, а B — это вторая, но банки-то одинаковые, значит, нужно нарисовать одинаковые отрезки, а ты нарисовал разные. Почему? Я не понимаю». Тогда, как правило, ребенок начинает уточнять и говорит, что он не банки рисовал, а воду в банках, т. е. A и B относятся не к банкам, а к воде в них. Тогда вы опять в недоумении: «А что, разве в этих банках разная вода? Она же одинаковая!»

Для убедительности возьмите две пустые одинаковые банки и на глазах у детей налейте в них из крана или из какой-нибудь емкости воду: в одну больше, в другую меньше. «Видели? — говорите вы. — Я же одинаковую воду наливала, значит, все равно нужно нарисовать одинаковые отрезки».

Пусть дети сначала обсудят между собой вашу точку зрения, а затем объяснят вам, что речь идет о количестве воды, или об объеме, который занимает вода в банке. В первой банке воды больше, чем во второй, значит, A — это количество (объем) воды в первой банке, а B — во второй.

Кстати, дети могут предложить и другие буквы вместо A и B. Например, V_1 и V_2, что тоже верно.

Теперь, когда величины A и B изображены отрезками, дети могут записать формулой отношение между ними: $A > B$ ($V_1 > V_2$) или $B < A$ ($V_2 < V_1$).

Далее одни дети демонстрируют свой способ уравнивания, а другие — схему и формулу.

Как только выполнено уравнивание величин (объемов воды), предложите детям оценить решение Незнайки, которое описано в учебнике. ***Читать*** его по учебнику и ***рассматривать*** рисунки ***не надо***. Вы просто показываете детям, как решал эту же задачу Незнайка, переливая на глазах у детей воду из одной банки в другую банку (с большей площадью основания или, наоборот, с меньшей).

Главное, чтобы уровни воды оказались одинаковыми (см. рисунок в учебнике).

От имени Незнайки вы утверждаете, что уравняли эти величины, показывая, что так уровни воды в банках теперь одинаковые (слово «уровень» говорить не нужно, важно показать на него).

Дети же при этом должны показать (проиллюстрировать) Незнайкин способ уравнивания с помощью знаков «плюс» (+) или «минус» (−), чего они сделать не смогут, так как воду только ***переливали*** из одной банки в другую, не доливая и не выливая. Объем воды не изменился (на языке математики, это было тождественное преобразование $A \equiv A$, где $\equiv$ — это знак тождества).

Возможно, дети вспомнят, как они переворачивали одну из одинаковых бутылок с одинаковым количеством воды или меняли форму одного из двух пластилиновых шариков, превращая его в лепешку или колбаску (опыты Пиаже), — это **задание № 49** в первой книге. В обоих случаях ***величина***, т. е. количество воды в первом случае и масса пластилина во втором, ***не изменялась***. ***Предмет менял форму***, а не величину, независимо от того, были, к примеру, шарики по массе одинаковыми или разными. Меняется форма, а ***отношение*** между величинами, характеризующими эти предметы, ***не изменяется.***

Чтобы изменить отношение между величинами, т. е. из неравенства сделать равенство (**книга 2, задания № 142**, **143**, **145**, **146**, **147**, **148**, **154**) или, наоборот, из равенства сделать неравенство (**задание № 151**, но таких заданий мало, так как они являются обратными, восстанавливающими неравные величины из равных, поэтому их желательно дополнить), нужно будет одну из двух величин либо увеличить (+), либо уменьшить (−), а может быть, уменьшить одну и увеличить другую, причем на сколько уменьшают одну, на ***столько же*** увеличивают другую.

Очень важно, чтобы дети понимали: когда они от неравенства переходят к равенству, то добавлять или отнимать нужно не сколько угодно, а ***определенное*** количество, соответствующее ***разности*** этих величин. Если $A > B$, то $A = B + C$ или $B = A - C$, где $C = A - B$.

Так, при выполнении **задания № 146** можно предложить два стакана разной формы.

Тогда возникает вопрос о том, каким будет удобнее поливать.

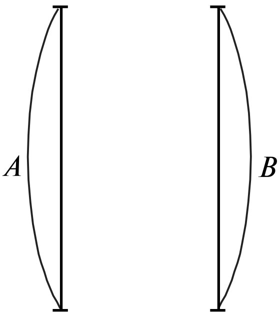
Кстати, дети могут предложить поискать посуду, в которую входит только нужное количество воды. Этот вариант можно также обсудить с детьми, но и при этом варианте ***задача должна быть сформулирована*** так: как налить в другой сосуд столько же воды, сколько в первом? Эту задачу дети уже фактически решали еще в первом полугодии, а значит, если некоторые дети в этот период не до конца осмыслили этот способ уравнивания величин путем подбора величины, равной данной, то теперь, спустя некоторое время, когда ребенок уже более «продвинутый» в овладении математикой, он вновь возвращается к осмыслению этого материала. Только теперь задача подбора величины, равной данной, станет средством для решения другой задачи — на нахождение разности двух величин. Ведь, отлив нужное количество раствора, мы и получаем разность между данной величиной (объемом воды, который был) и величиной, которую «забирали» для полива (объем раствора, который необходим цветку). Эту разность можно описать формулой $A - B = C$ и вновь сравнить с величиной B.

Если же разность $A - B > B$, то этим раствором можно будет полить еще раз, после чего раствор может закончиться, а может остаться, и тогда процедуру сравнения можно повторить. Если разность $A - B$ окажется меньше B ($A - B < B$), то остатка не хватит на следующий полив. Этот остаток рассказывает о том, на сколько раствора A было больше, чем B: $A > B$ (на C), т. е. $A - B = C$, но тогда и $A - C = B$.

Рассматривая далее вопросы, связанные с взаимозаменяемостью величин (см. **задания № 158**, **159**) и введением скобок (**№ 198**), дети могут без труда заменить C разностью A и B, т. е. сделать запись: $A = B + C$ или $A = B + (\underbrace{A - B}_{C})$, а также заменить запись $B = A - C$ записью $B = A - (\underbrace{A - B}_{C})$.

Однако требовать от детей такой формы записи не стоит. Интересно посмотреть, смогут ли, но не более того.

В отличие от предыдущего случая, при переходе от равенства $A = B$ к неравенству можно добавлять или отнимать любую величину. Т. е. две равные величины A и B нужно превратить в неравные. Такие превращения можно рассматривать как «волшебные», которые могут происходить с величинами:



$A = B$

Для превращения равенства в неравенство можно либо увеличить или уменьшить одну из них, либо изменять обе, но так, чтобы они стали разными.

Описывать любые изменения величин в каждом из этих случаев дети должны с помощью буквенных выражений с использованием знаков «плюс» и «минус».

При выполнении **задания № 148** обратите внимание на ошибку: на схеме ($A - K = B + K$) часть K на первом отрезке и на втором — разная, а ведь при уравнивании ***сколько*** забираешь от одной величины, ***столько*** же добавляешь к другой. Значит, K — это одна и та же величина, и изображать ее нужно одинаковыми отрезками.

Задания № 150 и **151** нужно выполнять практически, т. е. сначала вырезать фигуры, затем сравнить по величине, изобразить отношение между ними схемой и записать формулу. Затем выполнить необходимое преобразование (в задании № 150 из неравных по площади прямоугольников сделать равные, а в № 151 из равных по величине углов сделать, наоборот, неравные), отобразить его на схеме и описать с помощью формулы способы уравнивания или способы перехода от равенства к неравенству.

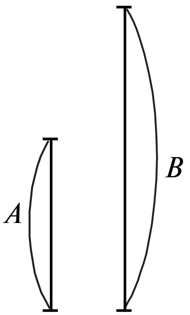
Оба эти задания можно предложить для работы в паре. После парной работы обсудить способы действий фронтально.

Задания № 152, **154 и 156** нужно выполнить индивидуально, но глядя на выставленные перед всем классом весы. Опишем способ работы над одним из них — **№ 152**.

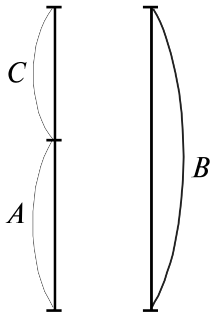
Обсуждать ответы на поставленные вопросы можно только после самостоятельного выполнения.

Ответ на вопрос: «Как уравнять массы на весах?» — обсудить в группах, чтобы каждая группа, нарисовав схему уравнивания и записав формулу для другой группы, смогла восстановить по ним ***способ практического действия*** и ***выполнить его***.

Например, глядя на первые весы, дети записали такие схемы и формулы:



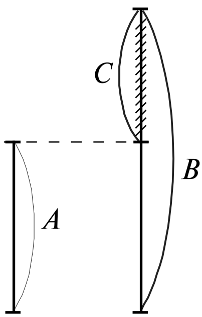
$A < B$



$A + C = B$

Значит, по этой записи ясно, что нужно досыпать соли так, чтобы массы стали равны.

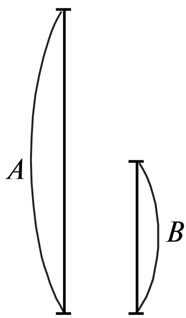
Если же схема и формула будут такими:



$A = B - C$,

значит, нужно отлить воду из стакана.

Кстати, в этом задании вы можете предложить и свой способ изображения на схеме отношений между массами: $A > B$, утверждая, что ваше решение верное, ведь мешочек с солью (вы можете взять другие предметы) выше, чем стакан с водой, значит, первый отрезок должен быть больше второго. Такой способ изображения вы должны были уже обсуждать с детьми тогда, когда на схе-



ме учились сравнивать массы разных предметов и описывать результат графически. Однако вряд ли все дети почти полгода назад хорошо осмыслили способ изображения. Значит, если они вернутся еще раз к этому вопросу, вы даете возможность слабому ребенку осмыслить знакомый материал спустя промежуток времени (пусть и небольшой), который наверняка не прошел даром для его развития. Это-то как раз и означает, что нет необходимости при работе над построением схем при сравнении по массе (а это частный случай общего способа действия) отрабатывать навык так, как это делается традиционно (путем многократного выполнения однотипных упражнений).

Задание № 153 потребует от детей перехода от схемы к практическому действию и к формуле. При выполнении этого задания дети могут распределить функции между собой внутри группы: один, например, будет переливать воду, другой — записывать формулы.

После выполнения задания предложите детям обсудить следующие вопросы:

1) как научить других по схеме узнавать, нужно доливать воду или отливать, что на языке математики означает увеличить или уменьшить величину;
2) как, глядя на схему, описать способ уравнивания с помощью формулы.

Предлагая детям подобрать по схеме подходящие числа, вы можете получить такие ответы: 5 = 3 + 2 или 7 = 4 + 3 и т. п. Смысл задания не столько в том, чтобы дети подобрали числа, как записано в условии, а в том, чтобы дети, во-первых, могли соотнести подобранное число с соответствующей буквой, во-вторых, они смогли задаться вопросами: «А как я это делаю? Как подбирать подходящие числа? Какое из трех чисел нужно подбирать первым? В каком порядке нужно (удобнее) подбирать числа?» и т. д.

Сказка «Два жадных медвежонка» (**задание № 155**) может быть прочитана в классе, но не для того, чтобы удовлетворить потребность данного возраста в игре, в сказочных ситуациях. Она нужна прежде всего для того, чтобы увидеть, насколько дети видят способы уравнивания величин в нематематическом содержании (о чем уже написано в первой части).

Этой сказкой фактически заканчивается непосредственная работа над задачей уравнивания величин, поскольку сами способы уравнивания уже сконструированы и мы надеемся на то, что ребенок сможет перейти от практического действия уравнивания к схеме и обратно от схемы к практическому уравниванию. Теперь уже настало время учебного действия моделирования.

Работа с графическими и знаковыми моделями, т. е. со схемой и формулой, является основным звеном в цепи решения учебной задачи. **Задания № 157–171** ориентированы как на осмысление способов перехода от схемы к формуле и обратно, так и на формирование у ребенка первоначального представления о тождественных преобразованиях, о способах подстановки, замены, которые будут изучаться в старших классах. Основу для такого изучения можно и нужно заложить еще в начальной школе, и неважно, что при этом ребенок начинает действовать с этими понятиями в неявном виде.

Прошлый опыт работы со школьниками, абитуриентами дал возможность увидеть те проблемы в изучении математики, которые являлись для многих учащихся камнем преткновения.

Отношение неравенства однородных величин ($A < B$) и операция сложения ($A + B = C$) обладают следующими свойствами:

1) Каковы бы ни были A и B, имеет место одно и только одно из трех отношений: или $A = B$, или $A < B$, или $B < A$.
2) Если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$ (транзитивность отношений «меньше», «больше»).
3) Для любых двух величин A и B существует однозначно определенная величина $C = A + B$.
4) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).
5) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность сложения).
6) $A + B > A$ (монотонность сложения).
7) Если $A > B$, то существует одна и только одна величина C, для которой $B + C = A$ (возможность вычитания).

Изучение свойств отношений, о которых шла речь, открывает перед ребенком новые возможности.

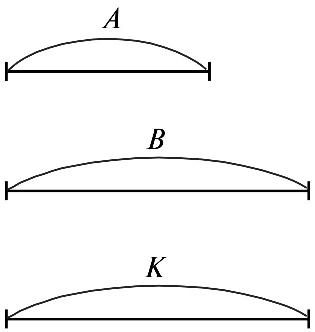
Например, если дети (в **задании № 158**) установили отношение неравенства между массами M и N (с помощью рисунка, на котором изображены качели — подобие рычажных весов) и записали, что $M > N$, а затем выяснили, что $N = A$, то неизбежен вывод, что $M > A$ (свойство транзитивности).

Как вы помните, работа с буквенно-знаковыми моделями, т. е. с формулами, строилась всегда с опорой на схему, поэтому тот или иной вывод, к которому приходят дети и записывают его в виде формулы, нуждается в «доказательности». Это значит, что, записав $M > A$ нашем задании, дети должны проиллюстрировать (доказать) свой вывод построением соответствующей схемы.

Рассмотрим, как выглядела бы схема, если известно: $M > N$, а $N = A$. Ясно, что речь идет о трех величинах M, N и A и отношениях между ними. Опираясь на такую схему, дети без труда делают вывод: $M > A$.

Если же к этому выводу дети пришли без опоры на схему и тем более без конкретных величин, то это показатель наиболее высокого уровня усвоения материала. Однако такому выводу, безусловно, предшествует построение схемы.

Например, если известно, что $A < B$, а $B = K$, и нужно сравнить A и K, то дети сначала должны построить схему. Эта схема должна выглядеть у детей так:

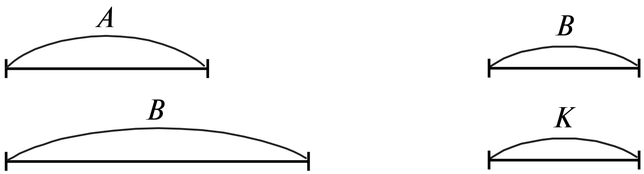


$A < B$

$B = K$

На основании этой схемы дети делают вывод: $A < K$.

Однако у детей схема может оказаться такой:



$A < B$ и $B = K$

На основании этой схемы дети делают вывод: $A > K$.

Думаем, что вам очевидны ошибки, которые допускают дети и о которых уже было написано в 8-й главе. Однако дело не только в том, чтобы научиться обнаруживать такую ошибку (это относится как к ребенку, так и ко взрослому). Важно понять ее «происхождение», что позволит сконструировать способ (алгоритм) выполнения задания, требующий перехода от формулы к схеме, а от нее снова к формуле. Свернутость перехода от формулы к формуле возможна лишь после осмысленного вывода, обоснование которого в любой момент может быть представлено развернуто.

Давайте же вместе еще раз порассуждаем над возможной причиной неверного перехода от формулы к схеме. Итак, нам даны две формулы: $A < B$ и $B = K$, каждая формула имеет две части — левую и правую. Две части у двух формул ($2 + 2 = 4$) ассоциируются у ребенка — как нам кажется — с четырьмя величинами A и B, B и K. То, что величина B в обеих формулах — это одна и та же величина, дети уже не замечают. Они строят схему формально. Значит, чтобы избежать таких ошибок, нужно не просто десять раз объяснить это ребенку, как часто поступают взрослые, не просто порассуждать с ним о том, как нужно правильно чертить схему, а предложить детям до всякого совместного рассуждения об ошибках, допущенных ими, о которых они еще не знают, обсудить, ***какие ошибки*** могли допустить дети из другого класса, когда выполняли такое же задание. Очень важно при этом попытаться вскрыть причины таких ошибок. Кстати, ошибки могут быть связаны и с элементарной невнимательностью. Так, по словам П. Я. Гальперина, специально изучавшего внимание, всякая идеальная свернутая, автоматизированная форма действия контроля есть внимание, но не всякое внимание есть контроль.

Описанный П. Я. Гальпериным метод поэтапного формирования внимания дал возможность использовать его не только в качестве общей модели образования конкретных форм психической деятельности[1], но и как теоретическую основу частных методик, описываемых в данной книге и других работах. В частности, речь идет о методике формирования действия контроля за способом решения той или иной учебной задачи, а значит, и целого класса частных задач. Именно учебные действия контроля и оценки дают возможность говорить о принципиально ином подходе к формированию навыков, в том числе и вычислительных.

Пооперационный контроль за любым способом получения результата позволяет учителю говорить о таком индивидуальном подходе к ребенку, при котором ребенок совместно с учителем и другими детьми сможет увидеть те операции, которые нуждаются в осмыслении, совершенствовании, отработать «западающий шаг» осознанно. Именно эти «шаги» влияют на правильность выполнения действия и его скорость, связанную как со способом нахождения результата, так и со скоростью выполнения отдельных «шагов», последовательно приводящих к тому или иному результату.

Думаю, что нет необходимости описывать выполнение всех последующих заданий, так как способы получения результатов описаны в «ключах», а форма организации над каждым **заданием от № 159 до № 177** может быть самостоятельно выбрана самим учителем или учителем при участии детей, поскольку она напрямую связана как с содержанием изучаемого материала, так и с особенностями каждого конкретного сообщества детей, называемого классом.

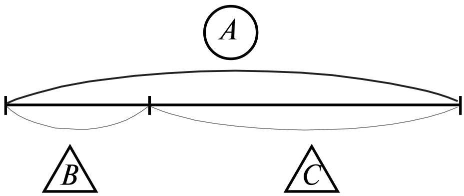
---

[1] См. комментарии к книге П. Я. Гальперина «Психология как объективная наука» из серии «Психологи Отечества» (М., 1998).

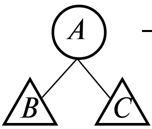
Глава 2.
КАК ИЗ ЧАСТЕЙ СОСТАВЛЯТЬ ЦЕЛОЕ

Введение понятия об отношении частей и целого обусловлено, прежде всего, необходимостью обучения ребенка решению текстовых задач (прямых и косвенных) алгебраическим способом, т. е. на основе составления уравнений. Для этого ребенок должен научиться изображать это отношение с помощью схем, опираясь на которые он сможет описать это особое отношение величин, не зависящее от их конкретного числового значения, в виде буквенных формул. Сформировав это понятие, дети приобретают умение выражать целое через части и части через целое:

○ = △ + △ и ○ − △ = △, где кружком обозначено целое, а треугольником — части. Графической моделью этого отношения могут служить различные геометрические фигуры (круг, прямоугольник, треугольник и др.), но наиболее удобным и простым способом изображения этого отношения является отрезок:



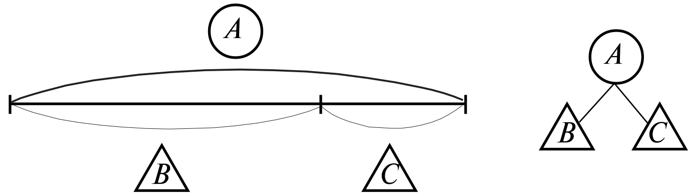
Рассматривается и буквенно-графическая модель:



— всем хорошо знакомые «лучики», используемые традиционно для изображения состава числа.

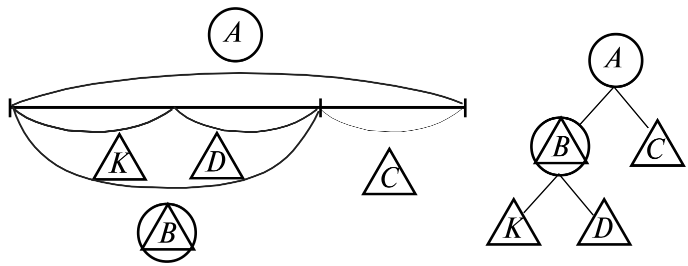
Введение знаков для обозначения целого и частей дает ребенку возможность понять относительность этих понятий. Во-первых, дети должны понять, что пока над величиной не производишь никакого действия — нельзя установить, является она (величина) частью или целым, т. е. одна и та же величина может быть частью по отношению к одной величине и она же является целым по отношению к другой.

Например:



$$A = B + C$$

Теперь величину B разобьем еще на 2 части K и D, по отношению к которым B — целое.



$$A = \underbrace{(K + D)}_{B} + C$$

Величина B по отношению к A является частью, а по отношению к величинам K и D — целым. Наложение значков ○ и △ друг на друга позволяет лучше увидеть относительность этого понятия.

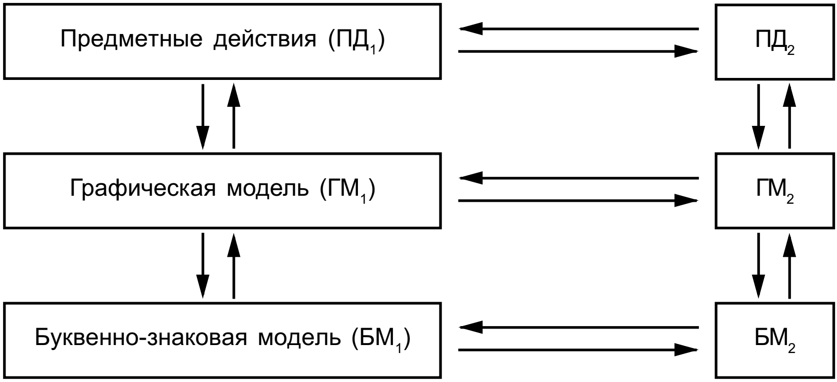
Итак, понятия «целое» и «часть» — это ***относительные*** понятия; основное свойство этого отношения: целое не может быть меньше части, или часть не может быть больше целого. Сравнивать части между собой не имеет смысла, так как любая часть может оказаться большей, меньшей или равной другой части. Главное, что целое равно сумме этих частей, а часть равна разности между целым и остальными частями.

Умение изображать графически и описывать с помощью формул отношение частей и целого даст возможность решать целый класс текстовых задач с буквенными данными путем составления уравнений. Решив таким образом задачу, ребенок вместо букв подбирает подходящие числа и тем самым осознает, какова ***область допустимых значений букв*** не только по отношению к ***выполнимости*** арифметического действия, но и ***по отношению к реальности*** сюжета и ***к собственному опыту оперирования*** с числом. Такой подход позволяет учителю обнаружить «слабые» места у детей и незамедлительно приступить к коррекции.

Если же задача предложена с числовыми данными, то, прежде чем ее решать, необходимо «восстановить», какой она могла быть до того, как вместо букв дети из другого класса (или автор учебника) подобрали (придумали), как им кажется, подходящие числа. Это значит, что, прежде чем приступить к решению задачи, нужно установить, говоря языком математики, входят ли числовые данные в область допустимых значений по отношению к реальности сюжета. Другими словами, дети должны оценить, соответствуют ли данные числа смыслу задачи, ее сюжету, а затем заменить числа буквами и, решив задачу, подставить вместо букв данные числа. Восстановление исходной (буквенной) формы задания текстовой задачи ставит перед детьми новую проблему: заменять одинаковые числа одинаковыми буквами или разными? Ответ на такой вопрос с неизбежностью потребует более глубокого осмысления текста задачи и тех понятий, которые составляют ее смысл.

Итак, рассмотрим подробнее ***систему учебных ситуаций***, приводящих детей к выделению отношения целого и частей по той же модели, что и выделение понятия величины и отношений между ними, а именно начнем с предметных действий с реальными величинами и, изобразив отношение реальных величин графически и с помощью буквенно-графической модели, перейдем к их описанию с помощью буквенных формул.

Такой подход к изучению понятий дает возможность конструировать новые типы заданий, в которых ребенку предлагаются обратные переходы от графических моделей к предметным действиям, от формулы к графической модели, от одной графической модели к другой (и наоборот), а значит, и от одной формулы к другой, что можно рассматривать, по сути, как тождественное преобразование.



Для введения понятия об отношении целого и частей вы вновь возвращаетесь к сказке о Незнайке, в которой есть глава о том, как на Незнайку во время гуляния налетел майский жук и ударил его по затылку. Незнайка кубарем покатился на землю, а жук в ту же минуту улетел и скрылся. Когда Незнайка вскочил и оглянулся по сторонам, то кругом никого не было, и он подумал, что, наверно, от солнца оторвался кусок и ударил его по голове. Незнайка пошел домой, и всем, кто по дороге встречался, он об этом рассказывал.

Прочитав или пересказав этот сюжет, вы показываете детям куски (части) «солнца» и предлагаете по частям восстановить и записать способ восстановления, обозначив каждую часть круга (площади) буквами, например A и B, а целое (площадь круга) — буквой C:

$$A + B = C$$

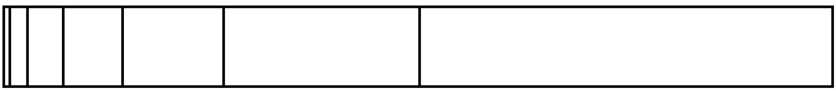
Теперь, когда дети описали способ с помощью формулы, можно предложить вместо «расколовшегося солнца» взять полоски, показать с их помощью, как из частей составили целое (**задание № 178**), и изобразить способ с помощью схемы (отрезками).

Демонстрацию способа получения из частей целого нужно сопровождать вопросами: чем является вот эта полосочка (показываете ее часть) — частью или целым? При этом дети должны показать, частью какого целого эта полоска является. Разрезав взятую в руки часть, вы вновь разрезаете ее на части, а тогда возникает вопрос: если это части, то что есть целое по отношению к этим частям? Дети, приложив рядом (встык) обе части, и должны показать это целое, которое, в свою очередь, является частью по отношению к другому целому, которое теперь фактически состоит из трех частей.

Если на данном этапе введения понятия об отношении частей и целого детям будет трудно осмыслить относительность категорий «части» и «целое», то тогда лучше после восстановления целого по частям сначала перейти к способам изображения целого, состоящего из нескольких частей (**задания № 178 и 179**).

Для того чтобы проверить понимание детьми отношения между частями и целым, а также относительности этих понятий, можно положить перед детьми несколько полосок разной длины (от очень маленьких до очень больших по длине ниток или других предметов) и предложить из них сначала выбрать те, которые можно назвать частями.

Думаем, что дети скажут, что все они могут быть частями целого, показывая, как образуется целое:



Длину каждой полоски нужно выделить фломастером, чтобы не перепутать ее с шириной, причем длина самой длинной полоски пусть будет равна сумме длин остальных полосок (детям об этом сообщать не нужно).

Ваш «недоуменный», «провокационный» вопрос к ребенку может быть таким: «Неужели вот эту самую большую полоску можно назвать частью?» Затем, по аналогии с этой ситуацией, предложите из этих же полосок выбрать те, которые можно назвать целыми по отношению к каким-либо частям. Вот тут-то и может кто-либо из детей показать, что самая большая полоска могла получиться из этих маленьких. Каждую из частей нужно отметить на длинной полоске и предложить детям показать с помощью только одной этой полоски-части, из которых она могла состоять. Например:

из четырех частей;

из двух частей;

из трех частей.

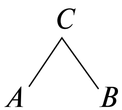
Чтобы показать каждую часть, из которых можно составить целое, их лучше отрезать.

Тогда уместен следующий вопрос: «На сколько частей можно разделить (разрезать) целое?» Естественно, что дети ответят: «На сколько угодно: на 10, на 100, на 200 и т. д.».

Вот тут-то и спросить их: «Правильно ли я вас поняла, любая величина может быть названа целым, если ее можно разделить на части? Неужели и эта самая маленькая полосочка (ниточка) может быть названа целым? Почему? Докажите».

Кроме описания отношений между величинами с помощью формулы, нужно предложить детям придумать другой способ, при котором было бы четко видно, что величина C состоит из двух частей — A и B.

Дайте возможность детям пофантазировать. Объедините их в группы, а затем, если адекватная форма не будет найдена, покажите, как придумали «дети из другого класса»:



Выполнение **задания № 180** предполагает составление целого из частей, а затем восстановление частей по известному целому. Для решения обратной задачи на восстановление нужно сначала сделать метки на баночках, в которые наливают «лекарство» для Незнайки. Так как утром, днем и вечером нужно принимать разное количество, то каждую из баночек и нужно специально подготовить для приема лекарства. В четвертой баночке налито лекарство, предназначенное для следующего дня, которое и нужно сравнить по объему с необходимым для трех приемов. Для ответа на вопрос: «Как узнать, больше ли лекарства ему придется выпить на следующий день?» — детям придется слить лекарство из первых трех баночек вместе, т. е. получить целое из частей, и сравнить это целое с объемом воды в четвертой банке (она должна быть полной).

Отношение между объемами может быть разное: «больше», «меньше» или «равно» (в учебнике под «ключом» представлено равенство объемов).

Вопросы, которые вы задаете детям, могут быть следующими: «Может ли это лекарство (вода) быть частью?» (показываете при этом полную банку), «Является ли этот объем лекарства целым?» (показываете только лекарство, предназначенное для приема за завтраком).

Понятно, что целое здесь все равно является частью от необходимого для выздоровления лекарства, а часть можно разделить на части, т. е. на «глотки», а значит, она является одновременно и целым.

Предложите детям с помощью схемы и модели с «лучиками» описать способ сравнения объема лекарства, предназначенного для первого дня (его нужно обозначить какой-нибудь буквой, например, *K*), и лекарства, предназначенного для второго дня (*D*).

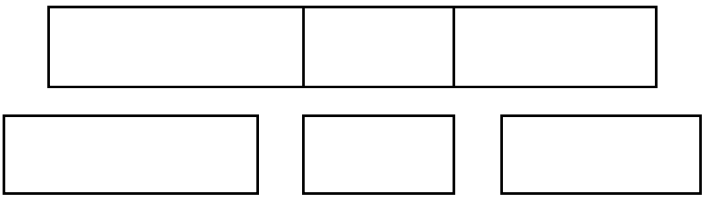
При выполнении **задания № 181**, прежде чем предложить детям придумать свои обозначения для частей и целого, можно организовать следующую «игру».

У каждого ребенка на парте 3—4 полоски. Вы предлагаете сделать с этими полосками то же самое, что вы будете делать с водой. Сами же показываете воду, заранее налитую в сосуд, и предлагаете с помощью полоски показать объем этой воды. Разные дети могут взять в руки разные полоски. Кто же из них выбрал правильную полоску?

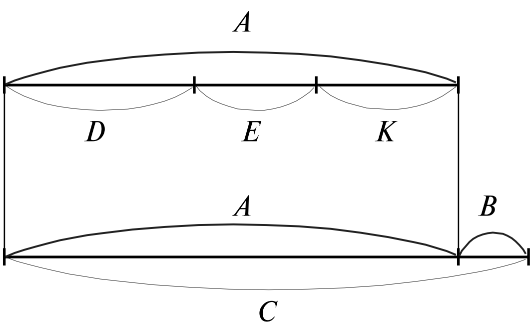
Пусть дети обсудят это. Понятно, что все показали правильно: можно было взять любую полоску. Теперь спросите, что дети видят — часть или целое. Если дети скажут, что целое, то долейте совсем немного воды, чтобы дети увидели, что они видели только часть, и предложите с помощью полосок описать ваши действия:

Если же дети скажут, что видят часть (так как сосуд был не полный), то разлейте эту воду в три сосуда и выясните, что же вы им показывали по отношению к этим трем объемам: часть или целое.

Эти действия предложите также воспроизвести (описать, рассказать о них) с помощью полосок. Тогда полоску, рассказывающую об объеме воды в исходном сосуде, надо разрезать (разорвать) на три части (любой длины).

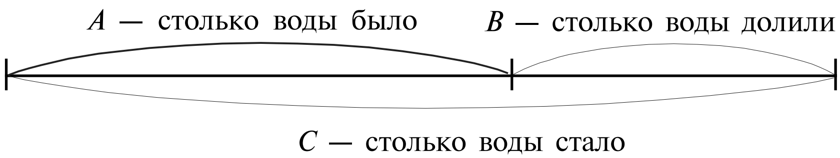


Теперь можно начертить на доске схемы:



Выясните, какая из этих схем соответствует тем действиям с водой, которые дети видели.

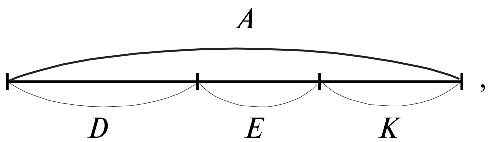
Если необходимо, то повторите сначала первое действие и выясните, какой буквой на схеме обозначен объем воды, который был в сосуде: на нашей схеме — буквой *A*. Объем воды, которую вы доливали, обозначили буквой *B*, а всего воды стало *C* — такой буквой мы обозначили целое.



A и *B* — это части по отношению к *C*.

C — это целое по отношению к *A* и *B*.

Затем рассмотрите другой случай, при котором воду из сосуда разлили на три части. К этому действию из данных схем подходит первая:

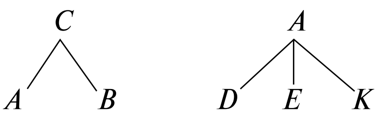


где *A* — целое по отношению к *D*, *E* и *K*, а *D*, *E*, *K* — части по отношению к *A*.

Таким образом, величина *A* по отношению к *D*, *C* и *K* является целым, а по отношению к *C* — частью.

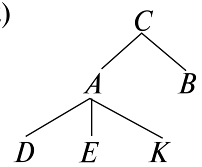
Предложите детям показать на каждой схеме величину *A* и узнайте, чем она является — частью или целым. Сделайте вывод о том, что одна и та же величина может быть частью, а может быть целым. Пока с ней никаких действий не производишь, нельзя сказать, она часть или целое.

По схемам предложите детям составить модель с «лучиками» — эти модели могут выглядеть так:

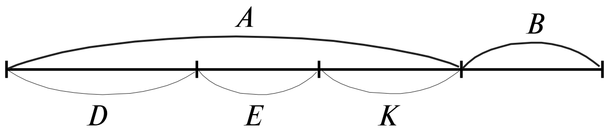
1)


(Т. е. к каждой схеме дети могут составить свою.)

2)



Это обобщенная модель, описывающая оба действия над объемами воды и соответствующая обобщенной схеме:



Теперь, когда есть схемы и есть модели с «лучиками», пусть дети опишут свои действия формулами.

$C = A + B$ или $A + B = C$;

$A = D + E + K$ или $D + E + K = A$;

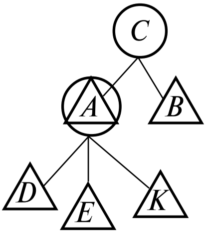
$D + E + K + B = C$.

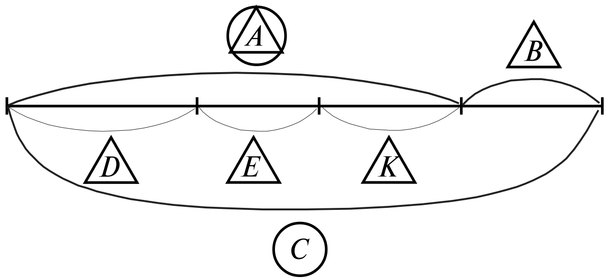
После описанных рассуждений и обсуждений предложите детям проверить самих себя и выполнить **задание № 181**.

Читать его для детей не нужно. Лучше изобразите на доске эти схемы и предложите детям сначала составить запись с «лучиками» и написать формулы, введя недостающие буквы. После проверки того, как выполнили это задание разные дети, предложите им на своих схемах показать каким-либо способом, где части, а где целое.

Обсудив разные способы обозначения, сообщите те, которые придумали «дети из другого класса», а именно — ***кружочком*** обводить ***целое***, а ***треугольником — части***.

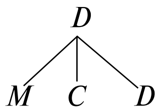
Введение таких обозначений позволит вернуться ко всем заданиям, которые выполнялись на данном уроке, и проставить соответствующие значки:





Задание № 182 предназначено для того, чтобы увидеть, умеет ли ребенок по записи с «лучиками» определять, где части, а где целое.

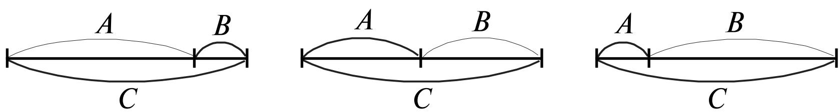
Различное расположение «лучиков» как раз и позволит обнаружить, на что ориентируется ребенок: на расположение (целое — наверху, а части — внизу) или на смысл (та величина, ***от*** которой идут «лучики», — целое, а те, ***к*** которым направлены «лучики», — части). Кроме этого, одна из моделей содержит ошибку, ведь целое не может быть равно одной из трех частей (если, конечно, M и C не равны нулю).



Задание № 183 можно предложить сделать дома. При его выполнении может возникнуть проблема: как построить на бумаге в другом месте величину, равную трем данным. Другими словами, как построить отрезок, равный данному, ведь в руки нарисованные отрезки (B, C и D) не возьмешь. Обсудите с детьми разные способы: с помощью ниток, полосок, листочка бумаги, циркуля или измерителя и т. д.

Задание № 184 дает возможность обнаружить, может ли ребенок по формуле восстановить схему, описывающую отношение целого и частей между величинами, определить по схеме и по формуле, где речь идет о целом, а где о частях (в формуле части соединены знаком «+»), увидеть связь между целым и частями.

При изображении схемы к первой формуле может оказаться три варианта (если нет, то дополните недостающими от имени «детей из другого класса»):



$A > B$ $\qquad$ $A = B$ $\qquad$ $A < B$

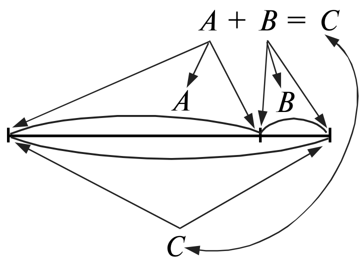
Формулы писать заранее не нужно, пусть дети сначала обнаружат эти различия.

«Какой же из вариантов правильный?» — с таким вопросом вы можете обратиться к детям, пусть они обсудят 1—2 минуты.

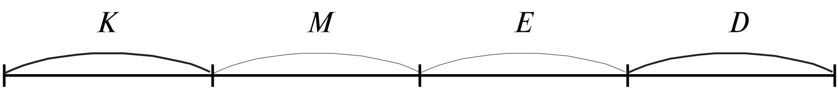
Вывод, к которому они должны прийти, состоит в том, что изображать можно как угодно, ведь в формуле лишь сказано, что целое состоит из ***двух*** частей, а какая из них больше, меньше или они равны — неизвестно, однозначного ответа нет. Но вот то, что целое больше части, дети смогут осмыслить неоднократно.

Обратитесь к детям с вопросами: «Почему в первом и четвертом случае вы нарисовали две части, а во втором и третьем — три? Как вы узнаете, сколько частей нужно рисовать? Куда вы смотрите? Где в формуле записаны части, а где целое? Научите меня».

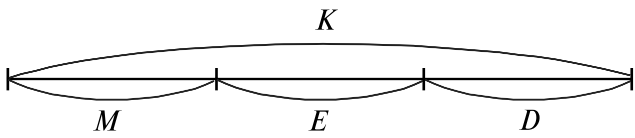
Пусть дети выходят к доске парами: один будет показывать величину в формуле, а другой — соответствующий отрезок на схеме (показывать при этом начало и конец отрезка двумя руками одновременно).



К следующей формуле можно попробовать сделать наоборот: сначала показывать отрезок на схеме (части или целое), а затем — соответствующую величину в формуле. Когда дети начертят третью схему, поинтересуйтесь, правильно ли выполнил это задание «ребенок из другого класса», если он рассуждал так: в этой формуле ($K = M + E + D$) ***четыре*** буквы, значит, надо чертить четыре части:

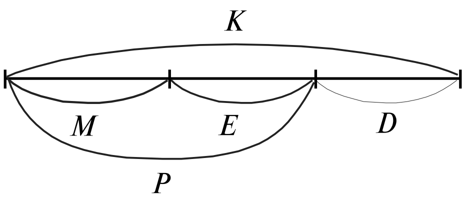


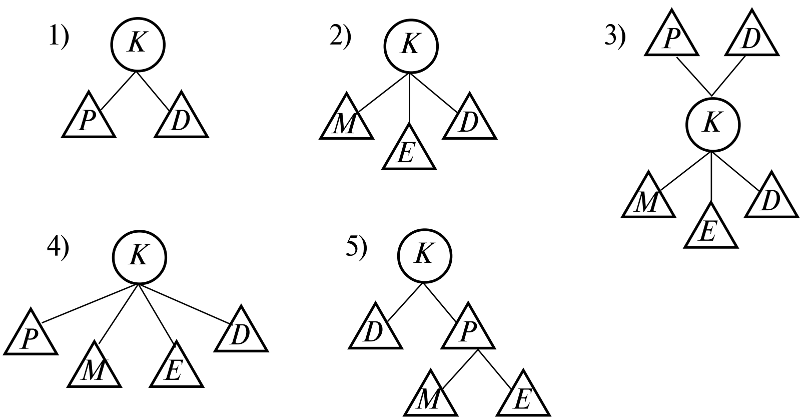
После обсуждения предложите от имени «детей из другого класса» несколько способов описания схемы, построенной по формуле $K = M + E + D$.



Обратите внимание на то, что отрезки, соответствующие величинам M, E и D, могут быть любой длины, — это уже дети обсуждали.

«Дети в другом классе» дополнили схему еще одной частью и сделали разные модели с «лучиками»:





Какие из данных моделей с «лучиками» записаны правильно?

Ответ: только 1-я, 2-я и 5-я. Тщательно обсудите все «за» и «против».

Организуйте дискуссию между детьми. Составьте все возможные формулы по этой схеме:

$K = M + E + D$ — такая была дана, но дети могут предложить «другую», как им кажется, формулу: $M + E + D = K$.

Обсудите такое предложение, сделайте вывод: формула та же, записана по-другому.

Другие формулы:

$$K = P + D$$

$$\underbrace{M + E}_{P} + D = P + D$$

или

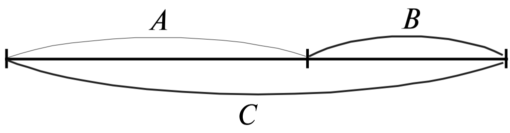
$$D + P = K,\ K = D + \underbrace{M + E}_{P}$$

Если дети предложат переставить местами части, как в последних формулах по сравнению с первыми, то закрепите вывод о том, что это те же формулы, но записаны также по-другому: в них части поменяли местами, но ни сами части, ни целое при этом не изменились (переместительное свойство суммы величин).

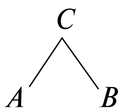
Для того чтобы дети осознали, что если есть части, т. е. и целое, а существование целого — это и есть наличие частей, т. е. целое не существует без частей, можно предложить детям следующую «игру».

На доске есть схема, которую дети нарисовали к первой формуле:

$A + B = C$



Эти записи можно дополнить моделью с «лучиками»:

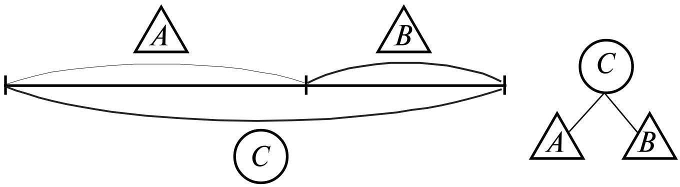


Заранее поставьте на свой стол один пустой сосуд, в который можно было бы слить воду из двух других сосудов с водой, заготовленных также заранее и стоящих рядом с пустым сосудом.

Внимание детей привлекать к ним не нужно.

Дети на схеме и в формуле покажут части и целое:

$A + B = C$



Спросите: «Сколько величин вы видите на схеме?» Без сомнения, дети ответят: «Три». Предложите соответственно трем детям выйти к доске, образовав группу, договориться, кто какую из трех величин будет называть и показывать двумя руками (начало и конец соответствующего отрезка). Таким образом, один ребенок покажет величину A (т. е. отрезок, которым изображена величина A), другой — величину B, а третий — величину C. Поинтересуйтесь у остальных детей, правильно ли эта группа показала каждую из ***трех*** величин. Наверняка класс поддержит их. Тогда обратите внимание детей на свой стол и сообщите, что эта схема показывает, как делили на части воду, и предложите каждому из детей, «отвечающих» за части и целое, взять свой объем воды.

Хохоту будет! Ведь если двое детей, «отвечающих» за части, возьмут соответственно по сосуду с водой (частями), то тот, кто должен взять целое, останется с пустыми руками. Если же тот, кто должен показать целое, подойдет к столу, сольет обе части в пустой сосуд и покажет целое, то тогда другие двое детей останутся с пустыми руками. Обсудите сложившуюся ситуацию и придите к выводу о том, что **целое не существует без частей, оно состоит из них**.

Этот вывод понадобится детям при выполнении следующего **задания № 185**, в котором им предлагается вместо букв (обозначающих величины, в том числе и количество) придумать подходящие числа.

Читать по учебнику задание не нужно. Начертите схему на доске и устно сформулируйте задание.

Сделав детям такое предложение, спросите у них: «Как вы думаете, какие числа можно придумывать вместо букв?» Наверняка найдется хоть один ребенок, который ответит: «Любые». Вот за это слово и нужно ухватиться и предложить придумать числа в пределах 10 вместо D, а затем вместо B. Как только дети назовут два любых числа вместо B и D, вы скажите, что придумали число вместо A, и назовите любое число, меньшее одного из двух, названных детьми. Они, конечно, будут возражать, но и вы тоже аргументируйте свой ответ: «Вы же любые числа придумывали, ведь так? Вот и я придумала любое, как вы меня учили». Попытайтесь уточнить, чем же оно их не устраивает: целое должно быть больше части, должен прозвучать именно такой вывод, за который вы опять «зацепитесь» и предложите детям другое число, которое больше обеих частей, но не равно их сумме. Например, если дети называли числа 3 и 5, вы «придумайте» 10 и утверждайте, что выполнили условие: целое больше частей ($10 > 3$, $10 > 5$). Результатом совместного обсуждения станет вывод о том, что числа, придуманные вместо B и D, могут быть действительно любыми, а вот A — ***целое***, должно быть больше каждой из частей и ***равно*** их ***сумме***, т. е. $A > B$, $A > D$ и $A = B + D$.

Теперь предложите детям придумать свои варианты. Начните с придумывания числа вместо A и затем вновь предложите свои числа вместо B и D, «забыв» о том, что часть должна быть меньше целого. Дети вас тут же поправят, повторив ***вывод*** об отношении между частями и целым. Тогда, сохраняя это отношение, назовите такие части, которые удовлетворяли бы одному условию: часть меньше целого — выполняли бы другое: целое должно быть равно сумме частей.

Лишь после этого дети парами, в группе или индивидуально придумывают подходящие, с их точки зрения, числа, а затем обсуждают те тройки чисел, которые предлагаются в задании, и отвечают на поставленные вопросы, которые вы им зададите в устной форме.

При работе над **заданием № 186** дети могут внутри класса (по группам) выбрать для выполнения одно из первых трех заданий (фигуры должны быть нарисованы на доске) и сопоставить способы их выполнения. Не забудьте после обсуждения предложить детям придумать свое такое же задание (т. е. свои фигуры), а затем научить вас, а дома родителей (на продленке — воспитателя) придумывать и выполнять такие задания.

В качестве домашнего задания предложите вылепить из пластилина такие же фигуры (тела), как на 4-м, 5-м и 6-м рисунке, т. е. прямоугольный параллелепипед (призму) или куб, пирамиду, шар. Обязательно покажите детям такие геометрические тела (образцы их есть в любой школе в кабинете математики).

Когда на следующий урок дети принесут нужные фигуры, займитесь «волшебными» превращениями: сначала превратите одну из фигур (любую) в целое, разделив ее на ***любые*** две части K и M, а затем, взяв в руки другую фигуру, превратите ее в часть, добавив кусочек пластилина, например от предыдущей фигуры.

С третьей же фигурой пусть каждый сам выполнит «волшебные» превращения и покажет соседу. Сможет ли сосед догадаться, какое же превращение он сделал? Проиграйте такие «угадывания» со всеми детьми.

Задание № 188 позволяет вновь вернуться к перестановке слагаемых величин (частей целого) и попробовать сформулировать вывод — переместительный закон сложения.

Первую часть **задания № 189** выполняете в классе: на доске нарисуйте несколько треугольников и предложите детям придумать, как превратить треугольник в целое так, чтобы $B = C + D$, если B — целое, это и есть сам треугольник.

Дети предложат свои способы разбиения, каждый раз показывая и части, и целое. Если среди детских вариантов не будет таких, как в задании, то сообщите, что «дети в другом классе» придумали ***другие*** способы разбиения треугольника на части.

Пусть ваши дети еще (в группах или в паре) поразмышляют относительно тех способов, которые уже есть, и тех, которые они еще готовы предложить.

Затем можно показать какие-либо из тех, которых еще не было. Главное, чтобы дети не только придумали разные способы разбиения на части, но и могли доказать, что их способ правильный.

Для этого дети могут предложить вырезать из бумаги треугольники, провести линию, разбивающую треугольник, как им кажется, на две части *B* и *D*, а затем разрезать треугольник по этой линии.

Если действительно получается две части, значит, правильно разбили. Эту же операцию многие дети смогут сделать мысленно, сопровождая свое доказательство словами: «Если этот треугольник разрезать, то получится две части: вот одна, а вот вторая».

Домой задать этот же номер, чтобы дети смогли восстановить в памяти те способы разбиения, которые рассматривали в классе.

Задания № 190—193 — это те частные задачи, которые предстоит решить детям для осмысления отношения частей и целого.

Если при их выполнении некоторым детям окажется трудно ***мысленно*** выполнять преобразование целого в части и составление из частей целого, то фигуры, о которых идет речь, нужно вырезать и дать возможность поработать с ними руками, т. е. вернуться к предметно-практическим действиям, а тогда от них перейти к схемам и формулам.

Для выполнения **заданий № 193** и **195** используйте различные усеченные пирамиды, призмы, конусы и другие ***геометрические*** тела, которые вы найдете в кабинете математики. С объемными телами нужно ***непременно*** поработать руками. Никакие рисунки здесь не помогут.

С помощью рисунков в учебнике дети смогут восстановить в памяти все, что происходило в классе, подобрав дома похожие предметы или изготовив аналогичные из пластилина или конструкторов.

Задание № 194 представляет интерес как математический рассказ, прочитав который предложите детям, которые захотят, написать или устно сочинить свой рассказ (рассказы) от имени частей или от имени целого об их отношениях и превращениях величин то в часть, то в целое.

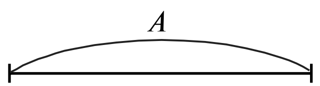
Задания № 196 и **197** дадут вам возможность понять, кто из детей видит отношение целого и частей, а кто нет. Описание того, как **задание № 196** выполняли Ксюша и Леня, дано для того, чтобы вы смогли увидеть, есть ли в вашем классе дети, которые могут так же выполнить задание.

Выполнение **задания № 197** подводит итог всему предыдущему, показывая, кто из детей может переходить от схемы к формуле, а кто нет (помните, что сравнивать части между собой не имеет смысла, т. е. формулы типа $A = B$ или $A > B$ не учитываются, так как отношения между частями не определены).

Все предыдущие задания показывали связь целого с его частями, позволяя определять целое по его частям, записывая отношение с помощью сложения.

Перед выполнением **задания № 196** необходимо вернуться к описанию с помощью формулы того практического действия, которое вы будете производить над какой-либо величиной, например над объемом воды. Для этого налейте в любой сосуд воды и предложите детям взять в руки полоску, которая могла сообщить о данном объеме (эта полоска может быть выбрана любой длины).

Предложите детям обозначить этот объем какой-либо буквой и записать на доске и в тетради, сопровождая запись отрезком:

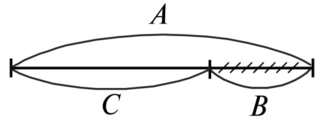


Теперь задайте вопрос: «Целое это или часть?» Неизвестно, так как с величиной пока ничего не делали.

«А что можно сделать?» — спрашиваете вы.

Можно добавить воды, а можно отлить. Тогда на глазах у детей вы отливаете часть воды и просите показать то же самое действие на полоске, на отрезке и описать это действие с помощью формулы. Пусть дети, если необходимо, посоветуются друг с другом.

Результатом такого обсуждения может стать появление следующей схемы и формулы:



$$A - B = C$$

Знак «минус» показывает способ преобразования A в целое по отношению к частям B и C.

Предложите детям показать на схеме и в формуле, где части по отношению к целому, а где целое по отношению к этим частям (значками △ и ○).

$$A - B = C$$

«Какими еще формулами можно сообщить о том, что *A* — это целое, а *B* и *C* — это части?» — спрашиваете вы.

Ответ детей может выглядеть так:

$A - B = C$, или $B + C = A$, или $A = C + B$

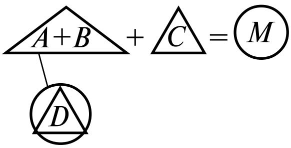
Обсудите все варианты.

Важно, чтобы дети на основе одной схемы научились составлять равенство как с действием сложения, так и с действием вычитания.

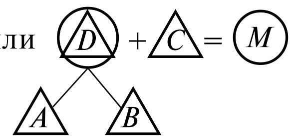
Теперь вновь вернитесь к **заданию № 197** и предложите дополнить те формулы, которые уже были составлены с действием сложения, формулами с действием вычитания.

Формулы, которые могли быть:

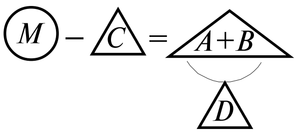
$$A + B + C = M; \quad D + C = M; \quad D = A + B$$



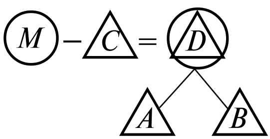
или



Формулы, которые можно дописать[1]:



или



— такой вид тоже может быть;

[1] У детей кружки и треугольники появятся позже, после написания формул.

$M - A = B + C$; $M - B = A + C$;

$M - D = C$ и другие.

Возможно, что при желании детей записать формулу, показывающую: если из M взять A плюс B, т. е. D:

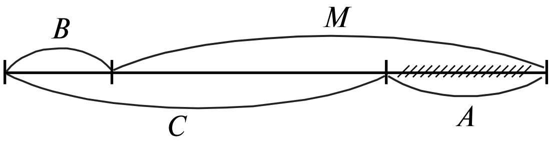
$$(M - \underbrace{A + B}_{D} = C),$$

у них возникает потребность ввести специальный значок — дужка снизу $\underbrace{A + B}$ или какой-либо другой значок для обозначения суммы ($A + B = D$) как одной величины D. Тогда пусть ставят тот знак, который придумают сами. Возможно, они сумму обведут кружком: $A + B$, так как $A + B$ — это целое D по отношению к частям A и B, а может быть, они сумму $A + B$ обведут одним большим треугольником: $A + B$, так как $A + B$ является частью по отношению к M.

Тогда-то и появятся на одной и той же величине два значка ○ и △:

$M - A + B = C$ или $M - \underbrace{A + B}_{D} = C$

Главное, дети должны понимать, что оставить запись $M - A + B = C$ нельзя, так как эта запись означает, что от величины M отняли величину A, а затем добавили величину B и получили C, что на схеме должно выглядеть так:



, но это не соответствует выполненным действиям и данной схеме, по которой составляли формулу.

Если же у детей при выполнении задания не возникает такой проблемы с описанием способа, при котором от величины M отняли величину D, состоящую из частей A и B, и получили величину C, то нет необходимости этот способ рассматривать.

Следующее, **198-е задание** намеренно включено для рассмотрения такого способа действия, при котором у детей возникает необходимость в использовании специального значка. Этим значком и являются скобки, позволяющие описывать способ действия.

Итак, **задание № 198** предназначено для ***введения скобок*** при описании практических действий с помощью формулы.

Задание в учебнике подробно описано, поэтому нет необходимости в дополнительных комментариях, кроме напоминания о том, что не вы, на глазах у детей, выполняете практическое действие (отрезаете «ножки» стола разными способами), описывая с помощью схемы и формулы свой способ действия, а сами дети.

Задание № 199 позволит вам увидеть, воспользуются ли дети скобками при решении задачи.

Задание № 200 предназначено для введения понятия о ***нулевой величине***, полученной в результате вычитания из целого частей, его составляющих.

Сказка Г. Х. Андерсена «Новый наряд короля» в **задании № 201** фактически завершает выполнение специальных заданий, связанных с изучением свойств отношения целого и частей, что теперь позволит перейти к способам построения и решения уравнений и приступить к систематическому решению текстовых задач.

С помощью заданий в разделе «Проверь себя!» вы сможете составить сначала проверочную работу, а затем и контрольную (не забывайте о том, что контрольная работа по данной теме проводится не сразу по завершении ее изучения, а после рассмотрения следующей!).

Глава 3.
КАК НАХОДИТЬ НЕИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЧТО ТАКОЕ УРАВНЕНИЕ. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Описание методики работы над построением и решением уравнений начнем с рассмотрения различных определений уравнения.

В школьной энциклопедии уравнение определено как «два выражения, соединенных знаком равенства; в эти выражения входят одна или несколько переменных, называемых неизвестным. Решить уравнение — значит найти все те значения неизвестных (корни или решения уравнения), при которых оно обращается в верное равенство, или установить, что таких значений нет». Там же дано определение уравнения как «аналитической записи задачи о разыскивании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны».

Понятно, что под аналитической записью и понимается запись равенства, левая или правая части которого содержат неизвестную (неизвестные) букву (или число). Именно буквенное выражение определяет функцию от входящих в него букв, заданную на допустимых числовых значениях.

Школьные учебники, как правило, определяют уравнение как равенство, которое содержит неизвестное число, обозначенное буквой.

Эти определения приведены здесь для того, чтобы вы в случае каких-либо возражений со стороны коллег относительно способов обучения составлению и решению уравнений не тратили время на поиск обоснований.

Введение записи задачи (о нахождении неизвестной величины) с помощью уравнения начинается с конкретной задачи. Способы составления и решения уравнений опираются на отношение целого и его частей, а не на 6 правил нахождения неизвестных компонентов при сложении, вычитании, умножении и делении.

Для того чтобы найти способ решения уравнения, достаточно определить сначала по схеме, а позже и сразу по формуле, чем является неизвестная величина: частью или целым. Если неизвестная величина является целым, то для ее нахождения части нужно сложить, а если она — часть, то из целого нужно вычесть известные части. Таким образом, ребенку не нужно запоминать правила нахождения неизвестного слагаемого, уменьшаемого и вычитаемого.

Успешность ребенка, его навык при решении уравнений будут зависеть от того, может ли ребенок переходить от описания отношения между величинами с помощью схемы к описанию с помощью формулы и наоборот. Именно этот переход от уравнения как одного из вида формул к схеме и определение с помощью схемы характера (часть или целое) неизвестной величины являются теми основными умениями, которые дают возможность решать любые уравнения, содержащие действия сложения и вычитания. Другими словами, дети должны понять, что для правильного выбора способа решения уравнения, а значит, и задачи нужно уметь видеть отношение целого и частей, в чем и поможет схема. ***Схема*** здесь ***выступает в качестве средства решения уравнения***, а ***уравнение***, в свою очередь, ***как средство решения задач***. Поэтому большинство заданий в этой главе ориентировано на составление уравнений по заданной схеме и на решение текстовых задач путем составления схемы и с ее помощью составления уравнения, позволяющего найти решение задачи. Таким образом, работа над текстом задачи происходит в следующей последовательности.

Методика обучения решению текстовых задач

Сначала учитель читает задачу для общего ознакомления, а затем вновь переходит к чтению, но «по частям». Учитель (и ***только учитель***!) читает такую часть текста, которая позволяет ребенку нарисовать элемент будущей схемы, затем следующую часть — и опять дети изображают часть схемы, и так далее. Возникает вопрос: можно ли доверить читать задачу детям, владеющим техникой чтения, или нет?

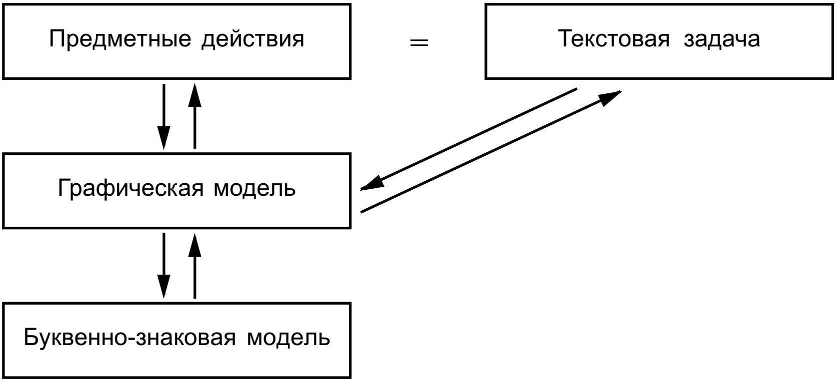
Нет и еще раз нет.

На первом этапе обучения решению задач текст должны читать только вы, так как **уметь читать** и **уметь читать задачу** — это **разные умения**. Первым ребенок может обладать, а вот вторым — нет, ему еще предстоит научиться этому, но значительно позже, а именно тогда, когда большинство детей овладеют грамотой и у них появится смысловое чтение. Разные тексты, т. е. разная структура задачи, будут требовать разных способов прочтения, поэтому, пока ребенок не научился это «видеть», нельзя предлагать на контрольной (или любой другой проверочной работе) текст задачи, написанный на доске или в учебнике, читая который ребенок должен решить задачу. Он может уметь читать, но не уметь читать нужным способом, поэтому любую задачу, независимо от количества хорошо читающих детей в классе, должны читать вы, так как пока только вы знаете, где нужно сделать остановку для того, чтобы ребенок смог синхронно изображать на схеме величины с учетом отношений между ними. Начертив схему, дети должны заменить буквой (*X*, *Y* или *Z*) неизвестную величину, после чего приступить к анализу отношений между известными и неизвестными величинами.

Итак, текст задачи должен быть переведен в графическую модель и, наоборот, графическая модель может служить опорой для составления текста задачи.

Схема, которую ребенок составит к данной задаче, фактически является моделью (обратите внимание на то, что на схеме всегда отсутствует наименование), так как с ее помощью может быть решена не только данная задача, а целый класс частных задач, которые могут отличаться друг от друга сюжетами, величинами, о которых идет речь, числовыми или буквенными данными, но сохраняют отношение между величинами. ***Моделирование*** (с помощью сначала схем, а затем буквенных формул) как учебное действие служит ***средством выделения отношений при анализе*** условий конкретных задач, а сама графическая или (и) буквенно-знаковая ***модель*** является ***средством фиксации*** выделенных отношений.

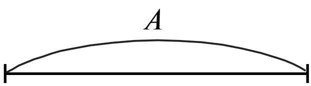
Если вернуться к описанию подхода к изучению понятий, то станет понятно, что предметные действия, которые выполнял ребенок с реальными, конкретными величинами, решая ту или иную задачу, превращаются в словесное описание этих действий, т. е. в ***текстовые задачи***, схема работы над которыми соответствует уже описанной схеме:



Приведем пример работы над задачей № 1 из **задания № 208**.

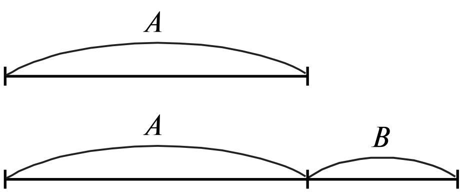
«Задача 1. Маша и Саша помогали в столовой наливать компот. У Маши было *A* стаканов компота, а у Саши — на *B* стаканов компота больше. Сколько стаканов компота было у Саши и Маши вместе?»

Итак, прочтите весь текст задачи для ознакомления. Затем прочтите только о том, сколько стаканов компота было у Маши, и сделайте остановку для того, чтобы дети начертили отрезок, величина которого *A*:



Теперь читайте дальше: «...а у Саши — на *B* стаканов больше».

Дети дополняют схему еще одним отрезком:



Обсуждать, какое действие надо будет выполнять, если сказано: «на *B* больше», не нужно, чтобы не привязывать действие сложения к этому словосочетанию, ведь для косвенных задач отношение «на *В* больше» описывается действием вычитания.

Далее читайте вопрос задачи: «Сколько стаканов компота было у Саши и Маши вместе?»

На схеме этот вопрос после обсуждения различных предложений детей будет показан с помощью фигурной скобки, необходимость которой и обсуждают дети.

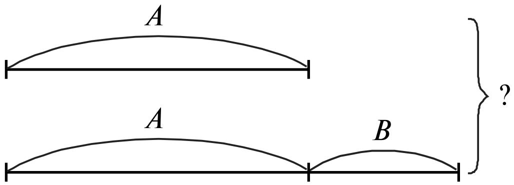


Схема составлена. Переходим к анализу отношений между величинами с помощью этой схемы, но сначала нужно проверить, все ли отражено в схеме: «действующие лица» (или объекты), величины (известные и неизвестные), отношения между ними — и соответствует ли эта схема данной задаче.

Для этого задайте детям следующий вопрос:

У ч и т е л ь:

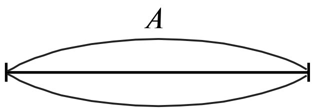
— Где на схеме показано, что речь в задаче идет о двух детях?

Д е т и:

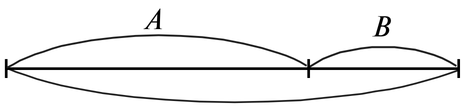
— Мы нарисовали два отрезка один под другим (показывают).

У ч и т е л ь:

— Покажите, какой отрезок рассказывает о том, сколько стаканов компота было у Маши. А у Саши?



I



II

У ч и т е л ь:

— О чем сообщает величина В?

Д е т и:

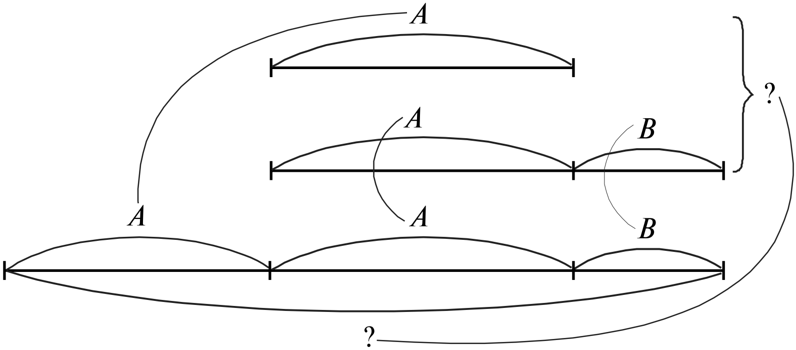
— О том, на сколько у Саши больше стаканов, чем у Маши.

— О том, на сколько стаканов у Маши меньше, чем у Саши.

Если ответ на последний вопрос вызывает у детей затруднение, то ***вернитесь к предметному моделированию***, при котором дети могут использовать две полоски разной длины. С помощью этих полосок пусть покажут все величины, о которых идет речь, в том числе и ***разность***, т. е. ту часть, ***на сколько*** одна величина больше (меньше) другой, и сумму двух величин — Сашиного и Машиного количества.

Теперь, когда дети обосновали изображение величин с помощью отрезков, предложите им ***восстановить*** по схеме текст задачи, сопровождая его показом соответствующих величин, изображенных отрезками. (Это можно организовать так: один ребенок показывает, а другой рассказывает, и наоборот.)

Итак, показав на схеме все величины, которые были даны (известные величины), предложите показать величину (отрезок), сообщающую о том, сколько стаканов было у Маши и Саши ***вместе***. Такого отрезка на схеме нет, поэтому его нужно нарисовать и показать, как он получился, т. е. из чего он состоит. Другими словами, необходимо преобразовать схему так, чтобы на ней можно было ***показать все отрезки***, соответствующие тем величинам, о которых идет речь в задаче, в том числе и отрезок, соответствующий сумме двух величин — количеству Машиных и количеству Сашиных стаканов.



Для этого и понадобится придумать так называемые «дорожки», показывающие, что каждая из изображенных известных величин входит в величину, которую нужно узнать. Возможно, дети придумают другой способ отразить этот факт включения всех величин в величину-сумму, например цветом. Это неважно. Важно то, чтобы при любом способе построения дети фактически контролировали бы все части того целого, которое мы ищем по условию задачи.

Теперь, когда схема преобразована, ***введем*** вместо вопроса ***букву, обозначающую неизвестную величину*** (например, X), и предложим детям по схеме ***составить уравнение*** (формулу). Слово «уравнение» появляется как синоним слова «формула».

Их может быть несколько:

$A + A + B = X$; $X - A = A + B$; $X - (A + B) = A$;
$X - A - A = B$; $X - (A + A) = B$; $X - A - B = A$;
$X - B = A + A$ и т. д., или, возможно, дети предложат и такие варианты:

$X = 2A + B$; $X - 2A = B$; $X - B = 2A$;
$X - 2A - B = 0$ и т. д.

Все уравнения, кроме $X = A + A + B$ ($X = 2A + B$), нужно решать. В этом же уравнении достаточно только придумать вместо A и B подходящие числа и вычислить результат, т. е., говоря языком математики, найти значение алгебраического выражения при заданных значениях входящих в него букв.

Такое уравнение (типа $X = f(n)$, где $f(n)$ — числовое выражение) на фоне остальных, описывающих то же отношение частей и целого, а все из перечисленных уравнений описывают отношение между одним и тем же целым и его частями, дети называют по-разному. Одни дали ему название ***простого уравнения***, другие назвали его ***уравнением, у которого икс «в одиночестве»***, третьи придумали ему название ***решительного уравнения*** (здесь, сказали они, осталось только решить, т. е. посчитать).

И, наконец, нашлись дети, которые не просто придумывали новое слово, называющее такие уравнения, отличая их от остальных, но и связали понятие уравнения, а точнее, формы записи уравнения, с аналогичным понятием в русском языке. Дети сказали, что все эти уравнения как ***родственные*** слова, у которых ***один и тот же корень***. Значит, делают вывод дети, все эти уравнения можно назвать ***родственными***, а тогда уравнение вида $X = f(n)$ или $f(n) = X$ — ***корень,*** где знак $f(n)$ обозначает буквенное или числовое выражение, а также соответственно букву или число, которые тоже считаются выражением.

В математике такие ***уравнения***, которые имеют одно и то же множество корней, а здесь речь идет только об одном и том же корне, называют ***равносильными или эквивалентными***, а не родственными. Какая разница, как их сейчас будут называть дети? Главное, что по сути своей ***вывод***, к которому приходят (должны прийти с вашей помощью) дети, — ***верный***. Именно этот ***образ*** помогает ребенку прочувствовать связь между составленными уравнениями и дает возможность при решении задачи ***сразу*** составлять уравнение, которое и есть ***корень*** всех тех, которые можно было бы составить.

Такой подход к обучению решению задач в методике называют ***алгебраическим***.

Обучение алгебраическому способу решения текстовых задач ***раньше***, ***чем арифметическому***, имеет под собой ***содержательное обоснование***.

Во-первых, если учить решать задачу сначала по действиям арифметическим способом и на их основе учить составлять выражение, то возникает вопрос: зачем ребенок должен писать выражение, кому и для чего оно нужно, если задача ***уже*** решена?! При таком подходе к обучению у ребенка полностью отсутствует мотивация, ведь он ***пишет выражение*** после того, как решил задачу, только ***для учителя***, а учитель здесь в ситуации, при которой он словно говорит ребенку: «Учись, детка, потом узнаешь, зачем это нужно». И действительно, мы-то с вами понимаем, как важно для ребенка сделать обобщение. Именно выражение обобщает, удерживает, схватывает все связи и отношения между известными (данными) величинами и дает возможность целостно увидеть способ нахождения неизвестной величины. Но ребенку-то какое до этого дело?

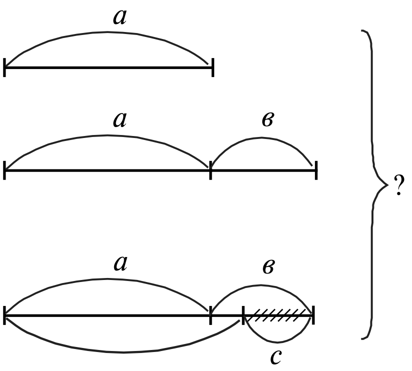
Эта же мысль относится и к логике обучения действиям с многозначными числами: традиционно сначала надо ***выучить*** таблицу сложения и умножения, а лишь ***потом*** ребенок узнает, ***зачем*** их нужно было учить. У ребенка нет мотива, нет потребности именно в этом умении, именно в этом знании как основании собственного умения. Отсюда дети часто просто «отписываются», лишь бы от них отстали, не задумываясь над тем, как они это делают, а значит, допускают много ошибок при составлении выражения.

Рассмотрим ***второй аргумент*** в пользу выбранного способа обучения: не от действий к выражению, а затем и к уравнению, а ***от выражения*** к действиям, без выполнения которых нельзя найти значение выражения. Говоря точнее, от уравнения к нахождению корня, т. е. к нахождению значения выражения, которое требует выполнения действий. Смысл этого аргумента состоит в том, что мы не сможем обучить (именно обучить, а ***не эксплуатировать*** природные способности) ребенка многим интересным и рациональным способам решения задач, если начнем ***обучать с арифметического способа*** обучения, при решении с помощью которого, как известно, используются следующие приемы:

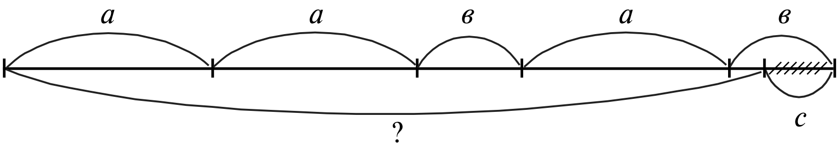
1) запись по действиям;
2) запись в виде выражения.

Традиционный подход к составлению выражения мы уже рассмотрели (сначала задача решается по действиям, а затем, на основании действий, составляется выражение). Рассмотрим, как записывают при этом дети план решения по действиям. Известны ***две основные*** записи: с пояснением и с вопросами. Если пояснения не пишутся, то они либо даются устно, либо являются ***сокращенной записью*** того же плана решения, которая используется лишь ***после того***, как дети научились давать развернутые пояснения или задавать вопросы. Сокращенная запись составляется поэтапно, так как в любом случае запись самого действия есть следствие плана решения задачи, его реализация.

Тогда возникает вопрос: каким должен быть план решения задачи, чтобы дети выполнили следующие действия по отношению к задаче, представленной с помощью схемы? Понятно, что сюжет в данном случае значения не имеет.



или



Р е ш е н и е[1]

I вариант	II вариант	III вариант	IV вариант
1) $a + в = m$,	1) $a \cdot 3 = k$,	1) $a + в = m$,	1) $a + в + m$,
2) $m - c = 1$,	2) $в \cdot 2 = d$,	2) $m \cdot 2 = f$,	2) $m \cdot 3 = n$,
3) $a + m + k = 1$,	3) $k + d - c = e$,	3) $f = a - c = e$,	3) $n - b - c = e$.

О т в е т: e.

Рассмотрим второй из вариантов.

Очевидно, что вряд ли кто-либо из детей задаст вопрос: «Сколько было бы у первого, второго и третьего вместе, если бы у второго и у третьего было столько же, сколько у первого?» — и ответит действием: $a \cdot 3$. Ни такого вопроса, ни такого пояснения для действия $a \cdot 3$ получить невозможно, хотя наверняка найдутся дети, которые решат задачу именно таким способом, интуитивно почувствовав его. Научить задавать такие вопросы возможно, но очень трудно, так как

[1] Выбор способа решения задачи будет зависеть от конкретных числовых данных, при оперировании с которыми для ребенка будет меньше всего «ошибкоопасных» мест.

они неестественны, они искусственные. Это уже означает, что мы тем самым лишаем детей возможности научиться находить многие способы решения задач, лишаем осознанного и гибкого подхода к выбору конкретного способа.

Итак, ***процесс*** решения текстовой задачи с буквенными данными в течение первых 3 лет (школа 1–4) мы будем осуществлять в ***семь этапов***:

I этап — это ***перевод*** условия задачи в ***графическую модель***, т. е. в ***схему***. Кстати, ***схема, в отличие от чертежа, не требует***, во-первых, специальных чертежных ***инструментов*** и, во-вторых, точного соблюдения заданных отношений. Схема может выполняться от руки, указывать и отображать заданные отношения;

II этап — это ***преобразование*** одной графической ***модели*** в другую. Этот этап может быть пропущен, если необходимости в преобразовании нет изначально либо она отпала в связи со свернутостью действия;

III этап — составление буквенно-знаковой модели (формулы), т. е. ***составление уравнения***;

IV этап — решение составленного ***уравнения***. Этап может совпасть с предыдущим, если ребенок записывает уравнение сразу в форме решения: X = выражение;

V этап — это ***подбор*** вместо букв ***подходящих чисел***. Подходящих с трех точек зрения:

1) сюжета задачи;
2) выполнимости арифметического действия;
3) умения успешно оперировать с подобранными числами.

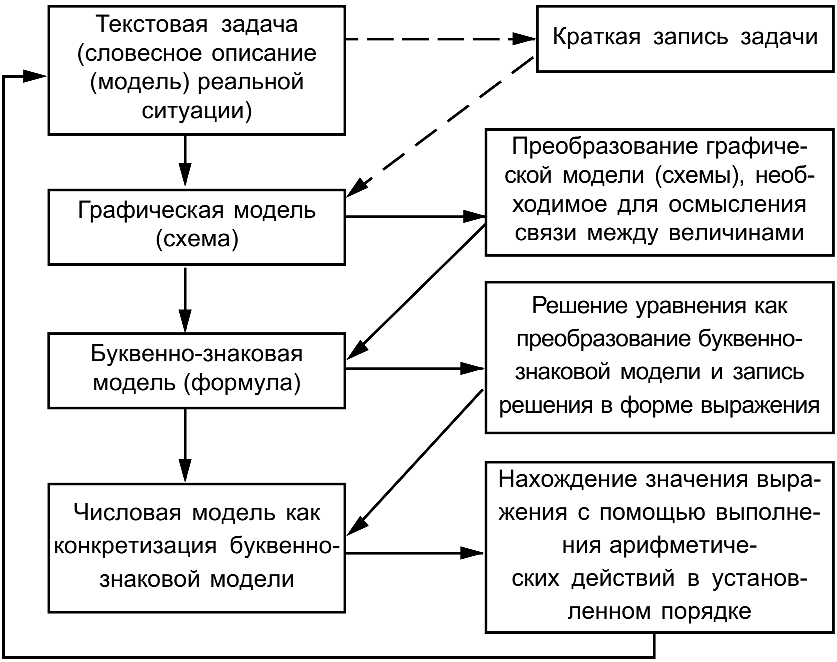
Другими словами, речь идет об ***области допустимых значений*** по отношению к сюжету, к выполнимости арифметического действия на рассматриваемом (в зависимости от сюжета) множестве чисел, по отношению к собственному опыту ребенка в оперировании с числами, что дает возможность диагностировать область успешности ребенка;

VI этап — выполнение необходимых вычислений, требующих последовательного выполнения арифметических действий с числами;

VII этап — возвращение к условию задачи для получения ответа на ее вопрос, так как не всегда величина, которую обозначили буквой X и относительно которой составляется и решается уравнение, может совпадать с величиной, которую нужно найти для ответа на вопрос задачи. Решив уравнение, необходимо проверить, получен ли ответ на вопрос задачи.

Итак, мы выделили ***семь*** этапов, хотя ***основными***, конечно, ***являются четыре***: ***построение*** схемы, ***составление*** и ***решение*** уравнения с буквенными данными и ***вычисление*** числового значения искомой величины.

Именно этим основным этапам — моделированию в графической, буквенно-знаковой и числовой форме — отводится значительное место в обучении, так как одной из основных задач обучения математике в целом и решению задач в частности является формирование способности к математическому моделированию и переходу от одной модели к другой (и наоборот).



Пунктиром показаны еще ***два этапа***, связанные с моделированием задачи с помощью краткой записи, которая, по своей сути, несет в себе элемент как графической модели (последовательность сообщений), так и буквенно-знаковой. Такое понимание смысла ***краткой записи*** определяет ее место в обучении ребенка процессу решения задач, а именно краткая запись как дополнительное ***средство моделирования*** появляется в специально сконструированной для ее появления ситуации в четвертом классе, когда ребенок достаточно свободно решает задачи с помощью построения схемы и составления уравнения. Подробно эти вопросы рассмотрим в методических рекомендациях для обучения детей в четвертом классе.

Думаем, что из описанной методики обучения решению задач понятно, какое значение приобретает тема составления и решения уравнений с помощью схемы. Причем ***первичной*** является схема, опираясь на которую ребенок учится составлять равносильные уравнения, ***вторичным*** умением станет ***обратный переход*** от уравнения к схеме, рассматриваемый (в неявном виде) как задача на ***восстановление схемы*** с помощью уравнения, которое могло быть по ней составлено.

В связи со сказанным можно выделить ***несколько способов работы над задачей***, которые представим по типам заданий:

I тип — это **задания № 208**, **1—29***, в которых для решения предлагаемых задач сначала нужно от текста перейти к составлению схемы.

II тип — это **задания № 209**, **210**, **211**; **31***, **34***, в которых по схеме нужно придумать текстовую задачу.

Работа над задачами данного типа может быть организована в нескольких вариантах:

1) дать несколько схем и одну текстовую задачу. Нужно определить подходящую к задаче схему;
2) дать несколько текстовых задач и одну схему. Определить, к какой из данных задач она подходит;
3) дать несколько схем и несколько текстовых задач. Определить подходящие друг к другу.

---

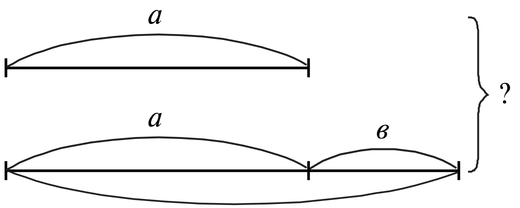
* Звездочкой помечены задания из раздела «Задачи из разных школьных учебников».

III тип — это з**адания № 206**, **207**, **31***, **32***, **33***, **34***, в которых по схеме нужно составить уравнения.

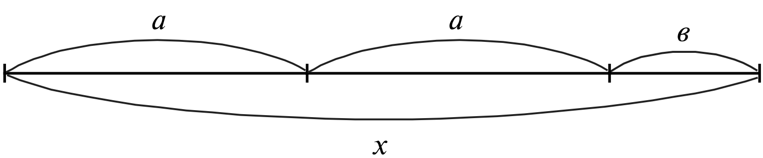
IV тип — это **задания № 205**, **210**, **35***, в которых к уравнению (формуле) нужно составить схему.

В учебнике представлены фактически только тексты задач, а ***форму*** работы с ними в соответствии с описанными выше типами заданий вы ***выбираете сами***. Только помните, что, в отличие от традиционного подбора однотипных заданий, вы должны подбирать к каждому уроку задания ***разного типа*** из разных блоков (вернитесь к таблице на с. 15).

Особое внимание обратите на **задание № 210**, в котором показан ***способ работы над прямыми и обратными задачами***. Описанный в задании подход даст возможность организовать работу с обратными задачами везде, где речь идет о решении любой текстовой задачи, о работе со схемой и формулой в части их преобразований. Для этого меняйте известные величины на неизвестные и наоборот, и вы получите весь спектр обратных задач. Например, задача представлена следующей схемой:



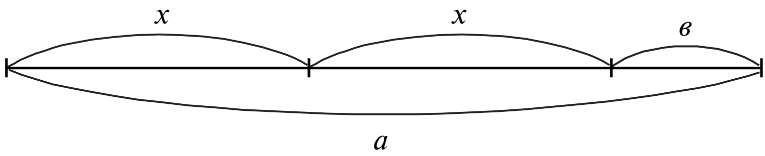
или



Составим уравнения: $x = 2a + в$ (или $x = a + a + в$).
$x - a = a + в$; $x - 2a = в$; $x - в = 2a$;
$2a + в - x = 0$ и т. д.

Составим ***обратные задачи***.

1) Заменим a на x, а x на a.



Составим уравнения к обратной задаче:

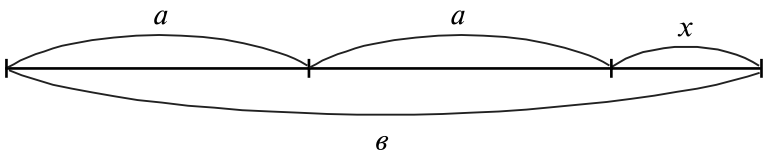
$x + x + в = a$; $x + x = a - в$; $x = a - в - x$;

$x = a - (x + в)$; $x + x + в - a = 0$; $x = (a - в) : 2$ и т. д.

2) Заменим $в$ на x, а x на $в$. Составим уравнения:

$2a + x = в$; $в - x = 2a$; $в - a = a + x$; $в - a - x = a$;

$в - (a + x) = a$; $2a + x - в = 0$; $x = в - 2a$ и т. д.



Неважно, умеет или нет ребенок решать составленное им уравнение, т. е. выразить x через известные величины с помощью арифметических действий. Это следующий этап. Главное, что ребенку становится ясным, зачем ему нужно учиться решать уравнения, выражая неизвестную величину через действия с известными величинами, обозначенными буквами и затем конкретизированными числовыми значениями. Становится понятным значение работы с числами, которые могли быть подставлены вместо букв. Этим целям и служат **задания с № 212 по № 230**, в которых ребенку предлагается счет в пределах 10, опирающийся пока на ***дошкольный опыт*** ребенка. Конечно, перед ним еще не стоит вопрос о том, что такое число, откуда оно взялось, как в разное время в разных странах, у разных народов называли (читали) и записывали числа. Это пока не имеет для ребенка смысла, но он ***до школы*** учился считать, решать примеры и задачи. Этому учились ***все*** дети (кого учили взрослые в детском саду или дома, а кого учила и сама жизнь), но степень обученности у всех разная. Задания на придумывание ***вместо букв*** таких ***чисел***, с которыми ребенок ***умеет*** оперировать, дают возможность сделать ***всех*** детей ***успешными***, дают возможность всем детям закрепить или приобрести на данном этапе ***умения***, которые позже станут основанием знаний.

Форма работы с перечисленными заданиями детям знакома. Им предлагаются так называемые примеры с «секретами», рассматриваемые в роли предметов, которые дети учились сравнивать по ***разным*** признакам. Смотреть на примеры как на объекты сравнения, пытаться раскрывать их «секреты», т. е. признаки, по которым их можно сравнивать между собой, — вот тот ***методический прием***, который дает возможность выделить свойства равенства (пусть пока в неявном виде), связь между компонентами действия, связь между результатом одного действия и компонентами другого действия.

Причем все, что ребенок обнаружит интересного, какой бы «секрет» он ни назвал — все достойно похвалы. Среди предложенных заданий есть так называемые «круговые» примеры (**задание № 225**), «магические треугольники» (**задание № 218**) и многое другое.

Самое главное — то, что, работая подобным образом над простейшими вычислениями, ребенок не утрачивает интерес к ним, что, как следствие, приводит к непроизвольному запоминанию результатов простейших вычислений в пределах 10. Это не значит, что дети ограничены десятком, нет. Они ограничены здесь только дошкольным опытом, а вот нам от них пока нужен только счет и вычисления в пределах 10 с установкой на запоминание. Поэтому в конце каждого урока и начале следующего поинтересуйтесь у них, результаты каких действий и с какими числами они уже запомнили: «Кто помнит, — спрашиваете вы, — чему равно 2 + 2, 3 + 4, 5 + 5, 7 − 1, 8 − 2, 3 + 2?» и т. п. Мы еще не один раз вернемся к вычислениям в пределах 10 и далее, а значит, ***ни в коем случае нельзя заставлять детей зазубривать*** результаты. Не спешите, у них еще так много времени впереди. Лучше **хвалите детей почаще**, даже в тех случаях, когда хвалить, кажется, не за что. Это не так, всегда можно найти, за что ребенка можно похвалить: «Хорошо, что не забыл!» — хвалите вы, если он пока ничего не добавил, «Хорошо, что кое-что помнишь, что не все забыл», — хвалите, если у ребенка с памятью совсем слабовато. Ведь он в этом не виноват. Скоро вы увидите, как она начнет развиваться, — так построена методика работы, что развитие непроизвольной памяти становится неизбежным. Пройдет немного времени, и непроизвольная память станет ***основой для формирования*** и ***развития*** произвольной памяти.

Критерии усвоения учебного материала по теме «Сложение и вычитание величин»

В результате изучения темы дети должны уметь:

1) выполнять практические действия с величинами;
2) описывать действия с величинами с помощью схемы: сравнение, сложение и вычитание;
3) обозначать величины, полученные в результате действия, с помощью формул, содержащих буквы и знаки «+» и «−», и при описании способов восстановления величины;
4) уметь решать с помощью схемы уравнения типа $x + a = в$, $x - a = в$ и $a - x = в$, опираясь на отношение частей и целого;
5) уметь решать любые текстовые задачи, содержащие буквенные данные, в пределах двух действий — сложения и вычитания — на основе составления уравнения, в том числе уравнения, корень которого представлен в виде буквенного выражения, значение которого может быть найдено при подборе подходящих (в трех смыслах) чисел.

Часть III. КАКИЕ БЫВАЮТ МЕРКИ

Необходимость введения данной темы обусловлена, прежде всего тем, что появление числа связано с задачей измерения величин.

Мы научились «видеть» величины, непосредственно сравнивать, складывать и вычитать их. Однако изменение условий сравнения (сложения и вычитания), при которых величины, а точнее, предметы (объекты), сами являются «носителями» величин, потребовало измерения величин.

Напомним, что величина есть свойство предмета (объекта) как представителя класса предметов (объектов). Именно в процессе сравнения проявляется это свойство предмета. Например, свойство «иметь длину» проявляется тогда, когда предметы (объекты) сравнивают по их протяженности (по длине). В результате устанавливают, что либо оба предмета имеют ***одну и ту же длину***, либо длина одного предмета ***больше (меньше)*** длины другого. Аналогично рассматривались и другие величины: площадь, объем, масса и т. д. Они также представляли собой особые свойства окружающих предметов (и явлений) и проявляли себя лишь при сравнении, причем каждая из них была связана с ***определенным способом сравнения***.

Величины, которые характеризуют (выражают) одно и то же свойство предмета (объекта), называют ***величинами одного рода*** или ***однородными величинами***.

Величины как свойства предметов обладают еще одной характеристикой — их можно оценивать количественно, например с помощью положительного действительного числа, которое показывает, во сколько раз величина A больше (или меньше) величины E, принятой за единицу измерения. Вопрос о том, ***какой может быть единица измерения,*** или ***мерка***, и ***составляет содержание*** данной части.

Для рассмотрения этого вопроса ***необходимо вновь вернуться к сравнению величин***.

Создав ситуацию успеха для любого ребенка, при которой он демонстрирует владение способами сравнения различных величин, вы ставите перед детьми такую ***задачу на сравнение***, которую нельзя решить известным им способом ***непосредственного*** сравнения.

Приведем пример из реальной жизни человека, вынужденного решать задачу опосредованного сравнения, — покупка обуви или одежды при отсутствии того человека, для которого эта покупка предназначена, когда примерить нужный товар нельзя. Опишем эту ситуацию на языке математики. Речь идет о сравнении двух величин, представленных предметами (сам человек и одежда для него), разделенными в пространстве или во времени. А это значит, что их нельзя сравнить ***непосредственно***.

Необходимость конструирования нового способа сравнения в ситуации, когда старый способ непосредственного разностного сравнения не срабатывает, — это и есть момент возникновения и постановки собственно учебной задачи, решение которой приводит ребенка к открытию и усвоению общего способа опосредованного разностного сравнения величин, опирающегося на их предварительное ***кратное*** сравнение с помощью чисел.

Задача ***опосредованного сравнения величин*** может быть охарактеризована как та учебная задача, решение которой с необходимостью приводит ребенка к понятию числа как кратного отношения величин.

С изучения ***способа*** опосредованного сравнения величин и начнем этот раздел.

Фактически ребенок уже имел дело с посредниками в ситуации, когда нужно было сравнить по длине отрезки, расположение которых на плоскости (на листе бумаги или на доске) не позволяло оценить отношение между ними, а это означало, что отрезки (прямых или любых других линий) нужно было заменить предметом, имеющим такую же длину (величину), но который можно держать в руках, а значит, можно ***переносить***. ***Это и есть посредник***. Этим предметом-посредником (помощником, говорят дети) могла быть нитка, проволока, бумажная полоска и многое другое. При этом длина (величина) посредника была, как правило, либо равной, либо большей, чем один из сравниваемых отрезков, что давало возможность отметить на посреднике часть, равную одному из сравниваемых отрезков.

В этих двух случаях проблем не возникает. Теперь же, когда ни один из известных детям способов (непосредственное разностное сравнение и сравнение с помощью посредника, равного одной из величин) не срабатывает, так как либо нельзя сравнить непосредственно, либо нет посредника, равного (или большего) одной из величин, чего вполне достаточно для сравнения, но может быть недостаточно для воспроизведения обеих величин (в ситуации, когда посредник больше одной из величин, но меньше другой), понадобится ***новый способ*** действия.

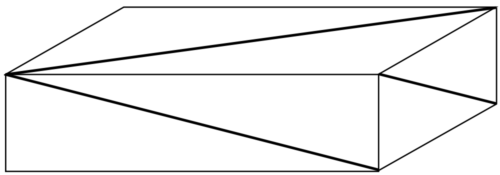
Суть ***нового способа опосредованного сравнения*** — в использовании фактически ***двух*** посредников: ***числа*** и ***мерки***.

Если же используются ***стандартные*** (общепринятые) ***мерки***, ***называемые***, в отличие от произвольной мерки, ***мерой***, то единственным ***посредником*** между величинами становятся ***числа***, характеризующие кратное отношение между измеряемой величиной и мерой и позволяющие сравнивать величины (а значит, в дальнейшем складывать и вычитать) на основе операций с числами без выполнения практических действий.

Система учебных ситуаций, приводящих к изучению зависимости между величиной, меркой и числом, станет предметом изучения в начале ***второго*** класса. Пока предметом изучения и должен стать подбор предметов, которые могут быть использованы в ***качестве мерки***. Что это могут быть за предметы в каждом конкретном случае сравнения различных однородных величин (длины, площади, объема, массы и т. д.)? Какими свойствами должны обладать эти предметы — носители величин, чтобы они стали играть роль посредников, т. е. мерок? При каких условиях тот или иной предмет можно и удобно использовать в качестве мерки?

Постановка этих трех вопросов и ответ на них составляют содержание конкретных уроков.

Начнем с первого вопроса: для измерения величин можно использовать ***любые*** предметы, обладающие этим свойством. Это значит, что для измерения, к примеру, длины можно воспользоваться ***любым предметом, имеющим длину***, для измерения площади — любым предметом, имеющим площадь, и т. д. Но у одного и того же предмета, например у спичечного коробка (прямоугольный параллелепипед), можно использовать в качестве мерки несколько ребер (сторон), имеющих разную длину, или диагональ каждого из трех различных прямоугольников (см. рисунок), составляющих его грани. Тогда в каждом конкретном случае неизбежно возникает вопрос: что (конкретно) в этом предмете удобно использовать в качестве мерки — большее ребро (из трех разных), меньшее или одну из диагоналей?



Таким образом, ***одним из условий,*** учитывающих ***удобство*** использования предмета, является ***соотношение между*** величиной (измеряемой) и меркой (величиной того же рода). Например, мерка может оказаться неудобна, так как слишком мала по сравнению с величиной, а значит, нужна мерка побольше, которая может быть составной (**задания № 231—236**). Мерка может быть неудобной и в ситуации, когда она слишком велика (**задание № 237**).

Задания с № 231 по № 240 помогают ребенку сделать осмысленным выбор не только предметов, используемых в качестве мерки, но и того свойства предмета, которое выступает в качестве мерки.

Вторым условием для подбора является материал, из которого изготовлен предмет-мерка или предмет — носитель измеряемой величины. Например, для измерения длины экватора у глобуса (**задание № 233**) неудобна ***деревянная*** линейка, которая хоть и специально предназначена для измерения длины, но ни она, ни глобус (шар) не могут изменить свою форму. Нужна гибкая мерка, например коктейльная трубочка или кусочек проволоки.

Постоянное использование деревянной (в смысле негнущейся) линейки приводит в старших классах к тому, что при изучении геометрии, а именно при введении понятия о радиане как мере измерения углов, многие ученики никак не могут радиус «положить» на окружность. Это происходит несмотря на то, что учитель обязательно отрезает нитку (или проволоку), равную по длине радиусу, а затем укладывает ее по длине дуги, демонстрируя равенство длины радиуса длине дуги, образующей центральный угол, величину которого называют радианом и используют как стандартную меру при измерении углов. Разрушить сложившиеся годами стереотипы если не невозможно, то, по крайней мере, очень трудно.

Итак, качество предмета, т. е. ***материал***, из которого изготовлен предмет-мерка, должно быть учтено при его выборе.

Третьим условием подбора мерок является ***форма*** предмета.

О форме предмета-мерки, не связанной с качеством самого предмета, можно и нужно говорить при измерении площади. Какой может быть форма плоской фигуры, имеющей площадь, которую мы используем в качестве мерки? Естественно, любой, но при этом удобной для самого процесса измерения. Так, полностью покрыть поверхность (площадь) прямоугольника с помощью площади круга (так же как и наоборот) не удастся, однако еще в Древней Греции вычисление площади плоской фигуры или площади поверхности сводилось к построению равновеликого квадрата (читайте задачу о построении квадрата, равновеликого данному кругу, — классическую задачу древнегреческой математики о квадратуре круга — в школьной энциклопедии (М., 1996. — С. 493)). Очевидно, что выбор площади квадрата (а не треугольника, прямоугольника или трапеции и т. д.) в качестве меры площади любой фигуры не случаен, — именно это и должны осмыслить дети в тех пределах, которые доступны им на данном этапе.

И наконец последнее, ***четвертое условие***, которое можно рассматривать как ***основное*** условие, включающее и все предыдущие, — это ***способность*** предмета ***сохранять величину*** при перемещении его в пространстве, во времени или при изменении формы. Так, швейная резинка меняет со временем свою длину, жидкое вещество (предмет) меняет свою массу, надувной детский шарик меняет свой объем и т. п., а значит, вполне обоснованным становится наличие ***эталонов длины и массы***, хранящихся в городе Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов. Там в специальном помещении, где поддерживается постоянно температура 0°С, на специальных подставках лежит стержень, сделанный из весьма твердого сплава платины и иридия. На нем имеются две отметки. Расстояние между ними по международному соглашению принято считать основной единицей измерения длин и называть метром (м). Этот стержень и считается ***эталоном метра***.

Эталоном массы считается гиря, имеющая массу, равную 1 дм^3 воды, взвешенной при 4°С (1 кг). Эта гиря хранится вместе с эталоном метра.

Точные копии этих двух эталонов у нас в стране хранятся в Институте метрологии имени Д. И. Менделеева в Санкт-Петербурге.

Эти исторические сведения будут интересны и детям.

Знакомство с величинами и мерками для их измерения завершается рубриками «Это интересно», «Подумай», «Зачем человеку нужны измерения», которые могут быть вами значительно расширены за счет как исторических сведений, так и организации исследовательской работы, итогом которой может стать подбор и выполнение детьми заданий, скажем так, «опережающего» характера в связи с возникшим интересом детей к ним. Выполнение этих заданий, оперирующих с такими величинами, как время, скорость, стоимость и др., возможно только в ***рамках*** детского познавательного интереса, наличия дошкольного опыта, и не более того.

О критериях усвоения темы пока говорить рано, так как систематическое изучение этого вопроса начинается во втором классе.

Основные знания, умения и навыки, которыми должны владеть дети к концу первого класса, описаны в программе.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ 1-ГО КЛАССА

Предлагаем вашему вниманию тексты контрольных работ по математике, в том числе и итоговых, проверяющих усвоение детьми знаний, умений и навыков, соответствующих изучаемому математическому содержанию.

Несмотря на то что в рабочие тетради уже были включены проверочные и контрольные работы, эти тексты предоставляют вам свободу выбора. Их можно рассматривать и как основу для составления своих текстов.

ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Контрольная работа проводится не сразу по завершении той или иной темы, а лишь в ходе или после изучения следующей.
2. Работа может выполняться как в парах (по усмотрению учителя), так и индивидуально, причем не всегда 2 (или более) варианта. Задание может быть общее для всех — тогда, когда дети выполняют его «синхронно» чтению учителя, например при решении текстовых задач.
3. Учитель вправе менять тексты, способ проведения, учитывая особенности своего класса.
4. Рекомендованные тексты итоговых контрольных работ могут быть изменены с учетом календарного плана.
5. По аналогии с контрольными работами учитель составляет небольшие (на 5—7 минут) проверочные работы (устные или письменные), которые чаще проводятся в парах и сразу по ходу изучения каждой темы.
6. В контрольные работы могут быть включены «опережающие» задания для выявления способности детей переносить самостоятельно способы работы на новые условия.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Тема 1. **Сравнение предметов**

Контрольная работа № 1

Тема. Сравнение предметов по разным признакам.

Цель. Проверить умение детей:

а) сравнивать данные предметы по заданному признаку (выбор отношения «>», «<», «≠», «=»);

б) выбирать предметы по заданному признаку и отношению;

в) устанавливать признак, по которому сравнивали предметы и получили данное отношение (знаки «=», «≠», «>», «<»).

Способ выполнения: работа выполняется всеми детьми без разделения на варианты сразу по предъявлении учителем каждого задания.

Задание 1

Учитель показывает детям любые пары предметов и просит их поставить нужный знак «>», «<», «=», «≠» (знаки написаны) при их сравнении по заданному признаку (при этом все остальные признаки должны быть разными).

Например:

1) по материалу (один предмет из ткани, другой из дерева и т. п.); Ответ: ≠.

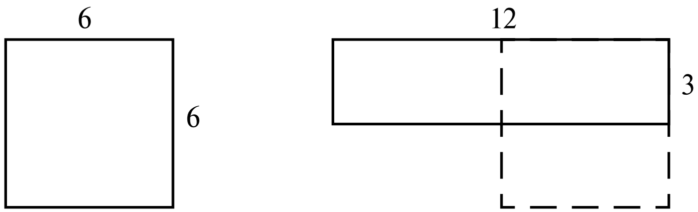
2) по массе (предметы положить на весы); Ответ: < или >.

3) по цвету. Ответ: =.

Слово «ответ» не пишется!

Задание 2

Учитель кладет на каждую парту по несколько разноцветных полосок и фигур, среди которых должны быть, по крайней мере, две пары полосок одинаковой длины (по остальным признакам они должны отличаться), и по две пары фигур, одинаковых по форме и площади, которые при этом нетрудно было бы сравнить, перекроив их, например:



Задание выполняется по вариантам, допускается обсуждение между детьми. В первом варианте из этих фигур выбираются две одинаковые по длине, в другом — по площади. Затем дети меняются вариантами. Работая с оставшимися фигурами, каждый наклеивает их на свой листок или просто показывает учителю. Учитель фиксирует ошибочные решения.

Задание 3

Учитель показывает два предмета, например деревянные кубик и брусок, пластмассовые мячик и кубик, стеклянные банку и бутылку и т. п. Говорит, что другие дети сравнивали их и определили, что они одинаковые (неодинаковые) (= или ≠). По какому признаку они сравнивали? Учитель может выбрать любой другой признак и другие предметы.

Способ ответа дети придумывают сами. Это может быть значок или рисунок, написанное слово или первые буквы слова. Главное — должно быть ясно, о каком признаке идет речь. Эту работу можно выполнять парами.

Задание 4 (дополнительное)

Учитель предлагает два предмета. Нужно указать признак, по которому их можно сравнить, и записать знак — результат сравнения.

Контрольная работа № 2

Тема. Сравнение предметов по разным признакам с описанием результата с помощью схемы и формулы.

Цель. Проверить умение детей переходить от сравнения предметов к изображению с помощью схемы и описанию с помощью формулы.

Задание 1

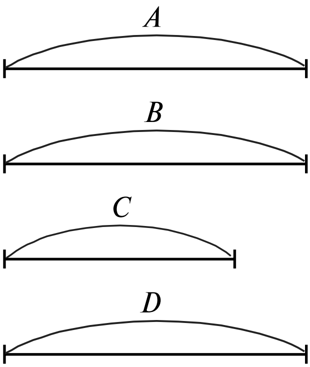
Учитель кладет на весы два предмета. Дети должны:

1) сравнить и сделать схему:

а) если масса одинаковая;

б) если масса разная;

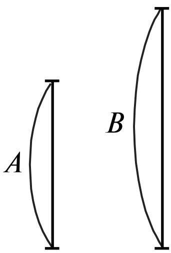
2) обозначить в обоих случаях массы предметов буквами и описать результат сравнения формулами ($A = B$ и $C \neq D$ или $C < D$).



Задание 2

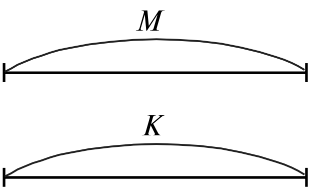
По схеме сравни величины и запиши формулы:

1)



A … B

2)



M … K

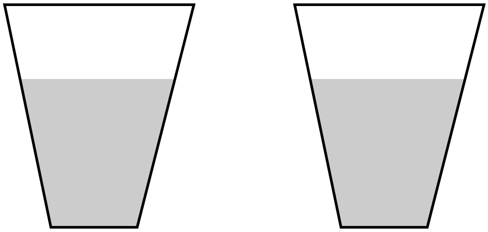
Задание 3

По формуле нарисуй схему:

$K > M$ $A = B$

Задание 4

Учитель показывает два сосуда одинаковой формы и наливает в них воды поровну:



Дети должны сравнить объемы воды в сосудах и записать формулу (буквы любые). Учитель в один из сосудов доливает воды и опять просит формулой описать результат сравнения.

Тема 2. **Действия сложения и вычитания**

Контрольная работа № 3

Тема. Уравнивание величин.

Цель. Проверить:

1) умение детей уравнивать величины:

а) на уровне предметных действий;

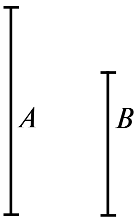
б) на уровне графической модели (схема);

в) на уровне знаковой модели (формула);

2) умение переходить от одной модели к другой.

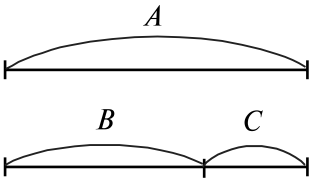
Задание 1

Учитель показывает детям две разные по длине полоски (прикрепляет их к доске). Дети должны сравнить их по длине и сделать схему.



Запись формулой результата сравнения по длине: $A > B$.

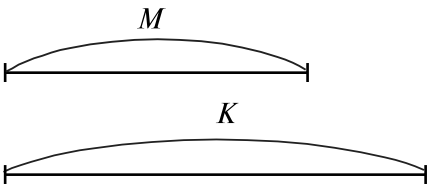
Затем учитель уравнивает эти полоски на глазах у детей путем прибавления к меньшей. Дети должны показать это на схеме, которая у них есть, и записать результат формулой:



$A = B + C$

Задание 2

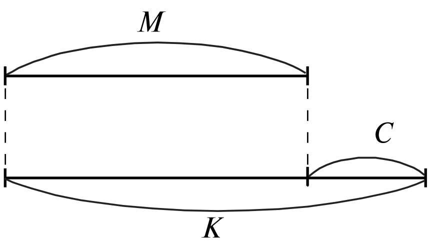
1. Учитель чертит на доске схему:



и раздает каждому по две неравные полоски. Задание: поставить на каждой из них соответствующую отношению букву (*M* и *K*) и записать формулу, описывающую сравнение по длине:

$$M < K \quad \text{или} \quad K > M.$$

2. Учитель на схеме показывает способ уравнивания путем уменьшения большего отрезка:



Дети должны описать это формулой и проделать по схеме с полосками то же, что и с отрезками учитель.

Задание 3

По формуле нужно построить схемы и закончить запись:

1) $A > B$ 2) $A > \mathrm{B}$

$A = B...$ $A... = B$

Задание 4

Известно, что $M + K = C$.

Сравнить: $M ... C$

$K ... C$

$C ... M + K$

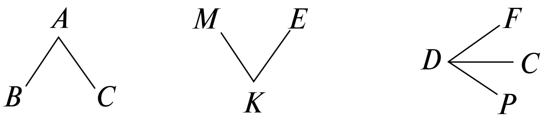
Контрольная работа № 4

Т е м а. Часть и целое.

Ц е л ь. Проверить усвоение этих понятий, умение переходить от одной модели к другой.

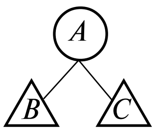
Задание 1

1. На доске написаны буквы (можно взять и другие):



Нужно обвести кружком буквы, которые рассказывают о целом, а треугольником — о части.

Например:



2. К каждой записи начерти схему и запиши формулу:

$A = B + C$	$K = M + E$	$D = F + C + P$
или	или	или
$B + C = A$	$M + E = K$	$F + C + P = D$

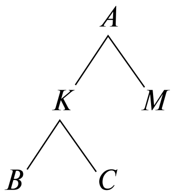
Задание 2

По формуле $K = A + B$ начерти схему и, опираясь на нее, вставь пропущенный знак или букву в следующих записях:

$K ... A$	$K...B$	$A + B ... K$
$K - A ... B$	$A ... K - B$	$A ... K$

Задание 3 (дополнительное)

В записи укажи кружком целое и треугольником часть. Построй схему. Запиши все возможные формулы.



Контрольная работа № 5

Т е м а. Решение уравнений.

Ц е л ь. Проверить:

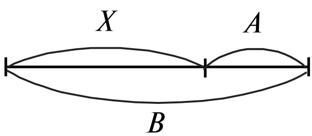
1) умение детей решать уравнения с помощью схемы, опираясь на понятие части и целого;

2) умение детей по схеме составлять уравнения.

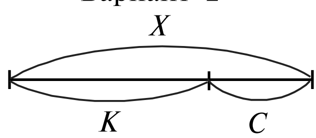
Задание 1

По схеме найти X:

Вариант 1



Вариант 2



Задание 2

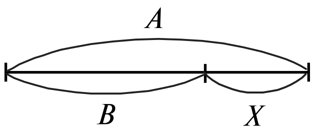
Построй к уравнению схему и найди X:

Вариант 1	Вариант 2
$X - K = B$	$A - X = C$
$A + X = C$	$X + B = C$
$M - X = P$	$X - P = B$

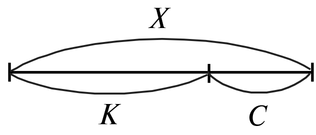
Задание 3

По схеме придумай уравнения:

Вариант 1



Вариант 2



Контрольная работа № 6

Т е м а. Текстовые задачи.

Ц е л ь. Проверить умения детей переходить от текста к схеме, решать задачи.

Задание 1

Учитель читает текст задачи. Первый раз — полностью, второй — смысловыми частями (знак «^» — конец части при чтении), а дети синхронно чертят схему:

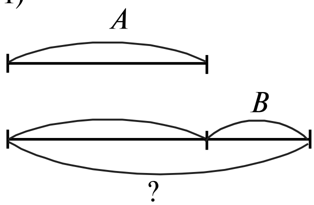
«У девочки было *A* игрушек. ^ Ей подарили еще *B* игрушек.^ Сколько всего игрушек стало у девочки?»

Задание 2

Учитель предлагает детям решить задачу по готовой схеме, которую начертили другие дети:

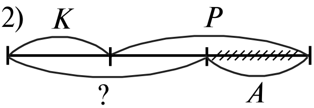
Вариант 1

1)



Ответ: $X = A + B$.

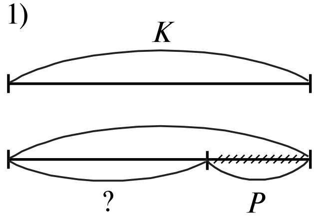
2)



Ответ: $X = K + P - A$ или $X = P - A + K$.

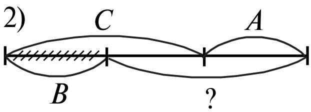
Вариант 2

1)



Ответ: $X = K - P$.

2)



Ответ: $X = C + A - B$ или $X = C - B + A$.

ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Методические указания к проведению итоговых контрольных работ

Контрольные работы (КР) проводятся за 2—3 недели до окончания учебного года на 3 последующих уроках (или с интервалом в 1 урок) по 20—30 минут на каждом. Работы выполнять на листках и оценивать в соответствии с принятым учителем способом.

КР-1 проверяет усвоение детьми понятия об отношениях величин, усвоение способов моделирования и переходов от одних моделей к другим. Учитель пишет на доске формулы и схемы, дети переносят их на бумагу.

В каждой контрольной работе ***задание 2*** дано в двух уровнях, предложите их детям на выбор.

КР-2 проверяет умение детей решать уравнения с опорой на схему, соотносить части и целое, переходить от формулы к схеме и наоборот.

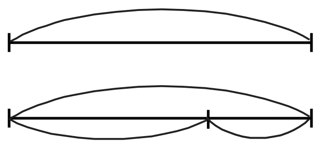
КР-3 проверяет умение моделировать:

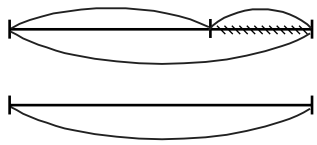
1) отношения «больше на ...», «меньше на ...»;
2) отношение целого и частей.

Контрольная работа № 1

Вариант 1	Вариант 2
Задание 1	
Дана формула	
$A = B + C$	$M = K - C$

Покажи на схеме величины, о которых говорится в формулах:

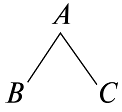


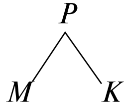


Составь по схеме столько формул, сколько сможешь.

Задание 2 (уровень 1)

По записи





сравни величины, поставь знаки «>», «<» или «=».

$A \ldots B$ | $M \ldots P$

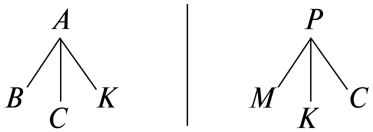
$A \ldots B + C$ | $P \ldots M + B$

$A - B \ldots C$ | $P - B \ldots M$

Какие еще величины можно сравнить, чтобы между ними стоял знак «=»?

Задание 2 (уровень 2)

По записи начерти схему.



Сравни величины, поставь знаки «>», «<» или «=».

$A \ldots B$ | $A \ldots C$ | $M \ldots P$ | $P \ldots K$

$K \ldots A$ | $B + C \ldots A$ | $C \ldots P$ | $P \ldots M + K$

$A \ldots B + C + K$ | $A \ldots K + C$ | $P \ldots M + K + C$ | $P - M \ldots K + C$

$A - B \ldots C + K$ | | $P \ldots K + C$ |

Контрольная работа № 2

Вариант 1 | Вариант 2

Задание 1

Начерти схемы к уравнениям:

$X - A = B$ | $C - X = K$

$K + X = D$ | $X - M = A$

$C - X = M$ | $X + B = D$

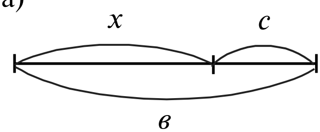
Задание 2 (уровень 1)

1) Дети в другом классе подбирали подходящую схему к уравнению

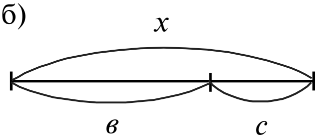
$B = X - C$ | $C + X = B$.

Как ты думаешь, какую из двух схем они подобрали?

а)

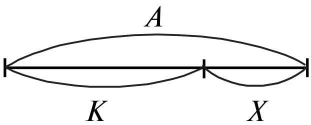


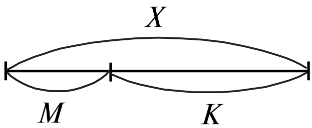
б)



Задание 2 (уровень 2)

По схеме составь уравнения, для которых она могла быть составлена:





Задание 3

Реши уравнение:

$A - X = K$ | $X - A = K$

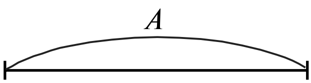
Подбери вместо A и K подходящие числа и найди X.

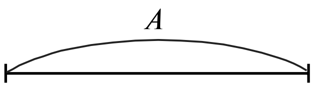
Контрольная работа № 3

Вариант 1 | Вариант 2

Задание 1

Дана величина A:





Построй величину K, которая

на B меньше, чем A. | на C больше, чем A.

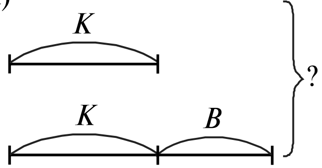
Задание 2 (уровень 1)

Дети из другого класса нарисовали схемы к задаче. Какая из них подходит к данной задаче?

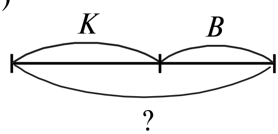
В первый день дети посадили K деревьев, а во второй — на B больше. Сколько деревьев посадили во второй день?

В первый день туристы прошли K километров, а во второй — на B меньше. Сколько километров прошли туристы во второй день?

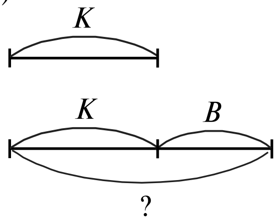
а)



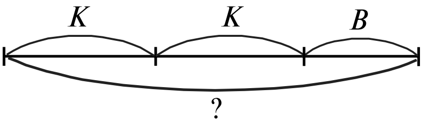
б)



в)



г)



Задание 2 (уровень 2)

Начерти схемы и реши задачи:

В первый день дети посадили *K* деревьев, а во второй — на *B* больше. Сколько деревьев посадили во второй день?

В первый день туристы прошли *M* километров, а во второй — на *C* меньше. Сколько километров прошли туристы во второй день?

Задание 3

Реши задачу. Подбери подходящие числа и ответь на вопрос задачи.

Туристам надо было пройти *A* километров. Они уже прошли *M* километров. Сколько километров им осталось пройти?

В библиотеке было *B* книг, *A* книг выдали детям. Сколько книг осталось в библиотеке?

ДИАЛОГ С УЧИТЕЛЕМ

В июне 1998 г. в Центре переподготовки работников образования (Москва) состоялся мой авторский семинар «Для учителей математики будущих 6-х классов по системе Д. Б. Эльконина—В. В. Давыдова». Отработав с детьми год, учителя накопили вопросы и высказали свое мнение о программе и детях.

Предлагаем вашему вниманию стенограмму вопросов и ответов, которая наверняка будет интересна не только учителю средней школы, начинающему работу с детьми, которые проучились по описанной программе, но и учителю начальных классов, только приступающему к обучению.

Вопрос: **Дети прекрасно знают, где и какие ошибки можно допустить, достаточно глубоко и тонко видят эти ошибки, любят выделять ошибки, но в своих работах их не видят и часто допускают. Как быть?**

Ответ: ***Первый этап.*** Сначала выясняете с детьми, какие ошибки можно допустить, характер этих ошибок. Например: вот такие могут быть ошибки, такие, такие... У вас получилось 5—10 характерных ошибок, которые могут допускать дети. Их можно разделить на две группы: ошибки на невнимание (дети, анализируя ошибки, часто их ставят во главу угла, ведь это самая обидная ошибка для ребенка, который умеет выполнять данное задание) и ошибки по содержанию.

Второй этап. Обязательная знаковая фиксация этих ошибок. Нужно разработать и придумать значки для обозначения ***каждой*** ошибки. Фактически вы каждой ошибке придаете какой-то знаковый образ. Нужно создать свою символику. В методике математики не существует такой символики, поскольку не было такого способа работы. Значит, вы пользуетесь той символикой, которую вы с детьми разработаете. Если у вас два класса и вы видите наиболее удачные варианты символики, вы говорите: «Дети в другом классе придумали вот такие значки, как вы считаете, они удачнее наших с вами или нет?» То есть вы либо их принимаете, либо не принимаете.

Следующий вопрос, который должен возникнуть: как обнаружить у себя подобную ошибку и с чего начать? Поэтому после выявления и фиксации ошибок идет третий этап.

Третий этап. Упорядочивание ошибок. Дети должны осмыслить и выстроить, в какой последовательности и как они будут обнаруживать эти ошибки. В результате должен получиться справочник ошибок и карточка, в которой с помощью созданной символики фиксируют: первое — проверь вот это, второе — проверь вот это, третье — проверь вот это. Для способа обнаружения, может быть, вам понадобятся еще дополнительные значки. Например, если ошибки на невнимание: пропуск цифр, лишние цифры в записи числа и т. п., то я начинаю использовать дуги для обозначения класса: $\underbrace{37}\underbrace{568}\underbrace{301}$. Таким образом, я фактически возвращаю значки, которые использовались при работе с многозначными числами, для того, чтобы увидеть, не пропустила ли я цифру, не написала ли я лишнюю.

Те условные значки, которые служили средством для обучения ребенка, теперь могут служить средством для самоконтроля и самопроверки.

По ходу дела важно определять ***причины ошибок***. Для чего?

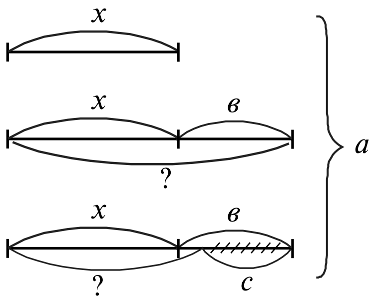
Выяснить, откуда эти ошибки могли прийти, необходимо прежде всего как ни странно для того, чтобы сохранить достоинство ребенка. Поэтому что когда дети допускают ошибки, они выглядят в глазах других детей, мягко скажем, глуповато. Потому выяснение причин ошибки очень важно для понимания того, что человек ее сделал, исходя из реальной ситуации. То есть ошибка естественно могла произойти, как только ребенок формально переносил одни принципы в другие, изменившиеся условия. Например:

1) ***Сложение обыкновенных дробей***. Дети числитель складывают с числителем, а знаменатель со знаменателем. Понятно, что сначала такая ошибка могла пойти от поразрядности выполнения действий с многозначными числами, когда единицы складывали с единицами, десятки с десятками. Потом мы вроде бы устранили эту ошибку, но, после введения действий умножения и

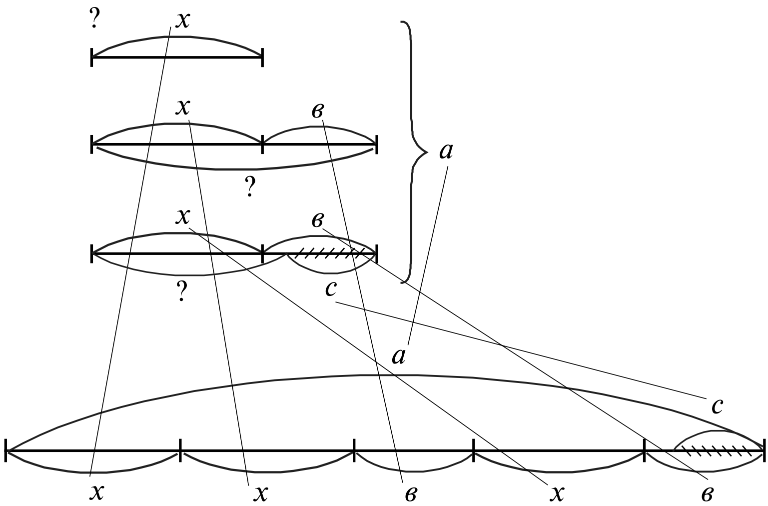
деления дробей, у ребенка опять возникает эта ошибка. Причиной ее может быть: а) следствие поразрядности выполнения действий с многозначными числами; б) работа с новыми действиями умножения и деления, где действительно этот принцип сохраняется: числитель умножают на числитель, а знаменатель — на знаменатель.

2) ***Работа над текстовой задачей***. Когда ребенок переходит от схемы к составлению уравнения, то бывают, при правильно построенной схеме, ошибки в описании отношений (заданных через схему) в знаковой форме, т. е. с помощью уравнения или выражения. Чтобы предупредить эти ошибки, нужно использовать те значки, которые у нас были в начальной школе, когда мы работали над переходом от текста к схеме, от схемы к преобразованной схеме и от нее к знаковой форме. Это были вспомогательные значки — «дорожки». Например, работаем с задачей типа:

В три магазина привезли *а* кг печенья, во второй — на *в* кг больше, чем в первый, а в третий — на *с* кг меньше, чем во второй. Сколько килограммов печенья привезли в каждый магазин? Строим ступенчатую схему, затем обозначаем первую величину буквой *х* (так удобнее):

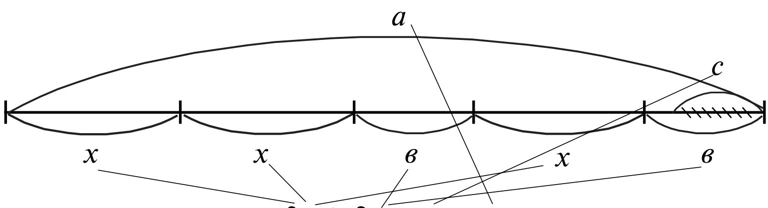


Если мы сразу переходим от ступенчатой схемы к описанию в виде формулы, то дети часто теряют элементы схемы, компоненты действий. Это самая распространенная ошибка. Чтобы устранить ошибки такого характера, чтобы научить ребенка видеть каждую часть, входящую в это целое, мы ввели этап преобразования схемы. Мы преобразовываем ступенчатую схему в схему линейную. Чтобы ничего не потерять, введем «дорожку» от элемента схемы к развертке.



С помощью «дорожек» ребенок следит, чтобы каждый элемент ступенчатой схемы входил в общую линейную схему, в общую величину. Постепенно эти «дорожки» уходили, становились не нужны, так как ребенок видел все части, составляющие целую величину.

При переходе от линейной схемы к составлению уравнения опять могла произойти потеря. Чтобы проверять самих себя, мы «дорожками» показываем каждый элемент равенства:



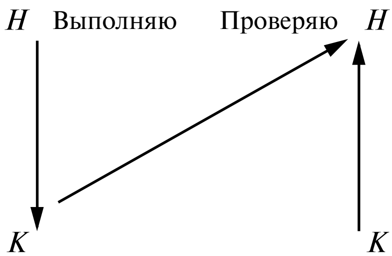
$$3x + 2в - c = a$$

Я вижу, что каждая величина, которая у меня есть в схеме, содержится в уравнении, значит, я ничего не потеряла.

Если дети научились видеть, из чего состоит линейная схема, то преобразовывать ступенчатую схему в линейную не нужно. Ребенок может сразу от ступенчатой схемы, которая соответствует самому условию задачи (с ее помощью можно будет восстанавливать текст задачи), переходить к составлению выражения или уравнения. Когда появляется краткая запись и этап преобразования краткой записи, дети, научившись преобразовывать, смогут по краткой записи и даже по ходу чтения текста сразу составлять уравнение.

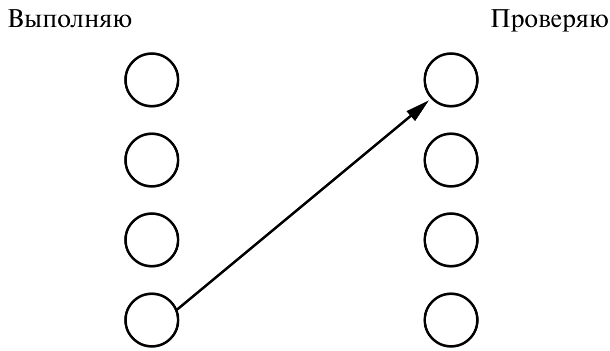
Если ребенок научился действовать, то никакие «дорожки» ему не нужны. Но если вы возвращаетесь к анализу того, какие ошибки могут быть и как их обнаружить, то тогда те значки, которые были на этапе обучения ребенка, ребенок использует вновь для самоконтроля и самопроверки.

Четвертый этап (один из важнейших). Как пользоваться карточкой? Нужно научить ребенка пользоваться карточкой. В придумывании никогда не участвуют все. Обсуждают все, но придумывают значки отдельные дети. Значит, должен быть этап присвоения этих значков. Научиться — это значит присвоить, сделать своим собственным инструментом. При усвоении работы с карточкой очень важна парная работа. Ребенок выполняет задание с начала до конца, затем возвращается в начало, читает карточку и на каждом этапе проверяет, нет ли у него ошибок:



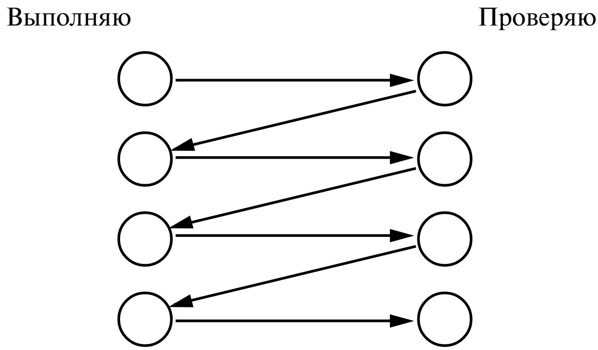
Почему ребенок должен проверять сначала? Под началом подразумевается первая ошибка, которую можно допустить. Например: при сложении десятичных дробей он неправильно подписал числа в столбик, а все остальное сделал абсолютно верно. Следовательно, ошибка началась с первого шага. Первая ошибка на невнимание может быть связана с неправильным списыванием. Например, ребенок часть списал от одного уравнения, а часть от другого, и оно «не решается». Дети привыкли, что в учебниках числа подобраны так, чтобы все везде «решалось», и почти нет ситуаций, когда задание как бы «не решается», т. е. способ решения известен, а конечный результат найти нельзя в связи с отсутствием адекватных средств. Наших детей это не должно пугать. В одной школе детям попалось уравнение с опечаткой. Никто из детей не сказал, что оно «не решается». Когда учитель взял тетради на проверку, то увидел, что у всех ответ записан выражением, значения которого дети не смогли найти.

Если рисовать нашу схему более точно, то в ней есть определенный набор действий, которые ребенок должен был выполнить, и есть определенная последовательность



обнаружения ошибок, которую мы составили. На этапе обучения мы двигаемся вот так:

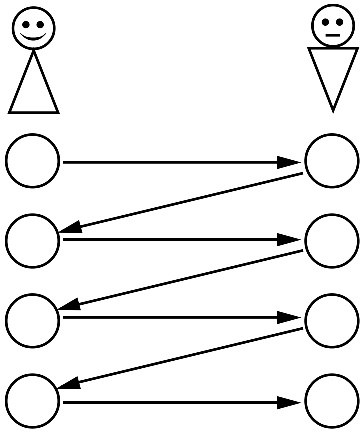
Наша задача состоит в том, чтобы сформировать у ребенка действие самоконтроля. Как будет выглядеть наша



картинка, если у ребенка сформировано действие самоконтроля, самопроверки? Вот так:

Теперь речь идет о пооперационной проверке: выполнил шаг — проверил, выполнил — опять проверил.

Важно в сознании ребенка развести понятия «выполняю» и «проверяю». Есть две «линии»: одна — по выполнению, другая — по контролю. Я должна «в голове» у ребенка это разорвать, чтобы он «видел» эти две «линии». Значит, сначала эти две «линии» надо представить «материализованно», т. е. за одной «линией» пусть «стоит» сначала один



человек, а за другой «линией» «стоит» другой человек. Здесь необходима парная работа.

Научившись решать, ребенок составляет карточку не для себя, а для тех, кого он будет учить (это мотивационный прием). Как научить других делать то, что ты умеешь делать сам, — это проходит красной нитью через всю начальную школу.

Главное: не сначала мы рассуждаем о том, что в какой последовательности нужно делать, не сначала карточку составляем, а потом учим ребенка действовать в соответствии с ней, а ***сначала учимся действовать, а потом*** составляем карточку для других, формируя тем самым у ребенка способность к рефлексии. Если вы составили одну карточку, а ее анализ привел к конструированию другой карточки, то теперь нужно научиться соотносить одно с другим.

Первая карточка	Вторая карточка	Третья карточка
Сделай 1 2 3	Проверь 1 2 3	Куда посмотреть, если сомневаюсь 1 2 3

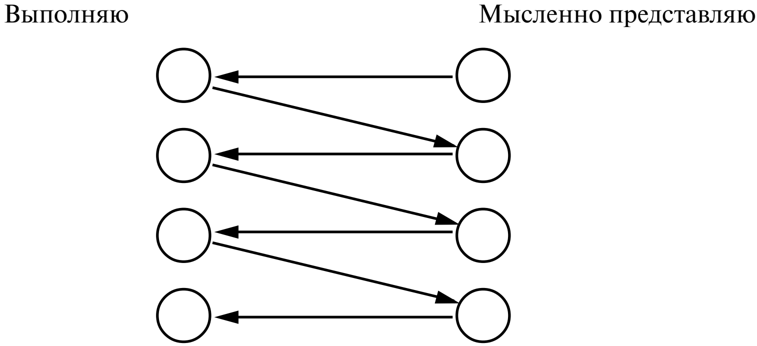
Как должна быть построена парная работа с карточкой? В принципе можно иметь и три карточки.

Как же работают дети? Один выполняет первый шаг, а другой смотрит, можно ли было на этом шаге допустить ошибку, т. е. контролирует его пошагово. При такой работе дети должны меняться ролями. Только после этого можно делать следующий шаг: сам делаю и сам себя контролирую — это результат этого важнейшего этапа.

Пятый этап. Выявление собственных проблем. Когда вы совместно составили карточку для самоконтроля и начинаете работать с этой карточкой, то важно каждому ребенку зафиксировать, где у него лично появляется ошибка, на каком шаге, и отметить эти шаги на карточке, например восклицательным знаком. Рассуждения ребенка: «Я понимаю, что в этом месте я ошибок не делаю, и нечего у себя это проверять (т. е. как бы свернутость действия проверки), но если я допускал несколько раз в одном и том же месте ошибку, то я себе возле этого пункта карточки ставлю восклицательный знак. Это ***моя ошибка, и мне от нее надо избавиться***, значит, я каждый раз должен за собой следить, чтобы не допустить этой ошибки». Ребенок контролирует тот этап, где именно он допускал ошибку. И тогда мы выходим на то, что каждый для себя должен придумать способ, как ее у себя обнаружить. В связи с этим я предлагаю вам ознакомиться с учебными тетрадями для 1-го класса.

Шестой этап. Самое главное — это уметь работать без ошибок, а не сначала их делать, а потом обнаруживать. Значит, теперь я ***сначала*** должна ***посмотреть, где я могу сделать ошибку***, и только после этого начинать действовать.

Тогда на нашей схеме стрелки меняют направление, и она приобретает вот какой вид:



По времени это достаточно длительный процесс, но, работая по такой схеме, вы получите хороший результат.

Наших детей часто боятся брать себе в ученики учителя средней школы. Говорят, что они такие умные, так много знают, что непонятно, что же делать с ними в 5-м классе, если они уже столько всего изучили. Но это же замечательно! Качественная работа превращается в количественную именно за счет того, что в темпах изучения нового материала сначала мы отстаем очень сильно, так как мы все глубоко анализируем. Тем не менее наши дети знают по объему больше, хотя специально такой задачи никто, естественно, не ставил. Поэтому лучше пожертвовать сейчас временем и проделать такую работу на любом материале, чтобы затем, при работе с другим материалом, вы не тратили время. Если вы сконструируете с детьми вот эту последовательность действий для самоконтроля, если построите схему работы для каждого ребенка, то он сможет это переносить на любую другую проблему, которая у него возникнет. Это и характеризует нашу систему: от общего к конкретизации.

Мы привыкли давать 150 упражнений для того, чтобы ребенок «набил на этом руку». В нашей системе ребенок не будет тратить время на выполнение 150 упражнений, а сделает их в 10 раз меньше. За счет чего ребенок будет работать качественно и быстро? За счет глубокого анализа того, в связи с чем один человек может сделать быстро и правильно, а другой не может. Мы идем совсем ***по другому пути формирования навыка***. Мы учим ребенка анализу, рефлексии (осмыслению), планированию. Наши дети не боятся браться за любое задание. Они будут искать и находить разные способы решения. Это следствие и показатель того, что мы учим детей способности к анализу, к тому, чтобы понять и самостоятельно выйти из определенной проблемы. Наша задача состоит в том, чтобы научить ребенка тем способам работы, которые позволили бы ему в дальнейшем ***самостоятельно*** конструировать для себя способы работы с новым материалом и ***самостоятельно*** решать проблему — как научить самого себя действовать быстро и правильно.

Предметом анализа каждый раз должны стать и ***правильность*** выполнения (это то, что связано с наличием у ребенка способности к самоконтролю и самопроверке), и ***скорость***. Но наши дети не будут действовать с такой же скоростью, с какой действуют обычные дети. Это абсолютно закономерно, это следствие нашей с вами работы. Почему? Если мы все время делаем упор на то, чтобы ребенок научился думать, ***прежде чем*** что-то делать, значит, нужно прежде всего построить план своего действия, то тогда очевидной становится задержка по времени. Мы отдельно работаем над правильностью и отдельно должны работать над скоростью. Для этого нужно проанализировать то, с чем может быть связана скорость выполнения: с тем, что ребенок долго думает, или с нерациональным способом действия, или с неавтоматизированными составляющими общего действия (если в общее действие входит несколько операций и они у ребенка не сформированы в свернутом виде, то он их быстро выполнять не может). Тогда ребенок строит для себя индивидуальную карту. Идет переход от общего подхода к индивидуальным проблемам, которые есть у конкретного ребенка, и ребенок сам выстраивает программу действий.

Если ребенок составил для себя индивидуальное задание, потому что у него что-то не получается, то это нужно доводить вместе с детьми до конца, и, может быть, некоторым надо помочь придумать, как им избавиться от ошибок, возможно, и путем каких-то тренировок. Ребенок должен, тренируясь, проверять себя, определять, насколько он уже овладел тем или иным умением. Отличие таких тренировок в том, что они становятся потребностью самого ребенка, исходят от него, а не от учителя, заставляющего ребенка выполнять бесконечные однотипные задания.

Если дети могут выделить ошибки, но при этом не совершенствуют себя в этой области, можно предложить следующее: на каждую ошибку, которую мы выделили и зафиксировали, надо придумывать задания для того, чтобы потренировать себя именно в этом. Прежде чем предлагать детям придумывать задания самостоятельно, даем возможность им выбрать задания из группы заданий, подобранных учителем. Допустим, вы выделили 5 ошибок, а ребенок допускает только одну. Вы предлагаете группу заданий на отработку всех выделенных ошибок, а он должен выбрать только те, которые помогут продвинуться ему именно в том, в чем он ошибается. Другими словами, мы не просто даем готовые задания, а ставим ребенка в ситуацию выбора.

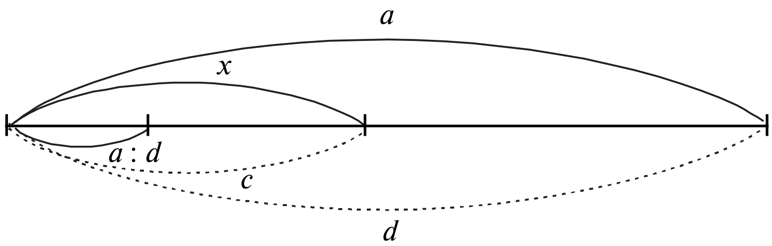
Вопрос: **Как помочь детям в нахождении дроби от числа и числа по его дроби? Это одна из самых сложных тем для моих детей.**

Ответ: Работа над этим материалом состоит в следующем. У вас есть текст. Это может быть текстовая задача или задание типа: найди три седьмых от 21.

В начальной школе тексту предшествовали реальные предметные действия. После этого мы переходили к тексту, который позволял восстановить реальные действия. Если ребенок слабый, то ваш текст для него ничего не значит. Но если вы предложите ему найти три седьмых от конкретного объема и поставите банку с водой, чтобы ребенок реально (переливая) выполнил те действия, которые были записаны в тексте, то у него возникает реальная задача, которую он может решить. Значит, слабый ребенок сначала выполняет практическое действие, которое преобразуется в текст, а потом от текста переходит к схеме, к схеме.

Но многие дети могут свободно, без реальных действий от текста переходить к графическому изображению, к схеме.

Если вы находите дробь от числа, например $\frac{c}{d}$ от a, то у вас должна получиться вот такая схема:



Составьте теперь вместе с детьми все возможные обратные задачи и запишите формулы, которые можно составить. Вы получите не только полный набор задач, связанных с нахождением дроби от числа, числа по его дроби и др., но и все типы задач на ***проценты*** (в этих задачах d всегда равно 100).

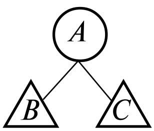
Итак, от схемы вы должны перейти к знаковой форме, к формуле, т. е. к описанию с помощью букв и знаков действий, которые мы выполняем при нахождении дроби от числа: число a делим на знаменатель d и умножаем на числитель c.

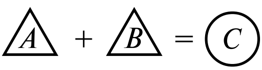
$$x = a : d \cdot c$$

Данная формула соответствует другой формуле: $x = a \cdot \dfrac{c}{d}$, так как требует тех же действий с числами a, c, d, т. е. позволяет число умножать на дробь при нахождении этой дроби от этого числа.

Традиционно от текста сразу переходят к знаковой модели. У вас мог выпасть этап построения схемы, что и могло послужить причиной детских трудностей.

Чтобы помочь ребенку, нам надо при введении задач нахождения дроби от числа и числа по его дроби при рассмотрении всех обратных задач ввести разные обозначения, т. е. ввести какие-нибудь значки, позволяющие различать, где о каком поиске идет речь. В начальной школе мы различали часть и целое с помощью круга (целое) и треугольников (части):



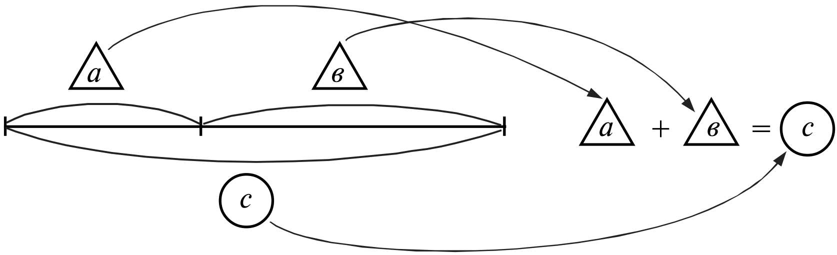


Если вы находите дробь (или проценты) от «чего-то» (числа или величины), нужно обвести вот это «что-то» в кружочек, т. е. показать, что это целое. Но нужны признаки, по которым ребенок смог бы различить, где речь идет о целом, а где речь идет о части.

Сейчас я проведу аналогию с темой «Части и целое», и вы сами придете к необходимости осмысления данной проблемы.

Когда мы работали с формулой $a + в = c$, то ребенок со временем по этой буквенно-знаковой записи мог определить, где часть, а где целое. Как мы этого достигали?

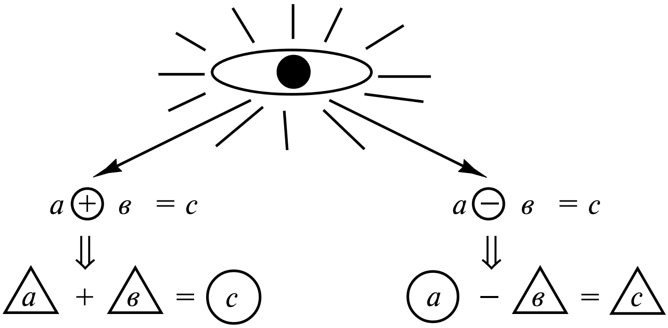
У нас была схема, на схеме мы показывали, где у нас части, а где целое. То, что мы делали на схеме, мы переносили на формулу и тоже показывали, где у нас части, а где целое.



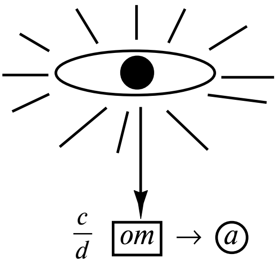
Потом у нас возникала проблема: если я прочитала задачу и пишу сразу знаковую форму, то я как бы обхожусь без схемы. «Нельзя ли, не рисуя схему, по записи формулы определять, где части, а где целое?» — такой вопрос возникает у детей.

С одной стороны, определению частей и целого предшествовал образ. Ребенок может не чертить схему, но представлять ***мысленно***, как бы она выглядела. Потом ***мысленно*** от схемы он может перейти к формуле. Это содержательный способ. А можно проанализировать ***запись*** самой формулы и по ней научиться различать, где часть, а где целое. Тогда не нужно тратить время на то, чтобы возвращаться мысленно к схеме с тем, чтобы потом мысленно перейти снова к знаковой форме. Как это можно делать? Нужно смотреть на знак действия: если стоит «+», то складывать могли только части. Этот знак действия и является средством определения.

Я могу нарисовать глаз и стрелочкой сказать: «Посмотри сначала сюда», т. е. я даю ребенку возможность осмыслить знаковые формы.



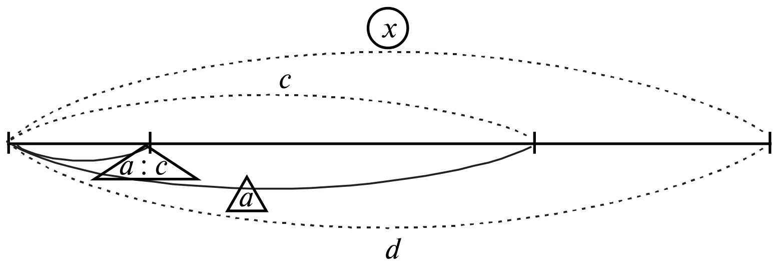
Возвращаемся к нашей теме. У меня записано: «найти $\frac{c}{d}$ от *а*» (найти дробь от числа). Прежде чем выполнять конкретные действия, я должна определить, где здесь целое и где часть. В данной ситуации целым является величина (число) *а*. Теперь, если я захочу свертывать действия и схему не чертить, чтобы мне каждый раз мысленно не создавать схему, я должна научиться по тексту находить «ориентиры». Как я по записи могу это определить? На что я должна смотреть? Раньше я смотрела на знак. Теперь мой взгляд должен упасть на слово «от», и я должна нарисовать над ним глаз, а слово «от» обвести рамочкой или лучше подчеркнуть, так как в рамочку мы брали количество частей при введении действия умножения.

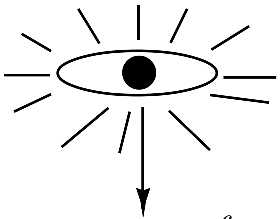


Если у меня написано «от», значит, то, ***от*** чего брали, является целым.

Тогда формируется способ того, как находить часть, если известно целое: последовательным выполнением двух действий — деления и умножения или умножения числа на дробь.

Если же мы находим число по его дроби, то тогда на какое слово должны смотреть? На слово «это» или слово «составляет» («равно»): *a* ***составляет*** $\frac{c}{d}$ всего количества. Тогда величина (число) *a* является частью целой величины *x*. Строю схему:





$$a\ \boxed{\text{составляет}}\ \frac{c}{d}\text{, тогда } x = (a : c) \cdot \boxed{d} \text{ или } x = a : \frac{c}{d}$$

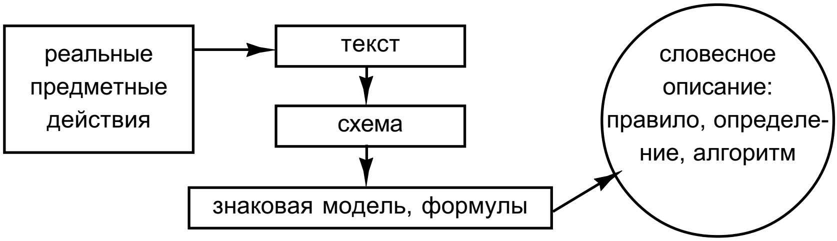
Теперь: та величина, которую ищете, будет больше или меньше данной? Другими словами, соотношение между частью и целым будет определять характер действия, ведь при умножении на дробь я получаю число меньшее, а при делении на дробь — число большее (если дробь правильная, а число $a \geqslant 1$). Значит, для выбора действия нужно соотнести операцию нахождения целого или части с операцией над числами.

Дальше идет этап словесного описания. А что такое словесное описание? На основании всех предыдущих этапов ребенок строит для себя алгоритм, способ работы с данным материалом, т. е. он либо дает словесное определение, либо формулирует правило ***своими*** словами, либо представляет в виде карточки последовательность определенных шагов, определенных операций.

Все время удерживайте один принципиальнейший момент: не говорить о том, как надо делать, а ***сначала дети учатся делать***, а только ***потом говорить об этом***, потому что если я могу сделать, то у меня и ***слова найдутся***. Эти слова будут моими словами, и не надо в этом случае требовать специальных формулировок, таких, какие есть в учебнике. Все слова должны идти от ребенка.

Вот это и является завершением, итогом нашей работы. Но не забудьте о действии контроля и о необходимости в индивидуализации этой работы.

Итак, схема работы:



Вопрос: **Ваша программа рассчитана только на среднего ученика, или слабого ученика вы тоже учитываете?**

Ответ: Я считаю, что если мы разработали и поняли психологические особенности слабого ребенка, выстроили методику работы и логику построения курса с учетом слабого ребенка, а это значит, что тем самым я работаю и на сильного тоже. Они, как известно, нужны друг другу: сильному — слабый, слабому — сильный. Задавая 16 уровней овладения детьми понятиями (вернитесь на с. 15. — *Авт.*), я даю возможность для глубокого осмысления всего материала и одаренным детям, которые могут быть в этом классе. Пусть их немного, но они существуют, значит, чем старше становятся дети, тем больше мы должны думать о том, каким образом дать возможность всем детям реализовать себя.

Вопрос: **У меня в классе есть 2—3 человека, которые на уроке сидят, молчат и не участвуют в работе, при этом они не все слабые. Я не знаю, что мне делать.**

Ответ: Приятно, что даже 2—3 человека вызывают беспокойство. Причин может быть несколько. Конечно, трудно ставить диагноз, не видя пациентов, но попробуем проанализировать ситуацию.

1) Например, исследования Т. П. Хризман в Институте дошкольного воспитания показали, что мальчики не терпят, когда им дважды одно и то же повторяют, и часто отказываются работать. Девочкам, наоборот, надо несколько раз проговорить, а значит, при постановке задачи для одних важна фронтальная постановка (вы вслух проговариваете, обсуждаете), а другим детям не нужны ваши рассуждения, они от них устают и перестают работать. Таким детям нужна четкая письменная формулировка задачи, которая возникла и которую они начинают решать.

2) Возможно, у этих детей не была сформирована учебно-познавательная мотивация, был утрачен интерес к учению уже в начальной школе. Ведь те дети, у которых отсутствует учебная мотивация, не обязательно слабые по уровню развития, но у них нет желания соучаствовать при разрешении проблем. Это может быть связано либо с повышенной утомляемостью (те темпы, с которыми вы работаете с остальными детьми, не удовлетворяют их), либо с отсутствием устойчивого интереса.

Что же делать в данной ситуации?

Для начала надо искать внешние мотивационные способы для того, чтобы ребенок захотел начать работать. Вы должны сами понять, кто из детей и по какой причине не участвует в работе, и тогда попытаться найти индивидуально для каждого какие-то «внешние» мотивы:

1) можно попробовать собрать этих детей в одну группу с тем, чтобы кто-то из них взял ответственность на себя;

2) вы заранее лично предупреждаете ребенка, что сегодня придумали на урок нечто и будете счастливы, если именно он организует эту работу.

Интересно отследить, как «внешняя» мотивация постепенно превратится в мотив учения.

Есть дети, которые охотно включаются в работу, но сильно утомляются и быстро теряют интерес. Опять нужно проследить: если они быстро готовы сделать задание, то тогда вам нужно их выводить на методический уровень или просить готовить для класса что-то вперед.

Нельзя действовать так: умный ребенок быстро решил, я ему карточки написала с трудными заданиями, и он у меня сидит и решает, главное, чтобы был занят и не мешал заниматься со слабыми детьми. Если у ребенка еще не сформирована учебная деятельность (а уровень овладения УД как раз и характеризуется способностью и потребностью ребенка в самоизменении), т. е. он не осознает потребности менять самого себя, то рано или поздно у ребенка может пропасть интерес и к специальным заданиям на карточках. Чтобы интерес не пропал, ребенок должен делать работу, которая нужна будет не только ему (он может пока еще не осознавать этого), а нужна будет всем. Вы реально должны показать, как важна эта работа для всех остальных. Например, у вас класс в течение одного или двух уроков выходил на решение задачи, а 2–3 ребенка сделали ее за 15 минут, представили ее в модельной форме и пошли вперед. Вы представляете работу классу и обращаете внимание на то, как здорово у них получается. А потом предлагаете подумать, почему у одних получается быстро, а у других — медленно. Вот это и приведет к анализу: почему у одних получается быстро и правильно, у других — быстро и неправильно, у третьих — медленно и правильно, а у четвертых — медленно и неправильно. Получилось 4 варианта. Их можно развести и каждый вариант отдельно анализировать. Для анализа таким детям всегда нужно дать пищу для размышления, это способствует не просто увеличению объема того, что может ребенок, т. е. не просто изменяется количество, а изменяется качественная сторона. Получается, что вы как бы искусственно сдерживаете темпы этих детей. Если они раньше всех сделали задание, то вам надо им дать работу, которая продвигает их дальше. Но тогда они будут все время опережать других и вам придется как-то эту работу упорядочивать, чтобы не получалось так, что эти дети уже знают определенный материал, а остальные дети до этого еще не дошли, и вам придется тогда создавать группы, подгруппы и т. д. Но если вы даете этим детям углубляющую работу, которая не нужна всем остальным, то, таким образом, вы снимаете эту проблему.

Мнение: Интересно, что в классах РО даже слабые дети называют любимым предметом математику.

Комментарий: То, что даже слабые ученики называют любимым предметом математику, говорит о том, что у ребенка сформирована учебная мотивация. Не ситуативно на данном уроке, а сформирована устойчивая мотивация, устойчивый интерес, который не зависит от его собственных успехов. Ему все равно интересно заниматься математикой.

Вопрос: **Ребенок не хочет работать в группе, хочет додуматься сам, отказывается включаться в обсуждение, пока сам для себя не решит проблему, но у него на это уходит очень много времени. Как быть?**

Ответ: Это серьезная психологическая проблема. С одной стороны, это здорово, это великолепно, что ребенок не ждет ни от кого помощи, хочет самостоятельно добиться результата, но ему нужно время.

С другой стороны, у ребенка на данном этапе еще не сформирована способность в определенный момент остановиться, заняться другим. У него пока нет «тормоза». Если я дома решаю какую-нибудь задачу, то могу ее пометить и отложить, а потом ночью к ней вернуться. Я могу одну задачу решать неделю. Но мы, взрослые люди, способны переключаться, а ребенку переключение сделать очень трудно. Получается, что, с одной стороны, нельзя вынуждать ребенка прекратить думать (с тем, чтобы он потом подумал, а сейчас начал обсуждать со всеми), а с другой стороны, если вы ему даете неограниченное время на обдумывание, то после этого он уже не сможет включиться в работу класса.

Можно попробовать следующее: всех желающих думать самостоятельно отсадить подальше, пусть работают сами, а группу ребят, которые еще не умеют работать индивидуально, посадить вперед, но так, чтобы между ними было расстояние. Надо определить место, где собираются те, кто закончил свою индивидуальную работу, и место для тех, кто откажется от попыток решить проблему самостоятельно. Нужно также организовать группу контроля, потому что, может, ребенок решил, но неправильно, а проконтролировать сам себя он не может.

Можно попробовать организовать работу через ролевое распределение не внутри группы, а между группами.

Вопрос: **В классе есть дети, которые до сих пор не могут работать индивидуально. Они хорошо и спокойно работают только в паре. На обычном уроке это возможно, а как быть при проведении самостоятельных работ?**

О т в е т: Если ребенок слабый, то он мог еще не перейти на тот этап, когда он может проверять сам себя. У слабеньких детей темпы работы замедленные, поэтому то, что дети продолжают работать в парах, — это ***естественно***. Они в парах работают лучше, чем индивидуально. Такие дети еще не готовы к индивидуальной работе, и это абсолютно нормальная ситуация. Этого не надо бояться, а, наоборот, надо легализовать. Вы можете спокойно давать им самостоятельные работы, только делаете следующее: если у ребенка, который начинает работать индивидуально, возникает потребность в общении с соседом, то нужно это разрешить при одном условии. В том месте, где ребенок обращается к другу, он ставит какую-нибудь пометку, значок: палочку, галочку (речь идет о практических заданиях, когда ребенок останавливается и не может дальше выполнить). Этот значок прежде всего нужен учителю. Тогда вы посмотрите, где, на каком этапе у ребенка происходит «сбой», который не дает ему дальше работать индивидуально. Нужно провести классификацию «сбоев», т. е. как бы составить для себя перечень сбоев — прописать, где, в каких местах дети испытывают затруднения. Это очень важно для того, чтобы понять детскую проблему. И тогда, по результатам классификации и анализа, можно действовать дальше.

В этой ситуации также можно предлагать не парную работу, а индивидуальную с большим количеством работ оценочного характера, т. е. давать детям на проверку работы с ошибками. Например, ксерокопировать работу ребенка (без фамилии) из параллельного класса и дать детям на проверку. Если ребенок научится искать ошибки в чужих работах, то на следующем этапе он сможет пытаться выходить один на один с собственной работой.

М н е н и е: Дети в РО не списывают.

К о м м е н т а р и й: Если в начальной школе не было никаких отметок, если формировалось действие контроля и оценки, то списывать и не должны.

М н е н и е: При работе парами некоторые дети подавляют других. И мне казалось, что дети, которые молчат и слушают тираду, которую обрушивают на них активные ребята, в процессе обсуждения как бы не участвуют и не понимают, о чем речь идет. Зато когда они начинали действовать самостоятельно, то меня удивляло, что молчащие дети вдруг выдавали такие шикарные работы.

Еще интересно, что не бывает так, что один и тот же ученик всегда впереди. Получается как бы по цепочке: то у одного необыкновенная работа, то у другого, то у третьего...

Комментарий: Когда смотришь со стороны на наших детей, то невозможно определить, кто из них сильный, кто слабый. Одни проявляют себя в одном, другие в другом, так как у каждого есть возможность реализовать свои способности.

Вопрос: **Что делать, если дети во время групповой работы сильно шумят, хотя и по делу?**

Ответ: Если во время групповой работы появляется содержательный шум, значит, в группе не было обсуждения распределения ролей между детьми. Если идет групповая работа, то должен быть человек, который берет на себя функцию организатора и следит за тем, чтобы дети не кричали, а разговаривали тихо. Также в группе может быть человек, который следит за временем, от этого зависит темп урока.

Вопрос: **Семиклассники говорят: «Надоело нам все самим выводить, прочитайте нам лучше лекцию». Как поступать в этом случае?**

Ответ: Это значит, что вы дошли до ситуации, когда нужно пойти не столько от лекции, сколько от работы с книгой, когда ребенок сам пытается разобраться в новом материале, опираясь на разные подходы, на разные описания понятий. Как только дети будут выходить на уровень, когда у них возникает острая потребность уже не самим открывать новое (действительно, не будешь же всю жизнь изобретать велосипед), нужно предлагать детям не просто прочитать текст и рассказать, а проанализировать его. Вы говорите: «Я готова вам прочитать лекцию, только составьте мне вопросы». Дети должны составить программу вашей лекции, план, по которому вы будете излагать материал. То есть ваша лекция должна быть предварена обсуждением целого ряда вопросов, которые, как им кажется, могли бы возникнуть после изучения данного понятия, тех вопросов, на которые они хотели бы получить ответы для того, чтобы убедиться, что они этим понятием владеют. Они могут попросить дать определение, способы действия и т. д. Вопросы, которые будут задавать дети, покажут вам, насколько ваши ученики ориентируются, просматривая незнакомый по содержанию материал, насколько они научились работать с книгой.

Вопрос: **В чем причина того, что дети хорошо работают устно, но плохо выполняют письменные работы?**

Ответ: При переходе от устных к письменным заданиям могут быть огрехи групповых форм. Это происходит тогда, когда учитель после групповой работы не переходил к парной работе, а от парной не переходил к индивидуальной, т. е. то же самое задание, которое вы делали в группе, ребенок должен сделать потом в паре, а только после этого перейти на индивидуальную работу. Письменная работа — это чисто индивидуальная работа.

Вопрос: **На чем основывается классификация текстовых задач?**

Ответ: Классификация текстовых задач основывается на графических моделях. Не от количества действий, не от содержания, а от графической модели мы выходим на типологию задач.

Какими графическими моделями мы пользуемся при решении любых текстовых задач? Это линейные модели (с помощью отрезков); плоские модели: квадраты, прямоугольники, круги (в том числе круги Эйлера), опираясь на которые я могу решать целый класс текстовых задач; знаково-графические модели (таблица или краткая запись); графики функций в декартовой системе координат; графы и др. Классификация задач построена на основе вот этих разных моделей.

Когда мы строим схему, описывающую действие сложения, то эта схема относится не только к сложению, но и к вычитанию. Если строите графическую схему на умножение, то она же относится к делению. Но это уже не схемы, а модели, которые служат для решения целого класса задач.

Для того чтобы выйти на новую модель, я каждый раз должна буду проделывать фактически одну и ту же работу. Сначала я предлагаю задачу, которую ребенок легко решает с помощью построения схемы. Создав ситуацию успеха, я даю задачу, которая внешне похожа на предыдущую, но решается быстро и рационально, например с опорой на диаграммы Вена (круги Эйлера). Ребенок, пытаясь построить линейную схему, ***обнаруживает дефицит собственных знаний*** и понимает, что в такой ситуации, когда у него возникают трудности и линейная модель не позволяет ему быстро решить задачу, ***нужно конструировать новый вид модели***. Следовательно, дети сами выходят на новый способ моделирования. Поэтому каждый раз переход к новому типу задач, в этом смысле, предполагает необходимость конструирования того или иного типа модели. Разобравшись и проанализировав то многообразие текстовых задач, которое есть в школьном курсе математики, можно посмотреть, какими моделями ребенок должен пользоваться.

Если рассматривать геометрические задачи, то конструирование моделей, отображающих геометрические величины, т. е. построения планиметрические, стереометрические, — это и есть графическое моделирование — изображение разных отношений внутри объекта через их представление в графической форме и работа с графической моделью, которая помогла бы ребенку найти, натолкнуться на способ решения.

Вопрос: **У детей возникают трудности в понимании текста задачи. Как решить эту проблему? Как она может быть обнаружена?**

Ответ: Если ребенок по тексту не может составить схему, то, скорее всего, у него возникла проблема с пониманием текста.

Здесь может быть, как мне кажется, три проблемы:

***Первая проблема*:** ребенок не умеет структурировать текст, т. е. читать его в той последовательности и такими частями, которые бы позволили ему построить схему. Я беру сейчас те задачи, к которым удобно строить линейную схему (с помощью отрезков). Например, если у вас текстовая задача начинается с вопроса, то ребенок не знает, откуда ему начинать читать, чтобы построить отрезки.

***Вторая проблема*:** ребенок не понимает смысла текста с точки зрения языка, так как текст построен сложными предложениями или содержит слова, смысл которых ему неясен.

***Третья проблема*:** ребенок не соотносит текст задачи с реальными событиями, реальными предметными действиями. Он читает задачу и воспринимает ее как нечто чисто математическое, не соотносит это математическое с тем, что происходит в реальности. Как только вы начинаете переводить задачу на язык реальных действий, ребенок начинает представлять это в действительности. После этого ему понятно, как решать эту задачу. Например, если задача про магазин, то достаточно спросить: «Ты ходил в магазин, сам что-нибудь покупал, вот представь себе, что ты купил то-то и то-то...» И ребенку все становится ясно.

Как же разрешить эти три проблемы?

Решение первой проблемы: для структурирования текста нужна специальная работа непосредственно с текстом. Она должна была быть в начальной школе.

В 1-м классе мы начинаем с того, что текстовую задачу читает только учитель, никакой хорошо читающий ученик не должен читать задачу. Почему? Потому что, кроме учителя, никто не знает, где нужно сделать остановку. Учитель, читая задачу, делает остановки так, чтобы ребенок мог описать в виде схемы данную часть текста. Идет синхронная работа. Учитель читает часть текста и делает остановку. Ребенок сразу чертит элементы схемы, т. е. является как бы переводчиком на язык схем.

Потом дети выполняют обратное задание: по схеме придумывают текстовую задачу. В процессе работы ребенок должен осознать, что сначала он работает с элементом схемы, т. е. начинает придумывать текст от какого-то элемента схемы. Построить текст можно по-разному: начать с вопроса или с условия. Все время идет работа, условно говоря, «туда и обратно». На основании этого можно говорить о разных типах задач. Можно типологию строить на основе структурирования текста: перехода от структуры текста к схеме и, наоборот, от схемы к структуре текста.

Вернемся на время к вопросу о том, что письменные работы дети выполняют хуже, чем работают устно. На контрольной или на проверочной работе текст учитель пишет на доске или он дан в книге. Это означает, что вы ставите ребенка перед проблемой структурирования данного текста с тем, чтобы он начертил схему. Но если учитель никогда этой работой с детьми не занимался, то у наиболее способных детей это умение формируется и без нашего участия, а у слабых детей этот этап выпадает. Поэтому на первых порах на контрольной работе учитель сам читает детям записанную на доске задачу по частям, а дети чертят схему. Вы увидите, что тогда ситуация решения будет гораздо лучше. Можете провести эксперимент: одну задачу дайте на самостоятельное решение, а аналогичную прочитайте сами и посмотрите, какие будут результаты. Вы сразу увидите, кто из детей может самостоятельно структурировать текст, а кто не может.

Как сделать так, чтобы ребенок осознал необходимость структурирования текста? Может быть, он и структурирует, но делает это неосознанно. Ребенок не осознает, что он такое делает, в результате чего у него получается чертить схему, а у другого не получается. Поэтому сама методика направлена на то, чтобы дать возможность ребенку осмыслить именно этот способ действия. В чем состоит эта методика? Я спрашиваю детей: «Кто из вас хорошо и ***быстро*** умеет читать?» Предлагаю этому ребенку прочитать задачу для класса, подчеркивая, что он хорошо читает. Чем лучше он в этом смысле будет читать, тем труднее будет всем детям строить схему. Значит, какая реакция должна быть, что будут кричать дети? «Не спеши!» и т. д.

Необходимо сделать так, чтобы дети через себя пропустили вот эту ситуацию и поняли, что «хорошо читать», с точки зрения чтения, в математике имеет совсем другой смысл. Умения «читать задачу» и «читать» надо развести: чем лучше ребенок будет читать, тем меньше детей успеют начертить схему, т. е. способ работы таков: не говорить детям, как надо делать, а надо дать возможность ребенку осуществить ***реальное действие***, чтобы он осознал сам. Эта ситуация дает толчок для осмысления того, как же надо читать задачу, и теперь ***предметом анализа*** становится способ чтения задачи, т. е. ее структурирование. Итак, для того, чтобы построить схему и решить задачу, нужно научиться читать задачу. Появляются такие типы заданий: прочти, разбей задачу на части и расставь последовательность чтения частей: с чего ты начнешь читать, какая часть текста позволяет тебе начать строить схему, и т. д. Это этап соотнесения частей текста задачи непосредственно с построением схемы.

Решение второй проблемы: если у ребенка в первом классе нет смыслового чтения, то о самостоятельном чтении задачи не может идти речи. Он все равно не поймет смысла. Если же вы ему прочитаете текст, то он ее решит. У него самого все силы уходят на то, чтобы прочитать текст задачи, а не на то, чтобы его осмыслить.

Если в классе есть дети, которым читать тяжело, то, может быть, для таких детей нужно, чтобы пока учитель читал им текст задачи. Они тогда лучше будут понимать, о чем идет речь в задаче, по сравнению с тем, когда читают самостоятельно.

Решение этой проблемы также может быть связано с преобразованием самого текста, с поиском других слов для описания этих же отношений, этого же сюжета. Дана задача: «У Маши было 5 яблок, это оказалось на два меньше, чем у Коли. Сколько яблок было у Коли?»

Можно преобразовать так: «У Маши было 5 яблок, а у Коли на 2 яблока больше. Сколько яблок было у Коли?»; мы преобразовали с точки зрения математики, с точки зрения заданного отношения между величинами. Это преобразование не касается отношений между ними.

Решение третьей проблемы: возможно, вы увлекаетесь текстовыми задачами с конкретными числовыми данными. Если вы в основном работаете только с такими задачами, то это как раз и может приводить к отрыву текстовых задач от реальных действий. Если вы задаете буквенные данные и просите подобрать вместо букв подходящие числа, принадлежащие области допустимых значений (ОДЗ) по отношению к выполнимости арифметического действия и ОДЗ, связанной с реальностью, то тогда в ответе быть не может «$\frac{1}{2}$ землекопа» (как в известном мультфильме).

Когда в задаче только числовые данные, то это превращается для ребенка в некий математический объект, с которым ему нужно расправляться, и никакого отношения к реальности это не имеет, он этой связи не ощущает. Только задачи с буквенными данными вынуждают ребенка задуматься о связях с реальными ситуациями.

Если большинство текстовых задач в учебниках даны с числовыми данными, то, прежде чем решать задачу, нужно вернуть ребенка как бы к исходной ситуации. Вы говорите, что автор вместо букв придумал подходящие, как ему кажется, числа, и предлагаете детям оценить, действительно ли подходят эти числа к сюжету, к смыслу задачи.

По отношению к выполнимости действия вы не сможете этого определить до тех пор, пока действие не будет выполнено. Ведь для выбора и выполнения действия они должны установить все связи. Другими словами, пока они не построили схему, оценить это невозможно. Это можете определить сразу только для простейших задач в одно действие. Например: «Мама купила 10 яблок, 3 яблока съели. Сколько яблок осталось?» Ребенок, понимая способ решения задачи: 10−3, сразу может сказать, что эти числа подходят, потому что я могу от 10 отнять 3. Если в задаче сказано, что мама купила 10 яблок, а 15 яблок съели, то ребенок сразу скажет, что такого не может быть, что автор подобрал числа неправильно, потому что если 10 принесли, то как можно съесть 15, мы не можем от 10 отнять 15.

Сразу же можно оценить, подходят числовые данные или нет, с точки зрения соответствия реальным ситуациям. Например, если в условии дано, что мама принесла 10 яблок, а папа принес в 1 000 000 раз больше или мама принесла 1 000 000 яблок, а папа в 2 раза больше, то понятно, что такого быть не могло. Тогда нужно заменить эти числовые значения подходящими, а потом можно сказать, что у другого автора эта же задача была с другими данными. Теперь вы предлагаете несколько вариантов, а ребенок должен разобраться, какие из них подходят, а какие — нет.

Таким образом, прежде чем решать задачу, дети должны восстановить буквенные данные, т. е. нужно сначала восстановить эту задачу в том виде, в каком она могла быть первоначально представлена (до того, как вместо букв были подставлены подходящие числа). Поэтому прежде чем решать задачу, нужно карандашом зачеркнуть числовые данные и написать буквы. Это «восхождение» от частного случая к общему. Здесь может возникнуть проблема: в какой ситуации одинаковые числа нужно заменять одинаковыми буквами, а в какой — разными? Возникает целый ряд новых интересных задач.

Теперь, когда задача решена в буквенном виде, т. е. вы составили уравнение или выражение, содержащее как неизвестную величину, так и величины, обозначенные буквами, мы приводим детей к решению уравнений или рассмотрению выражений с параметрами. Опять появляются новые типы заданий: дети исследуют, при каких значениях букв задача будет иметь решение, а при каких вообще не будет иметь решения; при каких значениях букв задача будет иметь единственное решение, а при каких — несколько решений. Это уже речь пойдет об области допустимых значений (ОДЗ) по отношению к выполнимости арифметического действия. Таким образом, задолго до того, как мы начнем работать с функциями, вы имеете возможность работать с ОДЗ.

Необходимо осуществить переход именно на область допустимых значений, а не на отдельные числовые значения. Дети вам будут предлагать разные числовые значения для каждой буквы: один — одно, другой – другое. Все они могут входить в область допустимых значений, но это будут отдельные значения из ОДЗ, которые нужно либо перечислить от самого маленького до самого большого, либо указать интервал. От чего это будет зависеть? От содержания задачи. В учебнике 3-го класса есть такие задания: по схеме придумай такой текст задачи, чтобы вместо букв можно было подставить дробные числа, или придумай такую текстовую задачу, чтобы вместо букв можно было подставить только натуральные числа. Эти задания ориентированы на формирование у ребенка представлений об ОДЗ.

В о п р о с: **Дети не боятся никаких заданий, берутся за любое дело, но очень боятся контрольных работ. С чем это может быть связано?**

О т в е т: Это может быть связано с отметкой. Если начальная школа шла на поводу у администрации и ставила отметки (а отметка — это кнут и пряник) и ребенок приходил домой с тройкой за контрольную, то, хотите вы или нет, у ребенка сформировался страх перед этой отметкой за контрольную или любую другую письменную работу. Ведь оценивание, которое мы делаем в РО (читайте Г. А. Цукерман), гораздо качественнее и продуктивнее по своему результату, чем просто отметка, которую элементарно поставить всегда, уже зная детей.

При проверке письменных работ отметку ставьте в свою тетрадь для анализа работ, а детям раздавайте тетради без отметок. Когда вы проведете качественный анализ вместе с детьми, когда ребенок найдет свои ошибки, тогда по результатам этого анализа он сам делает вывод в форме отметки и своей детской рукой сам себе поставит отметку. Это компромиссная форма. Тогда тот барьер, о котором вы говорите, может быть, будет чуть-чуть преодолен.

Я проводила эксперимент в Екатеринбурге, на экспериментальной площадке «Новая школа» (директор Е. Ю. Штукина). Я дала детям разные схемы задач и предложила выбрать, с их точки зрения, самую трудную, самую интересную и самую легкую задачу. У многих трудная и интересная задачи совпали (она мне интересна, потому что она трудная, объясняли дети). После того как они сделали классификацию и обосновали свой выбор, я предложила решить любую из этих задач. Что было интересно: дети, которые перешли в класс РО только на третьем году обучения из традиционной школы, в качестве трудной и интересной называли одни задачи, а решать брали другую, самую легкую. Почему? Отметок им в этой школе не ставили, однако ребенка связывал засевший в нем страх перед отметками, которые ему ставили раньше, в другой школе. Он боялся, что не решит задачу и ему дома попадет. Остальные дети выбрали для решения трудную или интересную задачу (если они не совпадали). Этот эксперимент вы можете провести на своих детях. Может быть, тогда вы и получите ответ на свой вопрос.

Вопрос: **Можно ли давать нашим детям традиционные контрольные работы или лучше составлять свои?**

Ответ: С одной стороны, можно и нужно составлять самим. Кто, кроме вас, знает способности этих детей? С другой стороны, интересно посмотреть, как дети выполнят традиционную работу. Часто, по рассказам учителей, наши даже слабые дети делают то, с чем они никогда не встречались. Это еще срабатывает наша традиционная психология, наш собственный страх того, что если мы с детьми такого не решали, то они и не решат. Решат, если это не связано с такими словами и понятиями, которые ребенок даже на бытовом уровне не встречал. Однажды в Луганске, во время проверки по РО, детям дали задачу, включающую обыкновенную дробь, а они работали только с десятичными и с позиционными дробями в разных системах счисления. По выражению директора школы, администрация испытала состояние шока, а дети — лишь легкого недоумения. Они спросили: «А что это там за «палка» такая (была запись $\frac{3}{5}$), что это написано?» Получив ответ: «Это исходную (основную) мерку разделили на пять равных частей и в величину вошли три таких части (три новых вспомогательных мерки). Просто записали по-другому, не через запятую $0{,}3_5$, а в таком виде: $\frac{3}{5}$», дети прекрасно справились с заданием.

Кстати, я составляла контрольную диагностическую работу нового типа. Она одна на 6 лет по теме «Действительные числа и действия с ними». Я даю один и тот же текст в 1-м классе, во 2-м, в 3-м и т. д., наконец, в 6-м. Раз в год, в начале или в конце, или и там, и вы предлагаете ее детям. Она показывает, что могут знать дети из того, что учили, или из того, что не учили, но ребенок этим владеет. Откуда? Либо его кто-то научил, либо он сам сделал обобщение. Например, в 1-м классе, как только рассмотрели числовую прямую, сравнение, сложение и вычитание чисел с помощью числовой прямой, дети «поселили» на ней числа -1, -2, -3 и т. д., потому что слышали о них и стали с удовольствием работать с отрицательными числами. Их никто этому не учил, они просто самостоятельно перенесли тот способ действия, который они открыли для чисел в одной части числовой прямой, на другую ее область и сконструировали способ сложения и вычитания с отрицательными и положительными числами.

После проведения такой работы необходимо провести индивидуальный опрос и сделать пометочки, по какой причине дети справились с данной работой:

1) либо ребенка кто-то научил этому;

2) либо это следствие того, чего мы и хотим с вами добиться: способности к анализу и переносу общих подходов осуществления деятельности на конкретные ситуации. У ребенка появляется потребность в расширении сферы своей самостоятельности, в обогащении своих возможностей,

что, по словам В. В. Репкина, является важнейшей особенностью учебных действий, которыми он овладел;

3) либо ребенок сам вперед заглядывал в книги и узнал это. Такая работа может быть очень интересна с диагностической точки зрения.

Вопрос: **Тяжело без сборника контрольных и проверочных работ. Приходится работы составлять самим. Все время преследуют сомнения: если дети хорошо справились — кажется, что дала слишком легкую работу, плохо выполнили — опять я виновата, составила слишком трудную. Как найти золотую середину?**

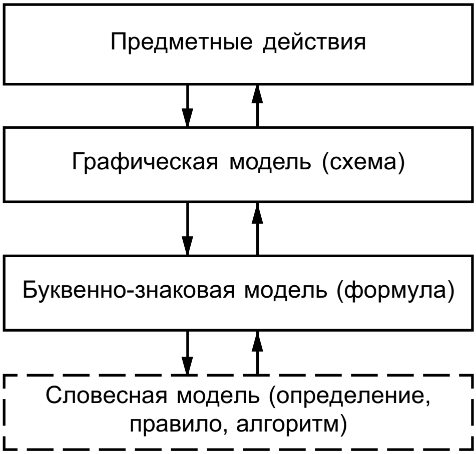
Ответ: Контрольная работа проверяет обширный материал, и проверяет с отсрочкой по времени (дается только после изучения следующей темы, т. е. через тему), а проверочные работы даются по ходу изучения темы. Самое главное в проверочных работах — это зафиксировать не то, что знают дети, что у них получилось, а то, что не знают. Вы сами говорите, что если дети все сделали, то возникает страх, что работа была слишком легкой и поэтому они ее решили. Скажите детям: «Эту работу вы сделали и показали, что этот материал вы знаете, а теперь попытайтесь понять, чего вы не знаете». Нужно попытаться увидеть возможность разрыва между знанием и незнанием и с помощью детей выйти на те проблемы, которые они видят, а мы, может, и не видим.

Вопрос: **За счет чего будет развиваться математическая речь ребенка?**

Ответ: Развитие математической речи детей полностью будет зависеть от богатства речи учителя и от создания им таких ситуаций, которые требовали бы синонимичных высказываний. В своей речи вы должны использовать как можно больше синонимов, расширяющих словарь ребенка. Совершенно не нужно бояться математических терминов, вводите их естественно, но только в той ситуации, когда ребенок вас понимает. Например, вы говорите: «У тебя какая точка зрения? Ты мог бы объяснить, как ты считаешь? Аргументируй, пожалуйста, свой ответ. Мог бы ты привести доказательство?» или «Назови самое маленькое число, которое ты мог бы поставить вместо буквы *a*. Какие еще числа подходят?» Ребенок начинает перечислять числа.

«Как бы ты это сказал короче?» Он скажет: «Числа от 2 до 5». — «Правильно ли я тебя поняла, область допустимых значений — от 2 до 5? Такие числа подходят?» Поверьте, что еще один-два урока — и ребенок будет употреблять эти термины. Главное, что в этот момент он понимает, о чем вы сейчас говорили, потому что вы сопровождаете собственную грамотную математическую речь движениями рук, записями на доске, и ребенок без труда понимает, что является предметом вашего разговора. Только ни в коем случае не нужно повторять хором, как надо правильно говорить, не нужно заставлять ребенка: «Повтори, как надо было правильно сказать, я тебе скажу, а ты повтори». Этого категорически не нужно делать. Если вы будете разговаривать с ребенком нормальным взрослым языком, то рано или поздно ребенок начинает с вами разговаривать тем же языком.

На этапе словесного моделирования ребенок пытается самостоятельно, своими словами, объяснить то, как он действовал, сопровождая свои действия графической моделью и составлением формул, описывающих математические отношения между теми величинами, о которых идет речь. В начальной школе, когда запас слов у детей еще маленький, когда они сами еще мало и плохо читают, надеяться на то, что дети дадут вам красивую формулировку, очень трудно. У детей порой не хватает слов, чтобы грамотно выразить собственную мысль. Однако этап конструирования словесной модели не является предметом исследования в начальной школе, поэтому на схеме мы показываем его пунктиром:



Дети станут старше, и постепенно предметом исследования, а значит, и рефлексии станут словесные формулировки. Не просто математическая речь, а именно словесное моделирование. Теперь, когда дети сделали попытку обосновать, сформулировать правило, вы предлагаете им групповую работу. Сначала для того, чтобы обсудить суть, содержание этого правила, а затем — чтобы обсудить, какими словами лучше передать, сообщить это правило, этот вывод. Постепенно нужно выходить на те обороты речи, которые используются для формулировки правила, определения. Нужно попытаться найти в рамках любого определения как бы точку отсчета и представить в модельной форме, как лучше это делать. Нужно осмыслить, что должно быть отражено в определении, чтобы определение не путалось с правилом, чтобы правило не путалось с алгоритмом. Хотя с помощью правила можно составить алгоритм выполнения действия, в котором будет прописан более тщательно операционный состав действия, выполнять которое можно на основании правила. Одно дело сказать: чтобы сложить два числа с разными знаками, нужно поставить знак большего по модулю числа и от большего модуля отнять меньший, а другое дело составить алгоритм выполнения:

1) найди число с бо́льшим модулем;
2) подчеркни это число;
3) поставь знак этого числа;
4) найди модуль каждого числа и т. д. Алгоритм может быть более тщательно прописан, может состоять из более крупных шагов, но он всегда представляет собой правило.

Задача конструирования словесного описания — это особая задача, и наскоком ее не возьмешь. Когда это целесообразно начать делать, вы будете видеть по своим детям. Пока дети к этому не готовы, вы можете использовать ***методический прием***, который позволяет задать определенные образцы речи. Вы выслушиваете речь ребенка и говорите: «Я тебя правильно поняла? Так ли ты рассуждал?» После этого вопроса следует ваша правильная, грамотно выстроенная речь. Это можно использовать и по отношению к алгоритму, и по отношению к правилу, которое ребенок пытался сформулировать, и по отношению к определению, которое он пытался дать, желая научить другого.

Вопрос: **Что делать, если дети за лето забывают изученный материал?**

Ответ: Вряд ли дети за лето могли забыть то, что глубоко понимали. То, что они забыли, — это наши с вами «дырки». Весь изученный ранее математический материал все время в работе, поэтому мы имеем возможность вернуться к любой теме, в которой были проблемы. Например, даете конкретно-практические задания, выполнение которых требует понимания того материала, который вы хотели бы вспомнить с детьми, и они сами обнаружат свои пробелы. У вас всегда есть возможность снова вернуться и вместе с детьми пройти путь формирования «забытого» понятия. Этот факт становится очевиден при анализе логики построения курса математики.

Вопрос: **У детей, которые учатся по вашей программе, сильно развита рефлексия, но отстает формирование навыка. Так должно быть?**

Ответ: Конечно, нет. Отставания в формировании навыка быть не должно, если учитель начальной школы действовал в точном соответствии с методикой формирования навыков, а она существенно отличается от принятой. Однако это не означает, что не должно быть того, что мы называем тренировкой, потому что тренировка нужна как предмет анализа. Если ребенок не будет выполнять за определенное время определенное количество заданий, то у него нет основания для рефлексии, для осмысления того, почему одни делают быстро, а другие — медленно. На первом семинаре речь шла именно об этом. То новое, что я хотела заложить в программу формирования теоретических понятий, как раз и состояло в том, чтобы на основе рефлексии и анализа строить формирование навыка, чтобы, опираясь на учебную задачу, решение которой требует содержательного обобщения, сформировать у ребенка качественные навыки.

В системе РО умения, знания, навыки (УЗНы, а не ЗУНы) должны стать средством для реализации идей РО. УЗНы есть то, что помогает сформировать у ребенка учебную деятельность, то, что позволяет сформировать теоретический тип мышления. Именно умения, знания, навыки являются средством этого формирования. Логика построения курса, его математическое содержание, последовательность в развертывании математических понятий ориентирована на более качественные УЗНы. Они формируются более медленно, но без отставания в смысле качества.

У некоторых авторов проблемы навыка не существует не потому, что ее нет, а потому, что в логике курса эта проблема не является для самого автора актуальной. Формируется, например, теоретический тип мышления, а вычислительный навык идет как бы в приложение, параллельно основному содержанию, он не значим в этой логике. Как научатся считать, так и научатся — это не так важно. С этим, конечно, можно согласиться, но вряд ли эту позицию разделяют учителя и тем более родители, которые в большинстве своем считают, что школа (начальная) должна прежде всего научить считать.

Однако если мы будем стоять на такой позиции, то все, что связано с РО, вряд ли у нас получится. Если же взять некоторые идеи РО и попытаться их реализовать в традиционной школе, то вы, безусловно, можете получить лучший результат. Но это будет не РО, а улучшенный традиционный подход. Суть моего подхода заключается в том, чтобы соединить обе задачи. Если у детей в результате специально организованной работы над элементарными вычислительными навыками в начальной школе возникает бешеная потребность сидеть и считать по 20 примеров, значит, я сформировала у ребенка эту потребность. На малозначимом для нас материале удалось найти исследовательскую жилку. За счет этого исследования, этой работы ребенок приобретает, не замечая сам, определенный навык. Дальше он может его совершенствовать, но не только за счет многократного повторения, а за счет способности к рефлексии и анализу.

В о п р о с: **Какие уроки лучше проводить открытыми для учителей традиционной школы?**

О т в е т: Раньше я всегда рекомендовала на открытый урок что-нибудь красивое. Например, показать, как рождается мысль у детей, или провести урок постановки задачи, чтобы продемонстрировать, как прекрасно дети могут рассуждать.

Потом я поняла, что такие уроки нельзя давать открытыми для непосвященных людей, что нужно давать другие уроки. Не нужно показывать, как мы тщательно работаем над одной задачей (это интересно показывать единомышленникам), а для традиционных учителей нужно показать привычное для них: знания, умения, навыки, а главное, показать многое из того, что умеют дети, чему уже научились. Для этого можно предложить одной группе схему к одному типу задач, другой — к другому, третьей — к третьему и т. д. с тем, чтобы дети показали разнообразие сюжетов придуманных ими задач, показали, как они составляют уравнения по схемам, как работают с областью допустимых значений букв. Правда, продемонстрировав большой объем и качество ЗУНов на одном уроке, мы иногда получаем обратный эффект: некоторые учителя старших классов с ужасом выходят с таких уроков, сопровождая их словами: «Они такие умные и так много знают! Что же я с ними буду делать в пятом классе?!»

Вот так, все мечтаем об умном ученике, желающем и умеющем учиться, а когда получаем такого ученика, то испытываем страх и не хотим иметь с ним дело. Парадокс!

НАВИГАТОР ПО ЗАДАНИЯМ УЧЕБНИКА ДЛЯ 1 КЛАССА

Информация для учителя

Все задания, содержащиеся в учебнике, обеспечивают достижение учащимися образовательных результатов, предусмотренных ФГОС НОО. Конкретизировать использование заданий помогут приведенные далее сводные таблицы.

При работе с навигатором надо иметь в виду, что достижение образовательных результатов не ограничивается выполнением отдельных заданий учебника. Такие результаты можно получить только на основе системной работы со всеми учебными и методическими пособиями данного УМК в комплексе.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА «МАТЕМАТИКА» В 1 КЛАССЕ

Наиболее значимые задания учебника на обеспечение личностных, метапредметных и предметных образовательных результатов

Задания на обеспечение личностных результатов	Задания на обеспечение метапредметных результатов	Задания на обеспечение предметных результатов
Книга 1: стр. 12–14, 20–21, 45–46, 62, 86–87, 116–117 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–6, 12, 15, 20, 21, 26, 41, 42–43, 53, 66, 75, 78, 99, 100. *Книга 2*: стр. 6–7, 39–40, 74–75 (постановка учебно-практической задачи); №№: 142, 146, 178–180, 203, 222, 224, 225.	*Книга 1*: стр. 12–13, 20–21, 45–47, 62–63, 116–117 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–4, 6, 7–9, 15–17, 18–22, 36–39, 41, 43–45, 59–62, 66–73, 75, 85, 88, 91, 92–95 *Книга 2*: стр. 6–7, 39–40, 74–75 (постановка учебно-практической задачи); №№: 142–156, 173, 176, 178–181, 182, 187, 189, 193, 196–199, 203–209, 212–214, 219, 224, 227–229, 236, 240, 243.	*Книга 1*: №№: 3, 4, 18, 20–25, 26–28, 32, 34–40, 43–45, 49–52, 55–58, 59–67, 72—73, 79, 81–85, 94–95, 99 *Книга 2*: №№: 142–144, 146–148, 151, 156, 160, 163, 165, 166, 178–185, 190, 195, 198, 203, 204–207, 220, 231–236, 239–242.

1. Задания на достижение личностных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Развитие самостоятельности и личной ответственности: • способность слушать и слышать собеседника, готовность прийти на помощь в совместной деятельности; • умение понимать и принимать точку зрения другого человека и аргументировать собственную.	*Книга 1*: стр. 12–14, 20–21, 86–87 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–6; 7–10, 11–29, 32–40, 42–44, 347–48, 50–53;58–69, 71, 78–80, 82–83, 86, 95, 97, 117, 131, 133, 138 *Книга 2*: стр. 6–7, 39–40 (постановка учебно-практической задачи); №№: 142–148, 150, 152, 156, 163, 170, 172, 176, 180–188, 189–194, 198, 212, 214, 224, 225, 242.
Овладение начальными навыками адаптации в динамично изменяющемся и развивающемся мире: • умение в коммуникации осуществлять постановку новых целей и задач (в пределах своих возможностей); • развитие навыков сотрудничества со взрослыми и сверстниками.	*Книга 1:* стр. 12–14 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–30, 34–41, 44–46, 49, 52–66, 72–75, 81–89, 92, 99–100, 128. *Книга 2:* стр. 4–7, 39–40 (постановка учебно-практической задачи); №№: 142–150, 151–156, 163–169, 173–177, 188–190, 193, 196–198, 203–207, 222–225, 236–242.
Принятие и освоение социальной роли ученика: • готовность активно осваивать новое содержание,	*Книга 1*: стр. 12–14, 20–21, 35, 45, 62–63, 126 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–6, 7, 9, 12–

открывать новые способы решения учебно-практических задач (в пределах своих возможностей); • готовность к саморефлексии причин успешности / неуспешности своей учебной деятельности.	13, 15–16, 18;19–25;26–29, 32–40; 41–45, 56, 62, 65–97; 98–99, 135–139; *Книга 2*: №№: 142–155, 165–169; стр. 39–40 (постановка учебно-практической задачи); №№: 178–185, 189–194, 196–198, 200–207, 211–230. Задания в игровой форме: *Книга 1:* стр. 12–14, 20–21, 48–56, 86–87, 102–103, 116–117, 126–127 (постановка учебно-практической задачи); №№: 7, 12, 18–21, 30, 32, 38, 40–41, 45, 46, 49, 52–53, 61, 66, 70, 72, 73–75, 77–79, 85, 88, 94, 116; *Книга 2:* стр. 4–5, 39–40, 74–75, 215–218 (постановка учебно-практической задачи); №№: 144, 146, 155–156, 181, 194, 200, 203, 212, 215–218, 220, 242–243. Рубрика «Проверь себя»: *Книга 1:* стр. 19, 24, 62, 84, 101, 115, 125, 137; *Книга 2:* стр. 38, 70, 100, 111, 130 Рубрика «Это интересно»: *Книга 2:* стр. 125, 132–136.
Формирование эстетических потребностей, ценностей и чувств: • готовность к самореализации (выражения себя) в	*Книга 1:* стр. 21 (постановка учебно-практической задачи); №№: 2–5, 7–9, 12, 14–16, 21–22, 28, 39–40, 66, 70, 72–75, 89, 91, 95, 99–

различных видах творческой и проектной деятельности.	109, 122, 125, 130, 136, 138. *Книга 2:* №№: 145, 166, 169–172, 176–177, 182, 185, 187, 189, 196, 198, 202, 212–218, 221–225, 227, 231, 234–242; стр. 106 (№26); стр. 107 (№ 27); стр. 108 (№30); стр. 111 (№36).

2. Задания на достижение метапредметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Учебно-логические универсальные действия: • овладение логическими действиями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, классификации по родовидовым признакам, установления аналогий и причинно-следственных связей, построения рассуждений, отнесения к известным понятиям; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности проводить сравнение и классификацию способов решения задач по самостоятельно выбранным основаниям и критериям; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности схематизации и моделирования;	*Книга 1:* №№: 1–4, 7, 9, 19–23, 27–30, 32–42, 46–57, 59–65, 67–71, 75–77, 79, 81, 97, 110–141. *Книга 2:* №№: 142–154, 156–157, 159–177, 178–193, 196–199, 203–217, 221–228, 230, 231–243; стр. 103–111 (№№ 1–36).

• формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности выделять в процессе анализа задачи требование и условие.	
Учебно-информационные универсальные действия: • формирование способности к кодированию и декодированию информации; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности записывать, фиксировать полученную из разных источников существенную и несущественную информацию, в том числе с помощью инструментов ИКТ.	*Книга 1:* №№21, 26, 38, 55–57, 62, 75, 94–95, 155–156 *Книга 2:* №№: 181, 186, 188, 189, 196, 197, 200, 205, 209–211, 234; стр. 103–111 (№ 1–36); стр. 125–136, стр. 139 (№1) Математические прописи: №№ 7–14, 16–20, 21–25, 30, 47–48, 56, 68.
Универсальные учебные действия решения задач: • формирование умения решать учебно-практические задачи по освоенному способу; • формирование умения понимать, что причина неудач при решении учебно-практических задач может находиться в неправильно осуществленных учебных действиях; • формирование умения понимать причины успеха/неуспеха учебной деятельности и способности конструктивно действовать даже в ситуациях неуспеха.	*Книга 1:* стр. 12–14, 20–21, 48–56, 86–87, 102–103, 116–117, 126–127 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–3, 7, 9–10, 18, 20–22, 26–28, 32–39, 41–43, 49–52, 55–57, 59–62, 66–73, 75–77, 79, 80–87, 88–91, 92–97, 99–109, 122, 123, 127, 141; *Книга 2:* стр. 6–7, 40–41, 74–75, 113–114 (постановка учебно-практической задачи); №№: 142–154, 156, 159–177, 178–193, 195–199, 203–230, 231–243.

Основные группы коммуникативных результатов	
Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на передачу информации другим людям: • формирование умения слушать собеседника, задавать простые вопросы в процессе диалога; • формирование умения задавать вопросы в процессе диалога, необходимые для организации совместной деятельности и сотрудничества с партнерами при решении учебно-практических задач; • умение договариваться о распределении функций и ролей в совместной деятельности.	*Книга 1:* №№: 1–7, 10–18, 20–22,26–28, 32–40, 42–44, 47–48, 54–59, 63–72, 86–89, 91, 93, 97, 99–100, 123, 129, 130, 133, 137, 140–141. *Книга 2:* №№: 142–145, 152–157, 165, 169, 172–176, 177, 181, 183–184, 187, 189, 190, 193, 198–202, 205, 207–210, 211–213, 218, 224–226, 231,242; стр. 103 (№1–31).
Основные группы регулятивных результатов	
Регулятивные универсальные учебные действия целеполагания: • формирование умения принимать цель учебно-практической задачи и сохранять ее при выполнении учебных действий.	*Книга 1:* стр. 12–14, 20–21, 48–56, 86–87, 102–103, 116–117, 126–127 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–3, 7, 15, 18–19, 21, 24, 25, 26, 28, 31, 33, 37, 53, 59, 62, 66, 80, 92, 94, 99, 122, 123. *Книга 2:* стр. 6–7, 39–40, 74–75 (постановка учебно-практической задачи); №№: 142, 143, 144, 166, 178, 180, 192, 193, 198, 203.
Регулятивные универсальные учебные действия планирования:	*Книга 1:* №№: 4–6, 11, 12, 15, 19, 20, 21, 23,

• формирование умения следовать установленному плану нахождения способа решения задачи.	27, 40, 42, 44, 59, 95–97, 99–110, 118–119, 125, 129–131. *Книга 2:* №№: 162, 164, 173, 235.
Регулятивные универсальные учебные действия контроля и коррекции: • формирование умения осуществлять пошаговый и итоговый контроль по результату решения задачи, самостоятельно обнаруживать ошибки и вносить коррективы при решении учебно-практической задачи.	*Книга 1:* №№: 13, 14, 15, 21, 40, 42, 44, 76–77, 85, 88, 89, 91, 99–110, 112. *Книга 2:* №№: 148, 162, 165, 169, 176, 182, 189, 207–208, 211, 222, 236, 243.
Регулятивные универсальные учебные действия оценки: • формирование умения адекватно воспринимать предложения и оценку учителей, товарищей, родителей и других людей; • формирование умения, используя результаты контроля и оценки, вносить необходимые коррективы в решение учебно-практической задачи.	*Книга 1:* №№: 10, 13–17, 21, 50, 57, 58, 67–70, 79, 81–84, 89, 94, 99–110, 112, 116, 128. *Книга 2:* №№: № 148, 152, 163, 169, 176, 182, 185, 189, 193, 207, 208, 211, 222, 236, 243; стр. 103 (№1–30).

3. Задания на достижение предметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Непосредственное сравнение предметов по разным признакам:	*Книга 1*: №№ 1–141.

• умение выделять разные свойства в одном предмете и непосредственно сравнивать предметы по разным признакам: по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, количеству, форме, цвету, материалу, углам и др.	
Моделирование отношений равенства и неравенства между величинами: • уметь моделировать равенства и неравенства величин с помощью отрезков (графическое моделирование) и с помощью буквенной формулы (знаковое моделирование); • уметь изготавливать и конструировать модели геометрических фигур, предложенных в рабочей тетради, перекраивать их при сравнении площадей.	*Книга 1:* №№: 43–45, 51, 56, 58, 61–71, 76, 81, 88, 91, 110–141 *Книга 2:* №№: 142–199, 203–212, 219–22, 228–229, стр. 103 (№1–36).
Сложение и вычитание величин: • уметь производить сложение и вычитание величин при переходе от неравенства к равенству и обратно; исследовать ситуации, требующие сравнения величин и чисел, им соответствующих. • уметь прогнозировать результат сравнения величин путем их оценки и прикидки будущего результата;	*Книга 2:* стр. 6–7 (постановка учебно-практической задачи); № 142–177.
• уметь описывать явления и события с помощью величин;	*Книга 2:* стр. 39–40, 47 (постановка учебно-практической задачи);

	№№142, 143, 144, 146, 152, 155, 158, 180, 194, 198, 200, 203.
• сложение и вычитание величин как способ решения задачи на восстановление целого: уметь владеть понятием «части и целого»; уметь описывать отношения между частями и целым с помощью схем и формул; уметь разбивать фигуры на части и составлять целое из частей плоских и объемных фигур;	*Книга 2:* стр. 39–40 (постановка учебно-практической задачи); №№: 178–199.
• уметь решать уравнения типа $a+x=b$, $a-x=b$, $x-a=b$ с опорой на схему;	*Книга 2:* стр. 74–75 (постановка учебно-практической задачи); №№: 203–220.
• уметь строить графические модели отношений (схемы) при решении несложных текстовых задач (с буквенными и числовыми данными), связанных с уменьшением или с увеличением величин; уметь составлять текстовые задачи по схеме и формуле; • уметь придумывать вместо букв «подходящие» числа и заменять числовые данные буквенными; • уметь выполнять сложение и вычитание в пределах 10; уметь представлять состав числа первого десятка с опорой на дошкольную подготовку на основе понятия части и целое.	*Книга 2:* №№ 160–162, 168, 185, 200, 207, 208, 209, 211–230. Стр. 103 (№1–30).

*   *   *

Программа обеспечена учебно-методическими комплектами для каждого года обучения.

1) учебники для каждого года обучения:
2) методические пособия «Обучение математике» (для каждого класса);
3) рабочие тетради (для каждого класса);
4) проверочные работы (для каждого класса).

Приложение 2

ПРОГРАММА

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В основу новых Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) положен культурно-исторический системно-деятельностный подход (Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов и их ученики и последователи), согласно которому содержание образования проектирует определенный тип мышления. Ориентация на развитие теоретического типа мышления предполагает построение учебных предметов как систему научных понятий, усвоение которых напрямую зависит от формирования учебной деятельности и организации учебных действий ребенка.

В концепции образовательных стандартов подчеркивается, что обучение осуществляет свою ведущую роль в умственном развитии прежде всего через содержание, которое в свою очередь определяет методы, формы организации и общения детей, характер дидактических материалов и другие стороны учебного процесса.

Данная программа по математике и соответствующий ей УМК изначально были ориентированы на деятельностный подход в обучении (теоретические положения этой научной школы легли в основу ФГОС нового поколения). Это означает, что они позволят реализовать цели и задачи ФГОС, поскольку ориентированы как на достижение предметных, личностных и метапредметных результатов, так и (как следствие) на формирование разных компетенций младших школьников, опираясь при этом на исторический подход при изучении основного математического понятия — понятия числа.

Содержание курса математики представлено целостной системой специальных (ключевых) учебно-практических задач, с которых и начинается всякая новая тема, а не набором заданий развивающего характера. Итогом решения учебных задач являются прежде всего обобщенные способы действий, позволяющие формировать у ребенка универсальные учебные действия (УУД), а новые знания, задаваемые как основания детского умения, становятся качественно иными (формирование навыков при таком подходе становится не целью, а одним из средств для овладения УУД). Условия решения таких задач либо воссоздают ситуации, в которых зарождалось исторически то или иное понятие (к примеру, понятие числа), либо задают реальные жизненные ситуации (к примеру, введение смысла умножения). Такой подход, по замыслу разработчиков ФГОС, даст возможность получить метапредметные результаты. Более того, решение подобных задач с неизбежностью требует организации коллективно-распределенных форм деятельности, что создает оптимальные условия для получения предметных, метапредметных и, конечно, личностных результатов, а математическое содержание приобретает личностно значимый характер. Именно содержание учебного предмета должно создавать благоприятные условия для развертывания учебной деятельности детей и способствовать интенсивному развитию мышления и мыслительных операций, связанных с ними: анализа, рефлексии и планирования.

Однако конструирование учебной программы не только предполагает отбор содержания, но и требует осознания связи содержания усваиваемых знаний и умений с психическим развитием ребенка.

Ориентация на развитие ребенка предполагает опору на активные методы обучения, формирующие у школьника универсальные учебные действия. Это означает, что знания не должны даваться ему в готовом виде. Они должны быть получены в совместной деятельности с другими детьми и учителем как организатором и соучастником процесса обучения.

Основным математическим понятием, определяющим главное содержание данной программы и всего курса школьной математики в целом, является «действительное число», представленное в начальной школе в виде целого неотрицательного числа.

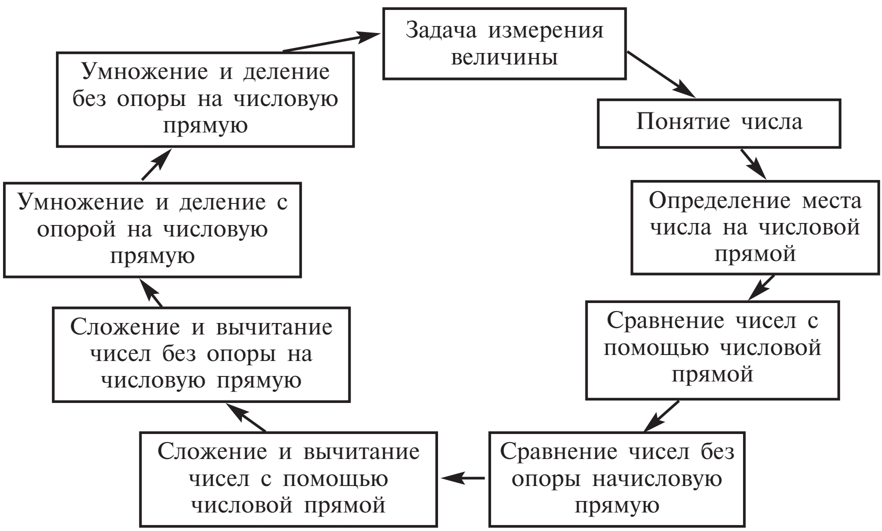
Существуют разные точки зрения относительно изучения этого базового математического понятия в начальной школе. Однако речь идет о построении начального курса математики как части целостного учебного предмета, представленного системой понятий, которые рассматриваются через систему учебных задач. Поэтому становится ясно, что преемственность в обучении требует уже в начальной школе рассматривать основное математическое понятие — понятие числа через понятие величины как системообразующего понятия курса математики. Измерение величин, в отличие от счета предметов, требует организации практических действий, и не в одиночку, а совместно с другими детьми, т. е. в коллективно-распределенной, групповой форме деятельности, вынуждает ребенка общаться, действовать руками, что является основой для развития моторики, коммуникативных умений, расширения познавательных интересов, установления межпредметных связей.

Операцией, специфической для способа измерения величин, является «откладывание» единицы измерения (мерки) на измеряемой величине и счет таких «откладываний». Число в этом случае является характеристикой величины и зависит не только от измеряемой величины, но и от выбранной мерки. Меняя условия, при которых с помощью практических действий решается задача измерения и обратная ей задача построения (воспроизведения) величины посредством «откладывания» мерок (единиц измерения), учащиеся будут «выращивать» различные виды чисел, знакомясь с общепринятыми способами их обозначения. Ориентация на обобщенные способы действий является одной из новых задач ФГОС.

Основным средством, фиксирующим результаты сравнения величин, их сумму и разность, служат различные графические модели: схема, числовая прямая, числовой луч, а начиная со 2 класса вводятся диаграммы, использование которых впервые рекомендовано в начальной школе. Опора на графическую модель, так же как и на знаковую (формулу), позволяет изучить отношения равенства-неравенства, частей и целого, которые служат основой при обучении решению текстовых задач и уравнений. Предлагая уже с первого класса задачи с буквенными данными, мы ставим ученика в ситуацию поиска необходимых сведений (информации), анализа сюжета задачи для подбора «подходящих» чисел, а к 4 классу ученик столкнется с задачами-ловушками, к которым отнесем задачи с лишними данными, с недостающими данными и др. Именно они дают возможность ученику оценить потребность в дополнительной информации, определить ее возможные источники , проанализировать ее. Работа с информацией как раз и отличает новые подходы в обучении не только математике, но и другим предметам, что в итоге дает возможность формировать информационную, а значит, и компьютерную грамотность.

Все понятия, как уже было сказано выше, в том числе и базовые понятия величины и числа, вводятся через учебно-практические задачи. Так, в 1 классе это задачи, в которых необходимо подобрать предмет, обладающий изучаемым свойством, а затем, когда речь пойдет о величине, нужно непосредственно измерить ее соответствующей меркой. Результатом измерения всякий раз будет являться число. Процесс измерения и его результат описываются с помощью графических моделей (схем), в частности числового луча и числовой прямой.

Сравнение, сложение и вычитание величин и чисел, которые их характеризуют, с опорой на числовую прямую служат **общим основанием** к конструированию арифметических действий с любыми числами. Схематично логика изучения понятия числа и действий с ним может быть представлена так:



Изучение каждого вида чисел (а в начальной школе рассматриваются не только однозначные и многозначные числа, принадлежащие множеству целых неотрицательных чисел, но и десятичные дроби, позволяющие ученику осознать общий принцип образования позиционного числа и общий принцип выполнения арифметических действий с ними — принцип поразрядности) в строго определенной логике позволит ученику на более поздних этапах освоения математики самостоятельно проектировать свое продвижение в предмете при условии осознания этой ***общей*** для всех видов чисел логики, существенно повышая мотивацию и интерес ребенка. Представляется, что именно в этом и есть смысл ***преемственности*** содержания и целостности школьного курса математики.

Использование числовой прямой (а не числового луча) в качестве основной графической модели дает возможность заложить общие подходы для изучения арифметических действий по отношению не только к целым неотрицательным числам, хотя именно они являются носителями этих общих способов действий с числами, но и к другим видам чисел.

Так, например, способы сравнения, сложения и вычитания чисел с помощью числовой прямой (точнее, двух числовых прямых) позволяют без проблем ввести аналогичные операции над положительными и отрицательными числами в основной школе (что было опробовано на протяжении ряда лет).

Для знакомства с десятичным принципом образования многозначных чисел дети, как и ранее, обращаются к задаче измерения: сначала они измеряют длину, теперь будут измерять площадь. Измерение и построение величин по частям с помощью системы мерок (длины, площади) дает возможность перейти к табличной форме записи чисел, позволяя сравнивать их между собой без построения самих величин. Замена системы мерок для измерения длины (площади) с произвольной основной (исходной) меркой и постоянным отношением между ними, в том числе с отношением кратным 10, позволяет «оторвать» число от числового значения величины (именованного числа) и рассмотреть многозначные числа как результат измерения величины любой системой мер (и десятичной в частности). Осознав основной принцип образования многозначного числа (в пределах 4 и более разрядов), можно перейти к изучению сложения и вычитания многозначных чисел «столбиком».

Методика обучения действиям с многозначными числами опирается на использование предметных моделей (плоских геометрических фигур) для обнаружения основного принципа выполнения любого арифметического действия – принципа поразрядности. Анализируя этот принцип, нетрудно прийти к выводу: при поразрядном сложении сумма однозначных чисел (табличные случаи) может быть меньше десяти, равна десяти или больше десяти. Оценив сумму, ученик может определить, какие разряды при сложении двух (и более) многозначных чисел «переполняются», а какие нет, может (ничего не вычисляя) узнать, сколько цифр (знаков) получится в сумме, и в завершение может вычислить цифру[37] в каждом разряде. Другими словами, прежде чем выполнить то или другое арифметическое действие, ему необходимо будет сделать оценку и прикидку, чему, как известно, в новых стандартах придается особое значение как важным учебным навыкам. Этому в полной мере отвечает, с нашей точки зрения, методика обучения выполнению арифметических действий.

Таким образом, определять количество цифр в результате действия дети будут не только при делении, как это принято традиционно, но и при вы-

---

[37] Для краткости будем употреблять термин *цифра* вместо *однозначное число, записанное с помощью цифры*.

полнении всех арифметических действий. Общий подход к выполнению любого арифметического действия позволит значительно облегчить формирование прочных вычислительных навыков, поскольку не требует от ребенка постоянной перестройки и запоминания способов, отличающих одни вычисления от других. Подчеркнем, что навыки выполнения письменных вычислений и на их основе приемов устного счета (а не наоборот!) формируются путем анализа операционной структуры каждого арифметического действия, анализа различных способов его выполнения, содержательного анализа ошибкоопасных мест (составление «справочника ошибок»), что делает формирование навыков вычислений не самоцелью, а средством для развития анализа, рефлексии и планирования (в том числе мысленного) как характеристик теоретического типа мышления. Формирование у учащихся нового типа мышления — одна из приоритетных задач, поставленных перед школой ФГОС.

В соответствии с описанным выше подходом к формированию обобщенных способов действий особое внимание уделено месту и последовательности изучения таблиц сложения всех однозначных чисел от 0 до 9 (а не от 1 до 9!), работе над приемами их составления и запоминания. Формирование навыков табличного сложения и вычитания (а потом и табличного умножения и деления) происходит на основе непроизвольного запоминания, которое является результатом (следствием) исследования зависимости между изменяющимся слагаемым и цифрой в разряде единиц у двузначной суммы, которая получается при «переполнении» разряда:

$$\mathbf{9 + 4 = 13;}\quad \mathbf{8 + 7 = 15}\quad \text{и т. п.}$$

Конструирование приемов устных вычислений и их обоснование опираются на свойства действия с использованием не только графических моделей, но и предметных.

Для того чтобы смысл одного из важнейших математических понятий — умножения не был подвергнут «ревизии» в основной школе, мы рассматриваем его как особое действие, связанное с переходом в процессе измерения величин к новым меркам (В.В. Давыдов). Становится очевидным, что при таком предметном смысле действия умножения произведение может быть найдено (вычислено) разными способами в зависимости от того, какие числа получились в результате измерений.

Как и при изучении сложения и вычитания, изучение умножения и деления (как обратного действия) строится с опорой на графическую модель (схему) и предметную (используются конструкторы «Лего»). Умение изображать отношения между компонентами действия с помощью схемы позволит ученику описать одно и то же отношение с помощью нескольких формул: $a \cdot b = c,\ \ c : a = b,\ \ c : b = a.$

Таким образом, при введении понятия умножения мы движемся не от суммы к произведению (произведение дробных чисел, которое рассматривается в 5—6 классах, в отличие от натуральных не может представлено суммой одинаковых слагаемых, как этому учат в начальной школе, что только усугубляет проблему преемственности с основной школой), а от произведения к сумме, что позволит задать ***общий*** (для всех видов чисел) ***смысл*** действия умножения.

Одной из важнейших учебных задач в данном варианте обучения математике является «конструирование» способа умножения многозначного числа на многозначное, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это традиционно принято.

Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддержания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что снимает необходимость в специальном предварительном заучивании таблиц, а в процессе формирования приемов будут закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Завершается изучение арифметических действий с многозначными числами «конструированием» деления многозначного числа на многозначное, которое требует предварительного освоения новых типов заданий, а затем уже последовательного выполнения следующих операций:

а) нахождения первого неполного делимого по известному делителю (и, наоборот, нахождения возможных делителей при неизвестном неполном делимом), что, как правило, требует «разбиения» разрядов;

б) определения количества цифр в частном по уже известному неполному делимому (и, наоборот, нахождения первого неполного делимого по известному количеству цифр в частном);

в) определения «подсказок»[38];

г) подбора цифр в частном с помощью умножения и опоры на «подсказки» (и, наоборот, восстановления «подсказок» по известной цифре частного), а не на округление делимого и делителя, как это принято. Такой подбор дети выполняют не делением, а умножением, что значительно облегчает задачу определения цифры в частном.

Овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для классификации устных и письменных вычислений.

Для проверки вычислений в тех случаях, когда ученик сомневается, ему предлагается в ряде заданий использовать калькулятор.

Итак, описанный подход к изучению умножения и деления, аналогич-

---

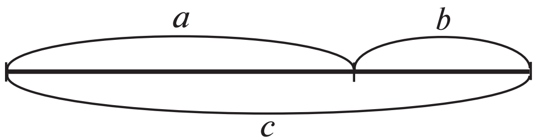
[38] Понятие «подсказка» введено в связи с принципиально новым подходом к обучению обобщенному способу деления любого многозначного числа на любое многозначное число (а не «дозами»: сначала на однозначное, затем на двузначное, трехзначное и т. д.), значительно облегчая подбор цифры и сокращая время такого подбора.

ный подходу к изучению сложения и вычитания, дает возможность значительно упростить методы обучения решению текстовых задач, задавая обобщенный способ работы над задачей (не от действий к выражению, а от выражения к действиям).

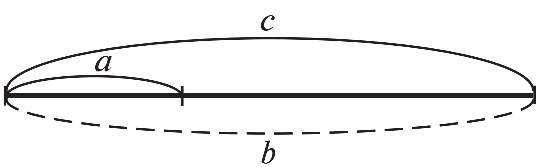
Достаточно научиться изображать отношение «целого и его частей» с помощью схемы в двух ситуациях:

1) если части, из которых составлено целое, неравные, то отношение между ними может быть описано тремя основными формулами: $a + b = c$, $c - a = b$ и $c - b = a$, где a и b — части, а c — целое.

Схема отношения выглядит так:



2) если же все части равные, то отношение между частями и целым может быть описано дополнительными формулами: $a + b = c$; $c : a = b$ и $c : b = a$, где a — часть, b — количество таких частей, c — целое, а схема такого отношения выглядит так:



При решении текстовых задач, уравнений и при нахождении значения выражения учащиеся опираются на изображение отношений с помощью этих двух схем, умения работать с которыми вполне достаточно для поиска неизвестной величины или числа.

Решение текстовых задач сопровождает изучение всех тем, однако углубление представления о задаче, принципов построения текста, способов ее моделирования не только с помощью схемы (или диаграммы), но и краткой записи (в том числе в табличной форме) происходит на заключительном этапе обучения в 4 классе.

Анализ способов моделирования текстовой задачи, преобразования краткой записи (одной из форм которой является таблица) и схемы создает необходимые предпосылки для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения задач путем составления и решения уравнений.

Новый раздел «Работа с информацией» изучается, как и рекомендовано, на основе содержания всех других разделов курса математики, однако наиболее ярко он представлен при обучении решению текстовых задач с буквенными данными, о чем было сказано выше. Это работа и с диаграммами, и с различными таблицами, что позволит использовать учебники не только для изучающих базовый вариант, но и для тех, кто выбрал другие два варианта, в том числе с расширенным разделом, посвященным работе с информацией, поскольку в учебнике представлены задания на построение простейших линейных связок, высказываний.

Возврат в 4 классе к понятиям периметра (длины), площади и объема и способам их вычисления обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию готовых результатов измерения. Такой подход позволяет осмыслить основные принципы, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые. Именно в начальной школе создаются предпосылки для систематического изучения геометрии в средних классах как конкретизация тех основных понятий и принципов, с которыми дети уже работали, изучая свойства объектов трехмерного пространства, что и составляет предмет элементарной геометрии. Таким образом, геометрический материал в рассматриваемой программе не является инородным, он органически включен в общую логику построения курса начиная с 1 класса, что делает его более осмысленным и содержательным и дает возможность учителю использовать учебники при выборе любого из трех вариантов, представленных во ФГОС.

Итак, геометрическая линия рассматривается без отрыва от числовой, являясь основой символического описания **отношений между величинами** и **отношений между числами** как характеристиками величин. Это значит, что различные геометрические фигуры (отрезок, прямоугольник, круг и т. д.) нужно использовать в качестве графических моделей, что дает возможность осознать геометрические формы не только как ***образы предметов*** окружающего мира, но и как ***математические модели***. Происходит перенос свойств одного образа на другой, что является основой для понимания математики, основой метода познания реальной действительности, основой формирования универсальных учебных действий (в том числе формирования ***общего*** умения решать задачи). Именно такие цели сформулированы в концепции ФГОС нового поколения.

Предлагаемое математическое содержание позволяет организовать обучение в форме ***учебно-поисковой деятельности***, которая по своей сути является коллективно-распределенной. Наряду с общей грамотностью она дает возможность ученику приобрести умение разрабатывать и проверять гипотезы (как свои, так и чужие), работать в проектном режиме, проявлять инициативу в принятии решений, выстраивать отношения с одноклассниками, брать на себя те или иные функции и т. п. Это и становится одним из значимых ожидаемых результатов образования и предметом стандартизации, поскольку у детей появляется способность самостоятельно решать встающие перед ними новые задачи, усиливается познавательная активность, создавая предпосылки познавательного развития, формируется умение учиться как компетенция, обеспечивающая овладение новыми компетенциями. Необходимым условием такой деятельности является развертывание учебного диалога, который неизбежно приводит к интенсивному развитию речи, оказывая значимое влияние не только на коммуникативное и личностное развитие ребенка, но и на не менее важное социальное развитие. Решение одной и той же задачи разными группами детей (особенно в первый год обучения) позволяет сопоставить и критически оценить особенности их подходов, что в свою очередь рождает у детей взаимный интерес к работе друг друга.

Общение детей между собой на материале математики обогащает каждого из них, дает возможность самому учителю четко представлять, какие дети в первую очередь нуждаются в коррекции, учит детей работать в едином коллективном ритме, принимать позицию равноправного партнера. Другими словами, необходимо организовать обучение, ориентированное на такое психическое развитие ребенка, которое способствует его психологической готовности к школьному обучению (совершенно очевидно, что среди детей, принятых в первый класс, не все будут психологически готовыми к школьному обучению) и развитие у него универсальных учебных действий.

С первых дней изучения математики от детей требуется работа руками. Так, говоря о длине или ширине полоски, важно, чтобы дети прошлись по ней пальчиком, все действия с предметами должны осуществляться каждым ребенком, а не только выходящим к доске или, что еще хуже, самим учителем. Вся учебно-поисковая деятельность на первом году обучения (как и на последнем) связана с овладением способами сравнения по разным признакам различных предметов, окружающих ребенка, и с измерением величин. Это требует прикладывания одного предмета к другому, перекраивания фигур, переливания, пересыпания, ощупывания, т. е. опоры на все органы чувств. Для этого ребенок использует бумагу, ножницы, пластилин, конструкторы (а затем геометрические инструменты, технические приборы) и т. д., что позволяет интенсивно развивать сенсомоторную координацию, что особенно важно для 6—7- летних учеников.

Материал в учебниках структурирован так, чтобы было удобно и учителю, и родителям тех детей, которые по ряду причин могут пропустить уроки. Каждая тема завершается разделом «Проверь себя», но не менее значимыми являются и разделы «Это интересно» и «Задания на смекалку». Характер заданий, включенных в учебник, их построение и подбор основаны на принципе составления обратной задачи по отношению к данной. Среди этих заданий есть и те, которые дадут возможность учителю диагностировать сформированность у учащихся метапредметных и предметных компетенций. Прежде всего это так называемые задания с ловушками, задания на доопределение условий, на поиск общего в различном, на выбор способов действий и др. Использование различных типов заданий позволяет не только учить ребенка думать, развивать интуицию, воображение, но и включать эмоции, ставить новые исследовательские задачи и создавать атмосферу сотворчества и соразмышления.

Представленный курс математики по своему содержанию построен так, чтобы научить ребенка строить рассуждения, выбирать аргументацию, различать обоснованные и необоснованные суждения, вести поиск информации, уметь решать учебные и практические задачи средствами математики. Все это и составляет умение учиться (учить самого себя). ФГОС определяют умение учиться как основу развития личности, познающей мир через его освоение и преобразование в конструктивном сотрудничестве с другими.

Факторами, определяющими эффективность предлагаемого подхода к обучению математики для реализации целей ФГОС, являются:

1) особенности математического содержания (введение понятия числа как результат практического действия измерения), заданного в контексте решения значимых жизненных задач);

2) логика курса математики, заданная системой учебно-практических задач, выстроенная в соответствии со структурой учебной деятельности и основанная на мотивации, на понимании учеником (а не только учителем!), что и зачем ему нужно знать и уметь, способствует созданию индивидуальной образовательной траектории;

3) подбор специальных новых типов заданий, адекватных новому подходу и представленных в виде целостной системы, которая позволяет ученику освоить универсальные учебные действия, обеспечивающие ему в дальнейшем способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса;

4) использование квазиисследовательского метода в обучении дает возможность не задавать понятия в готовом виде, а создавать условия для самостоятельных открытий, что существенно повышает мотивацию и интерес к учению, имеет неоценимое значение для познавательного развития ученика;

5) организация коллективно-распределенных форм деятельности, являясь основой коммуникативного развития ребенка, придает результатам образования социальную и личностную значимость;

6) система отношений детей между собой и с взрослыми: учителями и родителями, которая не только обеспечивает социализацию ребенка, но и формирует образ мира.

Система учебно-практических (ключевых) задач в курсе математики

1 КЛАСС

1. **Задача на восстановление объекта, обладающего различными свойствами (признаками).**

Решение этой задачи методом подбора объекта позволяет:

а) выделить те признаки, по которым его можно сравнивать с другими объектами;

б) найти различные способы сравнения предметов. Например, при сравнении по длине дети сначала опираются на зрительное восприятие, т. е. сравнивают «на глаз», а затем, когда этот способ не срабатывает, находят другие способы сравнения (наложение или приложение).

Научившись сравнивать различные предметы и геометрические фигуры по длине (ширине и высоте), ребенок попадает в ситуацию, когда этого умения становится недостаточно для сравнения. Например, необходимо подобрать точно такой же круг или многоугольник, у которых ребенок не может обнаружить ставшие привычными длину и ширину. У него возникает необходимость сравнения по другому признаку — ***площади***.

Такой общий подход к появлению новых признаков сравнения предметов позволяет ребенку уже на первых этапах обучения использовать его при решении целого класса частных задач на сравнение, что, в свою очередь, значительно расширяет набор признаков, по которым можно сравнивать предметы. Например, не только по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, форме, цвету, материалу, количеству, но и по углам, расположению на плоскости и в пространстве, по составу частей и даже «по красоте». Сравнение «по красоте» является ключом к формированию каллиграфического навыка. Так, сравнивая уже написанные кем-то цифры, буквы, дети самостоятельно выделяют их основные элементы, анализируют способы их написания и тем самым конструируют образец, что принципиально меняет методику обучения — не от образца к написанию, а от написания к образцу, а от него к написанию.

Действуя с реальными предметами, их признаками (свойствами) и результатами сравнения по заданному признаку, дети выделяют существенные связи и отношения между компонентами действия, выполняя три основных типа заданий:

а) есть предметы, известен признак — необходимо установить результат сравнения;

б) есть предметы, известен результат сравнения — нужно установить, какой признак был выбран;

в) известны признак и результат сравнения — необходимо подобрать соответствующие предметы.

Вариативность этих заданий очевидна, что позволяет учителю в полном объеме контролировать свои действия и по мере необходимости их перестраивать.

2. **Задача на восстановление величины в ситуации, когда подбор величины, равной данной, невозможен и для ее восстановления необходимо изготовить новую величину** (речь, конечно, идет о предмете как носителе величины).

3. **Задача на моделирование отношений равенства-неравенства**, которая решается сначала с помощью предметов, затем копирующего рисунка предметных моделей (полосок), а лишь потом трансформируется в графическое (сначала отрезками, а затем, начиная со 2 класса, линейными, столбчатыми и круговыми диаграммами) и знаковое моделирование (буквенными формулами).

4. **Задача на введение буквенно-знаковых символов.** Введение знаков и букв представляет собой одну из важнейших задач в «дочисловом» периоде. В букве, обозначающей то или иное свойство, но не предмет, обобщаются выделенные отношения равенства-неравенства.

При обозначении величин используются буквы латинского алфавита. Сначала вводятся те буквы, которые совпадают с русскими по написанию и произношению (*A, K, E* и др.), затем те, которые совпадают по написанию, но не совпадают по произношению (*B, P, C* и др.), и лишь затем буквы *R, Q* и др. Буквы *X, У, Z* вводятся для обозначения неизвестной величины.

5. **Задача на введение операций сложения и вычитания величин.** Решение задачи уравнивания величин и изучение способов перехода от неравенства к равенству приводят к необходимости *введения операций сложения и вычитания* величин и изучения их свойств сначала на предметном уровне, затем с опорой на графическую и знаковую модели.

Раннее введение операций сложения и вычитания величин существенно расширяет возможности применения дошкольного опыта ребенка и позволяет на уровне сформированных ранее умений оперировать с числами, подбирая «подходящие» числа вместо букв в формулах, описывающих результаты сравнения и уравнивания величин.

Подбор «подходящих» чисел к формулам, а затем к текстам задач имеет особое значение. Во-первых, дает возможность всем без исключения детям использовать свой дошкольный запас независимо от его объема и сделать тем самым выполнимыми любые предлагаемые учителем задания. Во-вторых, закладывает основы для таких важнейших математических понятий, как область допустимых значений, решение уравнений или выражений с параметрами. В-третьих, помогает детям устанавливать связь, а следовательно, делать «прикидку» того, подходят ли выбранные учениками числа к сюжету задачи и соответствует ли полученный результат тексту решаемой задачи и реальным фактам. Подбор так называемых подходящих чисел к текстовым задачам с буквенными данными относится, как уже было сказано, к разделу «Работа с данными» (из Примерной программы по математике, рекомендуемой Федеральным государственным образовательным стандартом), который в настоящей программе не выделен в отдельную тему, а органично встроен в различные другие разделы, в том числе и в обучение решению текстовых задач. Чтобы заменить буквы числовыми данными, дети должны будут определить возможные источники информации и осуществить поиск соответствующих числовых данных, проанализировать полученные сведения, соотнеся их сначала с сюжетом задачи, а затем с выполнимостью арифметических действий.

Насколько важно сформировать у ребенка умение подставлять в любые буквенные математические выражения числа, настолько необходимо умение выполнять обратные переходы, решая задачу восстановления буквенных выражений по числовым. Это оказывается решающим фактором изучения математики в старших классах, при работе с взаимообратными функциями, со способом нахождения интеграла как задачей по восстановлению первообразной функции по ее производной и т. д.

Уравнивая величины, дети устанавливают разностное отношение между ними, фиксируемое с помощью выражений «больше на», «меньше на», что позволяет приступить к раннему решению текстовых задач, включающих эти отношения.

Схема к задаче появляется «синхронно» с чтением текста: текст читает учитель, структурируя его в соответствии с возможностью изображения заданных величин и отношений между ними. Решение записывается с помощью буквенного ***выражения, равенства*** или ***уравнения***. Числовые значения придумывают дети в соответствии с сюжетом задачи и выполнимостью арифметических действий на основе пока еще дошкольного опыта. Если же текст задачи содержит числовые данные, то дети сначала должны оценить правомерность таких данных, т. е. проверить, подходят ли они по смыслу задачи, затем «восстановить» ее с буквенными данными и составить математическое выражение (а затем уравнение) для ее решения, а потом подставить вместо букв те числовые значения, которые были даны автором.

В дальнейшем способ «синхронного» составления схемы к задаче перестанет срабатывать, что приведет к необходимости искать другие способы моделирования, в том числе в форме краткой записи.

6. **Задача на введение понятия части и целого.** Введение понятия части и целого при решении задачи на воспроизведение величины по ее известным частям позволяет освоить способы построения и решения уравнений и существенно расширить класс решаемых задач. Подбор же «подходящих» к данному отношению чисел даст возможность рассмотреть состав числа (преимущественно однозначного), опираясь опять-таки на дошкольные умения.

Выполняя задания с «ловушками», где часть может оказаться больше, чем целое, или целое составлено без учета частей, дети устанавливают отношения между данными понятиями. Установление связи между сложением и вычитанием величин на основе понятий части и целого позволяет соотнести целое с суммой и уменьшаемым, а части — со слагаемым или вычитаемым и разностью и увидеть, что разные действия: $A + B = C$, $C - A = B$ или $C - B = A$ — характеризуют одно и то же отношение между величинами. Нахождение неизвестного при решении уравнений опирается не на правила, а на отношение между частями и целым, которое представлено в виде графической модели (схемы).

Понятие части и целого позволяет ввести переместительное и сочетательное свойства сложения величин. Порядок выполнения действий над величинами определяется не с помощью правил, а с опорой на схему, что создает предпосылки для установления свойств сложения чисел и порядка выполнения действий при сложении и вычитании чисел.

Таким образом, к концу дочислового периода у учащихся складывается содержательное расчлененное представление о величинах, их свойствах, операциях над ними (сравнение, сложение, вычитание), свойствах этих операций, равенств, неравенств. Формируются умения решать уравнения и задачи в буквенно-знаковой форме, складываются благоприятные предпосылки для формирования у учащихся понятия об области допустимых значений переменных, входящих в математическое выражение, уравнение или текстовую задачу.

Ключевая учебная задача появляется в ситуации, когда освоенные способы непосредственного сравнения предметов по заданному свойству не подходят, что приводит к необходимости **опосредованного сравнения величин**, где в качестве посредника первоначально выступает мерка, равная одной из сравниваемых величин (отчасти этот способ сравнения уже применялся детьми раньше), а затем и число, которое вместе с меркой (сначала меньшей, чем заданная величина) служит средством для воспроизведения такой же величины в другом месте или в другое время.

Задача измерения-отмеривания ставит перед детьми новые вопросы: какие предметы можно использовать в качестве той или иной мерки, а какие нельзя или неудобно, какое из свойств предмета может участвовать при использовании его для измерения. Так, например, ребро кубика можно использовать как мерку длины, а грань — как мерку площади и т. д.

Эта исследовательская задача приводит к ***оценке соотношения между величиной и меркой***, когда мерка либо намного меньше измеряемой величины, что делает ее неудобной — появляются составные мерки, либо больше, а иногда мерка вообще непригодна для измерения (например, для измерения длины окружности мерка, изготовленная из твердого материала, не подходит, так как не может изменять свою форму). Необходимо заметить, что, как правило, для измерения длины используются линейки, изготовленные из дерева, пластмассы или металла, что не дает возможности, например, при введении понятия «радиана» в старших классах «положить» радиус окружности на ее дугу, чтобы получить центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу окружности.

2 КЛАСС

Исследование вопроса о том, ***какие бывают мерки***, завершает изучение понятия величины в 1 классе и приводит к исследованию во 2 классе вопроса о том, ***какие бывают числа***, т. е. как в разное время разные люди записывали и называли числа, которые появились в процессе измерения и служат для построения нужной величины. Таким образом, ***программа 2 класса*** начинается **с измерения-отмеривания** и позволяет рассмотреть ***исторический аспект числа***: от его меточной формы до арабских цифр. Рассматривается устная и письменная нумерация разных народов. Это позволяет развести в сознании ребенка смысл числа как отношения величин и цифры как знака для его обозначения (проводится аналогия между звуком и буквой в русском языке).

Измеряя, отмеривая различные величины, дети приходят к необходимости «изобретения» измерительных приборов со шкалами, а следовательно, и к «изобретению» числовой прямой, числового луча и других числовых линий, которые характеризуются началом отсчета, направлением и единичной (исходной, основной) меркой.

Учащиеся решают **учебно-практические задачи**:

1. **Конструирование числовой прямой.** Процесс построения числовой прямой дает представление об упорядоченном бесконечном ряде чисел, в котором каждое число имеет собственное место, и, таким образом, дает возможность ***использовать порядковый аспект числа*** с опорой на его основные свойства.

2. **Количественный аспект числа** выражается результатом измерения величины меркой того же рода. Исследуется зависимость между величиной, меркой и числом. Теперь число отвечает на вопрос «Сколько мерок E содержится в величине A?», т. е. является характеристикой величины A. Так у учащихся формируется понятие числа. Теперь можно сравнивать величины по их числовым характеристикам без построения самих величин. Это приводит к необходимости выполнения операции сравнения чисел.

3. При **сравнении чисел** с помощью числовой прямой (чем дальше число по направлению, тем оно больше) возникает новая учебная ситуация, при которой ответить на вопрос, какое из двух чисел больше или меньше, легко, а вот на сколько больше (меньше) — путем пересчитывания количества шагов (мерок) между ними — оказывается трудно. На помощь приходит «измерительный» прибор — вторая числовая прямая (линейка).

4. Конструирование **способа сложения и вычитания чисел** (как правило,

в пределах десятка) сначала с помощью двух линеек (принцип логарифмической линейки), затем с помощью двух числовых прямых и, наконец, с помощью одной числовой прямой.

Выбор двух одинаковых линеек для выполнения действий позволяет сформулировать ряд условий:

а) шаги (мерки) на линейках одинаковы;

б) значки (цифры) для обозначения чисел одинаковы;

в) последовательность этих значков одинакова.

Таким образом, при сложении (вычитании) двух чисел, заданных в любой нумерации, ребенок использует две одинаковые линейки с соответствующими цифрами; «манипулируя» ими, он находит (считывает) нужный результат.

5. Увеличение числа слагаемых или отсутствие линеек создает предпосылки **для «открытия» нового способа сложения (вычитания) путем присчитывания (отсчитывания) по единице**. Теперь ребенку понятно, почему, например, при сложении отсчет второго слагаемого начинается не от начала числовой прямой, а от точки, соответствующей первому слагаемому.

В дальнейшем этот способ тоже окажется неудобным, когда вместо суммы 3784 + 2 надо будет находить сумму 3784 + 2561. ***Это, в свою очередь, потребует поиска «нового» способа поразрядного сложения взамен «старого» способа — присчитывания.***

6. В следующей учебной задаче рассматривается ситуация, когда **величина оказывается намного больше мерки**, что приводит к необходимости использования для измерения набора мерок, который упорядочивается от большей (из мерок, меньших измеряемой величины, что легко проверить непосредственным сравнением) к исходной (основной).

В таком случае результат измерения выражается не одним числом, а некоторым набором чисел, где каждое соответствует определенной мерке. Появляется табличная форма записи числа, которая приобретает со временем форму «заготовки», т.е. места для каждой цифры.

7. Следующая учебная ситуация, приводящая к решению учебно-практической задачи, требует **определения отношений между мерками для их изготовления** в другом месте или в другое время. Появляется новая числовая характеристика отношения между последующей и предыдущей мерками. Это отношение фиксируется стрелочкой и числом над прообразом разряда. Отношения между соседними мерками оказываются двух видов, одно из них постоянно. Тогда мы уже имеем дело не с набором мерок, где отношения между соседними мерками различны, а с системой мерок с постоянным отношением между соседними мерками (основание системы), при этом система остается открытой, т. е. всегда (по необходимости) может быть построена следующая мерка.

Это позволяет заранее изготовить различные системы мерок для измерения разных величин, распределив между группами спланированный объем работы. ***Десятичная система счисления*** рассматривается как частный случай. Чтобы измерить величину с помощью системы изготовленных в заданном отношении мерок, сначала нужно выбрать мерку, с которой удобно начинать измерение, — самую большую из тех мерок, которые меньше измеряемой величины. Свой выбор необходимо доказать, сравнив непосредственно следующую за выбранной мерку с измеряемой величиной, которая должна оказаться уже больше этой величины.

Из сказанного следует: если основание системы (а это и есть основание системы счисления) равно, например, 6, то цифры 6 и последующих в записи многозначного числа быть не может, так как дети уже сравнивали величину со следующей меркой, в которой было 6 предыдущих. Другими словами, вводится естественное и осмысленное (благодаря наличию контрольного действия) ограничение на каждую цифру в записи позиционного многозначного числа в заданной системе счисления.

Таким образом, представление о позиционном многозначном числе формируется в рамках ***задачи измерения величины системой мерок с заданным или выбранным отношением***, где сначала определяется количество необходимых для измерения мерок (это значит, становится известным, сколько цифр будет в записи числа), а лишь затем производится сама операция измерения (это значит, определяется цифра каждого разряда), что позволяет впоследствии задать операционный состав способа выполнения любого арифметического действия как последовательного выполнения двух основных операций: определение количества цифр (разрядов) в искомом результате выполняемого действия и нахождение цифры, соответствующей каждому из этих разрядов.

Всеобщность этого способа, его применимость для нахождения результатов всех четырех арифметических действий очевидны, в то время как традиционная программа предусматривает лишь частичное использование этого способа в одном случае — при делении многозначных чисел.

8. Появление **новой формы натуральных чисел** требует вновь способов их сравнения, сложения и вычитания взамен ранее известных: сравнения с помощью числовой прямой, сложения и вычитания соответственно с помощью присчитывания и отсчитывания. Таким новым способом становится **поразрядное выполнение** всех указанных действий, что позволяет ребенку выполнить ***следующую задачу:*** вначале научиться определять, сколько цифр будет в результате выполнения действия, для чего придется определять те разряды, которые будут «переполняться» (при сложении и умножении) или разбиваться (при вычитании и делении), а затем знать табличные случаи (для всех действий), что предполагает конструирование таблицы сложения (вычитания), а затем и умножения (деления). Из сказанного понятно, что нет необходимости рассматривать по отдельности во времени случаи сложения (вычитания) без перехода через разряд и с переходом. Речь идет как раз о числах, при сложении (вычитании) которых в одних разрядах должен быть переход, а в других нет.

Решение этой задачи, безусловно, приходится на 2 класс, тогда как традиционно дети, к примеру, в 1 классе учат таблицу сложения (вычитания), а лишь затем, условно говоря, «узнают», зачем она нужна (для действий с многозначными числами).

Характеризуя программу 2 класса, необходимо подчеркнуть, что она рассчитана прежде всего на углубление и конкретизацию ранее усвоенных теоретических знаний о величине и числе. Значительную роль в этом отношении призвана сыграть работа, направленная на овладение общими способами и опирающимися на них приемами выполнения любых арифметических действий на примере сложения и вычитания, которым во 2 классе отводится значительное время.

9. Опираясь на понятие позиционного числа, дети должны **выявить основной принцип сложения и вычитания многозначных чисел** — поразрядное выполнение соответствующих действий. Им предстоит, во-первых, проанализировать операционный состав соответствующего способа выполнения арифметических действий, во-вторых, осознать всеобщность этого способа, его применимость для нахождения и проверки результатов всех четырех арифметических действий. Кроме того, наряду с анализом ошибкоопасных мест и составлением так называемых справочников ошибок (о чем упоминалось выше), которые можно допустить при выполнении того или иного арифметического действия, рекомендовано для проверки использовать калькулятор, но только в тех случаях, когда ученик сомневается в правильности вычислений. Выявление допущенной ошибки и служит основой для развертывания совместных с другими детьми действий по рефлексии, анализу и предвосхищению возможных ошибок, устанавливая при этом не только причины их появления и способы обнаружения, но и поиск заданий, позволяющих избавиться от каждой из них.

Поскольку этот способ содержательно связан со сформированным у детей понятием числа, вводившимся на основе измерения величин, его усвоение должно не только способствовать овладению рациональными приемами вычислений (что само по себе составляет одну из важных задач начального обучения математике), но и обеспечивать более глубокое понимание содержания понятия числа и действий с числами.

Первая из указанных выше задач (анализ операционной структуры общего способа вычисления результата арифметического действия) может и должна быть решена в процессе изучения материала, связанного с действиями сложения и вычитания. Детям уже известна связь между количеством разных мерок, которые использовались для измерения (построения) величины, и количеством разрядов в числе, фиксирующем результаты измерения. Опираясь на эти знания, они могут установить обусловленность разрядной структуры результата сложения (вычитания) структурой известных его компонентов (слагаемых, уменьшаемого и вычитаемого). Анализ этой зависимости позволяет установить рациональные приемы **конструирования таблиц сложения и вычитания**, способствующие их эффективному непроизвольному запоминанию, что имеет немаловажное значение для формирования вычислительных навыков.

10. Овладев приемами **письменных вычислений**, дети конструируют и **приемы устных вычислений** внетабличных случаев, причем не только в пределах 100, но и во всех случаях, которые сводятся к действиям в пределах 100, что значительно ***расширяет круг устных вычислений***. Продолжение этой работы предусматривается в процессе изучения действий умножения и деления.

3 КЛАСС

Умножение является центральной темой **программы 3 класса и одной из основных учебных задач.** В отличие от традиционной программы оно рассматривается как особое действие, связанное **с переходом в процессе измерения величин к новым меркам** (В.В. Давыдов). Фактически с этим действием дети сталкивались уже во 2 классе при изучении позиционных чисел. Однако там оно не было зафиксировано как особое действие и не получило развития. Поэтому **первой и основной *учебной задачей*** становится воспроизведение величины в ситуации, когда измеряемая величина много больше заданной мерки, в связи с чем возникает необходимость использования вспомогательной, промежуточной мерки. Одно из чисел, описывающее эту ситуацию, фиксирует отношение вспомогательной мерки к исходной (или к стандартной мерке, являющейся основанием принятой системы счисления), второе — количество вспомогательных мерок в измеряемой величине («по... взять... раз»), третье — отношение измеряемой величины к исходной мерке. Логическим завершением анализа этой ситуации является **введение деления** как действия, направленного на определение промежуточной мерки («деление на части») или числа таких мерок («деление по содержанию»). Тем самым появляется возможность установить содержательные связи между умножением и делением, а также содержательно интерпретировать отношения «больше (меньше) в... раз», «больше (меньше) на...».

Как и при изучении действий сложения и вычитания, изучение умножения и деления предусматривается начать с рассмотрения этих действий в общей (абстрактной) форме с помощью моделей. Имеется в виду, что при изучении умножения в качестве средств моделирования должны быть использованы не только линейные, но и плоскостные схемы, а также обеспечен переход от графических к символическим (буквенным) моделям (формулам). Овладение умением строить графические модели умножения и деления, осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно является одной из **важнейших задач этого этапа обучения**.

Особое внимание в процессе этой работы предусматривается уделить изучению **свойств умножения** — переместительного, сочетательного и распределительного (относительно сложения и вычитания). Исследование этих свойств опирается прежде всего на предметные действия ребенка, фиксирующиеся с помощью графических и знаковых моделей. В связи с этим рассматриваются порядок действий, определяемый только с опорой на графическую модель, а не на правила, предполагающие деление действий над числами на действия двух ступеней (действия первой ступени — читание, второй — умножение и деление), и его изменение. В итоге ученики должны овладеть умением определять значения выражений типа 375 • 294 – 375 • 293 или 3984 • 975 – 974 • 3984 и т. д.

Второй *учебной задачей* является ***конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное***, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это принято. Другими словами, любая таблица умножения начинается с умножения на нуль, например: $9 \cdot 0$, $9 \cdot 1$, $9 \cdot 2$, $9 \cdot 3$ и т. д.

Понимание предметного содержания умножения и его свойств позволяет существенно перестроить **работу с таблицами умножения (деления)**. В основу этой работы положена задача **на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата**. В связи с этим изменяется «естественный» порядок изучения таблиц. Целесообразно начать их конструирование с тех, в которых указанная выше связь обнаруживается в наиболее явном виде (таблицы умножения 9, 2, 5 и 6). Таблицы умножения 4, 8, 3 и 7 следует сконструировать, опираясь на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддерживания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что **снимает необходимость в специальном заучивании таблиц**.

Уяснение содержания умножения создает предпосылки для того, чтобы построить **сетку классов чисел** и на этой основе осмыслить многозначное число как число многоразрядное. Освоение многоразрядного числа обеспечивается выполнением действий сложения и вычитания (включая сложные случаи, когда один из разрядов в уменьшаемом равен нулю), а также конструированием способа умножения многоразрядного числа на многозначное, которое сводится к умению умножать многозначное число на однозначное.

Особого внимания требует отработка приемов умножения многозначного числа на многозначное. Их уяснение предполагает предельное развертывание упоминавшегося выше принципа разрядности действий. Дети должны хорошо понимать не только обусловленность количества цифр (разрядов) в произведении множителями, но и способ получения каждой из этих цифр (с этой целью возможна постановка вспомогательных задач, требующих определения значения одного из разрядов произведения независимо от других разрядов). В результате этой работы обычный прием умножения «в столбик» должен приобрести для детей совершенно иное психологическое содержание.

Значительное место в программе 3 класса, как и в предыдущие 2 года, **отводится решению текстовых задач**, работа над которыми должна осуществляться в процессе изучения всех тем. ***Освоение общих способов анализа задачи является одной из сквозных учебных целей курса математики.*** Основное внимание должно быть сосредоточено на формировании основных приемов работы над текстом задачи, на способах моделирования отношений, представленных в условии задачи, в виде различных схем (и диаграмм в том числе), отыскивании на схеме равных величин, что имеет особое значение, так как, с одной стороны, придает всей предшествующей работе вполне определенный смысл, а с другой — позволяет детям выбрать наиболее рациональный способ решения задачи — алгебраический (посредством уравнения) или арифметический (посредством составления математического выражения).

В контексте работы над задачами осуществляется **обучение решению уравнений**. Как и в 1 классе, их решение осуществляется с опорой на схему, при этом никакие «правила» не заучиваются. Дети должны решать уравнения, объясняя и обосновывая каждое свое действие, а не реализовывать готовый алгоритм.

Таким образом, предлагаемая программа 3 класса, будучи по формальной структуре программой ***формирования арифметических действий*** с многозначными числами, по существу предполагает усвоение ***принципов построения этих действий***. Такое содержание программы является предпосылкой для организации деятельности детей, направленной на решение двух типов учебных задач. С одной стороны, это задачи, связанные с выявлением, анализом и содержательным обобщением свойств величин, чисел и математических действий. С другой — это задачи, направленные на поиск и обоснование рациональных приемов выполнения того или иного действия. А в процессе этой деятельности и должны быть реализованы цели развивающего обучения на данном этапе.

Заключительная тема программы 3 класса предусматривает прежде всего, формирование приемов деления многозначного числа на многозначное. Конструирование деления любого многозначного числа на любое многозначное число требует последовательного выполнения четырех операций, о которых сказано ранее.

Как уже говорилось выше, овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для ***классификации устных и письменных вычислений***. Рассматриваются приемы устного счета, в том числе умножения на 11, на 25 и др.

В процессе формирования этих приемов должны быть закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Выполняя устные и письменные вычисления, учащиеся не только осмысливают известные и новые приемы, но и придумывают аналогичные задания друг для друга. Так, подбирая многозначное делимое и однозначный делитель, кратный делимому, они ищут среди прочих такой способ, который позволил бы, не выполняя деления, узнать, будет ли делимое кратно делителю. Это и приводит к ***постановке следующей учебной задачи на конструирование*** признаков делимости, которые рассматриваются следующими группами: делимость на 2, 5 и 10, на 4, 25 и 100, на 8, 125 и 1000, на 9 и 3.

Три первые группы обосновываются делимостью 10 на 2 и 5, 100 на 4 и 25, 1000 на 8 и 25. Делимость же на 9 и 3 устанавливается с опорой на соответствующие таблицы умножения. Работая над признаками делимости, учащиеся тем самым отрабатывают умножение и деление многозначных чисел. Рассматриваются «составные» признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 20 и т. д.

4 КЛАСС

В 4 классе продолжается знакомство с числами, а именно **с десятичными дробями** как частным случаем позиционных систематических дробей в различных системах счисления. Таким образом, ***первая учебная задача*** связана с измерением и восстановлением величины, значительно меньшей исходной (основной) мерки.

Введение **позиционных систематических дробей** обусловлено прежде всего тем, что, завершая изучение понятия многозначного числа и действий с числами, заданными изначально в различных системах счисления, учащиеся вновь возвращаются к задаче измерения и воспроизведения величины в ситуации, когда для измерения (а затем и для воспроизведения) данной величины потребовалась не только система мер, полученных путем укрупнения с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), но и система мер, полученная путем уменьшения исходной меры в одно и то же число раз, равное коэффициенту укрупнения.

Другими словами, для измерения величин, много больших исходной меры, используют систему укрупненных мер с постоянным отношением, а для измерения величин, много меньших той же исходной меры, — систему уменьшенных (дробленых) мер с тем же отношением. Таким образом, учащиеся получают новый вид чисел — дробные, имеющие целую и дробную (после запятой) части. Числа рассматриваются в различных системах счисления, в том числе десятичной. Строится разрядная сетка, и даются соответствующие названия разрядам, полученным в результате уменьшения исходной мерки в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Полученные новые виды чисел получают свое место на числовой прямой, с помощью которой они могут сравниваться друг с другом и с известными видами чисел: с нулем и с ближайшими натуральными числами.

Измерения с помощью системы уменьшенных мер могут быть конечными и бесконечными, что приводит к появлению не только конечных, но и бесконечных дробей, в том числе периодических, которые будут рассматриваться позже (в 6 классе).

Однако предметом исследования становятся конечные десятичные дроби. Вводится операция округления дробей.

Конструирование способов выполнения действий с позиционными систематическими дробями, в том числе и с десятичными, позволит фактически отрабатывать все действия с многозначными числами, не тратя на это дополнительное время перед введением дробей, что и придает осмысленный характер умениям и навыкам счета в связи с использованием его в качестве средства для выполнения более сложных действий.

Такая логика построения материала, когда после действий с многозначными числами появляются подобные им по способу их получения и способу действий с ними позиционные систематические дроби, позволяет гораздо глубже понять ***обобщенный принцип образования позиционных чисел***.

Появление новых видов чисел, в которые входят десятичные дроби, а также способ нахождения дроби от числа и числа по его дроби дают возможность ввести ***понятие процента*** (эти тема вынесена в рабочую тетрадь).

Вычисления с десятичными дробями и процентами включены в решение реальных задач. Ведь в условиях рыночной экономики человеку необходимы принципиально новые умения, неизбежно связанные с математикой: перевод денежных единиц, сравнение цен на товары и многое другое. Именно такие задачи и требуют действий с десятичными дробями, округления дробей, введения понятия процента и др.

Особое место в программе 4 класса, о чем мы уже писали ранее, принадлежит уже известным детям с 1 класса понятиям **периметра, площади, объема** и способам их нахождения. Возврат к этим понятиям обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию ***готовых результатов измерения***. Такой подход позволяет осмыслить ***основные принципы***, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые.

Курс математики 4 класса заканчивается возвратом на новом уровне к **решению текстовых задач**. Создается такая учебная ситуация, при которой ребенок, уже умея решать задачи, задает себе вопросы: «А что же такое задача? Как она устроена? Из чего состоит? По каким признакам можно задачи сравнивать? Что необходимо записать, о чем сообщить другому человеку, чтобы он смог в точности восстановить текст задачи?», т.е. происходит углубление представления о задаче, принципах построения текста, способах ее моделирования с помощью не только схемы, но и краткой записи, преобразованиях, которые создают условия для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения уравнений, а значит, и задач, решаемых с их помощью.

Как правило, детей учат решать задачи по действиям, с опорой на которые и составляется математическое выражение. Однако потребности в его составлении для ребенка нет, ведь задача уже решена. Такой способ обучения решению задач (как и другим, не менее значимым темам программы) есть не что иное, как обучение от частного к общему, в то время как обучение в рамках системы Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова должно строиться с точностью до наоборот: от общего к частному. Это значит, двигаться нужно не от действий к составлению выражения (или уравнения), значение которого и может быть найдено последовательным выполнением арифметических действий. Поэтому сначала дети учатся составлять различные математические выражения (или уравнения) с опорой на схему, которая строится по ходу осмысления задачи, а лишь затем для нахождения значения выражения выполняют действия.

Итак, основное содержание курса математики — формирование понятия рационального числа — представлено как последовательность стратегических (ключевых) учебных задач: формирование понятия величины, т. е. введение в область отношения величин, раскрытие отношения величин как всеобщей формы числа, последовательное введение различных частных видов чисел как конкретизация общего отношения величин в определенных условиях, построение обобщенных способов действий с числами.

Реализация описанного математического содержания возможна лишь при условии готовности учителя организовать сотрудничество детей, требует от него особой организации учебной деятельности школьников в форме постановки и решения ими учебных задач посредством универсальных учебных действий (В.В. Давыдов). В ходе такого обучения и происходят открытие и усвоение понятий, когда дети при участии учителя должны ***сначала осознать потребность*** именно в самом понятии, способе действия, а затем ***сконструировать*** его, вступая в содержательный ***учебный диалог*** как со сверстниками, так и с учителем, что требует от последнего новой педагогической позиции, позволяющей реализовать цели и задачи, поставленные в Федеральном государственном образовательном стандарте.

ПРОГРАММА

1 КЛАСС *(4 ч × 33 нед. = 132 ч)*

Тема 1. Выделение свойств предметов. Величины и отношения между ними. Отношение равенства-неравенства при сравнении предметов по выбранному признаку *(68 ч)*

1. **Непосредственное сравнение предметов по разным признакам:** форме, цвету, материалу, длине (ширине, высоте), площади, объему, количеству (комплектности по составу частей), массе, расположению на плоскости и в пространстве. Сравнение предметов по этим признакам.

Периметр как длина «границы» любой плоской геометрической фигуры.

Понятие о равновеликости и равносоставленности фигур. Существенные различия межу прямой, лучом, отрезком. Представление о ломаной, угле. Сравнение углов. Подбор предметов или геометрических фигур по заданному признаку.

2. **Моделирование отношений равенства и неравенства между величинами:**

предметное: с помощью полосок;

графическое:

а) с помощью копирующего рисунка;

б) с помощью отрезков;

знаковое:

а) с помощью знаков «=», «≠»;

б) с помощью букв и знаков «=», «>», «<» (формулы $A = B$, $A > B$, $A < B$ и т. д.).

Класс величин. Сравнение величин с помощью посредника, равного одной из них. Транзитивность отношений «равно» (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$), «больше-меньше» (если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$; если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$).

Переход от действий с предметами к схеме и формуле. Восстановление схемы по формуле и наоборот. Преобразования схем и формул. Связь между ними.

Сравнение «по красоте» способов написания цифры 1. Классификация всех цифр на основании сравнения их по составу элементов и форме на три группы:

а) цифры 1, 4, 7;

б) цифры 3, 5, 2;

в) цифры 6, 9, 8 и 0 и их последующее написание.

Тема 2. Сложение и вычитание величин *(52 ч)*

1. **Сложение и вычитание величин как способ перехода от неравенства к равенству и наоборот.** Три способа уравнивания величин. Введение знаков «плюс» и «минус». Выбор способа уравнивания в зависимости от условий его выполнения. Описание операции уравнивания с помощью схем и формул. Связь между схемой и формулой. Изменение схемы при изменении формулы и наоборот. Тождественные преобразования формул.

Решение текстовых задач (с буквенными данными), связанных с увеличением или уменьшением величин (отношения «больше на...», «меньше на...»). Составление текстовых задач по схеме (формуле). Подбор «подходящих» чисел для решения задачи с точки зрения:

а) сюжета задачи;

б) выполнимости действия;

в) выполнения действия конкретным ребенком (опора на дошкольную подготовку).

2. **Сложение и вычитание величин как способ решения задачи на восстановление целого или части.** Понятие части и целого. Моделирование отношений между частями и целым в виде схемы, формулы и записи с помощью «лучиков» (знакографической записи).

Взаимопереходы от одних средств фиксации отношений к другим.

Введение специальных обозначений для части и целого: $A + A =$ ©

Названия компонентов при сложении и вычитании и их связь с понятием части и целого.

Относительность понятия части и целого. Подбор «подходящих» чисел к формулам. Состав однозначных чисел. Разбиение на части и составление из частей величин, геометрических фигур на плоскости и геометрических тел в пространстве.

Увеличение и уменьшение величины. Понятие нулевой величины.

Скобки как знак, показывающий другую последовательность выполнения операций над величинами: $A - B - C = A - (B + C)$.

Свойства операции сложения величин: переместительное и сочетательное. Составление и решение текстовых задач с буквенными данными на нахождение части и целого. Связь задач на уравнивание величин с задачами на нахождение части и целого.

3. **Понятие уравнения.** Определение значения одного из компонентов с опорой на понятия «часть» — «целое». Подбор «подходящих» чисел к формулам (опора на дошкольную подготовку) и наоборот. Описание числовых выражений с помощью буквенных формул как задача на их восстановление. Решение примеров «с секретами»: сложение и вычитание в пределах десятка с опорой на дошкольную подготовку. «Круговые» примеры, «магические» треугольники и квадраты. Составление детьми примеров «с секретами». Сравнение выражений с числовыми и буквенными данными. Решение задач с помощью уравнений. Подбор вместо букв подходящих чисел к текстовым задачам, выражениям, уравнениям.

Тема 3. Введение понятия числа *(12 ч)*

Переход от непосредственного сравнения величин к опосредованному.

Сравнение:

а) с помощью посредника, равного одной из сравниваемых величин (на основе транзитивности отношений);

б) с помощью мерки для измерения сравниваемых величин, благодаря которой обнаруживается кратность отношений: A/E и B/E, где A и B — сравниваемые величины, а E — третья величина того же рода, т. е. мерка.

Подбор мерок, удобных для измерения данной величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой. Простые и составные мерки.

Подбор подходящих предметов, используемых в качестве мерки.

Инструменты: циркуль, линейка, угольник. Ознакомление со стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

Знакомство с другими видами величин: время, скорость, стоимость.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу первого класса дети научатся:

- выделять разные свойства в одном предмете и непосредственно сравнивать предметы по разным признакам: по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, количеству, форме, цвету, материалу, углам и др.;
- моделировать отношения равенства и неравенства величин с помощью отрезков (графическое моделирование) и с помощью буквенной формулы (знаковое моделирование);
- производить сложение и вычитание величин при переходе от неравенства к равенству и обратно; исследовать ситуации, требующие сравнения величин и чисел, им соответствующих;
- описывать явления и события с помощью величин;
- прогнозировать результат сравнения величин путем их оценки и прикидки будущего результата;
- строить графические модели отношений (схемы) при решении несложных текстовых задач (с буквенными или числовыми данными), связанных с уменьшением или с увеличением величин; составлять текстовые задачи по схеме и формуле; придумывать вместо букв «подходящие» числа и заменять числовые данные буквенными;
- владеть понятием части и целого, уметь описывать отношения между частями и целым с помощью схем и формул;
- разбивать фигуры на части и составлять целое из частей плоских и объемных фигур;
- решать уравнения типа $а + х = в$, $а - х = в$, $х - а = в$ с опорой на схему;
- выполнять сложение и вычитание в пределах 10;
- представлять состав чисел первого десятка с опорой на дошкольную подготовку на основе понятия части и целого;
- изготавливать и конструировать модели геометрических фигур, предложенные в рабочей тетради, перекраивать их при сравнении площадей.

2 КЛАСС *(4 ч × 34 нед. = 136 ч)*

Тема 1. Введение понятия числа (продолжение) *(35 ч)*

1. **Задача непосредственного и опосредованного сравнения величин:**

а) подбор мерки, равной данной величине (повторение);

б) подбор мерок, удобных для измерения величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой.

Простые и составные мерки. Подбор предметов, удобных для их использования в качестве мерки. Знакомство с приборами и инструментами, используемыми для сравнения и воспроизведения величины стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

2. **Действие измерения.** Число как результат измерения величины и как средство для ее восстановления. Компоненты действия измерения: величина (A), мерка (E), число (n) и связь между ними. Запись числа как результата измерения и счета с помощью меток, считалок и с помощью цифр в различных нумерациях (арабская, римская, славянская и др.).

Построение величины по мерке и числу; подбор и изготовление мерки по заданной величине и числу. Зависимость одного из трех компонентов ($A/E = n$) от изменения другого при постоянном третьем (фактически речь идет о функциональной зависимости).

3. **Числовая прямая.** Сравнение величин с помощью числовых значений. Построение числовой прямой. Изображение чисел на числовой прямой (отрезком и точкой). Понятие шкалы. Знакомство с приборами и предметами, имеющими шкалы: линейкой, весами, часами, мерными емкостями, динамометром, спидометром, термометром, транспортиром и др.

Условия существования числовой прямой, числового луча, числового круга: наличие начала отсчета, направления, единичной мерки (шага). Число 0 как результат измерения нулевой величины единичной меркой и как начало отсчета на числовой прямой.

Сравнение чисел на числовой прямой. Последующее и предыдущее числа. Бесконечность числового ряда. Линейка как модель числовой прямой.

Решение текстовых задач. Использование диаграмм.

Тема 2. Сложение и вычитание чисел *(24 ч)*

1. **Разностное сравнение чисел и сложение и вычитание чисел с помощью:**

а) двух линеек (стандартных и изготовленных) как моделей двух числовых прямых;

б) двух числовых прямых;

в) одной числовой прямой.

2. **Присчитывание и отсчитывание как новый способ нахождения суммы и разности** в условиях отсутствия необходимого числа линеек при трех и более слагаемых.

Решение и составление математических выражений, уравнений и задач с заменой буквенных данных на числовые данные (в пределах десятка). Нахождение значения числовых выражений со скобками. Определение и изменение порядка действий с опорой на схему. Решение различных задач на сложение и вычитание с подбором:

а) «подходящих» чисел к заданному сюжету;

б) сюжетов к схемам с заданными числами.

Тема 3. Многозначные числа *(35 ч)*

1. **Набор и система мерок.** Задачи на измерение-отмеривание с помощью набора мерок. Упорядочивание и обозначение мерок в наборе. Выбор из данных мерок первой «подходящей» мерки. Запись результата измерения величины набором упорядоченных мер (от большей к меньшей) в форме таблицы. Связь «номера» выбранной мерки с количеством цифр в записи числа. Понятие разряда. Задача на необходимость установления отношения между мерками. Отношение «в... раз больше», «в... раз меньше». Решение задач с заданным отношением. Замена таблицы для записи результатов измерения «заготовками».

Переход от ***набора мерок***, в котором отношение между мерками произвольное, к системе мерок с постоянным отношением между ними (основание системы счисления).

2. **Позиционные системы счисления.** Понятие многозначного позиционного числа как результата измерения величины системой мерок с заданным отношением (основание системы). Чтение и запись чисел в различных системах счисления. Место нуля в записи многозначных чисел. Понятие значащего нуля в записи многозначного числа (когда нуль в середине и на конце) и незначащего (перед старшим разрядом). Сравнение многозначных чисел с помощью числовой прямой и поразрядное сравнение чисел, взятых в одной системе счисления. Представление числа в виде суммы разрядных слагаемых, замена суммы разрядных слагаемых числом.

3. **Десятичная система счисления как частный случай позиционной системы счисления.** Чтение и запись любых многозначных чисел. Названия первых четырех разрядов. Сравнение многозначных чисел.

Решение текстовых задач.

Тема 4. Сложение и вычитание многозначных чисел в разных системах счисления *(42 ч)*

1. **Постановка задачи** на сложение и вычитание многозначных чисел как переход от способа присчитывания и отсчитывания к конструированию способа выполнения действий «в столбик».

2. **Конструирование способа сложения и вычитания многозначных чисел.** Поразрядность сложения и вычитания как основной принцип построения этих действий. Запись примеров «в столбик», в которых имеются числа с одинаковым и разным количеством разрядов.

Определение разрядов, которые «переполняются» при сложении, путем сравнения суммы однозначных чисел в разряде с основанием системы счисления. Опора на состав числа — основание системы счисления. «Разбиение» разрядов при вычитании. Определение сильных и слабых позиций чисел в разряде. Определение количества цифр (разрядов) в сумме и разности.

Задача на нахождение значения каждой разрядной единицы (цифры каждого разряда) искомой суммы или разности. Постановка задачи на нахождение суммы однозначных чисел (табличные случаи сложения) и обратной задачи на вычитание.

Составление и подбор подходящих математических выражений с многозначными числами для решения текстовых задач, в том числе задач на построение диаграмм.

3. **Табличное сложение и вычитание.** Построение таблиц сложения однозначных чисел на множестве целых неотрицательных чисел. Таблица Пифагора.

Исследование таблицы сложения. Использование таблицы Пифагора как справочника.

Постановка задачи запоминания табличных случаев и выделение «трудных» случаев сложения с переходом через десяток. Исследование зависимости цифры в разряде единиц суммы от изменяющегося слагаемого как основы непроизвольного запоминания суммы.

Нахождение суммы многозначных чисел. Решение текстовых задач, в которых буквенные данные могут быть заменены многозначными числами. Составление и решение уравнений, математических выражений с многозначными числами по схеме.

Выделение табличных случаев вычитания. Конструирование способа вычитания с переходом через десяток. Письменное сложение и вычитание многозначных чисел, заданных в задачах, уравнениях и выражениях. Использование калькулятора при проверке.

Конструирование приемов устного сложения и вычитания многозначных чисел, которые сводятся к внетабличным случаям в пределах 100.

Решение текстовых задач.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу второго класса дети научатся:

- пользоваться понятием натурального числа как универсальным средством сравнения величин при переходе от непосредственного сравнения к опосредованному;
- решать задачи на измерение, отмеривание и нахождение удобной мерки;
- чертить с помощью линейки отрезок данной длины и измерять длину отрезка;
- читать диаграммы, анализировать их и использовать при решении задач;
- записывать результат измерения системой мерок; называть первые четыре разряда в десятичной системе счисления;
- сравнивать числа, группировать их по заданному или самостоятельно установленному правилу;
- складывать и вычитать многозначные числа в различных системах счисления, в том числе в десятичной, опираясь на таблицу сложения однозначных чисел и соответствующие ему табличные случаи вычитания;
- прогнозировать результат вычисления, пошагово контролируя правильность и полноту выполнения с опорой на составленный совместно с другими детьми справочник ошибок;
- делать оценку и прикидку будущего результата;

• пользоваться калькулятором для проверки в том случае, если ученик сомневается в правильности вычислений;

• строить графические модели (схемы, диаграммы) отношений между величинами при решении текстовых задач с буквенными и числовыми данными с опорой на понятие целого и части и разностное сравнение величин;

• исследовать зависимость решения задачи от ее условия, зафиксированного в схеме;

• сравнивать разные способы вычислений и выбирать рациональные способы действий с опорой на графическую модель (схему);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению;

• использовать известные ученику математические термины и обозначения.

Понимать и применять:

• принцип образования последующего и предыдущего чисел на числовой прямой;

• принцип образования многозначных чисел в любой системе счисления;

• общий способ чтения любого многозначного числа в любой системе счисления с неограниченным числом разрядов;

• общий принцип выполнения любого арифметического действия на примере сложения и вычитания любых многозначных чисел в десятичной системе счисления.

3 КЛАСС *(4 ч × 34 нед. = 136 ч)*

Тема 1. Понятие умножения и деления *(24 ч)*

1. **Умножение как способ измерения величин**, связанный с переходом в процессе измерения к новым меркам.

Постановка и решение задач, приводящих к изменению единиц измерения. Графическое изображение умножения. Оценка различных отношений между величинами и исходной меркой:

а) когда измерение удобно производить исходной меркой;

б) когда для измерения нужна дополнительная (промежуточная) мерка.

Конструирование формулы вида «по a взять $в$ раз»:

$A/E = a \cdot в$.

Введение термина «умножение». Переход от словесной формы к графической, знаковой и обратно. Конструирование способа замены любого произведения двух чисел одним числом в позиционной форме в десятичной системе счисления как универсального способа сравнения величин, описанных в виде произведения:

а) с помощью числовых прямых или двух линеек;

б) с опорой на отношение частей и целого, т. е. на связь умножения со сложением (в формуле $a \cdot в = c$, где a — часть, $в$ — количество частей, c — целое).

Решение текстовых задач, включающих отношение «больше в... раз», «меньше в... раз», как новый способ уравнивания величин. Кратное сравнение величин. Использование диаграмм при решении задач.

2. **Деление как действие по определению:**

а) промежуточной мерки — деление «на части»;

б) числа промежуточных мерок — деление «по содержанию».

Трехчленность операции умножения. Исследование зависимости между величиной, промежуточной меркой и их количеством. Связь деления с вычитанием. Введение названий компонентов при умножении и делении и их связь с понятием целого и части. Графическое моделирование деления. Зависимость результатов умножения и деления от изменения компонентов и наоборот. Решение и составление по схемам текстовых задач, уравнений, математических выражений.

Тема 2. Свойства умножения *(12 ч)*

Переместительное свойство умножения. Вычисления с опорой на переместительное свойство.

Сочетательное свойство и вычисления с опорой на него. Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Порядок выполнения действий, изменение порядка выполнения действий с опорой на схему. Приемы устных вычислений с опорой на свойства сложения и умножения. Рациональные способы вычислений.

Решение текстовых задач.

Тема 3. Умножение и деление многозначных чисел *(55 ч)*

1. **Постановка задачи нахождения произведения многозначных чисел.**

2. **Конструирование** способа умножения многозначного числа на однозначное как основы для умножения многозначного числа на многозначное. Выделение принципа поразрядности выполнения действия. Конструирование способа нахождения результата как последовательное нахождение:

а) разрядов, которые «переполняются»;

б) количества цифр в результате;

в) цифры каждого разряда.

3. **Постановка задачи составления таблицы** умножения однозначных чисел (таблицы Пифагора), включая случаи умножения на 0 и 1. Умножение на 10, 100, 1000 и т. д. Способы работы с таблицей как со справочником.

4. **Постановка задачи запоминания** таблицы умножения и рассмотрение каждой таблицы в отдельности.

Таблица умножения на 9 и соответствующая таблица деления; умножение любых многозначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1, 9, на любое однозначное число с опорой на переместительное свойство умножения; умножение «в столбик» на числа, оканчивающиеся нулями: 90, 900, 9000 и т. д.

Таблица умножения на 2 и таблица деления; умножение многозначных чисел, включающее умножение на 9 и 2. Умножение на 20, 200, 2000 и т. д.

5. **Деление с остатком** и его графическое представление. Деление с остатком в случае, когда делимое меньше делителя. Необходимые и достаточные условия нахождения результата деления с остатком.

Решение текстовых задач.

6. **Таблицы умножения и деления** на 5 и 6, 4 и на 8, 3 и 7. Умножение многозначных чисел на однозначные числа и разрядные единицы. Приемы устных и письменных вычислений при решении уравнений и текстовых за-

дач, в которых буквенные данные могут быть заменены такими числами, с которыми учащиеся могут выполнять действия. Умножение многозначных чисел на разрядные единицы.

Решение текстовых задач.

7. **Классы чисел. Сетка классов.** Чтение и запись многозначных чисел. Определение количества десятков, сотен, тысяч и т. д.

Определение количества цифр в записи многозначного числа по старшему разряду. Действия с многозначными числами. Текстовые задачи.

8. **Умножение многозначного числа на многозначное.** Конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное и запись его в виде модели. Определение числа цифр в произведении. Решение и составление уравнений, математических выражений, текстовых задач по заданным схемам и наоборот.

9. **Деление многозначных чисел.** Конструирование способа деления многозначного числа на однозначное: принципы поразрядности при делении. Постановка задачи деления любого многозначного числа на любое многозначное:

а) определение первого неполного делимого (разбиение);

б) нахождение количества цифр в частном;

в) нахождение «подсказок» при делении многозначных чисел, с опорой на которые происходит подбор цифры в частном. Умножением, а не делением подбирается цифра в частном.

10. **Нахождение значения числового выражения**, содержащего деление многозначного числа на многозначное. Порядок действий в математических выражениях, составленных из многозначных чисел и включающих все арифметические действия. Использование калькулятора для проверки.

Решение задач и уравнений на все действия с многозначными числами. Отображение информации, содержащейся в текстовых задачах, в виде диаграммы.

Тема 4. Действия с многозначными числами *(45 ч)*

1. **Поразрядность выполнения всех действий с многозначными числами** как основной принцип построения этих действий. (Рефлексия.)

Запись и выполнение сложения, вычитания, умножения и деления «в столбик».

2. **Классификация устных и письменных вычислений.** Анализ известных детям способов устных и письменных вычислений, содержащих:

а) сложение и вычитание;

б) умножение и деление.

3. **Приемы устных вычислений:** умножение на 11, на 101, умножение и деление на 25 и другие числа.

4. **Признаки делимости:** на 2, 5 и 10; на 4, 25, 100; на 8, 125, 1000; на 9 и 3. Признаки делимости на 6, 15, 36 и другие как одновременная опора на известные признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 и т.д.

5. **Решение текстовых задач**, включающих необходимость использования признаков делимости.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу третьего класса дети научатся:

• находить способ измерения величин в ситуации, когда предложенная учителем величина значительно больше исходной мерки; создавать и оценивать ситуации, требующие перехода от одних мер измерения к другим;

• использовать схему умножения (она же и деления) при решении текстовых задач, составляя выражение или уравнение; по схеме придумывать или подбирать текстовые задачи; применять калькулятор при проверке вычислений;

• анализировать зависимости между величинами, с которыми ученик имеет дело при решении задач;

• строить графические модели арифметических действий и осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно; читать и строить диаграммы;

• решать уравнения типа $a \cdot x = в$, $x \cdot a = в$, $a : x = в$, $x : в = a$;

• умножать и делить многозначное число на многозначное с опорой на таблицу умножения (и только умножения!) однозначных чисел от 0 до 9;

• основным приемам устных вычислений при выполнении любого арифметического действия;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами.

понимать:

• смысл умножения как особого действия, связанного с переходом к новой мерке в процессе измерения величин;

• смысл деления как действия, направленного на определение промежуточной мерки или числа этих мерок;

• как устроена сетка классов чисел, включая класс миллиардов.

4 КЛАСС *(4 ч × 34 нед. = 736 ч)*

Тема 1. Многозначные числа и десятичные дроби как частный случай позиционных систематических дробей *(64 ч)*

1. **Действия с многозначными числами. Повторение** *(11 ч)*

2. **Измерение величин:**

а) анализ условий, при которых получается: однозначное число; многозначное число в различных системах счисления;

б) постановка ***задачи воспроизведения величины*** меньшей, чем заданная исходная мерка;

в) набор и система мерок меньших, чем исходная. Построение ***систе-***

мы мер с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), в том числе и с отношением 10;

г) запись результата измерения величины с помощью системы укрупненных мерок и системы уменьшенных мерок. Табличная форма записи, введение запятой. Позиционные систематические дроби в разных системах счисления. Знакомство с записью результата измерения в форме обыкновенной дроби. (Например: 0,13 = 1/3 или 0,25 = 2/5.)

3. **Запись и чтение десятичных дробей.** Место десятичных дробей на числовой прямой. Сравнение десятичных дробей с помощью числовой прямой. Принцип поразрядности при сравнении систематических позиционных дробей. Построение величины по заданной позиционной или обыкновенной дроби и исходной мерке. Округление десятичных дробей с избытком и с недостатком.

4. **Действия с многозначными числами и десятичными дробями.** Сложение и вычитание десятичных дробей. Умножение и деление десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. Сохранение числа при последовательном умножении и делении его на 10, 100, 1000 и т. д.

Конструирование способа умножения десятичных дробей и деления, когда делитель — число натуральное. Сведение случая деления на десятичную дробь к делению на натуральное число.

Микрокалькулятор. Проверка действий с различными видами чисел с помощью микрокалькулятора.

Решение и составление текстовых задач, уравнений и математических выражений с десятичными дробями. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби.

5. **Стандартные системы мер.** Действия с числовыми значениями величин. Десятичные дроби и стандартные системы мер. Перевод одних мер в другие. Меры длины, площади, массы, объема.

Действия с числовыми значениями величин. Решение и составление текстовых задач, требующих подбора «подходящих» к данным числам сюжетов и «подходящих» к данному сюжету чисел.

Деньги как мера стоимости. Валюты в России, Америке, странах СНГ. Курс одних валют по отношению к другим. Стандартные меры измерения времени: век, год, месяц, неделя, сутки, час, минута, секунда. Стандартные меры измерения углов: градус, минута, секунда, радиан.

Число как результат кратного отношения длины окружности к диаметру, т. е. как число радиан в полуокружности.

Тема 2. Периметр, площадь, объем *(34 ч)*

1. **Периметры различных плоских фигур и способы их вычисления.** Сравнение периметров различных фигур с помощью посредника (например, проволоки и т. п.). Формулы периметра прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других геометрических фигур, включая правильные многоугольники. Вычисление периметров геометрических фигур и фигур произвольной формы (границы фигур — кривые линии). Использование гибких мерок.

2. **Площади геометрических фигур.** Непосредственное и опосредованное

сравнение площадей геометрических фигур. Измерение площади прямоугольника путем непосредственного наложения мерки, в том числе квадратного сантиметра, замена этого способа измерением длин сторон.

Формула площади прямоугольника: $S = a \cdot b$.

Измерение площади прямоугольного треугольника как нахождение половины площади соответствующего прямоугольника. Формула площади прямоугольного треугольника: $S = (a \cdot b) : 2$, где a и b — длины сторон прямоугольника, составленного из двух одинаковых треугольников.

Поиск двух из трех сторон прямоугольного треугольника, измерение которых позволяет вычислить его площадь. Выбор прямоугольных треугольников среди прочих.

Виды треугольников. Постановка и решение задачи нахождения площадей непрямоугольных треугольников путем разбиения их на прямоугольные. Формула площади произвольного треугольника: $S = (a \cdot h) : 2$, где h — высота треугольника.

Нахождение площадей геометрических фигур путем разбиения или перекраивания их различными способами на треугольники или прямоугольники. Поиск рациональных способов разбиения фигуры для вычисления ее площади. Площадь правильного n-угольника. Вычисление площадей различных геометрических фигур.

Палетка как прибор для измерения площадей фигур произвольной формы. Алгоритм измерения площади с помощью палетки. Решение текстовых задач, включающих понятия площади и периметра.

3. **Объемы геометрических тел.** Измерение объема прямоугольного параллелепипеда путем заполнения его кубическими мерками и замена способа непосредственного вложения и пересчета мерок вычислением произведения трех измерений: длины, ширины, высоты — и нахождением с их помощью объема $(V = a \cdot в \cdot c)$ или произведения площади основания на высоту $(V = S \cdot H)$.

Общий подход к вычислению объема любых «призмоподобных» и «пирамидоподобных» геометрических тел.

Тема 3. Анализ решения текстовых задач *(38 ч)*

1. **Строение задачи. Краткая запись задачи. Схемы. Уравнения.** Краткая запись условия задачи как новое средство моделирования, когда текст задан в косвенной форме или содержит большое количество данных.

Восстановление текста задачи по краткой записи и наоборот. Матричная форма краткой записи (таблица) для задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами.

Преобразование краткой записи к виду, удобному для графического моделирования (составление схемы).

Составление схемы по краткой записи и наоборот. Выделение равных величин и составление уравнений по схеме. Составление разных уравнений по одной и той же схеме на основе выбора обозначения неизвестной величины и выражение остальных неизвестных величин через первую.

Составление к задачам уравнений, удобных для решения. Преобразование уравнений на основе преобразования схем. Зависимость изменения уравнения от изменения схемы и наоборот.

2. **Задачи на «процессы».** Время и его измерение. Понятие о скорости. Общий подход к решению текстовых задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами:

а) на движение (выделение характеристик движения: времени, скорости, расстояния — и связи между ними);

б) на куплю-продажу;

в) на работу (производительность труда, время, объем работ);

г) на изготовление товара (расход ткани на одну вещь, количество вещей, общий расход) и т. п.

Составление краткой записи задачи в виде таблицы:

а) на встречное движение;

б) на движение в противоположных направлениях и в одном направлении.

Понятие скорости удаления и скорости сближения.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу четвертого класса дети научатся:

• читать и записывать многозначные числа и конечные десятичные дроби, сравнивать их и выполнять действия с ними; исследовать связь между десятичными дробями и натуральными числами;

• выполнять любые арифметические действия с многозначными числами (без ограничения числа разрядов); сравнивать разные способы вычислений; выбирать рациональный (удобный) способ действия;

• моделировать с помощью схемы отношения между компонентами арифметических действий в математических выражениях, определяя порядок действий на основе анализа этих отношений;

• прогнозировать результат вычислений, используя калькулятор при проверке;

• составлять формулы периметра и площади любого многоугольника (и прямоугольника в том числе) и использовать их при решении задач;

• вычислять периметры различных плоских фигур, описывать их свойства;

• использовать различные способы вычисления площади фигуры: прямоугольника, треугольника и других многоугольников;

• применять общий способ нахождения периметра, площади и объема любых геометрических фигур;

• изготавливать модели геометрических тел; использовать различные инструменты и технические средства (линейка, угольник, транспортир, циркуль, калькулятор и др.);

• конструировать геометрическую фигуру (отрезок, ломаную, многоугольник, в том числе прямоугольник) с заданной величиной (длиной, в том числе периметром, площадью);

• упорядочивать величины; моделировать и разрешать реальные ситуации, требующие умения находить геометрические величины (планировка, наклейка обоев и т. п.);

• анализировать строение задачи и схему как основание для классификации;

• выявлять связь между пропорциональными величинами: скоростью, временем, расстоянием; ценой, количеством, стоимостью и др. и использовать известную схему умножения (деления) для решения текстовых задач;

• использовать новое средство моделирования условия задачи — краткую запись; составлять текст задачи по краткой записи; преобразовывать краткую запись и соответствующий ей текст (и наоборот);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами и наоборот;

• представлять информацию в таблице и на диаграмме;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания (и задачи) с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

иметь представление:

• о признаках делимости;

• о многоугольниках и геометрических телах;

• о видах углов и треугольников.

Предлагаемая программа построена так, что позволяет реализовать каждый из трех вариантов программ, которые в настоящее время представлены в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования второго поколения на новом качественном уровне в форме теоретического знания.

Однако, учитывая то обстоятельство, что уровни развития детей, индивидуальные особенности учителей и региональные условия могут значительно различаться, можно предложить еще **три варианта** дифференциации данной программы обучения.

Все они предполагают введение факультативов, но один из вариантов связан с переносом части предложенной программы на факультативное изучение, другой — с дополнением данной программы факультативом, а третий — с усилением самой программы и дополнительным факультативом.

Рассмотрим каждый из этих вариантов.

При **первом варианте** (условно говоря, облегченном) можно предложить на выбор **вынести на факультатив** из программы 3 класса:

1) признаки делимости;

2) некоторые из предложенных приемов устных вычислений, которые традиционно рассматриваются на факультативах (умножение на 11, 101, умножение и деление на 25, умножение одинаковых чисел, оканчивающихся на 5, т. е. $25 \cdot 25$, $35 \cdot 35$ и т. п.).

Из программы 4 класса:

1) понятие процента и решение соответствующих текстовых задач, работу с рекламными материалами;

2) знакомство с валютами разных стран и курсами валют по отношению

друг к другу;

3) нахождение объемов геометрических тел;

4) кроме выноса части материала на факультатив можно сократить время (но не отказываться совсем!) на решение текстовых задач, приводящих к составлению сложных уравнений.

Особо хотим отметить, что самовольный отказ от изучения других тем программы, например от десятичных дробей и действий с ними, не только нарушит логику построения курса, что недопустимо, но и лишит учащихся возможности, во-первых, переосмыслить на новом уровне принципы устройства многозначных чисел в разных системах счисления, а во-вторых, завершить формирование навыков письменных и устных вычислений с многозначными натуральными числами, которые включены в действия с десятичными дробями в качестве средства. Другими словами, при выполнении действий с десятичными дробями дети фактически отрабатывают действия с натуральными многозначными числами (и это лишь один из примеров).

Второй вариант предусматривает выполнение основной программы и может быть дополнен **факультативом**, ориентированным на углубление изучаемого материала:

1) при изучении во 2 классе позиционных систем счисления можно предложить исследовать способы перевода чисел из одной системы счисления в другую, если величины, с которыми действует ребенок, измерялись разными системами мер, и составить сборник соответствующих заданий на их сравнение, сложение и вычитание. Причем перевод числа из одной системы счисления в другую осуществляется с помощью действия восстановления величины;

2) в развитие предыдущей темы после изучения всех действий с многозначными числами в десятичной системе счисления можно предложить конструирование умножения и деления в недесятичных системах счисления (3—4 класс).

Вообще хотелось бы отметить, что учителя иногда недооценивают ту роль, которая отведена в обязательной программе работе с числами, представленными в недесятичных системах счисления, особенно на первом этапе. Значение этой темы огромно как для осмысления принципа устройства десятичной системы счисления и организации совместной деятельности детей, так и для формирования качественных вычислительных навыков. Так, складывая или вычитая, например, числа в пятеричной системе счисления, дети осмысленно усваивают соответственно состав числа 5 и счет в пределах 5, поэтому, работая с натуральными числами, а затем и дробными в разных системах счисления, учитель предоставляет возможность слабым детям вновь и вновь возвращаться к тому материалу, которой ранее по каким-либо причинам был плохо усвоен ребенком, причем понятно, что это не просто повторение изученного, а возвращение на качественно новом уровне, причем возвращение, обеспечивающее продвижение ребенка вперед.

Третий вариант программы можно использовать в классах, где, во-первых, математику с 1 класса ведут либо учителя математики, либо учителя начальных классов, проявляющие особый интерес к преподаванию математики (и те и другие должны непременно пройти обучение в центре переподготовки работников образования), а во-вторых, большинство поступивших детей оказались с высокой психологической готовностью к школе, хорошей дошкольной подготовкой и ярко выраженными интересом и способностями к изучению математики.

Эта **углубленная** программа обучения математике включает материал, рекомендованный в предыдущем варианте для факультативных занятий.

В качестве дополнительного материала, который учитель может использовать после уроков, можно предложить следующие тематические занятия:

1) задачи на разрезание и перекраивание фигур (1 класс);

2) задачи с переливаниями, дележами, переправами при затруднительных обстоятельствах (1—2 классы);

3) ознакомление учащихся с одним из аналитических методов решения задач, решаемых «от конца к началу» (2—3 классы);

4) задачи на проценты (включены в р/т № 1 для 4 класса);

5) различные занятия по истории математики (1—4 классы);

6) занятия, связанные с изучением вероятности случайных событий (4 класс).

Кроме тематических занятий можно предложить сконструировать способ умножения многозначных чисел (в отличие от умножения «в столбик»), основанный на правиле «ножниц» (автор Э.И. Александрова), позволяющий фактически устно, без записи промежуточных результатов получать произведение. Этот новый способ действия дает возможность значительно улучшить устный счет, делая его более мотивированным (подробно описан в методическом пособии для учителя, 3 класс).

Совершенно очевидно, что предлагаемые темы факультативных занятий могут быть продолжены. Учитель вправе самостоятельно выбрать темы из предложенных или внести собственные, а также использовать данные рекомендации при любом из трех вариантов программы. Однако при подборе собственных вариантов факультативов рекомендуем руководствоваться следующими соображениями: факультатив должен либо углубить понятия, изучаемые в обязательной программе, либо расширить представления детей о математике путем рассмотрения элементов математической логики, теории вероятности, теории графов, истории математики, аналитических методов и нестандартных приемов решения задач. Факультативные занятия не должны включать темы, которые будут предметом исследования в более поздние сроки обучения в школе.

*   *   *

Программа обеспечена учебно-методическими комплектами для каждого года обучения:

1) учебники для каждого года обучения:
2) методические пособия «Обучение математике» (для каждого класса);
3) рабочие тетради (для каждого класса);
4) контрольные работы (для каждого класса).

Содержание