

ЗАДАЧА О ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Шахматы – игра, история создания которой своими корнями уходит в глубокую древность. Появившись в Индии в V–VI веках, шахматы распространились практически по всему миру и стали неотъемлемой частью человеческой культуры. Игра в шахматы заставляет работать оба полушария мозга и развивает интеллектуальные способности человека.

Одна из легенд об истории создания шахмат стала основой для математической задачи о шахматной доске. Согласно этой легенде, правитель решил отблагодарить создателя шахмат, позволив ему самому выбрать свое вознаграждение. Тот за свое изобретение попросил незначительную на первый взгляд награду: столько пшеничных зерен, сколько окажется на его шахматной доске, если класть их особым образом. Изобретатель попросил положить на первую клетку шахматной доски одно зерно, на вторую – два зерна; на третью – четыре и так удваивать количество зерен на каждой клетке, пока вся доска не будет заполнена. Эта просьба показалась правителю недостойной его щедрости, и он был оскорблен. С каким же изумлением он узнал от своих математиков, несколько дней без сна и отдыха выполнявших сложнейшие вычисления, что просьбу создателя шахмат не сможет выполнить ни он и ни один самый могущественный правитель мира.

Познакомимся с одним из первых описаний решения этой задачи, которое принадлежит среднеазиатскому математику ал-Бируни (973 г. – 1048 г.). В своем решении он использовал следующие два правила.

Первое правило раскрывает взаимосвязь между количеством зёрен на двух клетках шахматной доски. Ал-Бируни рассматривает какую-то конкретную n -ую клетку шахматной доски и находит клетку, которая отстоит от нее на таком же расстоянии, как и n -я клетка отстоит от первой. Ученый заметил, что количество зёрен на этой клетке будет равным квадрату числа зёрен на n -ой клетке. Например, 5-я клетка содержит 16 зёрен и отстоит от 1-ой клетки на четыре, тогда клетка, отстоящая от 5-ой на четыре в другом направлении, будет 9-ой, она содержит $16^2 = 256$ зёрен.

Во втором правиле ал-Бируни показывает взаимосвязь между количеством зёрен на клетке и предшествующих ей клетках. Если вычесть из количества зёрен на клетке единицу, то остаток будет равен сумме зёрен на предшествующих ей клетках. Например, 6-я клетка содержит $2^5 = 32$ зерна; $32 - 1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. Используя оба эти правила, ал-Бируни последовательно доходит до решения исходной задачи.

Сегодня у нас есть инструменты, которые позволяют произвести эти вычисления гораздо проще и быстрее, чем тысячу лет назад. Для этого нам понадобится понятие *геометрической прогрессии*.

Вспомним, что доска имеет 64 клетки. Так как количество зерен на каждой последующей клетке удваивается, мы получаем геометрическую прогрессию, первый член которой $x_1 = 1$, а знаменатель $q = 2$. Тогда по известной формуле сумма первых 64 членов данной геометрической прогрессии $S_{64} = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$, что составляет 18 446 744 073 709 551 615.

Если считать, что одно зернышко пшеницы имеет массу 0,065 грамма, то общая масса составит около 1200 триллионов тонн: $0,065 \text{ г} \cdot 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 = 1\,199\,038\,364\,791\,120\,854,975 \text{ г} = 1\,199\,038\,364\,791,120 \text{ т}$.

Такое количество зерна превышает весь урожай пшеницы, собранный за всю историю человечества! Для наглядности представьте, что вы стоите у железнодорожного переезда, а мимо движется грузовой состав с зерном. В каждом вагоне 50 тонн и проходит он перед вами со скоростью 1 вагон в секунду. Чтобы дожидаться, когда состав пройдет полностью, вам потребуется простоять у этого переезда более 760 лет!

Задание:

Согласно легенде об изобретении шахмат индусский царь не в состоянии был выдать требуемую награду. Но он легко мог бы освободиться от столь обременительного долга, предложив создателю шахмат самому отсчитать себе зерно за зерном всю причитающуюся ему пшеницу. Подсчитайте, до какой клетки шахматной доски в своих подсчетах дошёл бы создатель игры, отсчитывая по зерну в секунду в случае непрерывного ведения счета в течение 50 лет? А сколько лет ведения подобных расчетов для получения «награды» потребовалось бы его наследникам?

Источники:

1. Перельман Я.И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. – М.: Наука, 1967. – С. 87-91.
2. Розенфельд Б.А., Рожанская М.М., Соколовская З.К. Абу-р-Райхан Ал-Бируни. – М.: Наука, 1973. – С.50.