

A night-time photograph of a radio telescope array, likely the RATN (Radio Astronomical Telescope Network) in Russia. The image shows several large parabolic dish antennas mounted on metal structures, set against a dark sky filled with stars and the Milky Way. A bright comet is visible in the upper left portion of the sky. The foreground shows the silhouettes of the telescope structures and the surrounding landscape.

Решение разноуровневых задач на тему «Небесная механика»

Ведущий программист ГАИШ МГУ,
Учитель астрономии МОУ Гимназии №1 и МОУ Лицея №14,
Руководитель астрономического кружка им Е.П. Левитана г.
Жуковского,
ЦПМК ВсОШ по Астрономии

ЗАДАЧНИК (ГОТОВИТСЯ К ВЫПУСКУ)

Авторы:

ТАТАРНИКОВ Андрей Михайлович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга МГУ им. М. В. Ломоносова, автор более 60 научных статей. Педагог дополнительного образования в Астрономической школе «Вега» г. Железнодорожного. Член ЦПМК Всероссийской олимпиады школьников по астрономии и ПМК Москвы и Московской области.

ТАТАРНИКОВА Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга МГУ им. М. В. Ломоносова, автор более 40 научных статей. Руководитель кружка «Олимпиадная астрономия» в Москве.

ФАДЕЕВ Евгений Николаевич, младший научный сотрудник Астрокосмического центра Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, 9 научных статей. В 2017—2019 гг. — главный тренер команды Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников. Член ЦПМК Всероссийской олимпиады школьников по астрономии и ПМК Москвы.



А. М. Татарников,
А. А. Татарникова,
Е. Н. Фадеев
Астрономия. 10—11 кл.
Задачник
(под ред. А. В. Засова,
В. Г. Сурдина)
Формат 70×90 1/16.
Обложка

В издании представлено более 500 задач по курсу астрономии для 10—11 классов, для большей части которых даны ответы. Задачник по содержанию и структуре соответствует учебнику А. В. Засова, В. Г. Сурдина «Астрономия. 10—11 классы». Каждая глава задачника состоит из небольшого теоретического введения, нескольких задач

с подробным решением и ответом и задач для самостоятельного решения, которые представлены на трёх уровнях сложности. Задачник можно использовать как для текущей работы на уроке астрономии, так и для подготовки к решению задачи 24 ЕГЭ по физике.

Задачи на горизонт и понижение

горизонта



- Найдите расстояние до горизонта и величину понижения горизонта для наблюдателя находящегося на останкинской телебашне 535 м, если радиус Земли взять 6371 км



- Понижение горизонта

$$\text{Угол } \gamma = \cos^{-1} \left(\frac{R}{R+h} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{6371}{6371+0.535} \right) = 0,74^\circ \approx 0.013 \text{ рад}$$

- Расстояние до горизонта по Земле - s

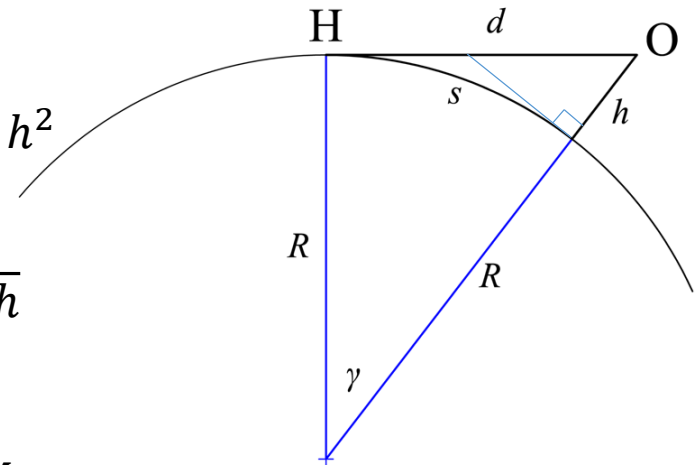
$$s = \gamma \cdot R = 0.013 \cdot 6371 \approx 82.6 \text{ км} \approx 83 \text{ км}$$

- Расстояние до горизонта по прямой - d

$$R^2 + d^2 = (R + h)^2 \Leftrightarrow d^2 = (R + h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2$$

$$d = \sqrt{2Rh + h^2} = \sqrt{2Rh \left(1 + \frac{h}{2R} \right)} \xrightarrow{h \ll R} \approx \sqrt{2Rh}$$

$$d \approx \sqrt{2Rh} \approx \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.535} \approx 82.6 \approx 83 \text{ км}$$



Первая космическая скорость

- Центробежное ускорение

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R_{\oplus} + h}$$

- Ускорение свободного падения

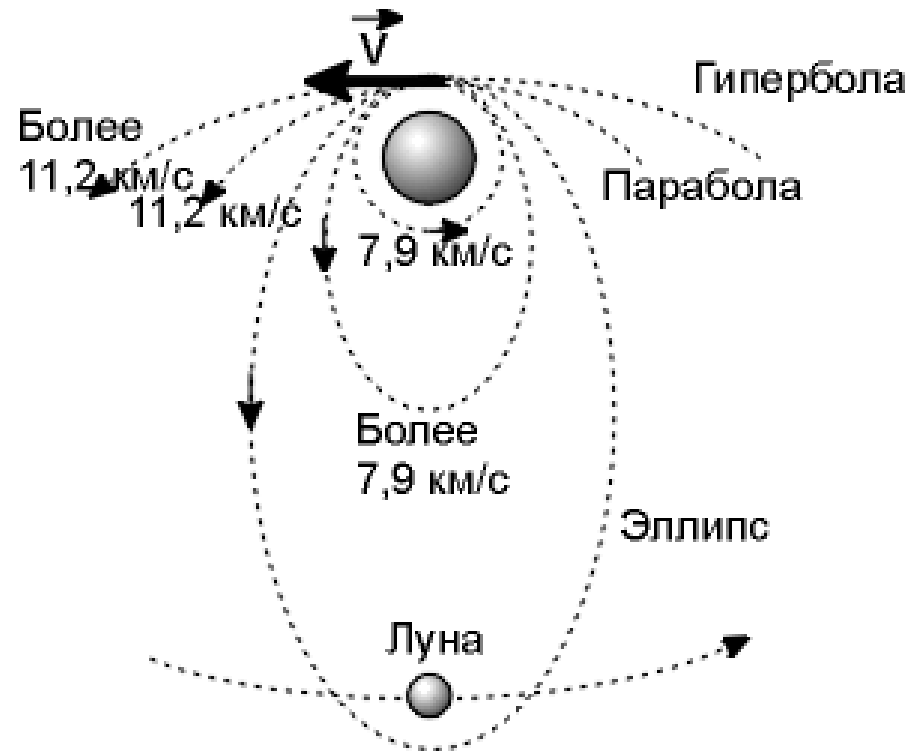
$$g_{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2}$$

- Равенство

$$a_{\text{ц}} = g_{\oplus} \Rightarrow \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2} = \frac{v^2}{R_{\oplus} + h} \Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$$

- Частный случай - $R_{\oplus} \gg h$

$$v_I = \frac{2\pi(R_{\oplus} + h)}{T} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} = \sqrt{\frac{G \frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3 \rho_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{3\pi R_{\oplus}^3 \left(1 + \frac{h}{R_{\oplus}}\right)^3}{G \rho_{\oplus} R_{\oplus}^3}} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho_{\oplus}}}$$



Задача на первую космическую скорость

- На какой высоте от Земли первая космическая скорость в двое меньше чем вблизи поверхности Земли? Как изменится период обращения спутника?

- Решение

$$V_I = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$$

Значит отношение скоростей будет равно

$$\frac{V_{I,0}}{V_{I,1}} = \sqrt{\frac{R_{\oplus} + h}{R_{\oplus}}} = 2 \Rightarrow h = 3R_{\oplus} = 3 \cdot 6400 = 19200 \text{ км}$$

Значит отношение периодов обращения будет равно

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\frac{2\pi R_{\oplus}}{V_{I,0}}}{\frac{2\pi(R_{\oplus} + h)}{V_{I,1}}} = \frac{V_{I,1}}{V_{I,0}} \cdot \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} = \frac{1}{8}$$

Вторая космическая скорость

- Типы орбит – Эллипс

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{Mm}{a} < 0$$

- Типы орбит – Парабола

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{Mm}{a} = 0$$

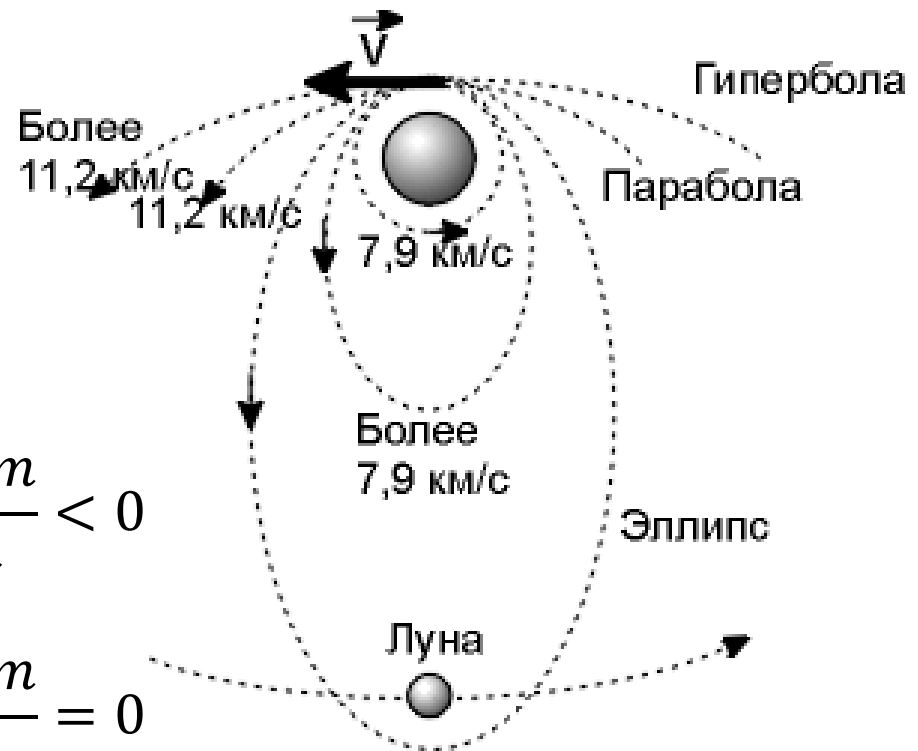
- Типы орбит – Гипербола

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{Mm}{a} > 0$$

- Кинетическая и потенциальная энергии

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{Mm}{a} = 0 \Rightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{a}} \Rightarrow \frac{V_{II}}{V_I} = \sqrt{2}$$

- Вывод второй космической скорости



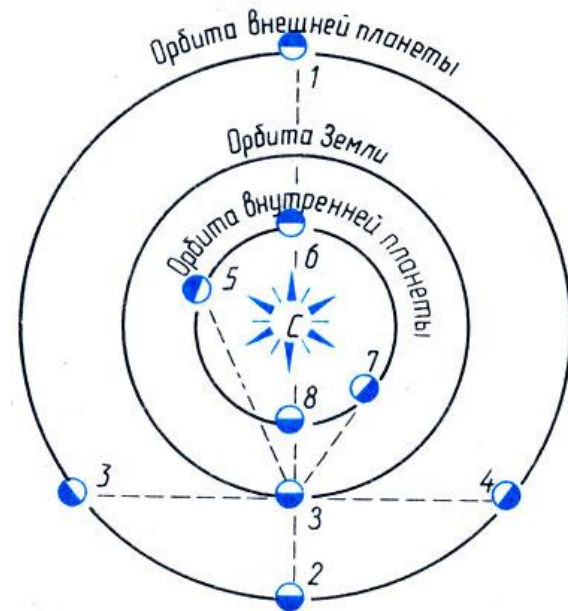
Задача на вторую космическую скорость



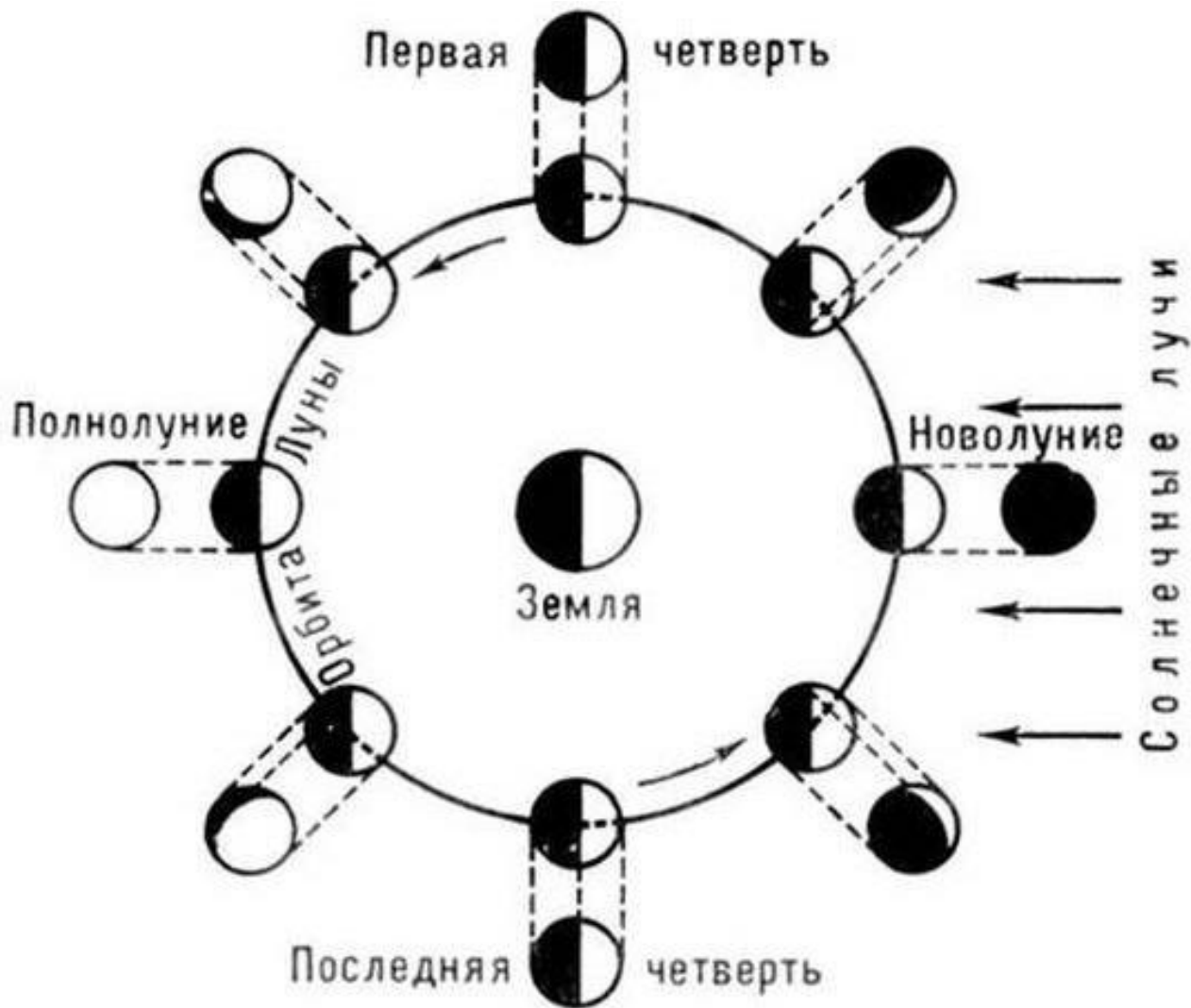
- С какой максимальной скоростью метеорные тела могут попадать в атмосферу Земли?

- Решение

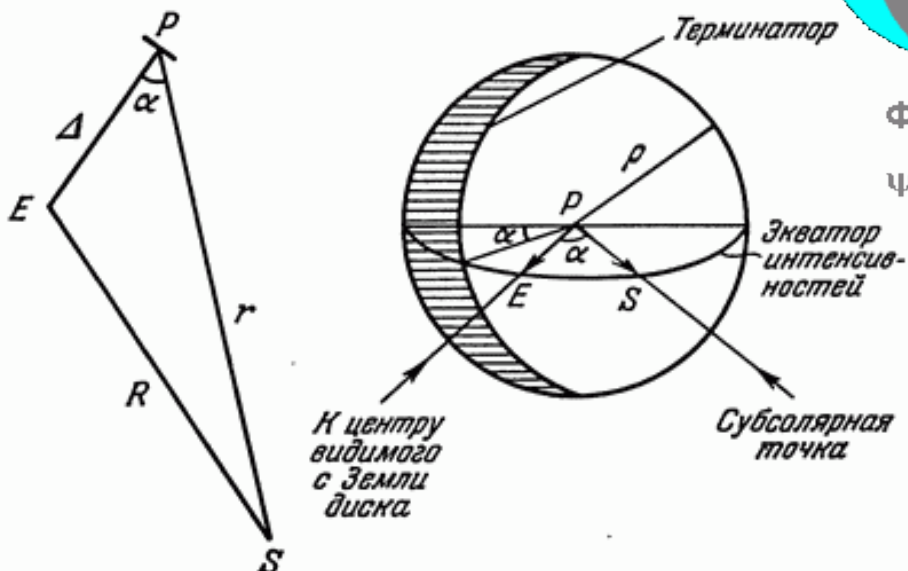
$$\Delta V = V_I + V_{II} = V_I(\sqrt{2} + 1) = V_I = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\oplus}}}(\sqrt{2} + 1)$$
$$= \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1,5 \cdot 10^{11}}}(\sqrt{2} + 1) \approx 73 \text{ км/сек}$$



Фазы Луны

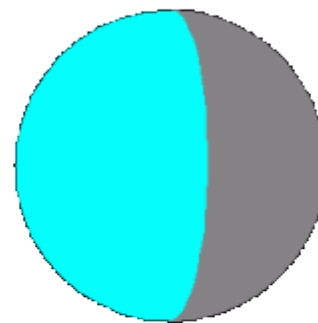


Фаза



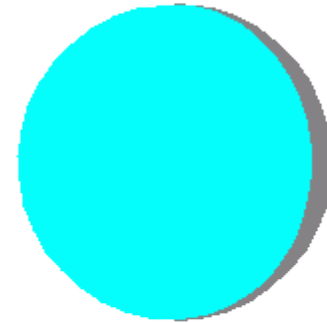
$$\Phi = 0.18$$

$$\Psi = 130^\circ$$



$$\Phi = 0.62$$

$$\Psi = 76^\circ$$

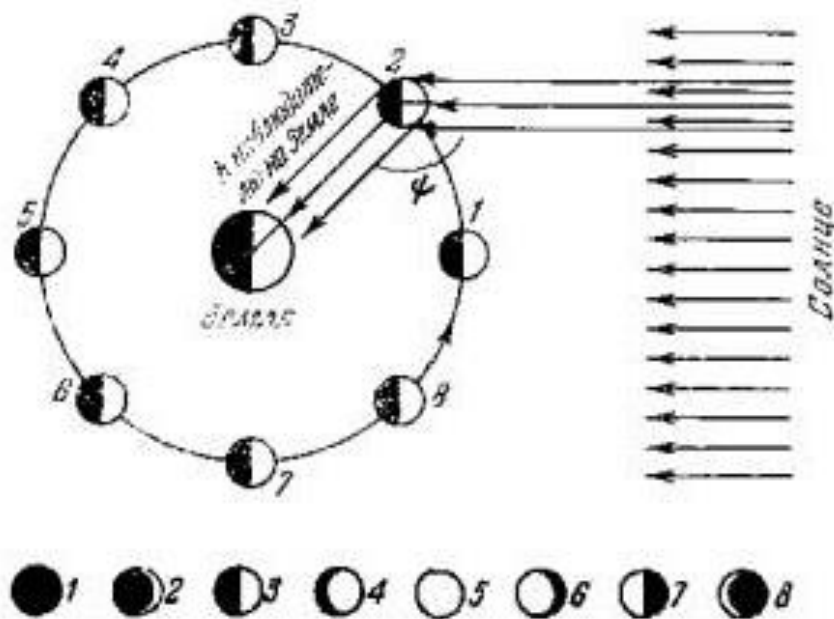


$$\Phi = 0.94$$

$$\Psi = 28^\circ$$

$$\Phi = \frac{d}{D} = \frac{S_{\text{освещенное}}}{S_{\text{всего диска}}}$$

$$= \frac{R + R \cdot \cos \alpha}{2R} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$



Задача на фазу планет

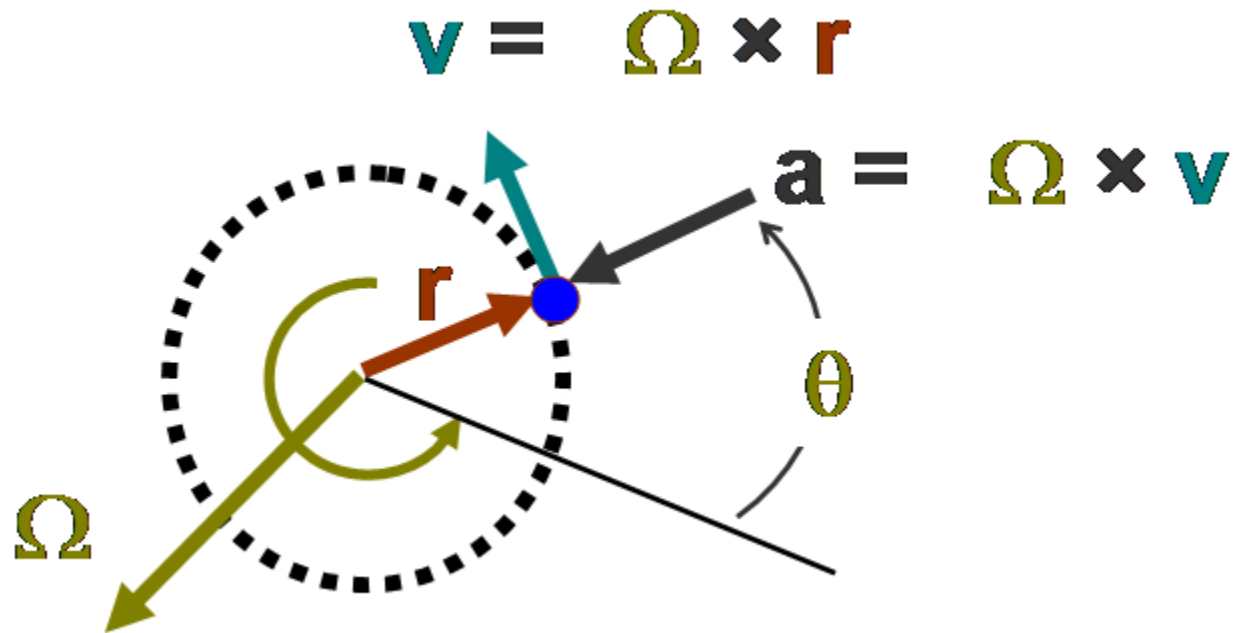
- Какова фаза Марса в моменты положения планеты в 90° от Солнца на эклиптике? Орбиты Земли и Марса считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

$$\Phi = \frac{d}{D} = \frac{S_{\text{освещенное}}}{S_{\text{всего диска}}} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

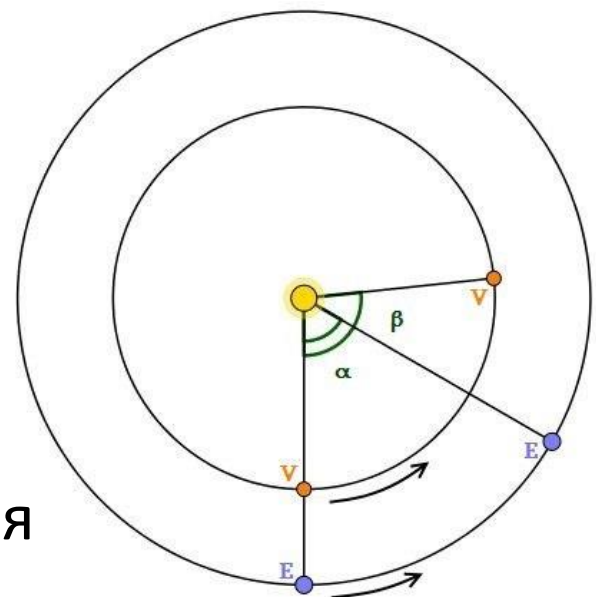
- $\sin \alpha = \frac{a_{\text{Земли}}}{a_{\text{Марса}}} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow$
- $\alpha \approx 42^\circ$
- Значит $\Phi = 0,87$



Круговое движение



- Угловая скорость Ω
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{V}{R}$
- Связь линейной и угловой скорости
- $V = \omega \cdot R$
- Случай сонаправленного движения
- $\omega_{\Sigma} = \omega_1 - \omega_2$
- Случай разнонаправленного движения
- $\omega_{\Sigma} = \omega_1 + \omega_2$



Синодический и сидерический периоды

- **Сидерический период** обращения – период обращения планеты относительно направления на далекие звезды
- **Синодический период обращения** – период обращения относительно направления планета наблюдения – Солнце или период повторения относительного положения трех тел Солнца, планеты с которой мы наблюдаем и наблюдаемой планеты
- Случай внутренней планеты

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{\text{синодического периода}}}{2\pi} &= \frac{\omega_{\text{планеты}}}{2\pi} - \frac{\omega_{\oplus}}{2\pi} \\ \frac{T_{\text{синодического периода}}}{T_{\text{синодического периода}}} &= \frac{T_{\text{планеты}}}{T_{\text{планеты}}} - \frac{T_{\oplus}}{T_{\oplus}} \\ \Rightarrow \frac{1}{S} &= \frac{1}{T_{\text{п}}} - \frac{1}{T_{\oplus}} \Rightarrow T_{\text{синодического периода}} = \frac{T_{\oplus} \cdot T_{\text{планеты}}}{T_{\oplus} - T_{\text{планеты}}}\end{aligned}$$

- Случай внешней планеты

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{\text{синодического периода}}}{2\pi} &= \frac{\omega_{\oplus}}{2\pi} - \frac{\omega_{\text{планеты}}}{2\pi} \\ \frac{T_{\text{синодического периода}}}{T_{\text{синодического периода}}} &= \frac{T_{\oplus}}{T_{\oplus}} - \frac{T_{\text{планеты}}}{T_{\text{планеты}}} \\ \Rightarrow \frac{1}{S} &= \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{п}}} \Rightarrow T_{\text{синодического периода}} = \frac{T_{\oplus} \cdot T_{\text{планеты}}}{T_{\text{планеты}} - T_{\oplus}}\end{aligned}$$

Задачи на синодический период

- Найдите синодический период планеты Марс?

- Решение

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\Pi}}$$

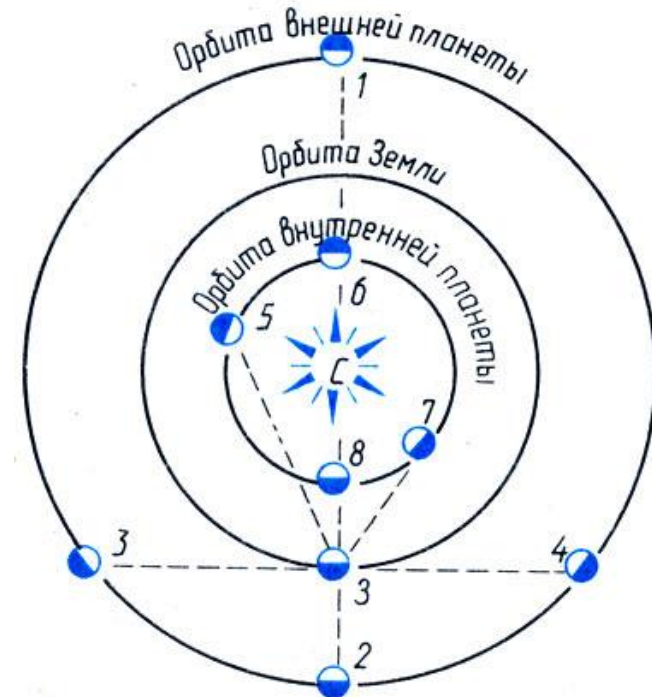
Период Марса из справочных данных – 1,88 года

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} &= \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\Pi}} \Rightarrow T_{\text{Марса}} \\ &= \frac{T_{\oplus} \cdot T_{\text{Марса}}}{T_{\text{Марса}} - T_{\oplus}} = \frac{1 \cdot 1,88}{1,88 - 1} \\ &\approx 2,14 \text{ года} \end{aligned}$$

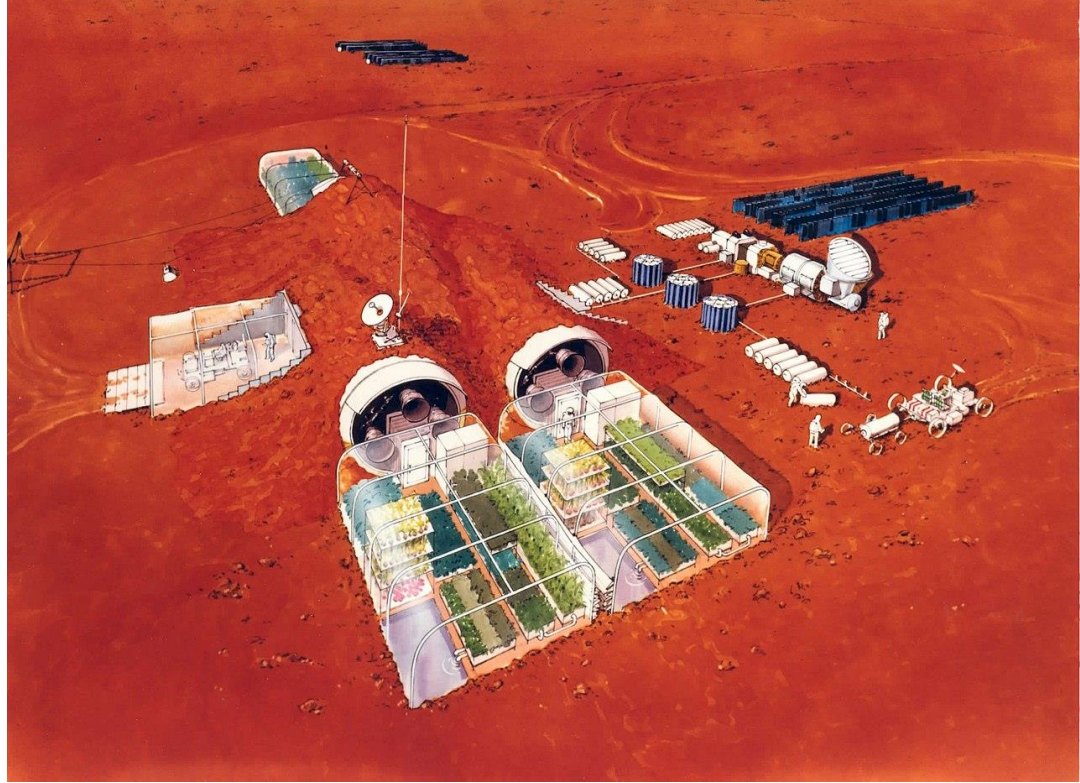


Конфигурации планет

- Внутренние планеты
 - 8 - Нижнее соединение
 $l = 0^\circ \Phi = 0$
 - Западная элонгация
 $l = \alpha_{\text{макс}} \Phi = 0,5$
 - 6 - Верхнее соединение
 $l = 0^\circ \Phi = 1$
 - Восточная элонгация
 $l = \alpha_{\text{макс}} \Phi = 0,5$
- Внешние планеты
 - 1 - Соединение
 $l = 0^\circ \Phi = 1$
 - 4 - Восточная квадратура
 $l = 90^\circ \Phi = \Phi_{\text{минимальная}}$
 - 2 - Противостояние
 $l = 180^\circ \Phi = 1$
 - 3 - Восточная квадратура
 $l = 90^\circ \Phi = \Phi_{\text{минимальная}}$



- На какой максимальный угол по эклиптике отходят планеты Венера и Земля от Солнца на небе Марса? Орбиты всех планет считать круговыми.



Задача на конфигурации планет

- Решение

$$\sin \alpha = \frac{a_{\text{Земли}}}{a_{\text{Марса}}} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow \alpha \approx 42^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a_{\text{Венеры}}}{a_{\text{Марса}}} = \frac{0,7}{1,5} \Rightarrow \alpha \approx 28^\circ$$



Эллипс

- Большая полуось

$$a = \frac{Q + q}{2}$$

- Эксцентриситет

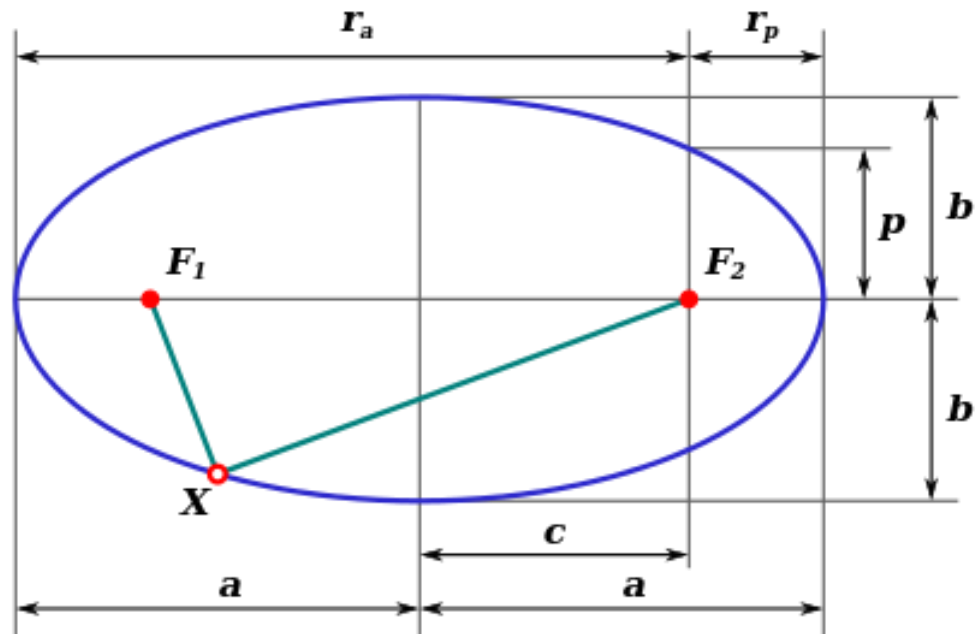
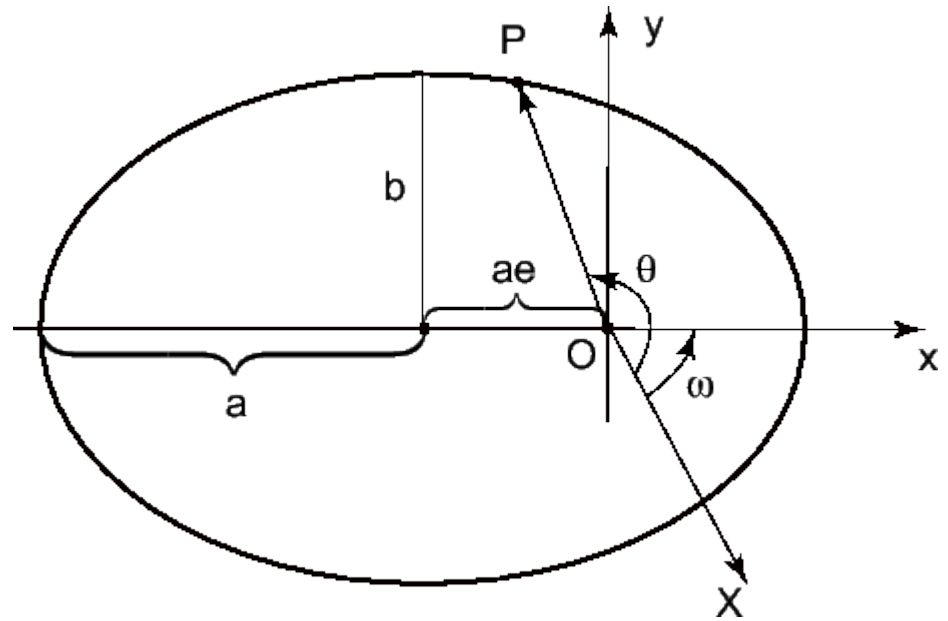
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{Q - q}{Q + q}$$

- Перигей (периастр)

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

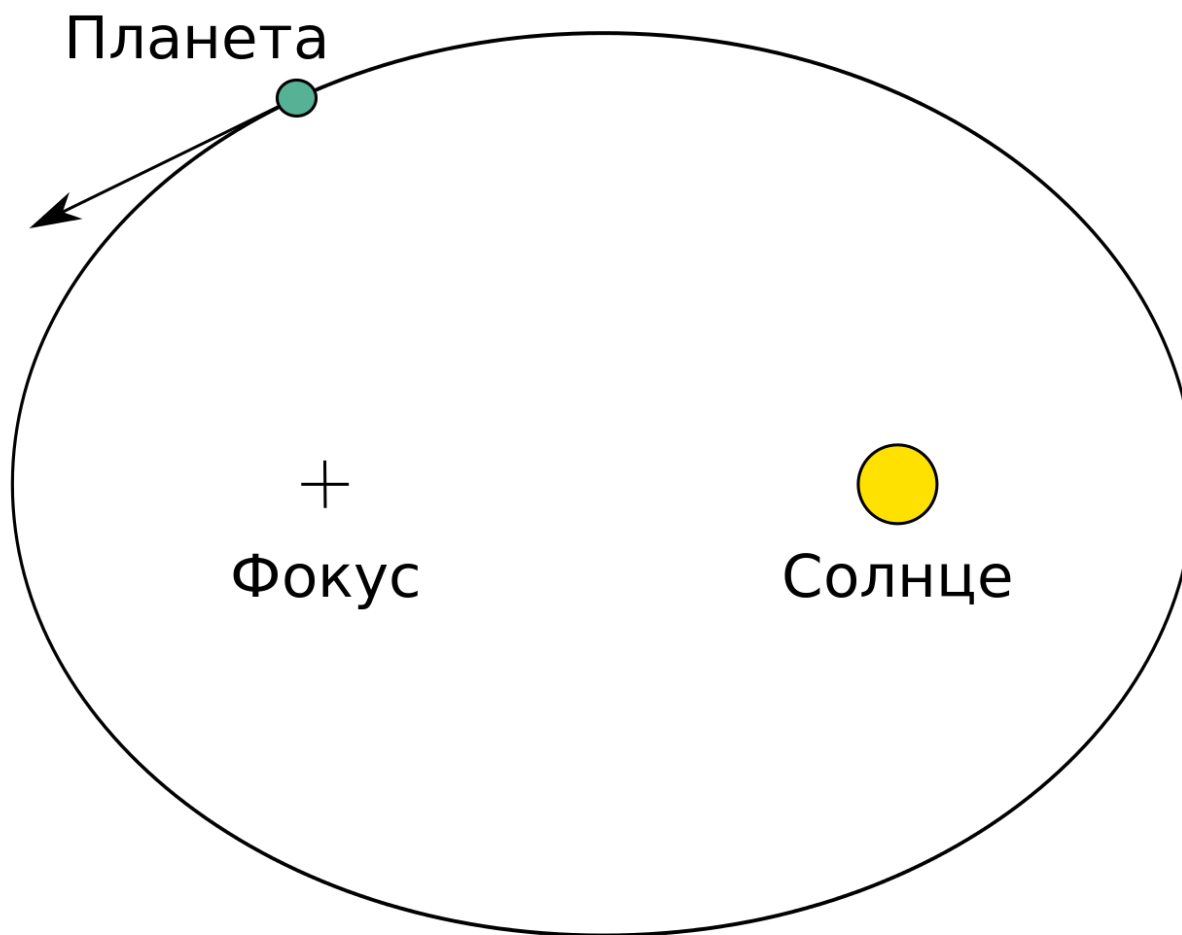
- Апогей (Апоастр)

$$Q = a + c = a(1 + e)$$

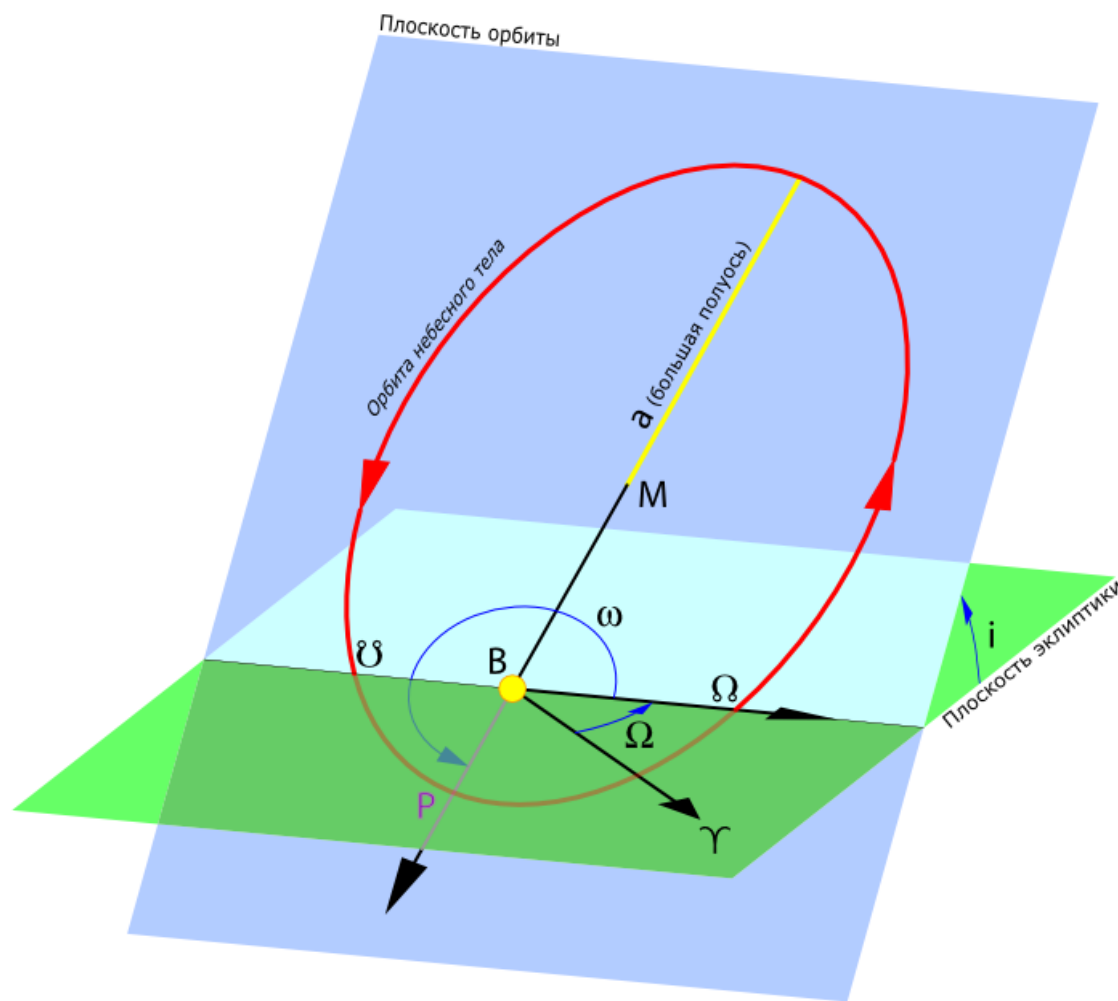


Первый закон Кеплера

- Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.



Орбита и ее элементы



- Большая полуось – a в [а.е.]
- Эксцентриситет – e от $[0,1)$
- Наклонение орбиты – i в $[^\circ]$
- Долгота восходящего узла – Ω в $[^\circ]$
- Аргумент перигентра – ω в $[^\circ]$
- Период – T в [годы, дни]

Задачи на первый закон Кеплера

- Во сколько раз меняется расстояние от Солнца до кометы Галлея (1P), если эксцентриситет ее орбиты $e=0,967$?



Решение:

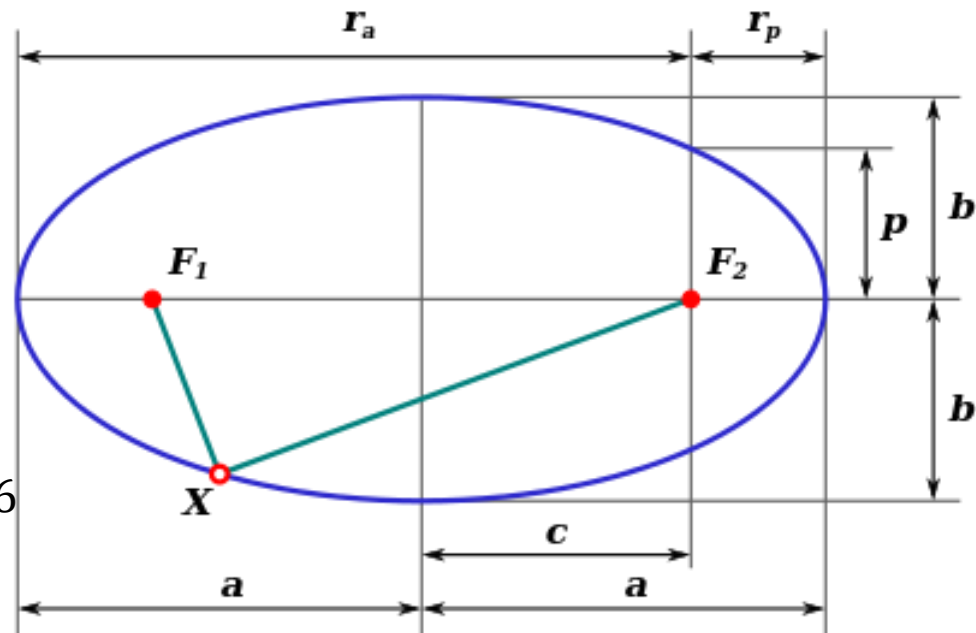
Перигелий (периастр)

$$q = a - c = a(1 - e)$$

Афелий (Апоастр)

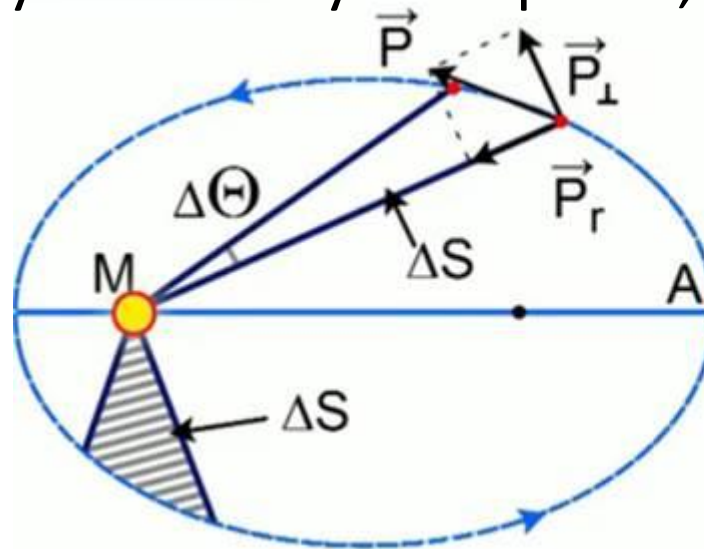
$$Q = a + c = a(1 + e)$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{a(1 + e)}{a(1 - e)} = \frac{1 + e}{1 - e} = \frac{1 + 0,967}{1 - 0,967} = 59,6$$



Второй закон Кеплера

- Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.
- перигелий — ближайшая к Солнцу точка орбиты, и афелий — наиболее удалённая точка орбиты. Таким образом, из второго закона Кеплера следует, что планета движется вокруг Солнца неравномерно, имея в перигелии большую линейную скорость, чем в афелии.



$$\sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r^2 \cdot \Delta \Theta}{2 \cdot \Delta t} = \frac{r^2 \cdot \omega}{2}$$

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega = P_{\perp} \cdot r$$

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

Скорости на эллипсе

- Направлена всегда по касательной

$$V = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{r} - 1} = V_{\text{cp}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{r} - 1}$$

- Скорость в периастре

$$V_q = V_{\text{cp}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{q} - 1} = V_{\text{cp}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{a(1-e)} - 1} = V_{\text{cp}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

- Скорость в апоастре

$$V_Q = V_{\text{cp}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{Q} - 1} = V_{\text{cp}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{a(1+e)} - 1} = V_{\text{cp}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Задача на скорости на эллипсе

- Чему равны и во сколько раз отличаются скорости движения кометы Галлея (1P) в перигелии и афелии орбиты? если эксцентриситет ее орбиты $e=0.967$, а период ее обращения 75.3 года



$$V_q = V_{cp} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$V_Q = V_{cp} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_q}{V_Q} &= \frac{V_{cp} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}{V_{cp} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{1+e}{1-e} \\ &= \frac{1.967}{0.033} \approx 59.6 \end{aligned}$$

$$\frac{V_a}{V_{\oplus}} = \frac{\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}}}{\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\oplus}}}} = \sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a}} \Rightarrow \left(\frac{T_{\oplus}}{T_a}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow V_a = \left(\frac{T_{\oplus}}{T_a}\right)^{\frac{1}{3}} V_{\oplus}$$

$$\frac{T_a^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a^3}{a_{\oplus}^3} \Rightarrow \frac{a_{\oplus}}{a} = \left(\frac{T_{\oplus}}{T_a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$V_a = V_{cp} = \left(\frac{T_{\oplus}}{T_a}\right)^{\frac{1}{3}} V_{\oplus}$$

$$= \left(\frac{1}{75.3}\right)^{\frac{1}{3}} 30 \approx 7.1 \text{ км/с}$$

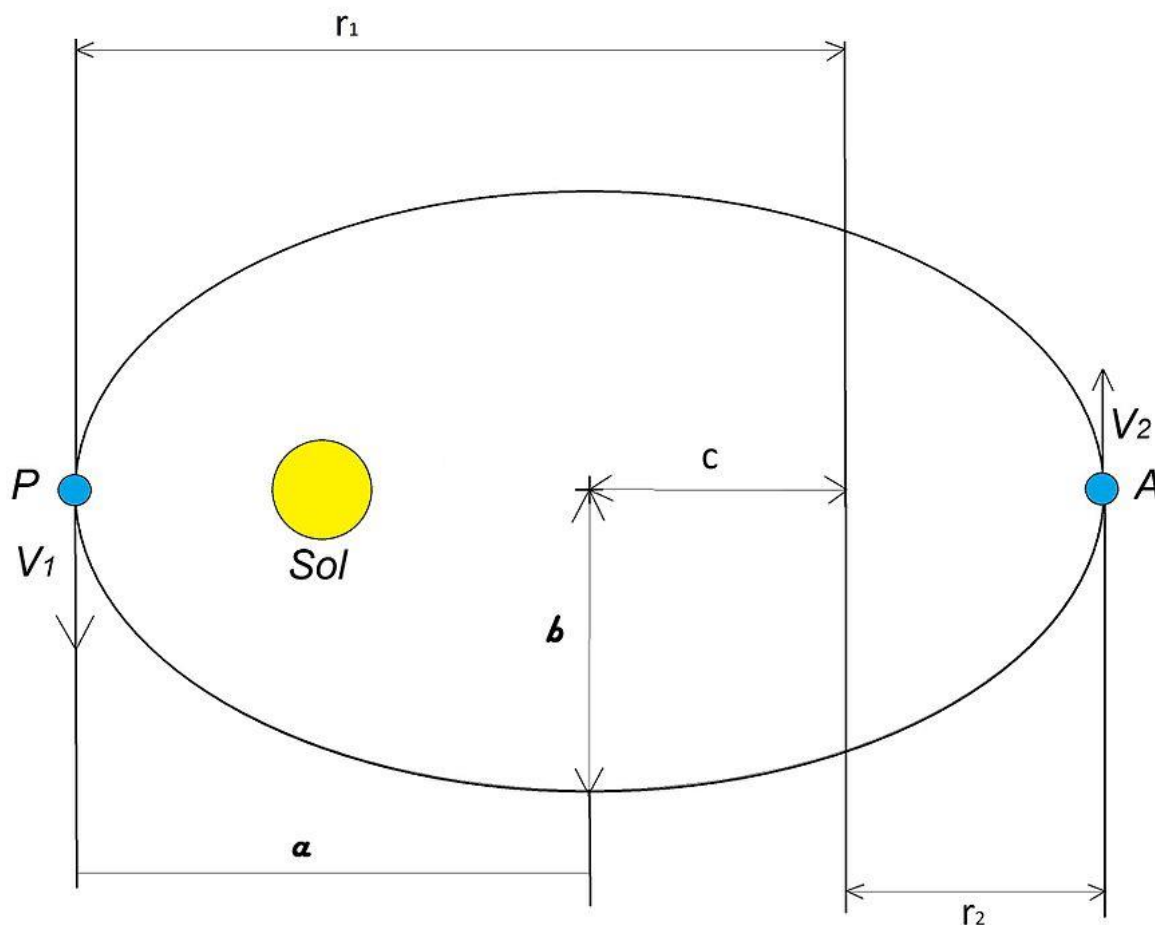
$$V_q = 7.1 \sqrt{59.6} = 54.8 \text{ км/с}$$

$$V_Q = 0.9 \text{ км/с}$$

Третий закон Кеплера

- Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

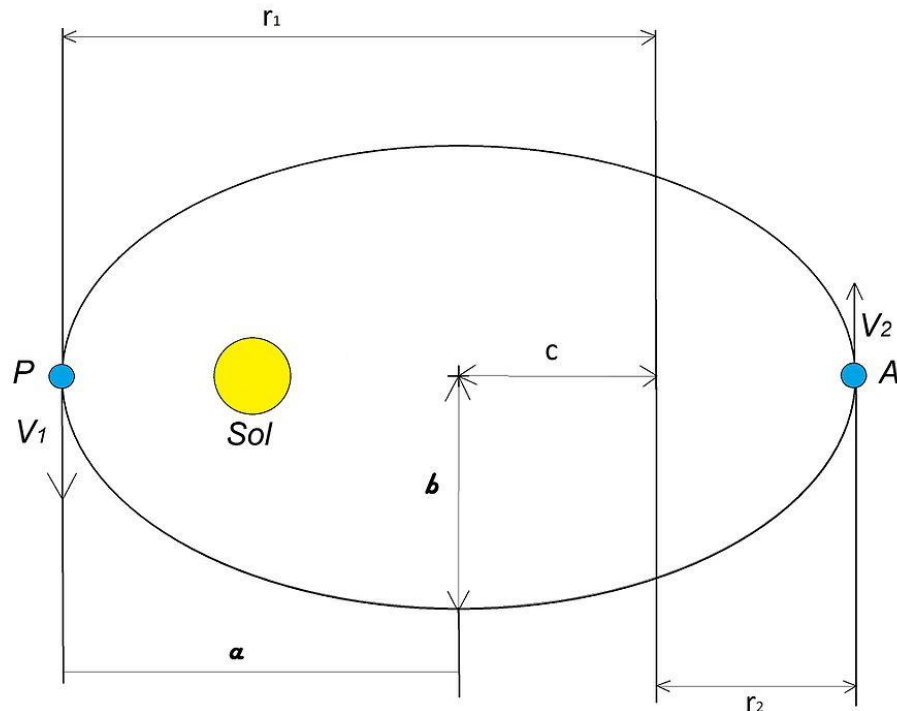


Уточненный третий закон Кеплера

- Произведение суммы масс систем и квадраты периодов обращений планет пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

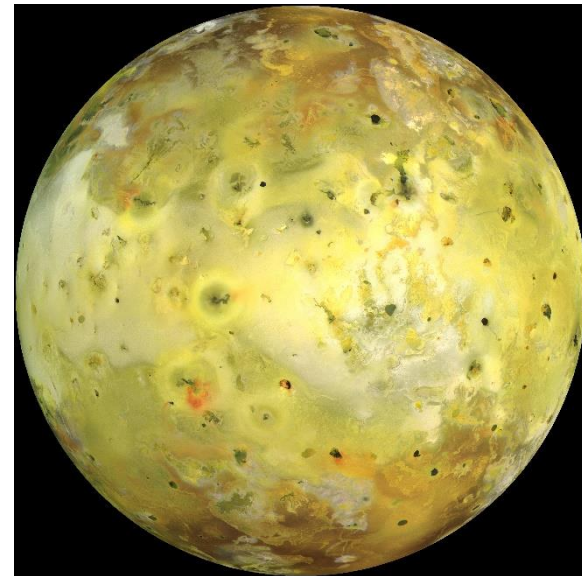
$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$



Задача на уточненный третий закон Кеплера

- Найдите массу планеты Юпитер в массах Земли, если спутник Юпитера Ио делает один оборот вокруг Юпитера 1,77 дня на расстоянии 422 тысячи км от Юпитера. Период обращения Луны вокруг Земли 27,3 дня, расстояние – 384 тысячи км. Считать орбиты Луны и Ио круговыми.



$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\frac{T_{\text{Ио}}^2(M_{\text{Ю}} + m_{\text{Ио}})}{T_{\text{Луны}}^2(M_{\text{З}} + m_{\text{Луны}})} = \frac{a_{\text{Ио}}^3}{a_{\text{Луны}}^3}$$

$$\frac{T_{\text{Ио}}^2}{T_{\text{Луны}}^2} = \frac{a_{\text{Ио}}^3(M_{\text{З}} + m_{\text{Луны}})}{a_{\text{Луны}}^3(M_{\text{Ю}} + m_{\text{Ио}})}$$

$$\frac{M_{\text{Ю}}}{M_{\text{З}}} = \frac{T_{\text{Луны}}^2 a_{\text{Ио}}^3}{T_{\text{Ио}}^2 a_{\text{Луны}}^3} = \frac{27,3^2 422000^2}{1,77^2 38400^2} \approx 330$$

Гомановский эллипс

- В первом приближении орбиты планет круговые

$$a_1 \quad a_2$$

- Скорости движения планет по орбитам

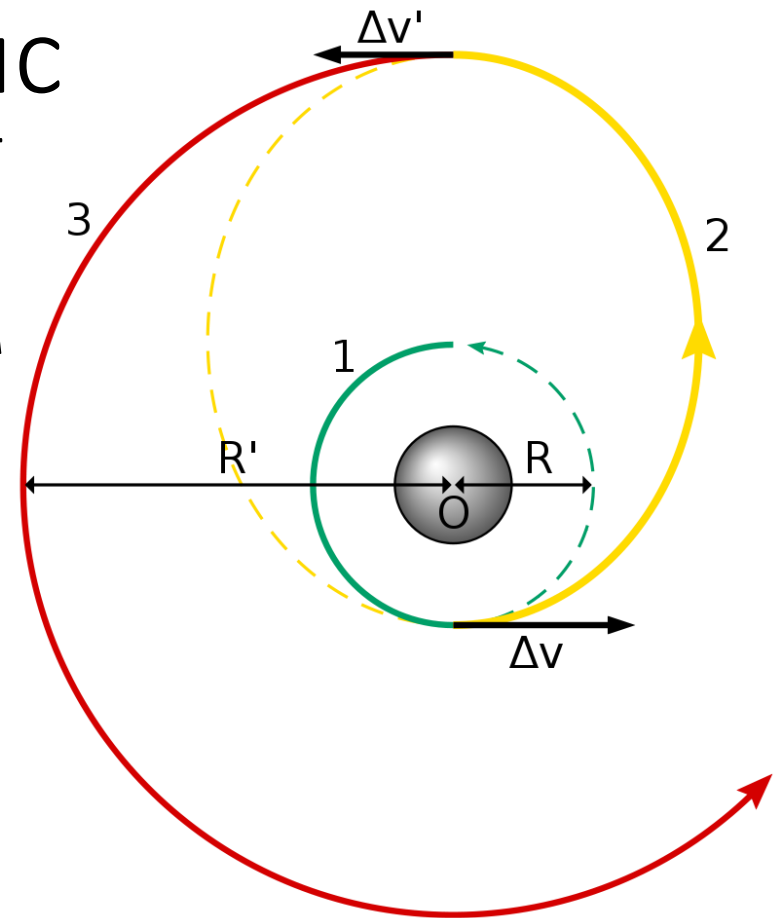
$$V_1 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a_1}} \quad V_2 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a_2}}$$

- Параметры гомановского эллипса

$$a_r = \frac{a_1 + a_2}{2} \Leftrightarrow \frac{T_r^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a_r^3}{a_{\oplus}^3}$$

- Эксцентриситет

$$e = \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}$$



Скорость в перигелии орбиты этого Эллипса

$$V_q = V_{cp} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{a_r}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

Скорость в афелии орбиты этого эллипса

$$V_Q = V_{cp} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{GM}{a_r}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Задача 1

- **Задача.** За какое время Земля упала бы на Солнце, если бы внезапно остановилась в своём орбитальном движении?
- **Ответ:** 65 дней.
Указание: при решении использовать 3-й закон Кеплера

- **Решение:**
- Поскольку остановка вращения вокруг Солнца является падением с очень большой высоты можно сказать, что оно проходит по очень вытянутому эллипсу, где изначальное положение месь афелий орбиты.
- $2a = q + Q \xrightarrow{e \rightarrow 1} Q \gg q \Rightarrow 2a \approx Q$
- Следовательно:
- $a \approx \frac{Q}{2} \approx \frac{a_{\oplus}}{2}$
- Для определения периода воспользуемся третьим законом Кеплера, можно в простом не обобщенном виде сравним Падающую Земли с вращающейся вокруг Солнца
- $\frac{T_H^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a^3}{a_{\oplus}^3} \rightarrow T_H = T_{\oplus} \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = 365.25 \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}$
- Далее: $t_{\pi} = \frac{T_H}{2} \approx 65$ суток

Задача 2

• Задача.

Сидерический период спутника Земли равен 2 часам. Какой процент площади поверхности планеты можно наблюдать с этого спутника одновременно?

• Ответ: 12.5 %

• Решение:

- Сидерический период спутника это период его обращения вокруг Земли, найдем большую полуось его орбиты через третий закон Кеплера и поскольку не сказано о эксцентриситете предположим, что орбита круговая:

$$\frac{T_{исз}^2}{T_L^2} = \frac{a_{исз}^3}{a_L^3} \rightarrow a_{исз} = a_L \left(\frac{T_{исз}}{T_L} \right)^{2/3} = 3.8 \cdot 10^5 \left(\frac{2}{24 \cdot 27.3} \right)^{2/3} \approx 8000 \text{ км}$$

- Горизонт с высоты спутника можно представить как башню с высотой равной высоте ИСЗ – 1600 км

- Следовательно:

$$l_\Gamma \approx \sqrt{2R_3 h} = \sqrt{2 \cdot 6400 \cdot 1600} \approx 4500 \text{ км}$$

- Найдем отношение площадей

$$\frac{S_{исз}}{S} = \frac{\pi l_\Gamma^2}{4\pi R_3^2} = \frac{1}{4} \frac{2R_3 h}{R_3^2} = \frac{a_{исз} - R_3}{2R_3} = \frac{a_{исз}}{2R} - \frac{1}{2} = \frac{8000}{2 \cdot 6400} - \frac{1}{2} \approx 12.5 \%$$

Задача 3

- **Задача.** Над какой стороной горизонта на Марсе восходит спутник Фобос, если радиус его орбиты равен 9380 км.
- **Ответ:** Над западной.

- **Решение:**

- Ключевым моментом является определение периода обращения спутника, если он окажется быстрее периода осевого вращения, то спутник будет восходить над западной частью горизонта, если медленнее, то над восточной.

- Воспользуемся уточненным третьим законом Кеплера:

$$\begin{aligned} \frac{T_{\phi}^2(M_M + m_{\phi})}{T_L^2(M_3 + m_L)} &= \frac{a_{\phi}^3}{a_L^3} \rightarrow T_{\phi} = \\ T_L \left(\frac{M_3}{M_M} \right)^{1/2} \left(\frac{a_{\phi}}{a_L} \right)^{3/2} &= \\ 27.3\sqrt{10} \left(\frac{9380}{384000} \right)^{3/2} &\approx 0.33 \text{ дня} \end{aligned}$$

- Это в три раза быстрее осевого вращения Марса следовательно над западной частью горизонта

Задача 4

- **Задача.**

Какой стала бы орбита Земли, если бы масса Солнца внезапно увеличилась в 2 раза?

- **Ответ:** $a = 2/3$ а.е., $e = 0.5$

- **Решение:**

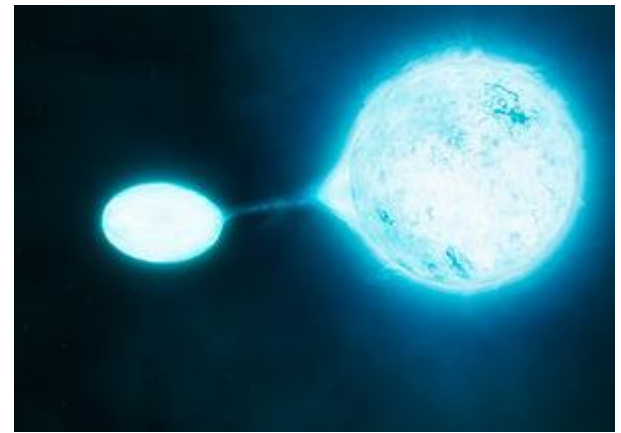
- Примем, что сейчас орбита Земли является круговой, как только масса Солнца вырастет Скорость движения Земли станет недостаточной для удержания на круговой орбите и она станет эллиптической и нынешняя скорость Земли станет афелийной скоростью на новой орбите:

- $$\sqrt{\frac{GM_c}{a_3}} = \sqrt{\frac{G2M_c}{a_H} \cdot \frac{1-e}{1+e}} \xrightarrow{a_3=Q=a_H(1+e)} \rightarrow$$
$$2(1-e) = 1 \Rightarrow e = 0.5$$

- $$a_3 = Q = a_H(1+e) \Rightarrow a_H = \frac{a_3}{(1+e)} = \frac{2}{3} a_3$$

Задача 5

- **Задача.** Две далёкие звезды обращаются вокруг общего центра масс с периодом 100 лет. Расстояние между звёздами не меняется со временем и равно 50 а.е. Определите суммарную массу этих звёзд в массах Солнца.
- **Ответ:** 12.5.



- **Решение:**
- Расстояние не меняется, значит они обращаются по круговой орбите вокруг общего центра масс и большая полуось орбиты вращения одной вокруг другой равна 50 а.е.
- Воспользуемся уточненным третьим законом Кеплера, сравнив пару звезд с системой Солнце-Земля:

$$\begin{aligned} \frac{T_{BS}^2 (M_1 + M_2)}{T_3^2 (M_c + m_3)} &= \frac{a_{BS}^3}{a_3^3} \rightarrow \frac{M_1 + M_2}{M_c} = \\ \left(\frac{T_{BS}}{T_c} \right)^2 \left(\frac{a_{BS}}{a_3} \right)^3 &= \left(\frac{1}{100} \right)^2 \left(\frac{50}{1} \right)^3 = \\ \left(\frac{1}{100} \right)^2 \left(\frac{100}{2} \right)^3 &= \frac{100}{8} = 12.5 \end{aligned}$$

Задача 6

- **Задача.** Какое минимальное время необходимо затратить на марсианскую экспедицию с возвращением обратно на Землю, если оба перелёта совершаются по гомановским траекториям? Орбиты Земли и Марса считать круговыми.
- **Ответ:** 2.5 года.

- **Решение:**
- Экспедиция состоит из трех этапов: перелет на Марс, ожидания благоприятного положения для возвращения и возвращения на Землю.
- Первый и третий участок пути это две половины Гомановского эллипса:
- $$a_{\Gamma} = \frac{a_3 + a_M}{2} \Leftrightarrow \frac{T_{\Gamma}^2}{T_3^2} = \frac{a_{\Gamma}^3}{a_3^3}$$
- $$T_{\Gamma} = T_3 \left(\frac{a_3 + a_M}{2a_3} \right)^{3/2} =$$
- $$= 1 \left(\frac{1+1.52}{2 \cdot 1} \right)^{3/2} = 1.41 \text{ года т.е.}$$

 время перелета в одну сторону составляет около 0.7 года. За это время Марс по орбите проходит 134° Земля проходит 252°
- Следовательно относительное движение составит 117°

Задача 6

- **Задача.** Какое минимальное время необходимо затратить на марсианскую экспедицию с возвращением обратно на Землю, если оба перелёта совершаются по гомановским траекториям? Орбиты Земли и Марса считать круговыми.
- **Ответ:** 2.5 года.

- **Решение:**
- Угол между направлением на Землю и на Марс относительно Солнца составит 46°
- Следовательно относительное движение составит 117° за время полета в одну сторону и Земля обгонит Марс. И будет опережать его по орбите на 63°
- Но чтобы мы могли запустить экспедицию обратно к Земле нужно чтобы она отставала на 117° .
- Значит относительно угловое расстояние должно измениться на $360^\circ - 62^\circ - 117^\circ = 181^\circ$
- Зная, что за время полета это расстояние меняется на 117° получим что это еще 1.54 времени перелета.
- Общее время получилось 2.5 года

Задача 7 А

- **Задача.**

Противостояние Юпитера произошло 1 января. Через какое время настанет благоприятный момент для запуска космического аппарата к Юпитеру по гомановской орбите? Радиус орбиты Юпитера 5.2 а.е.

- **Ответ:** 291 сут.

- **Решение:**

- Запуск по гомановской траектории должен происходить так чтобы в момент прилёта аппарата планета оказалась в точке афелия его орбиты

- Определим время перелета к Юпитеру по Гомановской траектории:

- $$a_{\Gamma} = \frac{a_3 + a_{\text{Ю}}}{2} \Leftrightarrow \frac{T_{\Gamma}^2}{T_3^2} = \frac{a_{\Gamma}^3}{a_3^3}$$

- $$T_{\Gamma} = T_3 \left(\frac{a_3 + a_{\text{Ю}}}{2a_3} \right)^{3/2} = 1 \left(\frac{1+5.2}{2 \cdot 1} \right)^{3/2} = 5.46 \text{ года} \rightarrow t_{\Pi} = \frac{T_{\Gamma}}{2} = 2.73 \text{ года}$$

- Синодический период Юпитера составляет 399 дней

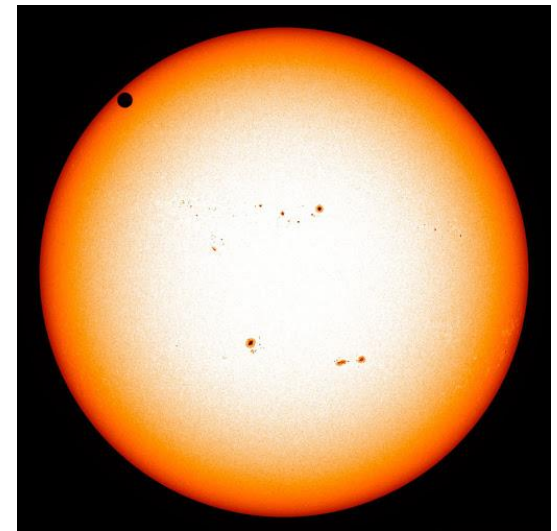
- За это время Юпитер по своей орбите пройдет: $\alpha = \frac{2.73}{11.86} \cdot 360^{\circ} \approx 83^{\circ}$

- Следовательно угол между Направлением От Солнца на Юпитер и Землю составит 97° в момент старта аппарата.

- Что соответствует доле синодического периода Юпитера в 108 суток. За это время Земля догонит Юпитер и наступит следующее противостояние. Значит от предыдущего прошло 291 день

Задача 8

- **Задача.** В какой-то момент времени земной наблюдатель заметил, что Венера в нижнем соединении пересекла диск Солнца по диаметру. Сколько времени длилось это прохождение? Все орбиты считать круговыми, радиус орбиты Венеры равен 0.72 а.е. Радиус Солнца 1.4 млн км.
- **Ответ:** Около 8 часов.



- **Решение:**
- В момент прохождения скорости движения направлены следующим образом:
- Скорость движения Венеры и Земли сонаправлены. Поэтому относительная скорость движения есть разница орбитальных скоростей:
- А угловая скорость движения есть эта относительная скорость движения, деленная на расстояние от Земли до Венеры
- $$t_{\Pi} = \frac{2R_c}{\omega_{\Delta}} = \frac{2R_c(a_3 - a_B)}{\sqrt{\frac{GM_c}{a_B}} - \sqrt{\frac{GM_c}{a_3}}} \approx 8 \text{ часам}$$

Задача 9

- **Задача.** Наблюдатель на спутнике Сатурна Энцелад определил, что угловой диаметр Сатурна равен 29° . Чему равен сидерический период обращения Энцелада, если масса Сатурна в 95 раз больше массы Земли, а радиус – 9.5 радиусов Земли?
- **Ответ:** 1.4 сут.

Решение:

- Поскольку угловой размер есть отношения поперечника к расстоянию до объекта в радианной мере угла.
- Воспользуемся уточненным третьим законом Кеплера, сравнив пару Сатурн-Энцеланд с системой Земля-Луна:

$$\frac{T_{\text{Э}}^2 (M_{\text{С}} + m_{\text{Э}})}{T_{\text{Л}}^2 (M_{\text{З}} + m_{\text{Л}})} = \frac{a_{\text{Э}}^3}{a_{\text{Л}}^3} \rightarrow$$

$$T_{\text{Э}} = T_{\text{Л}} \left(\frac{M_{\text{З}}}{M_{\text{С}}} \right)^{1/2} \left(\frac{a_{\text{Э}}}{a_{\text{Л}}} \right)^{3/2} \xrightarrow{a_{\text{Э}} = \frac{2R_{\text{С}}}{\alpha}}$$

$$T_{\text{Э}} = T_{\text{Л}} \left(\frac{M_{\text{З}}}{M_{\text{С}}} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha_{\text{З}} R_{\text{С}}}{\alpha_{\text{С}} R_{\text{З}}} \right)^{3/2} =$$

$$27.3 \left(\frac{1}{95} \right)^{1/2} \left(\frac{2 \cdot 9.5}{29} \right)^{3/2} = 1.4$$

Задача 10

- **Задача.** Космический аппарат вышел на орбиту вокруг далёкой планеты с периодом 5 часов. Диск планеты виден космонавтам под углом 60° . Определите плотность этой планеты.
- **Ответ:** примерно 3500 кг/м^3 .

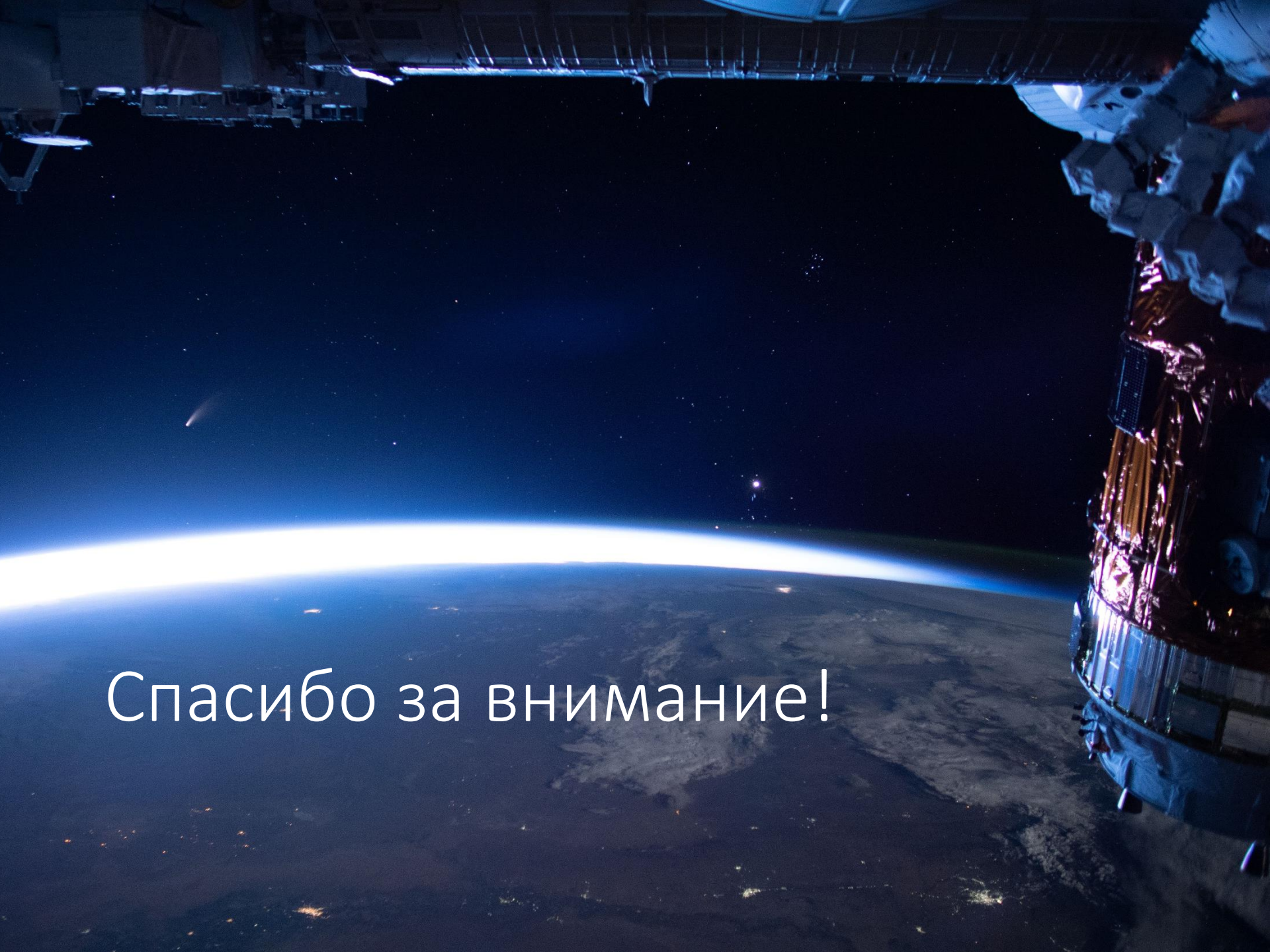
- **Решение:**

- Поскольку угловой размер есть отношения поперечника к расстоянию до объекта в радианной мере угла.
- Воспользуемся уточненным третьим законом Кеплера:

- $$\frac{T^2(M+m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \rightarrow$$

- $$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} = \frac{4\pi^2 a^3}{G\rho \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\pi}{G\rho} \left(\frac{a}{R}\right)^3$$

- $$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \left(\frac{2a}{2R}\right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2 \alpha_{\Pi}^3} = 3500 \text{ кг/м}^3$$

A photograph taken from the International Space Station (ISS) showing the Earth's horizon. The station's complex structure, including solar panel arrays and various modules, is visible in the upper and right portions of the frame. The Earth's surface below is covered in clouds, and the thin blue atmosphere is clearly visible along the horizon. The text "Спасибо за внимание!" is overlaid in the lower-left area.

Спасибо за внимание!

Ссылки

- Группа задач Астрономических олимпиад в контакте в документах есть задачи олимпиад разных уровней с решениями в разделе Ресурсы - <https://vk.com/astroolympiads>
- Сайт ВсОШ по Астрономии с архивами задач и результатами – <http://www.astroolymp.ru/>
- Сайт Московской Астрономической олимпиады <http://mosastro.olimpiada.ru>
- Сайт Санкт-Петербургской астрономической олимпиады <http://school.astro.spbu.ru/?q=olymp>
- Фотоальбом НАСА - <https://photojournal.jpl.nasa.gov/>
- Проект карта Вселенной на разных масштабах - <http://www.atlasoftheuniverse.com/>
- Виртуальный планетарий- <https://celestiaproject.net/ru/>
- Виртуальный планетарий - <http://www.stellarium.org/>
- Задачи и Упражнения по Общей Астрономии - <http://www.astronet.ru/db/msg/1175352/node1.html>