# БЕСКОНЕЧНОСТЬ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Среди натуральных чисел в математике специально рассматриваются те, которые имеют только два делителя: единицу и само себя. Как вы знаете, эти числа называются простыми. Загадочными свойствами простых чисел математики заинтересовались еще в далеком прошлом. Ведь возникающие в связи с простыми числами задачи, оказывались не так уж и простыми, а некоторые из них не решены до сих пор. Познакомимся и мы с историей самых интересных проблем математики, связанных с простыми числами.

Вопрос появления простых чисел в ряду натуральных чисел и их распределения притягивал и притягивает математиков как магнит. Ведь этот процесс до сих пор считают непредсказуемым, а математики так любят выявлять во всем красоту закономерностей! В таблицах приведено количество простых чисел, встречающихся в различных промежутках. Так в первой сотне их 25, в первой тысяче – 168, а в первых десяти тысячах их 1229. Получается, что с увеличением числового промежутка увеличивается и количество простых чисел в нем. Но натуральных чисел бесконечно много. Значит ли это, что и множество простых чисел окажется бесконечно велико?

| **Промежуток** | 1-99 | 100-199 | 200-299 | 300-399 | 400-499 | 500-599 | 600-699 | 700-799 | 800-899 | 900-999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Количество простых чисел** | 25 | 21 | 16 | 16 | 17 | 14 | 16 | 14 | 15 | 14 |

| **Промежуток** | 1-999 | 1000-1999 | 2000-2999 | 3000-3999 | 4000-4999 | 5000-5999 | 6000-6999 | 7000-7999 | 8000-8999 | 9000-9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Количество простых чисел** | 168 | 135 | 127 | 120 | 119 | 114 | 117 | 107 | 110 | 112 |

Уже в XX веке математикам стало известно, что в промежутке между числами $10^{100}$ и $10^{100} + 1000$ находится всего лишь два простых числа. Интересно, как простые числа поведут себя на бесконечности? Могут ли они и вовсе прекратить появляться или их все же бесконечно много и не существует самого большого простого числа? Ответ на этот вопрос был известен еще древним грекам. Первое логическое доказательство того что, простых чисел бесконечно много, содержится в «Началах» Евклида (III в. до н.э.).

Для тех, кому интересно, приведем здесь рассуждения Евклида. Для начала рассмотрим несколько последовательно идущих простых чисел, например, 2, 3, 5, 7. Перемножим их: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Теперь добавим к результату единицу и получим число 211. Очевидно, что при делении 211 на любое из взятых нами простых чисел в остатке мы получим 1. Заметим, что число 211 простое. Но так бывает не всегда. Если бы мы проделали то же самое для ряда простых чисел 2, 3, 5, 7, 11 и 13, то в результате получили бы число 30031, которое не является простым. Его можно разложить в произведение чисел 59 и 509, которые, кстати, оба простые. Оба эти факта лежат в основе доказательства Евклида, проведенного для общего случая.

Евклид рассуждал так: допустим, что число простых чисел конечно. Обозначим наибольшее из них как P. Найдем произведение всех простых чисел[1] вплоть до числа P и обозначим результат через N: $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot P$. Попытаемся теперь найти делители числа N+1. Очевидно, что при делении числа N+1 на 2 в остатке получим 1. При делении на 3 в остатке снова получим 1. Этот же остаток получится и при делении на любое другое простое число, вплоть до P, которые вошли в качестве сомножителей при получении числа N. Это означает, что, либо число N + 1 само является простым, либо делится на простое число, большее P. Но по нашему предположению, не существует простых чисел, больших P, а значит, N + 1 простое число. Опять получили противоречие тому, что число P наибольшее простое число. Таким образом, предположение о конечности простых чисел оказалось неверным.

Позже были даны и другие варианты доказательства бесконечности множества простых чисел, например, аналитическое доказательство Эйлера, доказательство Гольдбаха, доказательство Куммера, но изложенное выше доказательство Евклида считается наиболее элегантным и простым.

Одно из последних доказательств бесконечности множества простых чисел было дано Фюрстенбергом в 1955 г. Оно опиралось на достижения топологии, бурно развивавшегося в то время раздела геометрии.

На доказательстве бесконечности множества простых чисел исследования, посвященные простым числам, не прекратились. Математики решают новые задачи: найти

[1] Произведение первых *n* простых чисел получило в математике название «праймориал», по аналогии со словом «факториал», которым назвают произведение первых *n* натуральных чисел.

формулу для получения простого числа и научиться определять количество простых чисел в заданном промежутке.

Все известные в истории развития математики решения первой задачи пока оказались неверными несмотря на то, что были предложены крупнейшими математиками своего времени. Так, П. Ферма (1601–1665), высказал предположение, что все числа вида $F(n) = 2^{2^n} + 1$ простые. Действительно,

$$F(0) = 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ – простое},$$
$$F(1) = 2^{2^1} + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ – простое},$$
$$F(2) = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \text{ – простое},$$
$$F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257 \text{ – простое},$$
$$F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537 \text{ – простое}.$$

Но в 1732 г. Л. Эйлер доказал, что $F(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ является составным числом. К настоящему моменту среди чисел Ферма других простых чисел не обнаружено. Заметим, что удалось найти разложение на множители чисел Ферма вплоть до $F(11)$, но доказать, что среди чисел данного вида простое больше не встретится, математики тоже пока не смогли.

Современник П. Ферма, М. Мерсенн (1588–1648) рассматривая числа вида $M(n) = 2^n - 1$, заметил, что если число $M(n)$ – простое, то и число $n$ тоже является простым. Обратное неверно, так как уже $M(11) = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Вопрос о доказательстве бесконечности простых чисел вида чисел Мерсенна в математике еще остается открытым.

| ***n*** | **2** | **3** | 4 | **5** | 6 | **7** | 8 | 9 | 10 | **11** | 12 | **13** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***M(n)*** | **3** | **7** | 15 | **31** | 63 | **127** | 255 | 511 | 1023 | 2047 | 4095 | **8191** |

Попытку найти формулу, дающую простые числа, предпринял уже в XVIII в. Л. Эйлер. Один из замечательных его результатов – квадратный трехчлен $x^2 + x + q$, позволяющий получать простые числа для натуральных значений $x$, меньших $q - 2$, где $q$ – простое число. Например, выражение $x^2 + x + 11$ дает простые числа для $x$ от 1 до 9:

$x = 1$, $1^2 + 1 + 11 = 13$ – простое,
$x = 2$, $2^2 + 2 + 11 = 17$ – простое,
$x = 3$, $3^2 + 3 + 11 = 23$ – простое,
$x = 4$, $4^2 + 4 + 11 = 31$ – простое,
$x = 5$, $5^2 + 5 + 11 = 41$ – простое,
$x = 6$, $6^2 + 6 + 11 = 53$ – простое,
$x = 7$, $7^2 + 7 + 11 = 67$ – простое,
$x = 8$, $8^2 + 8 + 11 = 83$ – простое,
$x = 9$, $9^2 + 9 + 11 = 101$ – простое.

Однако при $x = 10$, $10^2 + 10 + 11 = 121$ – уже составное.

В итоге, пока так и не удалось найти формулы, задающей только простые числа, не говоря уже о том, чтобы она давала их все подряд до бесконечности.

Вторая большая проблема, связанная с исследованием бесконечности простых чисел, касается определения количества простых чисел в заданном промежутке. Один из первых результатов в этом направлении получен знаменитым немецким математиком К.Ф. Гауссом еще в 1792 г., когда будущему «королю математики» было всего 14 лет. В своей записной книжке он отметил, что количество простых чисел меньших $N$, при увеличении $N$ приближается к выражению $\frac{N}{\ln N}$. Несмотря на то, что вам еще неизвестно понятие натурального логарифма числа $N$ ($\ln N$), можно достаточно легко использовать эту формулу для вычисления с помощью калькулятора. Так, например, для того чтобы оценить количество простых чисел в первой тысяче, потребуется выполнить следующие четыре шага:

1) ввести число 1000;
2) нажать кнопку ln
3) нажать кнопку $1/x$
4) умножить результат на 1000.

В результате ты получишь число, которое после округления до целого даст 145. Но выше мы говорили о том, что в первой тысяче простых чисел ровно 168. С увеличением числа $N$ точность выявленной Гауссом зависимости возрастает. Доказательство справедливости этого закона о распределении простых чисел было дано лишь в 1896 г. Ж. Адамаром и Ж. Валле-Пуссеном.

Интересное предположение, связанное с бесконечностью простых чисел, было высказано в 1845 г. французским математиком Ж. Бертраном:

*для любого натурального* $n \geq 2$ *в интервале от* $n$ *до* $2n$ *существует простое число.*

Это предположение, получившее название гипотезы Бертрана, было доказано в 1852 г. выдающимся отечественным математиком П.Л. Чебышевым.

## Задания:

*1) Используя возможности определения количества простых чисел с помощью интернет-ресурса* [https://uchim.org/matematika/tablica-prostyx-chisel](https://uchim.org/matematika/tablica-prostyx-chisel) *выясни, в какой тысяче чисел до 50000 находится наибольшее и наименьшее количество простых чисел? А в какой сотне их будет наименьшее количество? Как ты считаешь, удобнее будет провести это исследование самостоятельно или в группе таких же исследователей? Как ты оцениваешь реальность самостоятельного проведения этой работы при значительном увеличении промежутка исследования? Попробуй организовать работу в группе для проведения данного исследования и оцени полученный результат.*

*2) Некоторые простые числа можно получить из ряда чисел, задаваемых формулой* $n! \pm 1$. *Напомним, что число* $n!$ *(эн факториал) определяется как результат произведения всех натуральных чисел от 1 до* $n$*, например* $4!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. *Простые числа вида* $n! \pm 1$ *называют факториальными. Заполни таблицу и выдели в ней найденные факториальные простые числа:*

| **n** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **n! – 1** | | | | | | | |
| **n! + 1** | | | | | | | |

*3) Числа Мерсенна удивительным образом связаны с совершенными числами, равными сумме всех своих делителей. Если простое число представимо в виде* $2^n - 1$, *то число* $I(n) = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ *является совершенным! Например, первое простое число Мерсенна получается при* $n = 2$. *Тогда* $I(2) = (2^2 - 1) \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2 = 6$ *и* $6 = 1 + 2 + 3$. *Проверь этот факт для рассмотренных выше простых чисел Мерсенна.*

*4) Определи, для какого* $n$ *перестают давать простые числа формулы:*

*а)* $f(n) = n^2 + n + 17$; *в)* $f(n) = n^2 - n + 41$;

*б)* $f(n) = n^2 + n + 41$; *г)* $f(n) = n^2 - 79n + 1601$.

## Источники:

1. Гальперин Г. А. Просто о простых числах // Квант. — 1978. — № 4. — С. 9-14,38.
2. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – М.: Фантом Пресс, 2014.
3. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2001.
4. Грасиан Э. Простые числа. Долгая дорога к бесконечности. — М.: Де Агостини, 2014.
5. Ю. Матиясевич. Формулы для простых чисел // Квант. — 1975. — № 5. — С. 5-13.