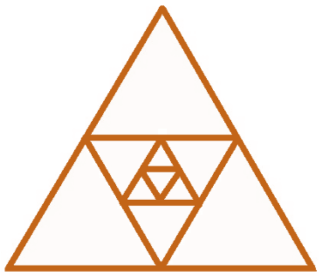
УДИВИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Понятие числовой последовательности возникло еще в глубокой древности. Первые последовательности рассматривались древними математиками уже более трех с половиной тысяч лет назад. Это были ряды натуральных чисел, четных и нечетных чисел, квадратов и кубов натуральных чисел, чисел, обратных натуральным и др. Примерно к этому же времени относятся упоминания о геометрических[1] прогрессиях[2]. С историей геометрической прогрессии связано множество интересных фактов, рассмотрим самые яркие из них.

Познакомимся с первыми свидетельствами того, что древним математикам были известны последовательности, которые сейчас мы бы назвали геометрическими прогрессиями. В древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок.1650 г. до н.э.) содержится задача, в которой требуется найти сумму нескольких членов геометрической прогрессии по заданному первому её члену и знаменателю. Клинописные таблички древнего Вавилона содержат задачу о нахождении суммы $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$. Примеры задач, связанных с геометрической прогрессией, встречаются и в китайской «Математике в девяти книгах», и в индийских «сиддхантах».

Задачи на геометрическую прогрессию возникали, как правило, из наблюдений над явлениями природы. Часто с помощью геометрической прогрессии описывали, например, процесс подсчета численности стада животных через равные промежутки времени. Примеры такого практического применения геометрической прогрессии встречаются в древнерусском юридическом сборнике «Правда русская» (XI в.). Там приводятся расчеты количества приплода от скота и пчел за некоторый известный промежуток времени, количества зерна и др.



Последовательности такого рода возникали и в геометрических построениях. Так, например, если последовательно строить квадраты с вершинами в серединах сторон предыдущих квадратов (см. рис.), то их площади будут составлять соответственно $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ldots$ от площади исходного. Включая в эту последовательность площадь исходного квадрата, получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1, а знаменатель – $\frac{1}{2}$. Соответственно сумма площадей этих квадратов будет равна 2. Этот пример демонстрирует одно из известных вам свойств бесконечно убывающей геометрической прогрессии: мы понимаем, что квадратов бесконечно много, а сумма их площадей равна конечному числу!

Площади треугольников, построенных аналогичным образом, будут образовывать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$. Вы можете найти сумму площадей этих треугольников самостоятельно, приняв площадь исходного треугольника за единицу.

Первое обоснование этого удивительного свойства суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии встречается у Архимеда (III в. до н.э.) в трактате «О квадратуре параболы». Архимед рассуждал так: пусть *a, b, c, d, e,* … – члены

---

[1] Напомним, что название «геометрическая» эта прогрессия получила благодаря характеристическому свойству своих членов: любой ее член, начиная со второго, по модулю будет равен среднему геометрическому своих соседей, т.е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Употреблять это название начали древние греки, так как учение о прогрессиях в древней Греции было тесно связано с теорией пропорций.

[2] Слово «прогрессия» с латинского означает «движение вперед» и встречается впервые у римского философа Боэция (V в.).

бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$. Тогда $a = 4b$, $b = 4c$, $c = 4d$, $d = 4e$ и т.д. Обозначим сумму всех членов через S, тогда $S = a + b + c + d + e + \ldots = 4b + 4c + 4d + 4e + \ldots = 4(b + c + d + e + \ldots)$. Отсюда $b + c + d + e + \ldots = \frac{S}{4}$, значит, $S = a + \frac{S}{4}$. Выражая из последнего равенства S, получим $S = \frac{4}{3}a$.

У европейских математиков правило нахождения суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии впервые встречается в «Науке о числах» (1484) Н. Шюке. Было оно известно П. Ферма и другим математикам XVII в.

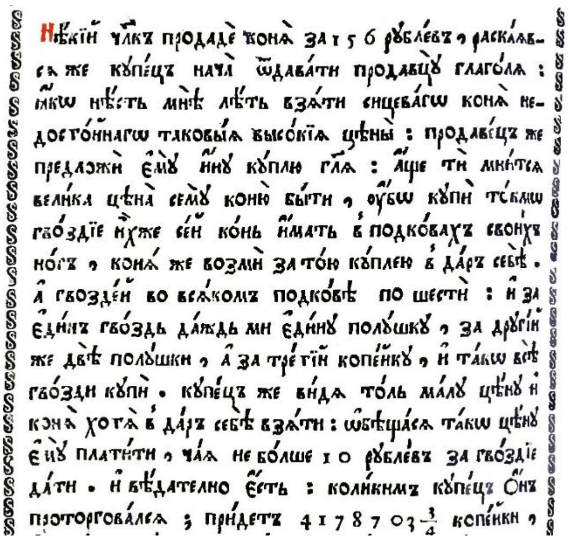
Еще один потрясающий факт, связанный с одной из геометрических прогрессий, открыт при сопоставлении ее членов с членами арифметической прогрессии. В 1544 г. немецкий математик М. Штифель в трактате «Общая арифметика» рассмотрел две прогрессии – арифметическую и геометрическую, – подобно тому, как это сделано в таблице:

Арифметическая прогрессия, $d = 1$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Геометрическая прогрессия, $q = 2$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256

В результате сопоставления этих прогрессий Штифель получил удивительный результат, позволяющий использовать эту таблицу для упрощения вычислений. Чтобы показать красоту взаимосвязи между членами этих прогрессий, разъясним, как предлагалось вести расчеты. Допустим, требуется найти произведение двух чисел из нижней строки, например, $\frac{1}{8}$ и 256. Найдем соответствующие данным числам значения из верхней строки таблицы: –3 и 8. Заменим умножение чисел нижней строки сложением соответствующих чисел из верхней: –3 + 8 = 5. Теперь осталось сделать обратный переход, заменяя полученный результат соответствующим значением из нижней строки. Получим число 32, это и есть значение искомого произведения.

Теперь разделим с помощью этой таблицы 128 на 8. Поступим аналогичным образом, заменив деление вычитанием. Получим: 128→7, 8→3, 7 – 3 = 4, 4→16, значит, 128 : 8 = 16.

Эта таблица позволяет возводить в степень и извлекать корни. Операцию возведения в степень будем заменять умножением, а извлечение корня – делением. Найдем 4^3: 4→2, $2 \cdot 3 = 6$, 6→64, т.е. $4^3 = 64$. Теперь вычислим значение $\sqrt[4]{256}$: 256→8, 8 : 4 = 2, 2→4, значит, $\sqrt[4]{256} = 4$. Для большей вычислительной мощности этой таблицы её можно «уплотнить», добавив между каждыми двумя элементами верхней строки их среднее арифметическое, а для элементов нижней строки – среднее геометрическое. Такое «уплотнение» можно провести не один раз. Рассмотренный нами принцип вычислений был положен в основу создания логарифмов, с которыми ты познакомишься в старших классах.


Нѣкiй члвкъ продадѐ конѧ̀ за 156 рублевъ, раскаяв-
сѧ же купецъ нача̀ ѿдавати продавцу глаголѧ:
ꙗкѡ нѣсть мнѣ лѣть взяти сицевагѡ конѧ̀ не-
достоиннагѡ таковыѧ высокiѧ цѣны: продавецъ же
предложи ємꙋ инꙋ куплю гла: аще ти мнитсѧ
велика цѣна семꙋ коню быти, ꙋбѡ купи токмѡ
гвоздiе ихже сей конь имать в подковахъ своихъ
ногъ, конѧ же возми за тою куплею в даръ себѣ.
а гвоздей во всякомъ подковѣ по шести: и за
единъ гвоздь дажь ми єдинꙋ полꙋшкꙋ, за другiи
же двѣ полꙋшки, а за третiи копѣйкꙋ, и такѡ всѣ
гвозди купи. купецъ же видѧ толь малꙋ цѣнꙋ и
конѧ хотѧ в даръ себѣ взяти: ѡбѣщасѧ такѡ цѣнꙋ
ємꙋ платити, чаѧ не болше 10 рублевъ за гвоздiе
дати. и вѣдателно єсть: колико купецъ ѡнъ
проторговалсѧ; прiидетъ 4178703 $\frac{3}{4}$ копѣйки.

Задание:

1) *Реши задачу из древнеегипетского папируса писца Ахмеса : «У семи человек по семи кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев, из каждого колоса может вырасти по 7 мер зерна. Как велики числа этого ряда и их сумма?»*
2) *Реши задачу из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (1703 г.): «Некий человек продал коня за 156 рублев. Раскаяся же купец*

начал отдавати продавцу, глаголя: яко несть мне лет взяти сицевого коня недостойного таковые высокие цены. Продавец же предложи ему ину куплю глаголя: аще те мнится велика цена сему коню быти, убо купи токмо гвоздие, их же сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвоздей во всяком подкове по шести. И за един гвоздь даждь мне едину полушку[3]*, за другой же две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи. Купец же, видя толь малую цену и коня хотя себе в дар взяти, обещася таку цену ему платити, чая не больше десяти рублев за гвоздие дати. И ведательно есть: колико купец оный проторговался?». Магницкий дает ответ 4178703 ¾ копейки. А сколько получилось у тебя?*

3) *Подумай, что общего и в чем различие между геометрической и арифметической прогрессией? Установи связи между соответствующими им формулами.*
4) *Составь последовательность, которая одновременно будет являться и арифметической прогрессией и геометрической прогрессией. Чему равны соответственно разность и знаменатель у этих прогрессий?*
5) *Зная формулу суммы первых членов геометрической прогрессии, выведи формулу для подсчета суммы членов геометрической прогрессии с k-го по n-ый.*
6) *Получи формулу для нахождения произведения первых n-членов геометрической прогрессии.*
7) *Проанализируй строки таблицы М. Штифеля, используя понятие степени. Что интересного ты замечаешь? Попробуй объяснить механизм работы вычислительной таблицы, опираясь на известные свойства степеней.*

Источники:

1. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII – VIII классы. – М.: Просвещение, 1982.
2. Магницкий Л. Арифметика. – М., 1703.
3. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. – М.: Просвещение, 1990.
4. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989.

[3] Полушка – древняя русская монета, равная ¼ копейки.