ПРЕДИСЛОВИЕ

Раздел «Задачи с параметрами» — один из самых трудных в школьной математике. При решении задач с параметрами требуется не только уверенное владение стандартными методами решений уравнений и неравенств, но и умение проводить довольно разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность, для того чтобы не потерять решений и не приобрести лишних. Таким образом, у школьников предполагается зрелое логическое мышление и математическая культура, но, в свою очередь, их развитию способствуют сами задачи с параметрами. Учащиеся, владеющие методами их решения, как показывает опыт вступительных экзаменов, успешно справляются и с другими задачами.

Теоретическое изучение физических процессов, решение экономических задач часто приводит к различным уравнениям или неравенствам, содержащим параметры, и необходимой частью их решения является исследование характера процесса в зависимости от значений параметров. Таким образом, задачи с параметрами представляют собой небольшие исследовательские задачи. Однако часто оказывается, что выпускник школы либо вообще не имеет представления о решении задач с параметром, либо теряется даже в случае самого простого вида подобных задач, когда единственным усложняющим моментом является ветвление решения и, соответственно, ветвление ответа.

В последние годы задачи с параметрами стали постоянной составляющей вариантов итоговой аттестации за 9-й класс (ГИА-9) и за курс средней школы (ЕГЭ). Подобные задания встречаются только во второй части этих экзаменационных работ и имеют высокий уровень сложности.

Цель данного пособия состоит в том, чтобы познакомить школьников с основными типами задач с параметрами (уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, задачи, связанные с исследованием квадратного трехчлена, коэффициенты которого зависят от параметра, геометрические задачи, задачи на определение наибольшего и наименьшего значений функции, и т. д.) и познакомить с новыми, незнакомыми им методами решений уравнений, неравенств и т. д. Выпускникам школ полезно владеть различными методами решения подобных задач — аналитическими и графическими, уметь переводить словесное условие задачи в аналитическую форму — сводить ее к решению уравнений, неравенств и систем и совокупностей уравнений и неравенств.

Единый государственный экзамен и Государственная итоговая аттестация в целом опираются, конечно же, на школьную программу. Но, к сожалению, в программах по математике для общеобразовательных классов задачам с параметрами практически не отводится места. Между тем, их можно и нужно использовать, уже начиная с линейных и квадратных уравнений и неравенств, что особенно важно при подготовке к ГИА. Это могут быть задачи нахождения решений в общем виде, определения корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам, исследования количества корней в зависимости от значений параметра. Важно, чтобы школьники уже на первых простых примерах поняли двойственную природу параметра: с одной стороны, это некоторое фиксированное число a, а с другой стороны, оно неизвестно, что ограничивает степень свободы обращения с ним и требует особой аккуратности. Кроме того, школьники должны усвоить, что запись ответа существенно отличается от записи ответов аналогичных уравнений и неравенств без параметра.

Методически было бы правильно каждый пройденный тип уравнений (неравенств) завершать задачами с использованием параметра. Во-первых, школьнику трудно привыкнуть к параметру за два-три занятия — нужно время; во-вторых, использование подобных задач улучшает закрепление пройденного материала; в-третьих, оно способствует развитию математической и логической культуры учащихся, а также развитию интереса к математике, поскольку открывает перед ними новые методы и возможности для самостоятельного поиска.

Структура пособия такова: оно разбито на главы, а главы, за исключением шестой главы, на параграфы, представляющие отдельные темы, к которым даны методические указания, представлено решение типовых примеров и подобраны задачи для самостоятельного решения.

При подготовке к ГИА–9 достаточно познакомиться с материалом до параграфа 4.6. Изучение дальнейшего материала полезно при подготовке к ЕГЭ. В гл. 6 приведены и разобраны образцы заданий с параметрами из вариантов ЕГЭ, начиная с 2001 года. Это позволит изучить историю вопроса, т. е. узнать, какие задачи давались в предыдущие годы, каковы методы их решения и особенности оформления. Однако важно иметь достаточный запас прочности и не ограничиваться только списком задач, приведенным в гл. 6. Составители вариантов ЕГЭ неоднократно отмечали, что задачи части С опираются на опыт вступительных экзаменов, а большую часть заданий данного пособия как раз и составляют конкурсные задачи из вариантов вступительных экзаменов разных вузов. Да и при решении задач последней главы используются методы, которые приводятся в предыдущих главах, и умения, которые могут быть сформированы и закреплены только при самостоятельном решении задач.

Желаю успеха! Автор

Глава 1

ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть дано уравнение или неравенство с двумя переменными:

$$F(x,a)=0 \quad (F(x,a)\geqslant 0 \quad \text{или} \quad F(x,a)>0). \qquad (1.1)$$

Задача о решении уравнения (неравенства) (1.1) может быть сформулирована одним из двух следующих способов.

1. Найти все пары чисел (x,a), удовлетворяющие этому уравнению (неравенству). В этом случае выражение (1.1) называется *уравнением* (*неравенством*) *с двумя переменными* x *и* a, в котором обе переменные x и a играют одинаковую роль.

2. Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение (неравенство) относительно x. Тогда выражение (1.1) *называют уравнением* (*неравенством*) *с переменной* x *и параметром* a, а множество A — *областью изменения параметра* a. При отсутствии ограничений под областью изменения параметра подразумевается множество всех действительных чисел.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве), придать некоторое конкретное числовое значение, то возможен один из случаев:

а) получится уравнение или неравенство с одной неизвестной x;

б) получится выражение, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра называется *допустимым*, во втором — *недопустимым*. Решить уравнение или неравенство с параметром — это значит для каждого допустимого значения параметра найти множество всех удовлетворяющих уравнению или неравенству значений неизвестного. Обратите внимание на то, что выражение (1.1) — это, по существу, краткая запись семейства уравнений (неравенств), получающихся из него при заданных значениях параметра a. Поэтому *решить уравнение* (*неравенство*) (1.1) (*с переменной* x *и параметром* a) — *это значит, на множестве действительных чисел решить семейство уравнений* (*неравенств*), *получаемых из выражения* (1.1) *при всех допустимых значениях параметра* a.

Отметим, что при некоторых множествах из допустимых значений параметра a могут получаться одни семейства уравнений (неравенств), при иных — другие. Поэтому для облегчения решения удобно нанести на числовую прямую значения параметра, называемые *контрольными*, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения. Например, уравнение $(a-1)x^2+3x-2a^2=0$ (неравенство $(a-1)x^2+3x-2a^2<0$) при $a=1$ из квадратного (квадратичного) превращается в линейное уравнение $3x-2=0$ (неравенство $3x-2<0$).

При решении уравнения (неравенства) (1.1) с параметром можно пользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм решения уравнения или неравенства с параметром

1. Определить ограничения, налагаемые на значения неизвестного x и параметра a, вытекающие из того, что функции и арифметические операции в $F(x,a)$ имеют смысл.

2. Определить формальные решения (1.1), записываемые без учета ограничений. Если при решении возникают *контрольные* значения параметра, то их нанести на числовую ось Oa. Эти значения разобьют область допустимых значений параметра на подмножества. На каждом из получившихся подмножеств решить заданное уравнение.

3. Следует исключить значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют ограничениям, полученным в п. 1.

4. На числовой оси Oa отметить значения параметра, найденные в п. 3. Для каждого из промежутков на оси Oa следует записать все полученные решения в зависимости от значений параметра a. (В случае достаточно простых уравнений п. 4 можно опустить.)

5. Выписать ответ, т. е. записать решения в зависимости от значений параметра a.

Замечание. 1) Наличие параметра в задаче предполагает *специальную форму записи ответа*, позволяющую установить ответ для любого допустимого значения параметра. Недопустимые значения также указываются в ответе, и считается, что при этих значениях параметра задача не имеет решения. При записи ответа обычно значения параметра перечисляются в порядке возрастания от $-\infty$ до $+\infty$, но иногда для компактности ответа объединяют промежутки для параметра, на которых формулы решения совпадают.

2) В случае ветвления решения удобно использовать числовую прямую Oa, на которую следует нанести контрольные и недопустимые значения параметра, а на промежутках, на которые эти значения разбили прямую, указать ответ задачи. Использование полученного рисунка при записи ответа позволяет не потерять найденные решения и четко указать значения параметра, которым они соответствуют.

Продемонстрируем сказанное выше на примере.

Пример 1. Решить неравенство:

$$a(a-2)x > 2-a.$$

$\triangle$ Контрольные значения параметра получаются из условия $a(a-2)=0$. В этом случае неравенство не содержит переменной x.

Нанесем на числовую ось Oa контрольные значения $a=0$ и $a=2$. Они разбивают ось Oa на следующие промежутки (см. рис. 1.1):

$$1)\quad a<0 \qquad 2)\quad 0<a<2 \qquad 3)\quad a>2$$

На каждом из этих промежутков решим данное неравенство. Значения $a=0$ и $a=2$ требуют отдельного рассмотрения.

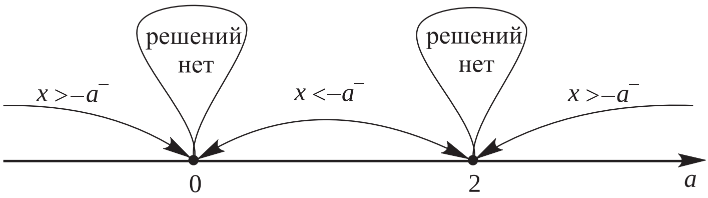

Рис. 1.1

Если $a < 0$, то $a(a-2) > 0$. Разделив обе части неравенства на множитель $a(a-2) \neq 0$, получим $x > -a^{-1}$.

Если $2 > a > 0$, то $a(a-2) < 0$ и, следовательно, $x < -a^{-1}$.

Если $a > 2$, то $a(a-2) > 0$ и $x > -a^{-1}$.

При $a = 0$ получаем неравенство $0 \cdot x > 2$, не имеющее решений.

При $a = 2$ получаем неравенство $0 \cdot x > 0$, т. е. решений также нет.

Нанесем получаемые в ходе решения ответы на соответствующие промежутки числовой оси Oa и запишем ответ. ▲

З а м е ч а н и е. Промежуток, к которому относится соответствующее решение, помечается на рисунке дугой. На ее конце ставится стрелочка в том случае, если это решение не относится к крайней точке промежутка.

Ответ: Если $a < 0$, то $x > -a^{-1}$; если $0 < a < 2$, то $x < -a^{-1}$; если $a > 2$, то $x > -a^{-1}$; если $a = 0$ или $a = 2$, то решений нет.

Аналитический и графический методы сравнения выражений, зависящих от параметра

При решении уравнений (неравенств) с параметрами часто приходится сравнивать несколько выражений, зависящих от параметра, находить среди них наибольшее или наименьшее. Обычно применяют аналитический метод, т. е. составляют и решают систему неравенств. В случае двух выражений достаточно решить одно неравенство. Если же выражений больше, то лучше использовать графический метод.

Пример 2. Сравнить числа a^2 и $3a+4$.

△ Найдем значения параметра a, при которых число a^2 больше числа $3a+4$. Для этого решим неравенство $a^2 > 3a+4$ или $a^2 - 3a - 4 > 0$. Его решение есть $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. При $a = -1$ и $a = 4$ справедливо равенство $a^2 = 3a+4$, т. е. числа равны. Соответственно, при $a \in (-1; 4)$ число a^2 меньше числа $3a+4$. ▲

Ответ: Если $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, то $a^2 > 3a+4$; если $a = -1$ или $a = 4$, то $a^2 = 3a+4$; если $a \in (-1; 4)$, то $a^2 < 3a+4$.

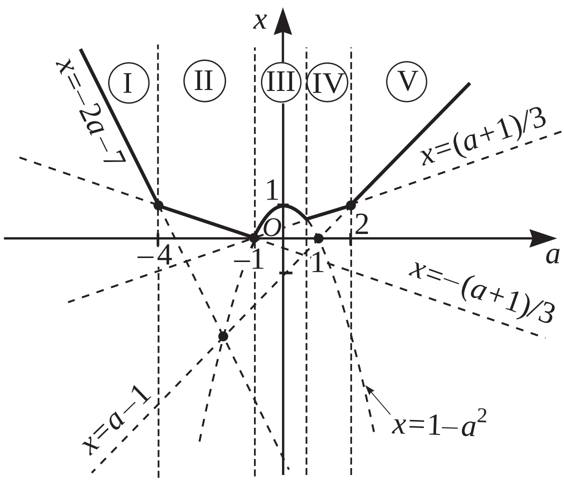

Рис. 1.2

Пример 3. Определить наибольшее из чисел $1 - a^2$, $-2a - 7$, $\dfrac{a+1}{3}$, $a - 1$ и $-\dfrac{a+1}{3}$.

△ Воспользуемся графическим методом. Построим в системе координат Oax графики функций $x = 1 - a^2$, $x = -2a - 7$, $x = \dfrac{a+1}{3}$, $x = a - 1$ и $x = -\dfrac{a+1}{3}$ (см. рис. 1.2). Точки -4, -1, $\dfrac{2}{3}$ и 2 (точки попарного пересечения графиков указанных функций) разбивают числовую прямую Oa на пять промежутков. На каждом из них, проводя вертикальные прямые $a = \text{const}$, определяем наибольшую ординату точек пересечения указанных графиков с прямой $a = \text{const}$ и записываем ответ. При фиксированном значении a наибольшим из чисел $1 - a^2$, $-2a - 7$, $\dfrac{a+1}{3}$, $a-1$ и будет то, для которого ордината точки пересечения соответствующего графика и прямой $a = \text{const}$ будет наибольшей. ▲

Замечание. Для каждого a искомое значение лежит на графике функции

$$f(a) = \max\left\{1 - a^2, -2a - 7, \frac{a+1}{3}, a - 1, -\frac{a+1}{3}\right\}.$$

График $f(a)$ на рис. 1.2 нарисован сплошной линией.

Ответ: Если $a \leqslant -4$, то $-2a - 7$; если $-4 < a \leqslant -1$, то $-\dfrac{a+1}{3}$; если $-1 < a \leqslant \dfrac{2}{3}$, то $1 - a^2$; если $\dfrac{2}{3} < a \leqslant 2$, то $\dfrac{a+1}{3}$; если $a > 2$, то $a - 1$.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5ax + 6a^2 \leqslant 0, \\ x - a - 2 > 0. \end{cases}$$

△ Корнями уравнения $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$ являются числа $2a$ и $3a$. Решением первого неравенства системы является множество $[x_1; x_2]$, где $x_1 = \min\{2a; 3a\}$ и $x_2 = \max\{2a; 3a\}$. Или $[2a; 3a]$ при $a \geqslant 0$ и $[3a; 2a]$ при $a < 0$.

Решением второго неравенства является множество $(a + 2; +\infty)$.

Решение системы представляет собой пересечение множеств решений первого и второго неравенств.

Для сравнения чисел $2a$, $3a$ и $a + 2$ воспользуемся графическим способом (см. рис. 1.3). На рис. 1.3 видно, что при $a < 1$ число $a + 2$ больше чисел $2a$ и $3a$. При $a = 1$ $a + 2 = 3a > 2a$. Следовательно, при $a \leqslant 1$ система не имеет решений. Если $1 < a < 2$, то $3a > a + 2 > 2a$ и $x \in (a + 2; 3a]$ — решение данной в условии системы; если $a = 2$, то $3a > a + 2 = 2a$ и $x \in (2a; 3a]$; если $a > 2$, то $3a > 2a > a + 2$ и $x \in [2a; 3a]$. ▲

[. . .]