ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие представляет собой учебные материалы и рекомендации по повторению курса математики 5–9 классов. Оно включает материалы по курсу математики 5–6 классов, по курсу алгебры 7–9 классов и курсу геометрии 7–9 классов.

Пособие имеет своей целью повторение и систематизацию знаний, полученных учащимися за пять лет в ходе изучения различных математических курсов. Систематизация и обобщение знаний обеспечивает их прочность, что является реальной основой успешной подготовки к государственной итоговой аттестации.

В соответствие с этой целью, в пособии представлены справочные материалы, организующие повторение теоретических сведений, полученных в ходе обучения; приведены приемы, способствующие рационализации стандартных методов решения задач; рассмотрены примеры выполнения различных типов заданий и даны к ним комментарии. В комментариях вскрываются типичные ошибки, которые допускают учащиеся в процессе решения задач; приводятся рекомендации по выбору рациональных методов решения; а также, в случае необходимости, рассматриваются дополнительные сведения.

Наряду с повторением теоретической составляющей курса математики в пособие включено около тысячи задач различного уровня сложности, с помощью которых ученики могут проводить «тренировку». Кроме того, в каждой главе пособия имеются текущие проверочные работы, которые диагностируют уровень овладения сравнительно небольшой частью материала, а в завершение приводятся итоговые тематические работы.

Отличительная особенность данного пособия состоит в том, что в нем собран материал, охватывающий все разделы стандарта основного общего математического образования, включая алгебру, геометрию, а также вероятность и статистику.

Учебное пособие состоит из введения и двух глав: «Алгебра. Вероятность. Статистика» и «Геометрия». Содержание проверочных работ моделирует экзаменационные контрольные измерительные материалы для 9 класса.

В главе 1 (параграфы 1.1–1.4) представлены материалы по алгебре, вероятности и статистике. Каждый из четырех указанных параграфов имеет следующую структуру. В начале параграфа дается теоретический материал обобщающего характера по данной теме.

Он содержит основные и дополнительные сведения, описания стандартных и нестандартных методов решения различных типов задач, тренировочные задания (различного уровня сложности, позволяющие реализовать личностно-ориентированную траекторию обучения школьников) для отработки основных приемов и их комбинаций. После определенной порции материала для повторения предлагаются небольшие проверочные работы с указанием времени их выполнения (от 5 до 15 минут). Результаты выполнения этих работ дают ученику информацию о динамике повторения.

В конце каждого параграфа представлены тематические проверочные работы, выполнение которых дает ученику объективную информацию о степени его готовности к итоговому контролю по данной теме.

Аналогичную структуру имеет и глава 2, где расположен геометрический материал.

Завершают главу 1 варианты итоговых работ по алгебре, которые содержат задания по всем разделам стандарта математического образования. Типология и уровень сложности заданий отвечают требованиям к итоговой аттестации, которые обозначены в вариантах государственной итоговой аттестации (ГИА) для 9 класса.

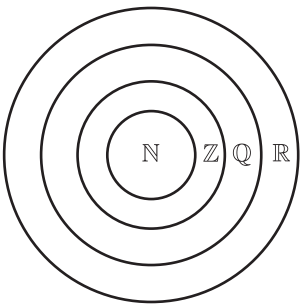
Пособие предназначено для учащихся 9-х классов общеобразовательных учебных заведений, но будет полезно и школьникам 7–8-х классов, желающим успешно продвигаться в освоении математики. Кроме того, пособие может быть востребованным учителями математики, организующими учебную работу в классе, а также родителями, желающими организовать домашнюю самостоятельную работу по повторению и систематизации знаний по математике.

Глава 1
АЛГЕБРА. ВЕРОЯТНОСТЬ. СТАТИСТИКА

1.1. Вычисления и преобразования

В ходе изучения курса математики вы постепенно знакомились с различными видами (множествами) чисел. К концу обучения в 8 классе вам стали известны множества натуральных ($\mathbb{N}$), целых ($\mathbb{Z}$), рациональных ($\mathbb{Q}$), иррациональных ($\mathbb{I}$), положительных ($\mathbb{R}_+$), отрицательных ($\mathbb{R}_-$), действительных ($\mathbb{R}$) чисел.

Множества чисел определенным образом взаимосвязаны. Например, множество натуральных чисел является частью множества целых чисел. Наглядные представления о связях между множествами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ дает следующая схема, которую называют «круги Эйлера»:



Покажите, если это возможно, где на этой схеме расположено множество:

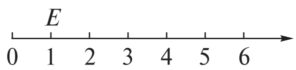
а) $\mathbb{I}$ — иррациональных чисел;
б) $\mathbb{R}_+$ — положительных чисел;
в) $\mathbb{R}_-$ — отрицательных чисел;
г) $\mathbb{Z}_+$ — положительных целых чисел;
д) $\{\mathbb{Z}_- \cup 0\}$ — отрицательных целых чисел и нуля;
е) нецелых рациональных чисел.

В данной главе рассматриваются обобщенные сведения о различных множествах чисел и операциях над числами.

1.1.1. Основные понятия

Натуральные числа — числа, с которыми человек знакомится впервые при необходимости обозначения некоторого количества предметов. Это числа 1, 2, 3, 4 ... Число 0 (нуль) не является натуральным числом.

Натуральные числа и число 0 изображают точками координатного луча.

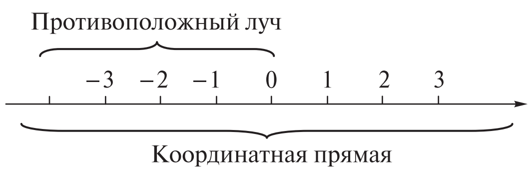


Точка $O(0)$ — начало отсчета, отрезок OE, длина которого равна 1 — единичный отрезок.

Множество натуральных чисел обозначают буквой $\mathbb{N}$.

На множестве натуральных чисел можно выполнять арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление; но, если сложение и умножение выполнимы всегда, то вычитание и деление выполнимы не всегда. Например, на множестве натуральных чисел невозможно выполнить действия 3–5, 15:7.

Если координатный луч дополнить противоположным лучом и отметить на нем числа, симметричные натуральным относительно точки $O(0)$, то получим *координатную прямую*. Числа, расположенные на координатной прямой справа от нуля, называют *положительными* и записывают либо со знаком «+», либо без него, а слева от нуля — отрицательными, и записывают со знаком «–»:



Расстояние от начала отсчета до точки $A(a)$ на прямой называют *модулем* числа a и обозначают $|a|$.

Например, $|5| = 5$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$.

Числа, имеющие равные модули, но отличающиеся знаком, называют *противоположными числами*.

Например: 5 и -5, -7 и 7 — противоположные числа.

Число 0 противоположно самому себе.

Целые числа — это все натуральные числа, числа им противоположные и число 0. Множество целых чисел обозначают буквой $\mathbb{Z}$. Множество натуральных чисел включается в множество целых чисел:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

На множестве целых чисел всегда выполнимы операции сложения, вычитания, умножения, но не всегда выполнима операция деления.

Вернемся к ранее рассмотренным примерам:

$$3 - 5 = -2; \quad -2 \in \mathbb{Z}; \quad 15 : 7 = \frac{15}{7}, \quad \frac{15}{7} \notin \mathbb{Z}.$$

Операция деления выполнима на множестве рациональных чисел всегда, кроме случая, когда делитель равен нулю.

Рациональные числа — это числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное, а черта означает действие деления. Множество рациональных чисел обозначают буквой $\mathbb{Q}$.

Примеры рациональных чисел:

$$\frac{2}{3};\quad \frac{10}{2}=5;\quad -\frac{3}{5};\quad \frac{3}{1}=3;\quad \frac{0}{8}=0;\quad \frac{-16}{1}=-16;\quad \frac{-1}{1}=-1.$$

Из приведенных примеров видим, что множество рациональных чисел включает в себя множество целых (а, следовательно, и множество натуральных) чисел: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Выше были перечислены арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление. Все эти операции всегда выполнимы на множестве $\mathbb{Q}$, за исключением деления на нуль.

Рассмотрим две алгебраические операции — возведение в степень и извлечение корня n-й степени.

Если операция возведения в степень выполнима всегда на множестве $\mathbb{Q}$, то операция извлечения арифметического корня n-й степени не всегда выполнима на этом множестве.

Пусть, например, нужно извлечь квадратный корень из числа 16. Понятно, что $\sqrt{16}=4$, так как $4>0$ и $4^2=16$, $4\in\mathbb{Q}$, $4=\frac{4}{1}\in\mathbb{Q}$.

А вот при извлечении квадратного корня из числа 2 не удается найти такое рациональное число, квадрат которого был бы равен 2. Это значит, что число $\sqrt{2}$ невозможно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, т. е. число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Из школьного курса математики известно, что любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной *периодической* дроби.

Например: $2=2{,}0000\ldots=2{,}(0)$;

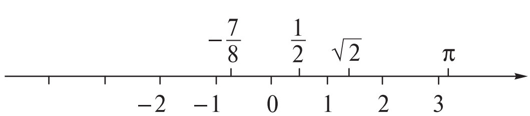
$$\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}5000\ldots=0{,}5(0);$$

$$\frac{2}{3}=0{,}6666\ldots=0{,}(6).$$

Числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, как $\sqrt{2}$, можно представить в виде бесконечной десятичной *непериодической* дроби. Такие числа называют *иррациональными*.

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел называют множеством действительных чисел и обозначают буквой $\mathbb{R}$.

Вернемся к координатной прямой.



Справедливы следующие утверждения:

1) для любого действительного числа существует единственная точка координатной прямой, соответствующая этому числу;

2) для любой точки координатной прямой существует единственное действительное число, соответствующее этой точке.

Поэтому множество действительных чисел можно называть термином «числовая прямая» и обозначать, как числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Итак:

Множество действительных чисел

$\mathbb{R}$ — Вся числовая прямая — Промежуток $(-\infty; +\infty)$

1.1.2. Арифметические и алгебраические операции

Как было сказано выше, арифметические операции над числами — это действия сложения, вычитания, умножения и деления. Для сложения и умножения справедливы следующие законы:

1) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ — переместительный закон;

2) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ — сочетательный закон;

3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ — распределительный закон.

Алгебраические операции — это операции возведения в степень и извлечения корня. Их свойства мы рассмотрим ниже.

Натуральные числа

Правила выполнения арифметических действий тесно связаны со способом записи чисел. Натуральные числа мы записываем в десятичной системе счисления позиционным способом, при этом значимость цифры зависит от ее позиции (места) в записи числа. Позицию цифры в записи числа называют *разрядом*. Разряды делятся на классы. Такой способ записи натуральных чисел позволяет выполнять арифметические действия поразрядно.

Сложение

Пример 1. $237\,541 + 3\,072\,080 = ?$

Решение.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;\;\;1} \\ +\begin{array}{r} 237541 \\ \underline{3072080} \\ 3309621 \end{array} \end{array}$$

Ответ. $3\,309\,621$.

Комментарии. При сложении чисел в столбик чаще всего возникают ошибки при переходе через разряд. Для их предупреждения рекомендуется единицу следующего разряда не запоминать, а надписывать над ним, как это показано в записи решения.

Вычитание

Пример 2. а) 4 508 022 – 364 209 =?

Решение.

Класс миллионов			Класс тысяч			Класс единиц			
сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.	
	–	4	5	0	8	0	2	2	– 4 508 022
			3	6	4	2	0	9	364 209
		4	1	4	3	8	1	3	4 143 813

О т в е т. 4 143 813.

Комментарии. Здесь для наглядности компоненты действий внесены в таблицу разрядов.

б) 300 591 – 141 830 =?

Решение.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle .\,9\,9 \\ -\,300591 \\ \underline{141830} \\ 158761 \end{array}$$

О т в е т. 158 761.

Комментарии. Здесь разобран случай, когда в уменьшаемом отсутствуют некоторые разряды, а в ходе вычислений требуется занять единицу этого разряда. В этом случае рекомендуется над этим разрядом надписывать цифру 9, как показано в записи решения.

Умножение

Умножение многозначных чисел также выполняется поразрядно, и основано на распределительном и сочетательном законах. Для удобства вычисления выполняются в столбик.

Пример 3. $68 \cdot 4 =?$

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\,68 \\ \underline{4} \\ 272 \end{array}$$

О т в е т. 272.

Комментарии. Ниже приводится иллюстрация поразрядного умножения:

$$\begin{array}{rl} \times\,68 & \\ \underline{4} & \\ 32 & \text{32 единицы} \\ +\,\underline{24} & \text{24 десятка} = 240 \\ 272 & \end{array}$$

Деление

Деление многозначных чисел также выполняются поразрядно.

Пример 4. $2496 : 48 = ?$

Решение. $2496 : 48 = (2000 + 400 + 90 + 6) : 48 =$

Рассуждаем следующим образом.

1-й шаг: 2 тысячи разделить на 48 так, чтобы получить в результате тысячи, нельзя, поэтому переходим к более низкому разряду. 24 сотни разделить на 48 тоже нельзя так, чтобы получились сотни, поэтому опять переходим к более низкому разряду. 249 десятков можно разделить на 48. Итак, старший разряд частного — десятки, в нем получаем цифру 5.

2-й шаг: из 249 десятков вычитаем 240 десятков, получаем 9 десятков.

3-й шаг: к девяти десяткам добавляем (приписываем) 6 единиц, в результате получаем 96 единиц. 96 делим на 48, получаем 2 единицы:

$$
\begin{array}{r|l}
-2496 & \underline{48} \\
\underline{240} & 52 \\
-96 & \\
\underline{96} & \\
0 &
\end{array}
$$

Комментарии. Чаще всего при делении возникают ошибки двух типов.

1) Остаток оказывается больше делителя, его тоже делят на делитель, в результате чего в частном возникает лишний разряд.

2) После приписывания к остатку цифры следующего разряда получается число, меньшее делителя. В этом случае в частное надо записать нуль. Этот нуль пропускают и приписывают к остатку цифру следующего разряда.

Пример 5. $27651 : 39$.

Решение. 1-й шаг: делим 276 сотен на 39, получаем в частном 7 сотен.

$$
\begin{array}{r|l}
-27651 & \underline{39} \\
\underline{273} & 7 \\
3 &
\end{array}
$$

2-й шаг: в результате вычитания получаем в остатке 3. $3 < 39$, значит, цифра частного найдена верно.

3-й шаг: остаток 3 — это 3 сотни, приписываем к тройке цифру 5 — это 5 десятков: 35 десятков на 39 разделить нельзя, значит, в разряде десятков частного надо записать 0.

$$
\begin{array}{r|l}
-27651 & \underline{39} \\
\underline{273} & 70 \\
35 &
\end{array}
$$

4-й шаг: к числу 35 приписываем цифру 1 из разряда единиц, получаем 351 единицу. Это число можно разделить на 39:

$$\begin{array}{r|l} -27651 & \underline{39\ \ } \\ \underline{273\ \ \ } & 709 \\ -351 & \\ \underline{351} & \\ 0 & \end{array}$$

Комментарии. Итак, чтобы деление было выполнено правильно, надо:

1) внимательно следить за тем, чтобы остаток был меньше делителя;

2) называть разряд, деление которого происходит в настоящий момент.

Обыкновенные дроби

Сложение и вычитание обыкновенных дробей

Правило сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями, записанное в виде равенства, выглядит следующим образом:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \qquad \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями выполняется по следующему правилу.

1) *Разложить на простые множители знаменатели слагаемых.*
2) *Записать НОК знаменателей слагаемых в знаменатель суммы.*
3) *Записать дополнительные множители к слагаемым.*
4) *Умножить числители слагаемых на дополнительные множители, записывая результаты в числитель суммы и ставя между ними знак плюс (минус).*
5) *Выполнить действия в числителе суммы.*
6) *Если в результате получится сократимая дробь — сократить ее.*

Пример 1. $\frac{11}{1470}+\frac{13}{588}=?$

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 1470 & 2 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$1470 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2. \qquad 588 = 2^2\cdot 3\cdot 7^2.$$

$$\frac{11}{1470}+\frac{13}{588}=\frac{11^{\backslash 2}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2}+\frac{13^{\backslash 5}}{2^2\cdot 3\cdot 7^2}=\frac{22+65}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2}=\frac{87}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2}=$$
$$=\frac{3\cdot 29}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2}=\frac{29}{980}.$$

Ответ. $\frac{29}{980}$.

Комментарии. 1) Здесь ошибки чаще всего связаны с нарушением последовательности выполнения шагов алгоритма: дополнительные множители надписываются до того, как найден и записан общий знаменатель. В итоге дополнительные множители оказываются найденными неверно, что и приводит к неверному ответу.

2) Кроме того, хотим дать полезный совет: не надо торопиться вычислять произведение простых множителей в общем знаменателе. Возможно, получится сократимая дробь, и тогда НОД числителя и знаменателя найти будет гораздо проще.

Умножение и деление обыкновенных дробей

Произведение обыкновенных дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей множителей.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Пример 2.

а) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 8}=\frac{21}{40}$; б) $\frac{7}{12}\cdot\frac{15}{49}=\frac{\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{12}}\cdot\underset{7}{\cancel{49}}}=\frac{5}{28}$;

в) $4\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4\cdot 2}{1\cdot 9}=\frac{8}{9}$.

Комментарии. При умножении обыкновенных дробей надо быть внимательным, чтобы не упустить возможность выполнить сокращение.

Взаимно обратные числа — это числа, произведение которых равно 1. Например: $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{2}$, $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2\cdot 5}{5\cdot 2}=1$; $\frac{1}{3}$ и 3, $\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{1\cdot 3}{3}=1$; 7 и $\frac{1}{7}$, $7\cdot\frac{1}{7}=\frac{7\cdot 1}{7}=1$.

Чтобы разделить число на обыкновенную дробь, надо это число умножить на дробь, обратную делителю.

В общем случае это правило формулируется так: *чтобы разделить одно число на другое, надо делимое умножить на число, обратное делителю.*

[...]