

## ПОЯВЛЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ И ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ. Р. ДЕКАРТ, П. ФЕРМА. ПРИМЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ.

Сегодня нам трудно представить, как раньше люди жили без координат. Координаты вошли в нашу жизнь, и мы используем их, даже сами того не замечая. По указанным в билете координатам мы определяем свои места в кинозале или на борту самолёта. Используя координаты, можно удаленно сыграть партию в шахматы или в «морской бой». Координаты используются при формировании изображения на экране монитора или телевизора. Без использования координат невозможно представить управление морским судном или полетом космического аппарата. Между тем, человечеству потребовались тысячелетия, чтобы идея координат – однозначное определение места точки на плоскости или в пространстве, стала для нас столь привычной и общеупотребительной.

Примеры использования координат мы находим еще в древности, где они возникли в связи с потребностями географии, астрономии, живописи. Первая географическая карта Земли была составлена Анаксимандром Милетским (VI в. до н.э.), роль координат в ней играют понятия долготы и широты. Этот способ определения места на поверхности земли получил развитие в трудах другого древнегреческого ученого Гиппарха Никейского (II в. до н.э.) и, начиная с работ Клавдия Птолемея (II в.), долгота и широта прочно вошли в употребление в качестве географических координат. Аналогичную систему стали использовать астрономы древности для указания места светил на небе.

Наиболее ранние свидетельства применения идеи прямоугольных координат для переноса изображения обнаружены в одной из погребальных камер древнеегипетской гробницы Сети I (XIII в. до н.э.), отца Рамсеса II. Этот способ переноса изображений на стены зданий активно использовался художниками эпохи Возрождения (XV в.).

Первые зачатки метода координат как чисто математического метода можно усмотреть в «Конических сечениях» Аполлония Пергского (III в. до н.э.). При получении уравнений кривых этот древний ученый пользуется косоугольными координатами. Как подсказывает название, в косоугольной системе координат оси не перпендикулярны, а координаты точки определяются по прямым, параллельным этим осям. Именно латинскому переводу трудов Аполлония мы обязаны появлению терминов «абсцисса» и «ордината». «Абсцисса» происходит от латинского слова «отсекаемый», а «ордината» – от латинского «упорядоченный».

Французский математик Николай Орем (XIV в.) использовал в качестве координат отрезки широт и долгот. Когда он располагал эти отрезки перпендикулярно некоторой прямой, их концы образовывали линию, названную им "линией интенсивностей" или "линией верхнего края" – одним из первых прообразов графика функции. Орем пытался даже классифицировать эти линии.

Он выделил три основных их типа: равномерные (с постоянной интенсивностью), равномерно-неравномерные (с постоянной скоростью изменения интенсивности) и неравномерно-неравномерные (все остальные). Идеи Орема не могли продвинутся дальше, т.к. тогда отсутствовала алгебраическая символика, необходимая для аналитического выражения зависимостей между величинами.

Разработка идеи применения координат в математике началась с исследований двух крупнейших французских математиков XVII века – П. Ферма и Р. Декарта.

В своей работе «Введение в изучение плоских и телесных мест» Ферма провёл классификацию линий в зависимости от степени  $x$  в их уравнении. Он заметил, что уравнение первого порядка определяет прямую, а уравнение второго порядка — кривую, получаемую при сечении конуса плоскостью (окружность, эллипс, параболу или гиперболу). Эта работа распространялась в рукописном виде и не получила широкой известности. Она была издана уже после смерти ученого его сыном Самуилом в 1679 г. Характерными чертами этой работы Ферма стала ясность, лаконичность и систематичность



Рис. 1. Некоторые виды неравномерностей у Орема

изложенных в ней идей. Но истории суждено было распорядиться так, чтобы к нам эти идеи пришли от Декарта, его имя сохранилось в названии «декартова система координат».



Пьер Ферма (1601-1665) – французский математик-самоучка. По профессии юрист. Известный полиглот и знаток античности. Сформулировал одну из самых знаменитых математических загадок, получившую название «великой теоремы Ферма»: для любого  $n > 2$  уравнение  $a^n + b^n = c^n$  не имеет решений для натуральных  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Он записал её на странице «Арифметики» Диофанта с припиской, что найденное им доказательство слишком длинное, чтобы привести его на полях. Ни одно из сочинений Ферма при жизни не было опубликовано. Многие полученные им результаты дошли до нас в его переписке с учеными. Тем не менее, работы Ферма оказали существенное влияние на развитие аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел.



Рене Декарт (1596-1650) – французский философ, математик, физик и физиолог. Основатель философской теории рационализма, которую выразил в фразе «Я мыслю, следовательно, существую!» Создатель аналитической геометрии. Сформулировал так называемую «основную теорему алгебры», о том, что общее число корней уравнения равно наибольшему показателю степени неизвестного. В математике именем Декарта названы сразу несколько объектов. Это не только хорошо знакомые нам по школьному курсу алгебры «декартовы координаты», но и две кривые: «декартов лист» и «декартов овал», граф «декартово дерево» и операция над множествами «декартово произведение».

В 1637 году Декарт издает «Рассуждение о методе». Значение этой книги для развития математики сопоставимо с тем влиянием, которое оказали на развитие математики задолго до этого «Начала» Евклида. Одним из приложений «Рассуждения о методе» является «Геометрия». В этой работе Декарт упрощает существовавшую до него символику, предлагает современные нам обозначения степеней и радикалов. Именно по идущей от него традиции известные величины мы обозначаем первыми буквами латинского алфавита ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  ...), а неизвестные – последними ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Декарт поясняет суть координатного метода, вводит понятие переменной величины и понятие функции. Как и Ферма, он предлагает классификацию кривых линий, исходя из работ Аполлония. Изучает свойства кривых с помощью своего метода, получая их уравнения. Дает способ распространения координатного метода на трехмерное пространство. В конце книги он демонстрирует геометрический способ решения уравнений третьей, четвертой, пятой и шестой степеней. Заметим, что в «Геометрии» Декарта самой «декартовой системы координат» в привычном для нас виде не было. Чаще всего это была косоугольная система координат, к которой вторая ось подбиралась специальным образом. Современное понимание координатной системы сформировалось только в XVIII веке, во многом благодаря работам Г.В. Лейбница (1646 – 1716), который, собственно, и закрепил термин «координаты», установив равноправие осей абсцисс и ординат. Понятие «начало координат» возникло в работах Ф. Лагира (1640 – 1718) и стало обозначаться буквой «О» (от первой буквы слова «origin», т.е. «начало»). Первый график, в привычном для нас понимании, построил Р. Плот (1640 – 1696) в 1684 г. для иллюстрации ежедневного давления воздуха.

Упоминания о системе координат в пространстве встречаются в работах Ф. Лагира и Л. Эйлера, И. Бернулли и А. Парана. Систематическая разработка аналитической геометрии в пространстве началась с работ А. Клеро (1713 – 1765). Вы будете изучать трехмерную систему координат в старших классах.

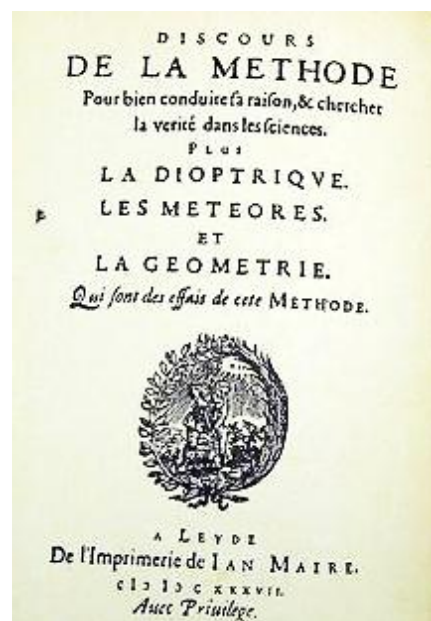


Рис. 2. Титульный лист "Рассуждения о методе", в приложении к которому впервые была опубликована "Геометрия" Р. Декарта (1637 г.)

Метод координат позволил применить средства алгебры для решения задач геометрии: задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы можем решать геометрическую задачу средствами алгебры.

Важно понимать, что на известной и широко используемой нами на уроках декартовой системе координат, развитие идеи координат не остановилось. Благодаря использованию этой идеи в физике «родились» различно ориентированные системы координат. В 1873 году эти системы координат были названы Максвеллом как «левая» и «правая». Интересно, что вначале он называл их «подобная хмелю» и «подобная винограду», в соответствии с ориентацией закручивания стеблей этих растений. Позже оформились такие системы координат как полярные, трилинейные, барицентрические, цилиндрические, сферические, эллиптические, криволинейные, проективные и многие другие.

В каждой из этих систем координат расположение точек определяется по своим правилам. Так, например, в основе трилинейных координат лежит некоторый треугольник, а расположение точки внутри него задается тройкой чисел, соответствующих расстоянию от этой точки до его сторон.

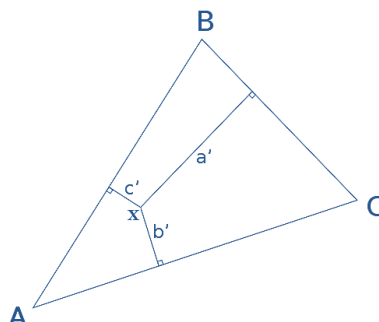


Рис. 3. Задание точки в трилинейных координатах

В полярной системе координат на плоскости задается числовой луч  $OX$ . Начало луча, точка  $O$ , называется полюсом, а ось  $OX$  – полярной осью. Положение точки  $M$  определяется её расстоянием до полюса и углом  $\varphi$  её радиус-вектора к полярной оси.

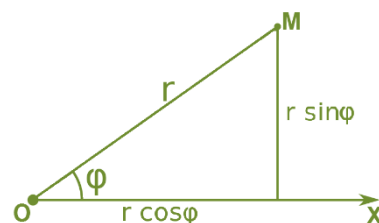


Рис. 4. Задание точки в полярных координатах

О значении различных видов координат в развитии математики Ламе писал: «Без изобретения прямоугольных координат алгебра осталась бы на той же точке, где Диофант и его последователи её оставили ... Без введения сферических координат небесная механика была бы абсолютно невозможна. Без эллиптических координат знаменитые геометры не могли бы решить многочисленные вопросы, важные в этой теории ... Теперь ... наступило царствование криволинейных координат» [3. С.157].

### Задания:

- 1) Выбери одну из систем координат, упомянутых в тексте статьи. Разберись в правиле определения координаты точки в этой системе координат. Для решения каких задач математикам понадобилась такая система координат?
- 2) Выполни построение спирали Архимеда, заданной уравнением  $r = \varphi$ , используя транспортир и линейку. Строй точки с шагом  $10^\circ$ .
- 3) Придумай символ, с которым у тебя ассоциируется понятие «аналитическая геометрия». Задай контур его изображения списком декартовых координат.
- 4) Познакомься со стихотворением «Ода декартовой системе координат» (Дарин Феникс):

О-икс, О-игрек - оси зла!  
Венец творения Декарта;  
Единый компас естества,  
Его проверенная карта.  
Линейных функций беспредел,

Его простор необозримый.  
Действительный и горестный удел  
Неотделим от этих вечных линий.  
Едва ли сможем мы без них всю суть постичь,  
Математического знания достичь.

Поясни, как ты понимаешь используемое автором образное выражение «единый компас естества».

### Источники:

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений. – М.: ЛКИ, 2007.
2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: Наука, 1966.
3. Воронина М.М. Габриэль Ламе. – Л.: Наука, 1987.
4. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. – М.: Наука, 1973.
5. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. – М.-Л.: Гостехиздат, 1938.
6. История математики. Т. 2. Математика XVII столетия/ Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970.
7. Никифоровский В.А., Фрейман Л.С. Рождение новой математики. – М.: Наука, 1976.
8. Полякова Т.С. История математики: Европа XVII – начало XVIII вв. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2015.
9. Саввин А.А. Координаты // Квант. – 1977. – №9 – С.50-52.