ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время определяющими принципами совершенствования системы контроля и оценки образовательных достижений выпускников средней школы являются:

- открытость требований к уровню подготовки обучающихся и процедур контроля для всех участников образовательного процесса — обучающихся, родителей, педагогов, широкой общественности;
- создание системы оценки выполнения требований образовательных стандартов в процессе итогового контроля, адекватной новым образовательным целям;
- переориентация контроля на оценку способности применять полученные в процессе обучения знания и умения в различных жизненных ситуациях;
- стандартизация и объективизация оценки качества подготовки выпускников школ в системе внешнего контроля;
- введение, дополнительно к традиционным, новых видов, форм, методов и средств оценки динамики продвижения учащихся в учебном процессе, учитывающих индивидуальные особенности учащихся.[1)]

С этой целью в течение ряда лет ведется работа по созданию новой системы контрольных измерительных материалов для проведения государственной (итоговой) аттестации выпускников 11 классов, особенностью которых является повышение объективности в оценке подготовки учащихся.

Очевидно, что учителя, учащиеся и их родители должны своевременно получать информацию об этих новых формах итоговой аттестации. Вместе с тем нельзя забывать и о таком важном аспекте совершенствования процесса обучения, как система подготовки к итоговой аттестации. При этом важна не только организация систематического повторения в выпускном, одиннадцатом классе, но и фиксация необходимых требований к подготовке по тому или иному разделу стандарта (ориентированных на прохождение итогового контроля) в ходе изучения школьниками этого раздела.

Предлагаемое пособие намечает пути решения поставленных проблем.

Основной целью предлагаемого учебного пособия является повторение курса математики старшей школы. Успешная ее реализация долж-

---

[1)] По материалам книги Т. И. Шамовой и др., «Современные средства оценивания результатов обучения в школе», М. : Педагогическое общество России, 2007.

на обеспечить продуктивную подготовку к единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике.

В соответствии с поставленной целью в пособии представлены справочные материалы, систематизирующие теоретические сведения, полученные в ходе обучения; приведены дополнительные сведения, рационализирующие стандартные методы решения задач; рассмотрены примеры выполнения различных заданий и даны к ним комментарии.

Наряду с повторением теоретической составляющей курса математики в пособие включены более полутора тысяч задач различного уровня сложности, с помощью которых ученик проводит «тренировку». Кроме того, в каждом разделе пособия имеются текущие проверочные работы, которые диагностируют уровень овладения сравнительно небольшой частью материала, а в завершении приводятся итоговые тематические работы.

Отличительная особенность данного пособия состоит в том, что в нем собран материал, охватывающий все разделы стандарта основного общего математического образования, включая алгебру и начала анализа, геометрию, а также вероятность и статистику.

Учебное пособие состоит из введения, двух разделов («Алгебра и начала анализа. Вероятность. Статистика» и «Геометрия») и вариантов итоговых проверочных работ, моделирующих экзаменационные контрольные измерительные материалы.

В разделе 1 представлены материалы по алгебре и началам анализа, вероятности и статистике. Все параграфы имеют следующую структуру. В начале дается теоретический материал обобщающего характера по данной теме. Он содержит основные и дополнительные сведения, описания стандартных и нестандартных методов решения различных типов задач, тренировочные задания (различного уровня сложности, реализующих личностно-ориентированную траекторию обучения школьников) для отработки основных приемов и их комбинаций.

В конце каждого параграфа представлены тематические проверочные работы, выполнение которых дает ученику объективную информацию о степени его готовности к итоговому контролю по данной теме.

Аналогичную структуру имеет и разд. 2, где расположен геометрический материал.

Завершают пособие варианты итоговых работ по математике, которые содержат задания по всем разделам стандарта математического образования. Типология и уровень сложности заданий отвечают требованиям к итоговой аттестации, которые обозначены в вариантах единого государственного экзамена (ЕГЭ) для 11 класса.

Пособие предназначено для учащихся 11-х классов общеобразовательных учебных заведений, но будет полезно и школьникам 10-х классов, желающим успешно продвигаться в освоении математики. Кроме того, пособие может быть востребованным учителями математики, организующими учебную работу в классе, преподавателями подготовительных курсов, а также родителями, организующими домашнюю самостоятельную работу.

Глава 1
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. ВЕРОЯТНОСТЬ. СТАТИСТИКА

1.1. Тождественные преобразования выражений

Данная тема в экзаменационных работах обычно бывает представлена сравнительно небольшим числом заданий. Но и при исследовании функций, и при решении уравнений и неравенств достаточно часто приходится выполнять тождественные преобразования выражений. Повторение темы необходимо, главным образом, для того, чтобы досадные неточности в овладении материалом или ошибки не явились препятствием в решении других задач, для которых тождественные преобразования выражений служат лишь операционной составляющей.

Повторение будет продуктивным, если привести в систему все определения понятий, которые расширялись от класса к классу, например, понятие «степень» (табл. 1.1), и если будет показано применение свойств тождественных преобразований для решения различных классов задач (табл. 1.2).

Таблица 1.1

Понятие степени	
Понятие	**Определения понятия**
Степень с натуральным показателем	$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ раз}}$, где $n \in \mathbb{N}$ $a^1 = a$
Степень с целым отрицательным показателем	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$ $a^0 = 1$, где $a \neq 0$
Степень с рациональным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a \geqslant 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Приведем примеры более сложных задач и покажем, как применяются основные свойства выражений в комбинации с материалом, изученным в основной школе.

Пример 1. Найдите значение выражения

$$\left(1{,}8\sqrt[3]{4\sqrt{2}} + 0{,}2\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^{6/11}.$$

Таблица 1.2

Вид выражений	Свойства выражений	Пример
I. Радикалы	Для любых неотрицательных чисел a и b, натуральных n и целых k выполнены равенства:	
	1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	1. Вычислите: $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}=1{,}5$
	2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (где $b\neq 0$)	2. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{500}{4}}=\sqrt[3]{125}=5$
	3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ (где $k>0$)	3. Упростите выражение $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^3}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^3}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^8}}=\sqrt[15]{a^8}$
	4. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ (где $k>0$)	4. Упростите выражение $\sqrt[20]{a^5}$; $\sqrt[20]{a^5}=\sqrt[4]{a}$
	5. $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (где $a\neq 0$, $k\leqslant 0$)	5. Вычислите: $\sqrt[3]{\left(2\frac{10}{27}\right)^2}$; $\sqrt[3]{\left(2\frac{10}{27}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{64}{27}\right)^2}=\left(\sqrt[3]{\frac{64}{27}}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}$
II. Степени	Если a и b — положительные числа, m и n — рациональные числа, то справедливы равенства:	
	1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	1. Вычислите $2^{3,6}\cdot 2^{-0,6}$; $2^{3,6}\cdot 2^{-0,6}=2^3=8$
	2. $a^m:a^n=a^{m-n}$	2. Упростите выражение $a^{-4,9}:a^{0,1}$; $a^{-4,9}:a^{0,1}=a^{-5}$
	3. $(a^m)^n=a^{mn}$	3. Представьте $\left(x^{12}\right)^{1/6}$ в виде степени с основанием x; $\left(x^{12}\right)^{1/6}=x^2$
	4. $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$	4. Вычислите $0{,}125^6\cdot 8^7$; $0{,}125^6\cdot 8^7=0{,}125^6 8^6\cdot 8=(0{,}125\cdot 8)^6\cdot 8=8$

	5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	5. Вычислите $\frac{625^3}{375^3}$; $\frac{625^3}{375^3} = \left(\frac{625}{375}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} = 4\frac{17}{27}$
	6. Если $a>1$ и $m>n$, то $a^m > a^n$. Если $0<a<1$ и $m>n$, то $a^m < a^n$	6. Сравните значения выражений $16^{1/3}$ и $8^{3/5}$; $16^{1/3} = (2^4)^{1/3} = 2^{4/3}$, $8^{3/5} = (2^3)^{3/5} = 2^{9/5} = 2^{1\frac{4}{5}}$, $2>1$, $\frac{4}{3} < 1\frac{4}{5}$, следовательно, $16^{1/3} < 8^{3/5}$
	7. Если $0<a<b$ и $r>0$, то $a^r < b^r$. Если $0<a<b$ и $r<0$, то $a^r > b^r$	7. Сравните степени $3^{3,2} \cdot 9^{0,1} \cdot 27^{0,1}$ и $16^{2,1} : 4^{0,5}$; $3^{3,2+0,2+0,3} = 3^{3,7}$, $16^{2,1} : 4^{0,5} = 4^{3,7}$; $3<4$, следовательно $3^{3,7} < 4^{3,7}$
III. Логарифмы	Если a — положительное число, отличное от единицы, x и y — положительные числа, то верны следующие равенства:	
	1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	Вычислите: $\log_{15} 3 + \log_{15} 75$; $\log_{15} 3 + \log_{15} 75 = \log_{15} 225 = 2$
	2. $\lg_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	Найдите значение выражения $\log_7 a$, если $\log_7 \frac{a}{49} = 5{,}3$; $5{,}3 = \log_7 \frac{a}{49} = \log_7 a - \log_7 49 =$ $= \log_7 a - 2$. $5{,}3 = \log_7 a - 2$, $\log_7 a = 7{,}3$
	3. $\log_a x^n = n \log_a x$	Вычислите $\log_2 64^3$; $\log_2 64^3 = 3\log_2 64 = 3 \cdot 6 = 18$
	4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ при $b>0$, $b \neq 1$	Определите знак суммы $\log_{0,3} 7 + \log_7 0{,}3$; $\log_{0,3} 7 + \log_7 0{,}3 = \frac{\log_7 7}{\log_7 0{,}3} + \log_7 0{,}3 = \frac{1+\log_7^2 0{,}3}{\log_7 0{,}3}$; $1+\log_7^2 0{,}3 > 0$, $\log_7 0{,}3 < 0$, следовательно, $\log_{0,3} 7 + \log_7 0{,}3 < 0$

Решение.

$$\left(1{,}8\sqrt[3]{4\sqrt{2}}+0{,}2\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^{6/11}=\left(1{,}8\sqrt[6]{2^5}+0{,}2\sqrt[6]{2^5}\right)^{6/11}=$$
$$=\left(2\cdot 2^{5/6}\right)^{6/11}=\left(2^{11/6}\right)^{6/11}=2\,.$$

Комментарии.

1. Как видно из приведенного решения, здесь два раза использовалось свойство $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ (где $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $a\geqslant 0$), правило внесения множителя под знак корня[1], а также понятие степени с дробным показателем.

2. Представленный способ не единственный: можно было с самого начала корни заменить степенями с дробными показателями и применить свойства степеней с одинаковыми основаниями.

$$\left(1{,}8\cdot 2^{2/3}\cdot 2^{1/6}+0{,}2\cdot 2^{1/2}\cdot 2^{1/3}\right)^{6/11}=$$
$$=\left(1{,}8\cdot 2^{5/6}+0{,}2\cdot 2^{5/6}\right)^{6/11}=\left(2^{11/6}\right)^{6/11}=2\,.$$

Пример 2. Упростите выражение $\sqrt{100^x-12\cdot 10^x+36}+10^x-36$, если $x\leqslant 0$.

Решение.

$$\sqrt{100^x-12\cdot 10^x+36}+10^x-36=\sqrt{(10^x-6)^2}+10^x-36=$$
$$=|10^x-6|+10^x-36=6-10^x+10^x-36=-30.$$
$$|10^x-6|=6-10^x,\quad \text{так как}\quad 10^x\leqslant 1.$$

Комментарий. При решении приведенного примера применялись формулы сокращенного умножения $\left((a-b)^2==a^2-2ab+b^2\right)$, тождество $\sqrt[n]{x^n}=|x|$, где n — четно и свойство $a^{mn}=(a^m)^n$ (см. свойство 3). Кроме того, при раскрытии знака модуля $(|10^x-6|=6-10^x)$ было учтено, что при $x\leqslant 0$ выражение 10^x принимает значения не больше 1. Внешняя простота преобразований, которые требуется выполнить при решении примера, компенсируется наличием многих факторов, которые нужно учесть, чтобы получить правильный ответ.

Пример 3. Вычислите $\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$.

---

[1] В основной школе для квадратного корня это правило звучало так: чтобы внести неотрицательный множитель под знак арифметического квадратного корня, нужно этот множитель возвести в квадрат и записать его под корнем. В таблице 2 это свойство отдельно не представлено, так как оно является производным определения арифметического корня n-й степени и свойства 1. Действительно, $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$, где $a\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение.

$$\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=\sqrt[6]{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=$$
$$=\sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}=$$
$$=\sqrt[3]{2-1}=1.$$

Комментарий. При решении подобных примеров нужно постараться преобразовать корни так, чтобы корни имели одну степень. В данном решении подмечено, что под корнем шестой степени стоит квадрат двучлена. Если ученик не увидел такого упрощающего преобразования, то используя свойство $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ (где $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $a\geqslant 0$), можно корень третьей степени преобразовать в корень шестой степени, а далее выполнить преобразования корней шестой степени: $\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}\,\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}=\sqrt[6]{9-8}=1.$

Пример 4. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(16\sqrt{3}-28)^2}+(\sqrt{3}+1)^2$.

Решение.

$$\sqrt[4]{(16\sqrt{3}-28)^2}+(\sqrt{3}+1)^2=\sqrt[4]{(28-16\sqrt{3})^2}+4+2\sqrt{3}=$$
$$=\sqrt{28-16\sqrt{3}}+4+2\sqrt{3}=\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}+4+2\sqrt{3}=$$
$$=|\,2\sqrt{3}-4\,|+4+2\sqrt{3}=-2\sqrt{3}+4+4+2\sqrt{3}=8.$$

Комментарий. Основная проблема при решении подобных заданий состоит в том, чтобы «увидеть», как алгебраическую сумму (например, $28-16\sqrt{3}$) представить в виде квадрата двучлена. Здесь на помощь приходит опыт решения подобных заданий, но, главное, нужно не бояться пробовать возможные варианты представления в виде квадрата двучлена. Ориентиром обычно служит удвоенное произведение первого и второго членов (в нашем случае, $-16\sqrt{3}$). Для этого выражения составляем возможные варианты составляющих двучлена: $-16\sqrt{3}=-2\cdot1\cdot8\sqrt{3}=-2\cdot4\cdot2\sqrt{3}=-2\cdot2\cdot4\sqrt{3}=-2\cdot8\cdot\sqrt{3}$. Возводим в квадрат «претендентов» и отбрасываем не удовлетворяющие условию варианты. Например,

$$(1-8\sqrt{3})^2=1-16\sqrt{3}+192\neq 28-16\sqrt{3};$$
$$(4-2\sqrt{3})^2=16-16\sqrt{3}+12=28-16\sqrt{3}.$$

Второй вариант условию удовлетворяет.

Пример 5. Вычислите $\log_{49}\sqrt[5]{3}\cdot\log_3 7$.

Решение.

$$\log_{49}\sqrt[5]{3}\cdot\log_3 7=\frac{1}{5}\cdot\frac{\log_7 3}{\log_7 49}\cdot\frac{\log_7 7}{\log_7 3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=0{,}1.$$

Комментарий. При решении подобных примеров самое важное — научиться без ошибок переходить к новому основанию логарифма. Выбор того или иного основания не влияет на ход решения. Например, в данном задании можно было бы перейти и к основанию 49:

$$\log_{49}\sqrt[5]{3}\cdot\log_3 7=\frac{1}{5}\log_{49}3\cdot\frac{\log_{49}7}{\log_{49}3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=0{,}1.$$

Пример 6. Упростите выражение $\sqrt{\log_9^2 a-\log_9 a^4+4}+0{,}5\log_9 a^2$, при $0<a\leqslant 80$.

Решение.

$$\sqrt{\log_9^2 a-\log_9 a^4+4}+0{,}5\log_9 a^2=\sqrt{\log_9^2 a-4\log_9 a+4}+$$
$$+0{,}5\log_9 a^2=|\log_9 a-2|+0{,}5\log_9 a^2=2-\log_9 a+\log_9 a=2.$$

Комментарии.

1. При решении данного примера стандартно применялись формулы сокращенного умножения и свойства логарифмов. Трудности при выполнении подобных заданий связаны с тем, что формулы сокращенного умножения «завуалированы»: чтобы увидеть удвоенное произведение $\log_9 a$ и числа 2, нужно $\log_9 a^4$ преобразовать к виду $4\log_9 a$. Успешность выполнения таких заданий обеспечивается только тренировкой.

2. Завершающий шаг решения состоит в раскрытии модуля разности $\log_9 a-2$. И здесь важно не пропустить исходные данные задания: a — положительное число, не больше 80. Для определения знака указанной разности требуется сравнить с числом 2 значение $\log_9 a$: $\log_9 a<\log_9 81=2$.

Задания для самостоятельного решения

Вычислите:

1. $\sqrt[4]{(-5)^2\cdot 4}\cdot\sqrt[4]{125\cdot 0{,}2\cdot 64}$; **2.** $\dfrac{9\sqrt{0{,}6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$;

3. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{40}+15{,}2$; **4.** $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}2}{0{,}25}}:\sqrt[3]{100}$;

5. $\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)$; **6.** $\sqrt[3]{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{7+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5}$;

7. $\left(5{,}7\sqrt[3]{36\sqrt{6}}+0{,}3\sqrt{6\sqrt[3]{36}}\right)^{\frac{6}{11}}$.

Упростите выражение:

8. $\dfrac{m^{3,2}\cdot\sqrt{m^7n}}{m^{-3,3}\cdot n^{1,5}}$; **9.** $\dfrac{x^{3,6}\cdot\left(xy^{0,5}\right)^3}{x^{6,2}\cdot y^2}$;

10. $\dfrac{ab^6}{\sqrt{x}\,y^{6,3}}:\dfrac{a^3\cdot b^{-5,2}}{\sqrt[3]{xy^3}}$; **11.** $\dfrac{36-x^{-3}}{6-x^{-1,5}}-x^{-1,5}$.

Вычислите:

12. $\log_7 84+\log_7 \dfrac{1}{12}$;

13. $\log_5 45+\log_5 3^{-2}$;

14. $\log_5(75\sqrt{3})+\log_5(5\cdot 3^{-1,5})$;

15. $\log_{1/3} 63-\log_{1/3} 7$;

16. $\log_{0,2} 45-\log_{0,2} 9$;

17. $\log_6 150-\dfrac{\log_3 25}{\log_3 6}$;

18. $2^{\log_4 64}+6^{\log_6 7}$;

19. $9^{1-\log_3 10}$.

Найдите значение выражения:

20. $3\cdot 5^{n-2}$, если $5^n = 0{,}3$;

21. $2^{3k-1}:\sqrt{2^{3k}}$, если $2^k = 9$;

22. $\sqrt{4^x-6\cdot 2^x+9}+2^x-1$, если $5^x = 0{,}7$;

23. $\sqrt{100^x-16\cdot 10^x+64}+5+10^x$, если $8^x=0{,}1$;

24. $\log_2(6m)-\log_2(12m^{12})+\log_2 0{,}125$, если $\log_2 m=-0{,}4$;

25. $\log_a 216+\log_6(36a^2)$, если $\log_a 6=2$.

Проверь себя
(время выполнения — 10 минут)

Вариант 1

26. Вычислите: $\sqrt[3]{15\cdot 42}\cdot\sqrt[3]{25\cdot 12\cdot 49}$.

27. Упростите выражение $\dfrac{mn^{3,6}}{\sqrt{mn^3}}$.

28. Найдите значение выражения: $\log_3(27\sqrt{3}\,m)$, если $\log_3 m = 0{,}2$.

29. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{8^x+15\cdot 4^x+75\cdot 2^x+125}-2^x+3$, если $8^x = 0{,}001$.

Вариант 2

30. Вычислите: $\sqrt[4]{36\cdot 21^3}\cdot\sqrt[4]{28\cdot 27}$.

31. Упростите выражение $(ab^{1,5})^3\cdot a^{2,8}\cdot b^{-3,5}$.

32. Найдите значение выражения $\log_2(32\sqrt[4]{2}\,n^2)$, если $\log_2 n^3 = 6$.

33. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{27^x-6\cdot 9^x+12\cdot 3^x-8}+3^x-19$, если $81^x=\dfrac{1}{16}$.

Вариант 3

34. Вычислите: $\sqrt[3]{90\cdot 80}\cdot\sqrt[3]{30}$.

35. Упростите выражение $\dfrac{(x^{4,2}y)^2\cdot y}{\sqrt[4]{xy^3}}$.

36. Найдите значение выражения $3^{2-\frac{1}{3}\log_3 25}$.

37. Найдите значение выражения: $\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt[3]{6-2\sqrt{7}}\times\sqrt[3]{6+2\sqrt{7}}$.

Вариант 4

38. Вычислите: $\sqrt[4]{60\cdot 4}\cdot\sqrt[4]{125\cdot 27}$.

39. Упростите выражение $\dfrac{(am^3b^{6,2})^{-3}}{\sqrt[3]{m^7b^6}}$.

40. Найдите значение выражения $10^{3+0,5\lg 16}$.

41. Найдите значение выражения:
$\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}$.

Задания для самостоятельного решения

Упростите выражение и вычислите:

42. $\dfrac{\left[0{,}5^{1/4}\cdot 3^{-1/4}-a\right]^2+4a\cdot 0{,}5^{1/4}\cdot 3^{-1/4}}{0{,}5^{1/4}\cdot 3^{-1/4}+a}-0{,}5^{1/4}\cdot 3^{-1/4}$ при $a=4$;

43. $\left[\dfrac{\sqrt{2}c^2}{\sqrt[4]{2}ac-a^2}-\dfrac{a}{\sqrt[4]{2}c-a}\right]\cdot\dfrac{a}{a+\sqrt[4]{2}c}$ при $a=5+\sqrt{7}$, $c=1/31$;

44. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}y+a}+\dfrac{2a}{3y^2-a^2}\right]:\dfrac{1}{3y^2-\sqrt{3}ay}-\sqrt{3}y+3$ при $a=\sqrt{3}$, $y=1+\sqrt{3}$;

45. $\left[\dfrac{2\sqrt[4]{3}xy}{x^2y^2-\sqrt{3}}+\dfrac{xy-\sqrt[4]{3}}{2xy+2\sqrt[4]{3}}\right]\cdot\dfrac{2xy}{xy+\sqrt[4]{3}}-\dfrac{xy}{xy-\sqrt[4]{3}}+1$
при $x=19/31$, $y=98/15$;

46. $\sqrt{0{,}5\left(21+5\sqrt{17}\right)}+\sqrt{0{,}5\left(21-5\sqrt{17}\right)}$;

47. $\dfrac{a^3+0{,}1\sqrt{0{,}1}}{a+\sqrt{0{,}1}}-\dfrac{a^3-0{,}1\sqrt{0{,}1}}{a-\sqrt{0{,}1}}$ при $a=\sqrt{10}$.

Упростите:

48. $\left[\dfrac{3}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}/3\right)+(2/9)}\right]\cdot\left[\dfrac{3}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right]-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$;

49. $\dfrac{0{,}027-8b^3}{0{,}09+0{,}6b+4b^2}+2b$;

50. $\dfrac{7\sqrt{7}+27b^3}{\sqrt{7}+3b}+3\sqrt{7}b-9b^2$;

51. $\dfrac{a^6+0{,}008}{a^4-0{,}2a^2+0{,}04}-\dfrac{a^4-0{,}04}{a^2+0{,}2}$;

52. $\dfrac{a-0{,}25}{\sqrt{a}-0{,}5}-\dfrac{a\sqrt{a}-0{,}125}{a+0{,}5\sqrt{a}+0{,}25}$;

53. $\left[\dfrac{2}{6x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{6}x+1}\right]\cdot\left(6\sqrt{6}x^3-1\right)-6x^2-\sqrt{6}x$;

54. $\log_3 10\cdot\lg 27$;

55. $3\log_7\left[\dfrac{7}{2}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}\right]$;

56. $-0{,}5\log_{12}\log_{12}\sqrt[12]{\sqrt[12]{12}}$;

57. $\log_{25}64+\log_5(125/8)$;

58. $\log_{100}49-\lg 0{,}07$;

59. $\dfrac{5^{-\log_5 7}-1}{\log_3\left(\sqrt[7]{3}\right)}$;

60. $10^{4\lg 4}\cdot\lg^3\left(\sqrt{10}\right)$;

61. 10^x, если $x=\log_{0,1}5-\left(\log_{0,04}0{,}1\right)^{-1}$;

62. $\left(3^{10}\right)^{\log_{27} 2\sqrt{2}}$;

63. $\dfrac{\log_2 21}{\log_6 21} - \log_2 3$;

64. $\log_{5^{13}\cdot\sqrt[3]{5}}\left(\sqrt[3]{25}\right)$;

65. $3^{\log_3 \log_2^2 5} \cdot \log_5^2 8$;

66. $7^{\log_7^2 0{,}25} : 4^{\log_7 4}$;

67. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$;

68. $\dfrac{\log_2 72\cdot\log_2 48 - \log_2 432\cdot\log_2 24}{\log_2 12\cdot\log_2(1/3)}$.

Не случайно тригонометрические преобразования считают одними из самых трудных. Это связано со многими причинами. Во-первых, в разделе «Тригонометрия» значительно больше формул, используемых для преобразования выражений, нежели, чем в других разделах, этих формул около 30. Шпаргалка в кармане может и не спасти, а запоминание такого большого формульного массива требует больших затрат времени и сил и получается не у всех. Во-вторых, с преобразованиями степеней и радикалов учащиеся встречались в основной школе, а обобщение понятий и изучение свойств в старшей школе происходит уже по проторенному пути, что естественно, легче воспринимается и запоминается. Тригонометрическими преобразованиями учащиеся занимаются только в старшей школе, и остается меньше времени, чтобы систематизировать полученные знания. Между тем, уверенное выполнение тригонометрических преобразований необходимо для решения тригонометрических уравнений, всегда включаемых в итоговую аттестацию.

Чтобы лучше запомнить эти формулы, можно разделить их на группы. В каждой группе выделяются основные формулы и следствия из них. Задача состоит в прочном запоминании основных формул и отработке умения вывести из основных дополнительные формулы. Такая минимизация объема, необходимого для заучивания, обеспечит усвоение материала.

Основные формулы

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x = 1$$

Формулы сложения:

Косинус и синус суммы (разности)

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y,$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$$

[. . .]