ЗАДАЧА ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКОГО (ФИБОНАЧЧИ) О КРОЛИКАХ. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ.

Леонардо Пизанский (ок.1170 – ок.1250), вошедший в историю как Фибоначчи, что означает «сын Боначчи», – один из наиболее выдающихся математиков европейского средневековья. Он не только познакомил европейцев с десятичной системой счисления, но и построил одну из самых удивительных числовых последовательностей в математике.

В сочинении «Книга абака» (1202) Фибоначчи предложил на первый взгляд обычную задачу определения приплода домашних животных в некоторых идеальных условиях. В результате решения этой задачи был открыт ряд чисел, отражающий многие зависимости в природе и искусстве, ставший мерилом красоты и гармонии.

Вот эта задача: «Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения».

Составим схему, которая будет отражать наши рассуждения (см. рис.1). В первом столбце будем обозначать номер месяца, во втором – изображать кроликов, а в третьем – записывать общее число пар кроликов в данном месяце. Если считать первую пару кроликов новорожденными, то на второй месяц у нас по-прежнему будет одна пара, которая в третьем месяце принесет приплод: 1 + 1 = 2. На четвертый месяц она также принесет приплод 2 + 1 = 3, при этом «первое потомство» уже повзрослев, станет способным к воспроизводству. Таким образом с пятого месяца уже две пары кроликов начинают производить потомство, а появившаяся в четвертом месяце пара дозревает. Итого, мы получили в пятом месяце 3 + 2 = 5 пар кроликов. Рассуждая аналогично, получим что из этих пяти пар три дадут приплод в шестом месяце, т.е. их всего будет 5 + 3 = 8. Продвигаясь по этой схеме далее, мы получим, что всего к концу года будем иметь 144 пары кроликов (проверь это самостоятельно!). Как видим, изобразить их на схеме достаточно затруднительно. Причем далее рост будет увеличиваться значительно.

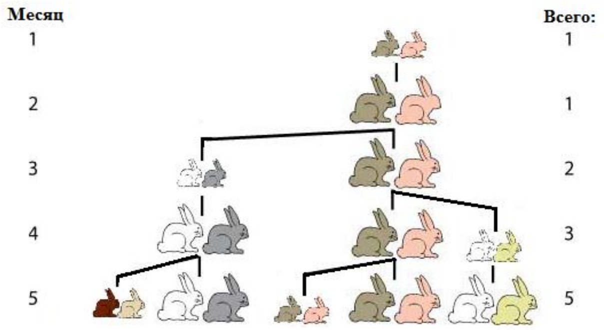

Рис. 1. Задача о кроликах

Итак, в результате решения задачи о кроликах, мы получим последовательность чисел: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 и т.д. Каждый член этой последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, т.е. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, при $n > 2$. Одним из первых исследователей рассмотренной последовательности стал французский математик А. Люка (1842 – 1891), возродивший своими работами интерес научной общественности к этим числам. С его легкой руки они получили имя Фибоначчи, а посвященные им исследования стали приумножаться как кролики из его задачи.

Числа Фибоначчи обладают многими совершенно неожиданными свойствами и перечень этих свойств постоянно расширяется, демонстрируя бесконечную красоту и взаимосвязи математики и природы. Приведем лишь некоторые свойства чисел Фибоначчи, обозначая i-ый член последовательности F_i.

1. $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
2. $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$
3. $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
4. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
5. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
6. $F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n}$
7. Если F_n чётно, то n кратно 3
8. Если F_n кратно 7, то n кратно 8
9. Если F_n кратно F_m, то n кратно m (для $m \neq 2$)
10. Если F_n – простое, то и n – простое.

Теперь ты знаешь, как последовательно получать очередное число Фибоначчи. Но есть ли способ получения n-го числа Фибоначчи сразу, без вычисления предыдущих ему чисел? Такую формулу нашел английский математик Абрахам де Муавр (1667–1754), хотя, как это часто бывает в истории, математикам она стала известна под другим именем – как формула Бине[1]. Выглядит эта формула совершенно неожиданно:

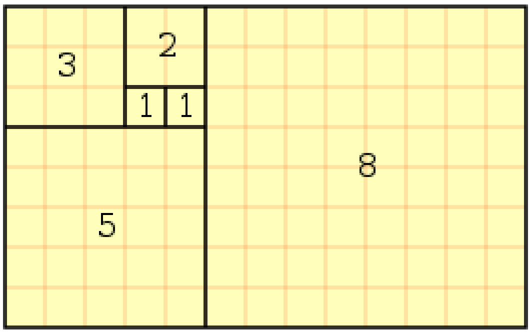

Рис. 2. Геометрическая иллюстрация к формуле для суммы квадратов первых n чисел Фибоначчи

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Примечательно, что в ней используется число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, которое впервые встречается в «Началах» Евклида (III в. до н.э.) под названием «число Фидия» и используется для построения правильного пятиугольника. Число $\Phi = 1{,}61803\ldots$ описывает знаменитое золотое сечение. Отношение соседних чисел последовательности Фибоначчи с увеличением номеров стремится именно к этому числу.

А можно ли для произвольного числа сказать, является ли оно числом Фибоначчи? Такой критерий тоже найден. И для небольших чисел ты легко можешь его использовать: число F является числом Фибоначчи, если при подстановке его в выражения $5F^2 + 4$ или $5F^2 - 4$ хотя бы одно из них даст в результате квадрат натурального числа.

Еще одним неожиданным проявлением универсальности чисел Фибоначчи оказалась их связь с треугольником Паскаля, который мы использовали для получения коэффициентов в формулах сокращенного умножения старших степеней. Во второй половине XX века сразу несколько математиков (Д. Пойя, М. Гарднер и др.) заметили, что если провести в треугольнике Паскаля поперечные линии так, как показано на рис.3, то суммы чисел в этих рядах будут числами Фибоначчи.

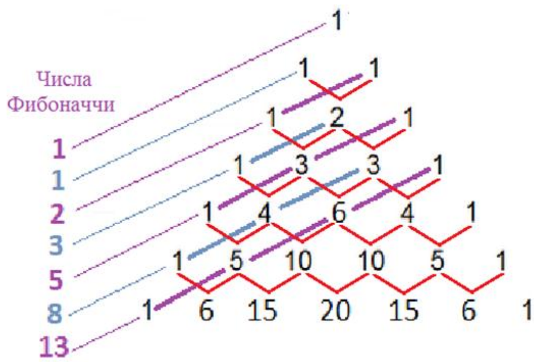

Рис. 3. Числа Фибоначчи и треугольник Паскаля

Для описания известных примеров проявления чисел Фибоначчи в математике не хватит и целой книги, а сколько еще тайн они откроют своим исследователям, не знает никто. Числа Фибоначчи возникают в самых разнообразных формах: в растительном мире и животном мире, в игровых стратегиях, и даже в задаче об оптимальной стратегии автомобилиста, при которой необходимо найти наиболее выгодную скорость машины для наименьшего расхода бензина на километр пути.

Задания:

1) Выбери любые три числа и определи, пользуясь критерием, есть ли среди них числа Фибоначчи.

2) В XIV веке в трактате «Биджаганита» индийского математика Нараяны появилась задача, представляющая вариацию задачи о кроликах Леонардо Пизанского: «Корова каждый год приносит одну телку, телка начинает давать такое же потомство с

[1] Жан Бине (1786 – 1856) – французский математик и механик.

трехлетнего возраста. Как велико стадо коров и телок от одной коровы через 20 лет?». Возникающая в ходе решения последовательность чисел получила название чисел Нараяны. Построй эту последовательность и ответь на вопрос задачи.

3) Найди примеры проявления чисел Фибоначчи:

а) в растительном мире;

б) в животном мире;

в) в архитектуре, музыке, искусстве;

г) в произведениях литературы и кино.

4) Докажи, что каждые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.*

5) Приведи три примера, иллюстрирующих одно из десяти рассмотренных в тексте свойств чисел Фибоначчи. Докажи справедливость выбранного тобой свойства в общем виде.*

6) В 1984 году на страницах научно-популярного журнала «Квант» М.И. Заикин высказал гипотезу: «Ровно через 60 чисел последняя цифра любого числа Фибоначчи периодически повторяется». Докажи это.*

Источники:

1. Володарский А.И. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1984.
3. Гарсия дель Сид. Замечательные числа. – М.: ДеАгостини, 2014.
4. Джексон Т. Математика. Иллюстрированная история. – М.: «Э», 2017.
5. Карпушина Н. «Liber abaci» Леонардо Фибоначчи // Математика в школе. – 2008. – № 4. – С.74-79.
6. Кнут Д., Грэхем Р, Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006.
7. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – М.: Фантом Пресс, 2014.
8. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. – Спб.: Питер, 2006.
9. Юшкевич А.П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.
10. Яглом И.М. Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики // Квант. – 1984. – № 7. – С. 15-17.