ИНСТРУКЦИЯ

Даннная брошюра состоит из двух блоков: раздаточного материала (съёмный блок) и методического пособия.

1. Разогните скрепки в середине брошюры.
2. Выньте из брошюры блок РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ (страницы, размеченные пунктиром около корешка).
3. Разрежьте вынутые листы по пунктирным линиям. Вы получите раздаточный материал для проведения пробного экзамена по двум вариантам.
4. Разделите листы по вариантам. Теперь их можно копировать и раздавать учащимся.
5. Согните скрепки в середине оставшейся части брошюры. Вы получите методическое пособие: разбор решений, указания по оцениванию и правильные ответы на все задания.

Уважаемые учителя!

Предлагаем вам провести в выпускных классах пробный экзамен по математике по вариантам, аналогичным используемым на Едином государственном экзамене. Для пробного экзамена предлагается комплект материалов, в который входят 2 варианта контрольных измерительных материалов. Каждый вариант включает:

- инструкцию по проведению экзамена;
- бланк регистрации;
- 2 бланка для ответов;
- лист-таймер для записи времени, затраченного на выполнение заданий;
- таблицу достижений ученика.

Варианты собраны в единый блок, который можно вынуть из брошюры и использовать как раздаточный материал.

Блок содержит также блоки ведомости для учителя. Издание рекомендуется использовать в образовательном учреждении при интенсивной подготовке выпускников к сдаче единого государственного экзамена по математике. Один комплект позволит протестировать двух учащихся.

По окончании экзамена можно предложить учащимся самим оценить свою подготовку, проверив выполненные ими работы. Брошюра содержит для контроля правильные ответы на все задания частей B и C (расположены до и после блока с вариантами).

Свои вопросы и комментарии вы также можете оставить на сайте методической службы издательства (http://metodist.lbz.ru/communication/forum/group3/).

Уважаемые выпускники!

С помощью данного комплекта материалов предлагаем вам принять участие в пробном экзамене по математике. Целью пробного экзамена является не только проверка вашей готовности по предмету, но и тренировка заполнения бланков, что в последующем поможет сэкономить время и силы.

Что необходимо знать о бланках ЕГЭ?

Информация, внесенная в бланки ЕГЭ (в бланк регистрации, бланк ответов № 1 и регистрационную часть бланка ответов № 2), сканируется и распознается компьютерной программой без участия человека. Бланки ЕГЭ в случае нарушения правил их оформления замене не подлежат, поэтому требуется внимательное отношение к их заполнению.

Для правильного распознавания символов в автоматическом режиме вам необходимо при заполнении бланков тщательно копировать образец символа из верхней части бланка с образцами написания символов.

Каждое поле в бланках заполняется, начиная с первой позиции. Если вы не знаете, что должно быть записано в поле, следует оставить его пустым, без прочерков.

Категорически запрещается:

- делать в полях бланков какие-либо записи и пометки, не относящиеся к содержанию полей бланков;
- делать какие-либо надписи и пометки вне полей бланков;
- делать какие-либо надписи и пометки в полях, заполненных типографским способом;
- оставлять в бланках ответов № 1 и № 2 пометки и записи, содержащие информацию о личности выпускника.

Бланк регистрации визуально разделен на три горизонтальные части.

Выпускник самостоятельно заполняет среднюю часть бланка. Вносится информация из паспорта: фамилия, имя, отчество, серия паспорта (без пробелов), номер и ставится метка в поле «пол».

Поля в верхней части бланка заполняются по указанию организатора в аудитории, кроме варианта теста и подписи. Это поля: код региона, код образовательного учреждения, класс, код пункта проведения ЕГЭ, номер аудитории, дата проведения ЕГЭ, код предмета, название предмета.

Нижнюю часть бланка регистрации заполнять необязательно.

В верхних частях бланков ответов № 1 и № 2 дублируется информация из полей: код региона, код предмета, название предмета, подпись (только в бланке № 1).

В части B краткий ответ даётся в виде числа. Каждая цифра, запятая или знак «минус» пишутся в отдельном окошке, строго по образцу в верхней части бланка. Записывать ответ в виде математического выражения или формулы запрещено. В области замены ошибочных ответов можно заменить до шести ошибочных ответов части B.

Бланк ответов № 2 предназначен для записи развёрнутых ответов на задания в свободной форме. При недостатке места для ответов на лицевой стороне бланка можно использовать оборотную сторону, сделав внизу отметку: «см. на обороте». В случае необходимости учащийся имеет право попросить дополнительный бланк № 2.

Предлагаемые вам варианты снабжены инструкциями по выполнению, аналогичными приведённым ниже, включают по 18 заданий в каждом и состоят из двух частей.

Часть 1 состоит из 12 заданий (B1–B12) с кратким ответом. К этим заданиям необходимо самостоятельно получить и записать ответ в бланк № 1.

Часть 2 состоит из 6 заданий (C1–C6) с развёрнутым ответом.

Задания части 2 направлены на проверку сформированности важнейших умений решать уравнения, неравенства, системы; исследовать свойства функций; строить и исследовать простейшие математические модели; применять свойства геометрических фигур для решения поставленных проблем, решать задачи на измерение геометрических величин. Решения заданий второй части работы записываются в развёрнутой форме на бланке № 2. Поскольку эти задания самые сложные и трудоёмкие, то рекомендованное время их выполнения почти в два раза превосходит время, отводимое на выполнение первой части работы. Проверка этих заданий осуществляется без использования компьютерной техники.

Чтобы уложиться в отведённое для каждой части варианта время, советуем воспользоваться листом-таймером. Отмечайте в нем время, затраченное на каждую часть варианта.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны, но если задание не удаётся выполнить сразу, то для экономии времени переходите к следующему заданию. К пропущенному заданию можно будет вернуться, если останется время после выполнения всей работы.

После выполнения каждого из вариантов можно сравнить свои результаты с эталоном и самостоятельно определить, какие из тем вызвали затруднения и требуют дополнительного повторения.

Желаем удачи на экзамене!

Инструкция по проверке и оценке работ экзаменуемых по математике

ЧАСТЬ 1

За правильный ответ на задания B1–B12 ставится 1 балл, за неверный ответ или его отсутствие — 0 баллов.

№	Ответ	
	Вариант 1	**Вариант 2**
B1	10017	342
B2	6	4
B3	36	3
B4	0,2	4,5
B5	1824	322
B6	11	14
B7	117	325
B8	0,5	–0,5
B9	18	54
B10	2	20
B11	4	20
B12	10	2,5

ЧАСТЬ 2

За правильный ответ на задания C1–C2 ставится 2 балла, на задания C3–C4 — 3 балла, на задания C5–C6 — 4 балла.

№	Ответ	
	Вариант 1	**Вариант 2**
C1	$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ y=0{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \\ y=-1. \end{cases}$	$\begin{cases} x=\arccos\frac{1}{4}+(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \\ y=-\frac{3\sqrt{15}}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\arccos\frac{1}{4}+(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \\ y=\frac{3\sqrt{15}}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ y=-\frac{2}{3}. \end{cases}$
C2	$-0{,}1$	$18:1:3$
C3	$x\in\left(\frac{5}{3};\frac{13-\sqrt{5}}{6}\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$	$(3;\ 3{,}75)$
C4	$9\sqrt{6};\ 2\sqrt{6}$	$1;\ 3$
C5	$-72<m<-8$	$m=-20,\ m=-128$
C6	$-18;\ -2$	$-15;\ 1$

ЧАСТЬ 2

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в «Протокол проверки ответов на задания бланка № 2» следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «×», а не «0».

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases}(2y^2+7y-4)\sqrt[4]{-\sin x}=0,\\ \cos x-y=0.\end{cases}$

Решение.

1) $\begin{cases}(2y^2+7y-4)\sqrt[4]{-\sin x}=0,\\ \cos x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2\cos^2 x+7\cos x-4)\sqrt[4]{-\sin x}=0,\\ y=\cos x\end{cases}\qquad(1)$$

2) Решим первое уравнение полученной системы:

$(2\cos^2 x+7\cos x-4)\sqrt[4]{-\sin x}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cos^2 x+7\cos x-4=0,\\ \sin x\le 0,\end{cases}\\ \sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=0{,}5,\\ \sin x\le 0,\end{cases}\\ x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

3) (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ y=\cos x,\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ y=\cos x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ y=0{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$

<u>**Ответ:**</u>

$\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ y=0{,}5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ y=-1.\end{cases}$

Критерии оценивания выполнения задания С1	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, содержащий «посторонние» корни: в ходе решения не учтены ограничения на выражение, стоящее под корнем.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в три раза больше стороны основания. Диагональ A_1C служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через вершины B и D. Найдите косинус этого угла.

Решение.

Пусть $BC=a$, тогда $A_1B=a\sqrt{10}$, $CC_1=3a$, $A_1C_1=BD=a\sqrt{2}$ и $A_1C=a\sqrt{11}$.

AC = пр A_1C, $AC\perp BD$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $A_1C\perp BD$.

Проведем $BM \perp A_1C$ ($M \in A_1C$), тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1C \perp BDM$, следовательно $A_1C \perp BDM$, $A_1C \perp DM$, т. е. угол BMD — линейный угол искомого двугранного угла BA_1CD.

$BC \perp DM$ и $BC \perp BB_1$, следовательно, $BC \perp ABB_1$, а потому $BC \perp A_1B$.

В прямоугольном треугольнике A_1BC $BM =$.
$= A_1B \cdot \sin A_1 = a\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.

В треугольнике BMD по теореме косинусов $(\sqrt{2})^2 = 2\left(\sqrt{\dfrac{10}{11}}\right)^2(1 - \cos M)$. Отсюда получаем $\cos M = -0{,}1$.

<u>**Ответ:**</u> $-0{,}1$.

Критерии оценивания выполнения задания С2	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла правильный, но получен неверный ответ или выполнены необходимые дополнительные построения и вычислены некоторые величины, но решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\log_{\log_2 x}(9x^2 - 39x + 41) > 0$.

Решение.

Допустимые значения переменной задаются системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x > 0, \\ \log_2 x \neq 1, \\ 9x^2 - 39x + 41 > 0. \end{cases}$$

Решение первых трех неравенств системы есть $x > 1$, где $x \neq 2$, поэтому корни трехчлена из второго неравенства системы $x_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{5}}{6}$ надо сравнить с числами 1 и 2.

Поскольку $13 + \sqrt{5} > 12$, то $\dfrac{13+\sqrt{5}}{6} > 2$. Далее, $\sqrt{5} > 1$, поэтому $13 - \sqrt{5} < 12$ и $\dfrac{13-\sqrt{5}}{6} < 2$. Кроме того, $\sqrt{5} < 3$, так что $\dfrac{13-\sqrt{5}}{6} > \dfrac{10}{6} > 1$.

Окончательно ОДЗ задается условием $x \in \left(1; \dfrac{13-\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(\dfrac{13+\sqrt{5}}{6}; +\infty\right)$.

Перейдем теперь к решению неравенства. Оно равносильно совокупности из двух систем. Первая из систем имеет вид $\begin{cases} \log_2 x > 1, \\ 9x^2 - 39x + 41 > 0, \end{cases}$ корни трехчлена из второго неравенства системы суть $x_1 = \dfrac{5}{3}$, $x_2 = \dfrac{8}{3}$, так что решение системы имеет вид $x \in \left(\dfrac{8}{3}; +\infty\right)$. Чтобы найти общую часть этого промежутка и ОДЗ, надо сравнить числа $\dfrac{13+\sqrt{5}}{6}$ и $\dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{6}$. Но $\sqrt{5} < 3$, так что $\dfrac{13+\sqrt{5}}{6} < \dfrac{8}{3}$ и решение первой системы $x \in \left(\dfrac{8}{3}; +\infty\right)$ входит в ОДЗ.

Вторая система $\begin{cases} \log_2 x < 1, \\ 9x^2 - 39x + 41 < 0 \end{cases}$ имеет решение $x \in \left(\dfrac{5}{3}; 2\right)$ и для пересечения с ОДЗ надо сравнить числа $\dfrac{13-\sqrt{5}}{6}$ и $\dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{6}$. Так как $\sqrt{5} < 3$, то $\dfrac{13-\sqrt{5}}{6} > \dfrac{5}{3}$. В итоге вторая система с учетом ОДЗ дает $x \in \left(\frac{5}{3}; \frac{13-\sqrt{5}}{6}\right)$ и

остается объединить множества решений двух систем.

Ответ: $\left(\frac{5}{3}; \frac{13-\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания С3	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Получен верный ответ, но не обосновано сравнение обыкновенных дробей с числовыми выражениями, содержащими радикалы.	2
Решение не завершено: найдена ОДЗ и верно решена лишь одна система.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

С4 Прямая отсекает от сторон угла A отрезки AB и AC длиной 15 и 18 соответственно. Найдите радиус окружности, касающейся отрезка BC и сторон угла A, если $\cos A = 0,2$.

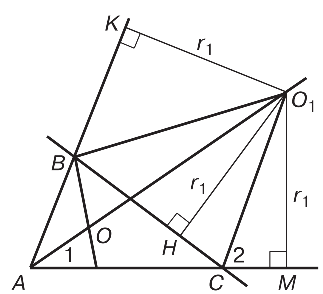
Решение.

Существуют две окружности, удовлетворяющие условию задачи.

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC.

Найдем её радиус по формуле $r = \frac{S}{p}$, где $S = 0,5 AB \cdot AC \sin A$, $p = 0,5(AB + BC + AC)$.

Найдем BC по теореме косинусов: $BC^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 0,2 = 441$, $BC = 21$.



Тогда $p = 0,5(15 + 18 + 21) = 27$;

$S = 0,5 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \sqrt{1 - 0,2^2} = 54\sqrt{6}$; $r = 54\sqrt{6} : 27 = 2\sqrt{6}$.

2. Докажем, что существует вторая окружность, и её центр лежит на биссектрисе угла A вне треугольника ABC.

Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине С пересекает биссектрису угла A (иначе $\angle 1 = \angle 2$, что противоречит свойству внешнего угла треугольника). Обозначим точку пересечения биссектрис буквой O_1.

$O_1 \in AO$, значит, точка O_1 равноудалена от сторон угла A, $O_1 \in CO_1$, значит, точка O_1 равноудалена от прямых AC и BC, поэтому равноудалена от прямых AB, BC и AC, а потому луч BO_1 — биссектриса угла CBK.

Так как лучи BO_1 и CO_1 — биссектрисы углов B и C, то в треугольнике O_1BC углы B и C меньше половины развернутого угла, т. е. острые, следовательно, конец H перпендикуляра O_1H к прямой BC лежит на отрезке BC, т. е. окружность с центром O_1 удовлетворяет условию задачи. Найдем её радиус r_1:

$$S_{ABC} = S_{ABO_1} + S_{ACO_1} - S_{BCO_1} =$$
$$= 0,5(AB \cdot r_1 + AC \cdot r_1 - BC \cdot r_1) =$$
$$= 0,5(15 + 18 - 21)r_1 = 6r_1.$$

Так как $S_{ABC} = 54\sqrt{6}$, то $r_1 = 9\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{6}$; $9\sqrt{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания С4	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Верно найден радиус одной окружности, отмечено существование второй окружности и построен ее центр.	2
Рассмотрена только одна из окружностей и верно найден ее радиус.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

С5 Найдите все значения m, при которых график функции $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18|x - 1| + m$ пересекает ось абсцисс не менее чем в трех различных точках.

Решение.

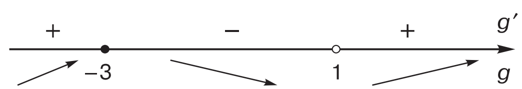
1. Для ответа на вопрос задачи исследуем функцию
$g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18|x - 1|$
на множестве всех действительных чисел.

Найдем ее производную на промежутках $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$.

а) На промежутке $(-\infty;\ 1)$:
$g'(x) = 6x^2 + 12x - 18$
$g'(x) = 0$, если $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x = -3$ или $x = 1$ (не вошла в промежуток).

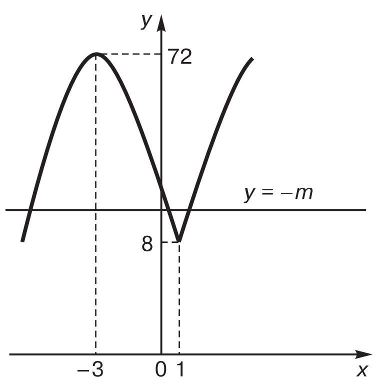
б) На промежутке $(1;\ +\infty)$:
$g'(x) = 6x^2 + 12x + 18$, $g'(x) > 0$ при любом x из этого промежутка.

в) Исследуем знак производной и поведение функции на полученных трех промежутках.



$g(-3) = 2 \cdot (-27) + 6 \cdot 9 + 18 \cdot 4 = 72$, $g(1) = 2 + 6 = 8$.
Функция непрерывна на множестве действительных чисел.

г) Схематичный график функции $g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18|x - 1|$ имеет вид



2) Прямая $y = -m$ пересекает график функции $g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18|x - 1|$ в трех различных точках при $8 < -m < 72$, т. е. $-72 < m < -8$.

Ответ: $-72 < m < -8$.

Критерии оценивания выполнения задания С5	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен правильный ответ. Решение, в целом, верное, но либо оно имеет пробелы в обоснованиях (например, не указаны нужные свойства функции), либо допущены вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модуля. При определении значений параметра включены посторонние значения или какие-то значения не указаны.	2
Решение не завершено: верно построен эскиз графика, на котором показаны возможные значения параметра.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Найдите все целые значения , при которых не определена функция $y = \operatorname{tg}\dfrac{(5x+6)\pi}{3x-2}$.

Решение.

Все значения x, при которых не определена данная функция, определяются равенством $\dfrac{(5x+6)\pi}{3x-2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда после сокращения и преобразований получается, что $k = \dfrac{7x+14}{6x-4} = 1 + \dfrac{x+18}{6x-4}$. Поэтому должно быть $\dfrac{x+18}{6x-4} = k - 1 = m \in \mathbb{Z}$. Ясно, что при $x = -18$ будет $k = 1$, $m = 0$, значит, $x = -18$ — один из возможных ответов.

[. . .]