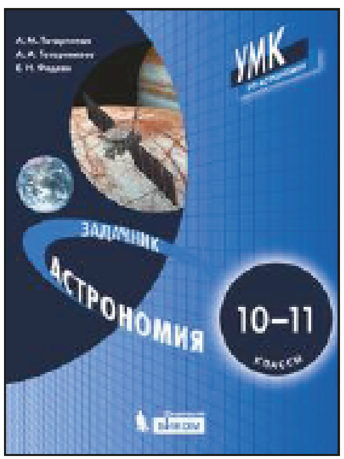
Решение разноуровневых задач на тему «Небесная механика»

Ведущий программист ГАИШ МГУ,
Учитель астрономии МОУ Гимназии №1 и МОУ Лицея №14,
Руководитель астрономического кружка им Е.П. Левитана г. Жуковского,
ЦПМК ВсОШ по Астрономии

ЗАДАЧНИК
(ГОТОВИТСЯ К ВЫПУСКУ)

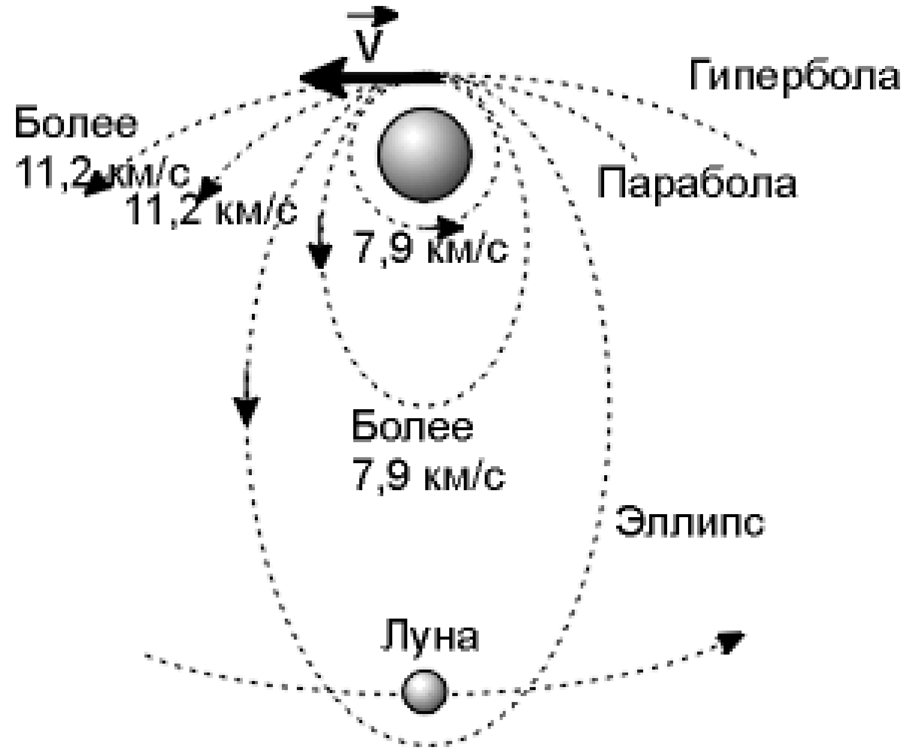
Авторы:
ТАТАРНИКОВ Андрей Михайлович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга МГУ им. М. В. Ломоносова, автор более 60 научных статей. Педагог дополнительного образования в Астрономической школе «Вега» г. Железнодорожного. Член ЦПМК Всероссийской олимпиады школьников по астрономии и ПМК Москвы и Московской области.
ТАТАРНИКОВА Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга МГУ им. М. В. Ломоносова, автор более 40 научных статей. Руководитель кружка «Олимпиадная астрономия» в Москве.
ФАДЕЕВ Евгений Николаевич, младший научный сотрудник Астрокосмического центра Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, 9 научных статей. В 2017—2019 гг. — главный тренер команды Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников. Член ЦПМК Всероссийской олимпиады школьников по астрономии и ПМК Москвы.



А. М. Татарников,
А. А. Татарникова,
Е. Н. Фадеев
Астрономия. 10—11 кл.
Задачник
(под ред. А. В. Засова,
В. Г. Сурдина)
Формат 70×90 1/16.
Обложка

В издании представлено более 500 задач по курсу астрономии для 10—11 классов, для большей части которых даны ответы. Задачник по содержанию и структуре соответствует учебнику А. В. Засова, В. Г. Сурдина «Астрономия. 10—11 классы». Каждая глава задачника состоит из небольшого теоретического введения, нескольких задач с подробным решением и ответом и задач для самостоятельного решения, которые представлены на трёх уровнях сложности. Задачник можно использовать как для текущей работы на уроке астрономии, так и для подготовки к решению задачи 24 ЕГЭ по физике.

Первая космическая скорость



- Центростремительное ускорение

$$a_ц = \frac{V^2}{R_\oplus + h}$$

- Ускорение свободного падения

$$g_\oplus = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}$$

- Равенство

$$a_ц = g_\oplus \Longrightarrow \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} = \frac{V^2}{R_\oplus + h} \Longrightarrow V_I = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}}$$

- Частный случай - $R_\oplus \gg h$

$$V_I = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{G\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3 \rho_\oplus}{R_\oplus + h}} \Longrightarrow T = \sqrt{\frac{3\pi R_\oplus^3 \left(1 + \frac{h}{R_\oplus}\right)^3}{G\rho_\oplus R_\oplus^3}} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_\oplus}}$$

Задача на первую космическую скорость

- На какой высоте от Земли первая космическая скорость в двое меньше чем вблизи поверхности Земли? Как изменится период обращения спутника?

- Решение

$$V_I = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}}$$

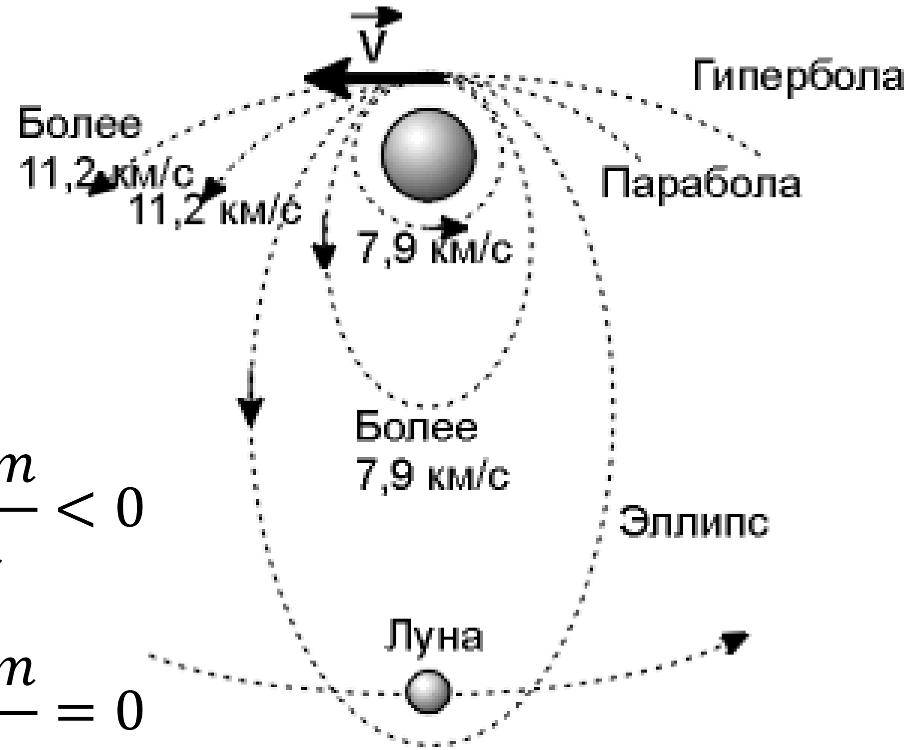
Значит отношение скоростей будет равно

$$\frac{V_{I,0}}{V_{I,1}} = \sqrt{\frac{R_\oplus + h}{R_\oplus}} = 2 \implies h = 3R_\oplus = 3 \cdot 6400 = 19200 \text{ км}$$

Значит отношение периодов обращения будет равно

$$\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_1} = \frac{\frac{2\pi R_\oplus}{V_{I,0}}}{\frac{2\pi(R_\oplus + h)}{V_{I,1}}} = \frac{V_{I,1}}{V_{I,0}} \cdot \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{1}{8}$$

Вторая космическая скорость



- Типы орбит – Эллипс

$$\frac{mV^2}{2} - G\frac{Mm}{a} < 0$$

- Типы орбит – Парабола

$$\frac{mV^2}{2} - G\frac{Mm}{a} = 0$$

- Типы орбит – Гипербола

$$\frac{mV^2}{2} - G\frac{Mm}{a} > 0$$

- Кинетическая и потенциальная энергии

$$\frac{mV^2}{2} - G\frac{Mm}{a} = 0 \Longrightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{a}} \Longrightarrow \frac{V_{II}}{V_I} = \sqrt{2}$$

- Вывод второй космической скорости

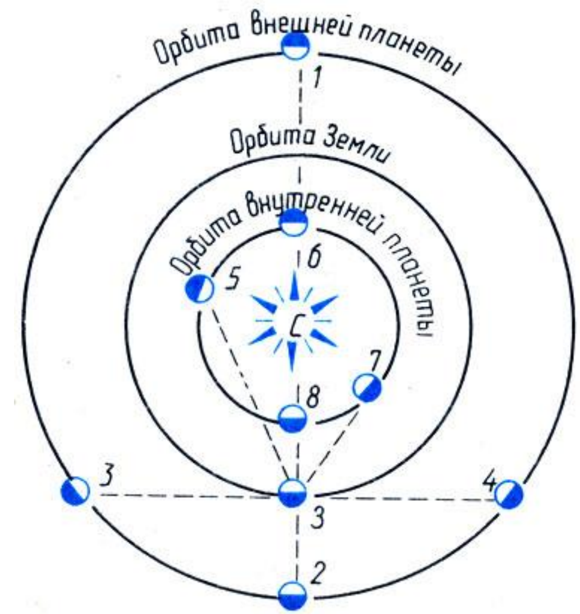
Задача на вторую космическую скорость

- С какой максимальной скоростью метеорные тела могут попадать в атмосферу Земли?

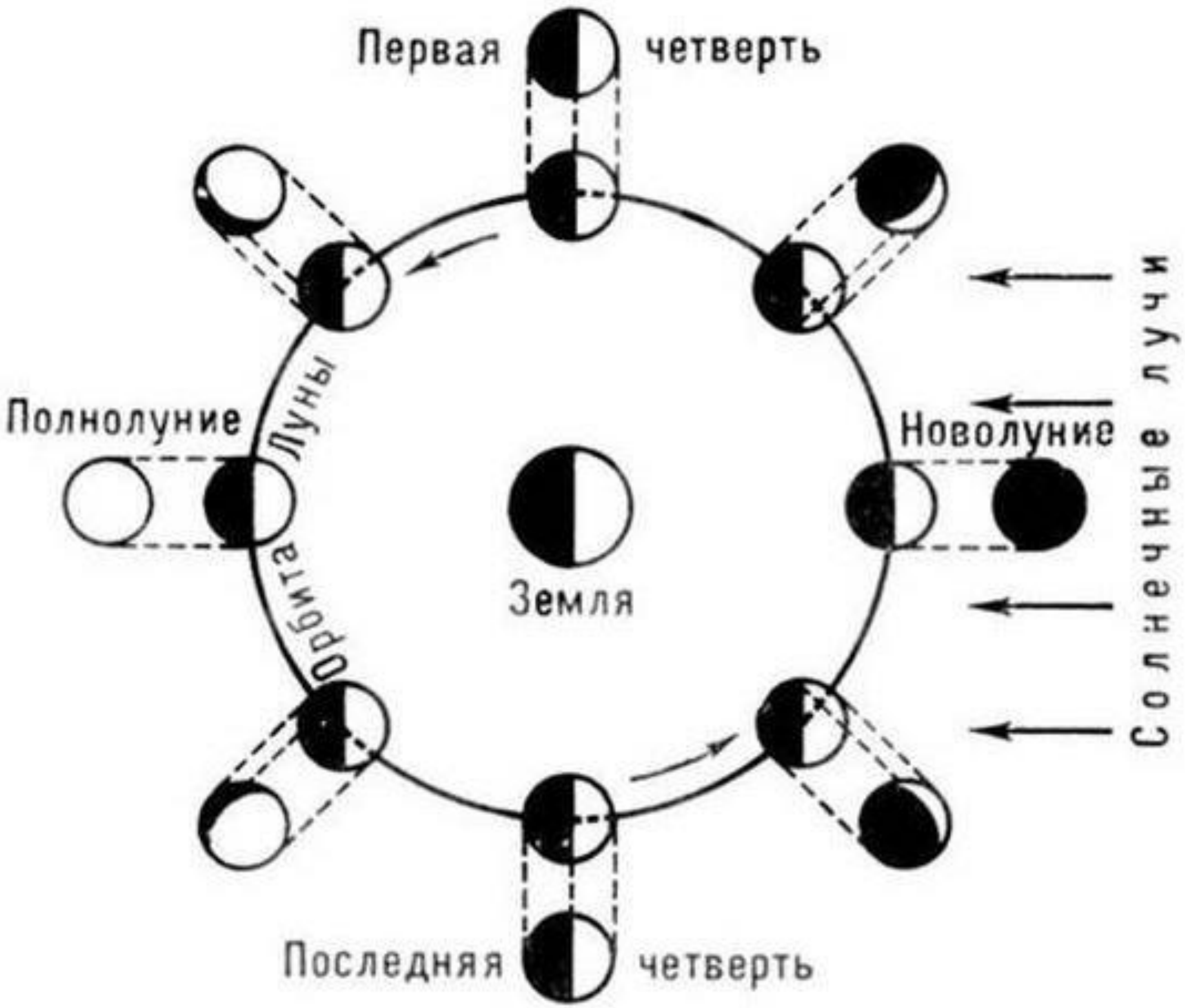
- Решение

$$\Delta V = V_I + V_{II} = V_I\left(\sqrt{2}+1\right) = V_I = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\oplus}}}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1{,}5 \cdot 10^{11}}}\left(\sqrt{2}+1\right) \approx 73 \text{ км/сек}$$

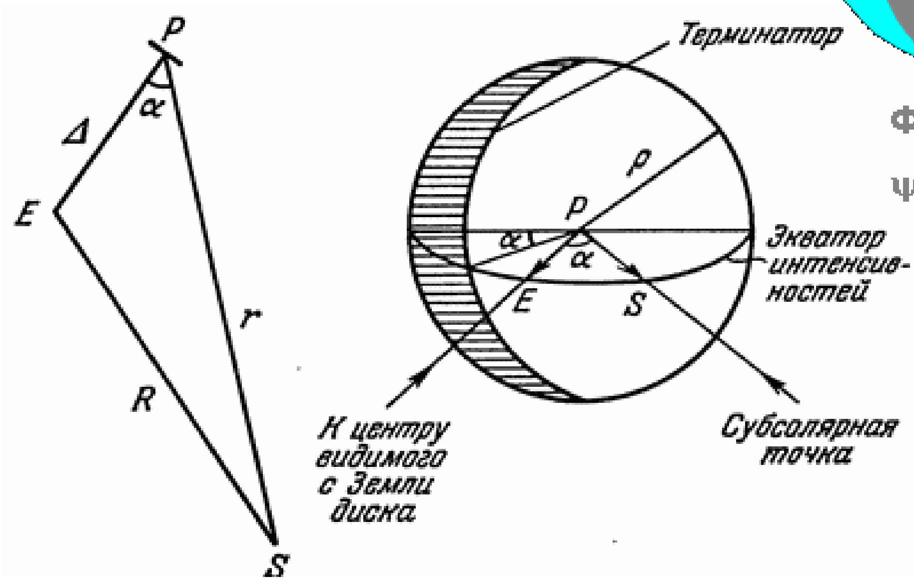


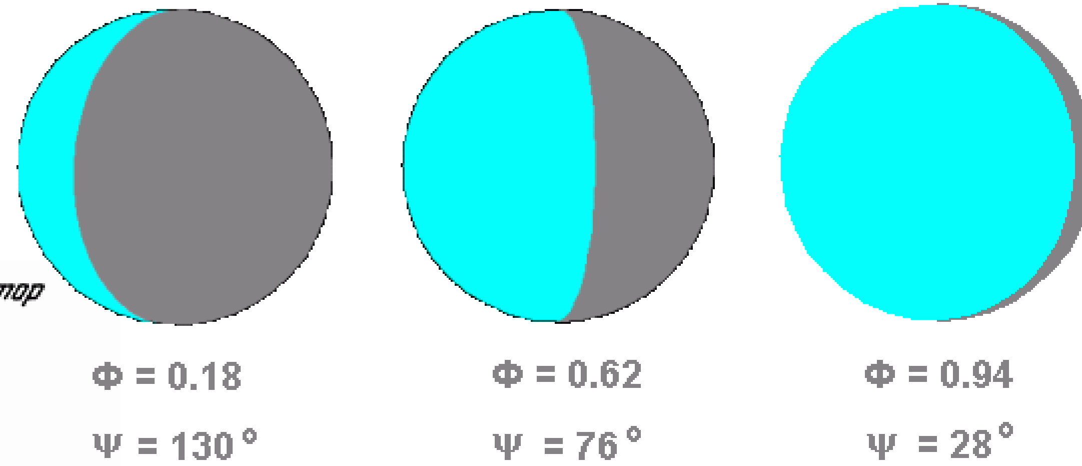
Фазы Луны



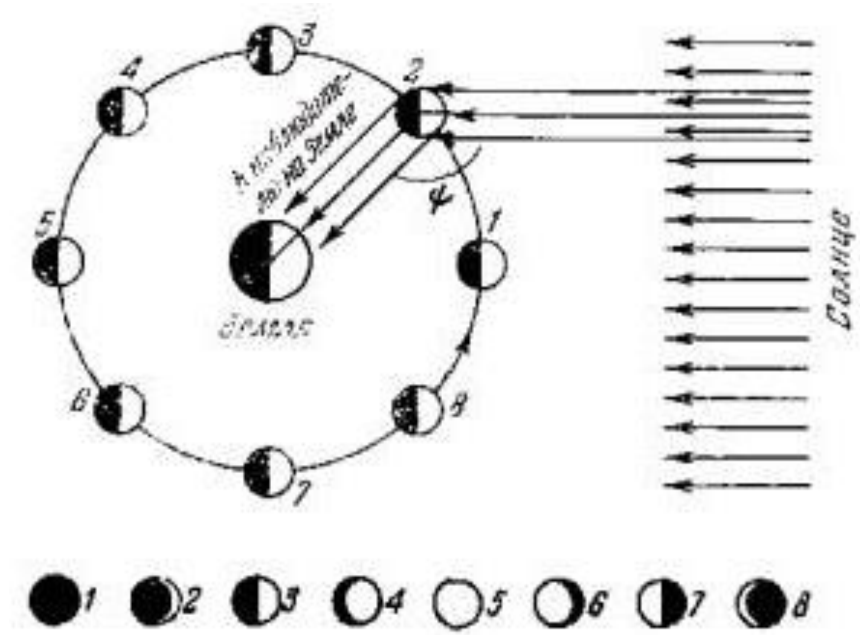
Первая
четверть
Полнолуние
Орбита Луны
Земля
Новолуние
Солнечные лучи
Последняя
четверть

Фаза





$$\Phi = \frac{d}{D} = \frac{S_{\text{освещенное}}}{S_{\text{всего диска}}} = \frac{\mathrm{R} + \mathrm{R} \cdot \cos\alpha}{2\mathrm{R}} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$



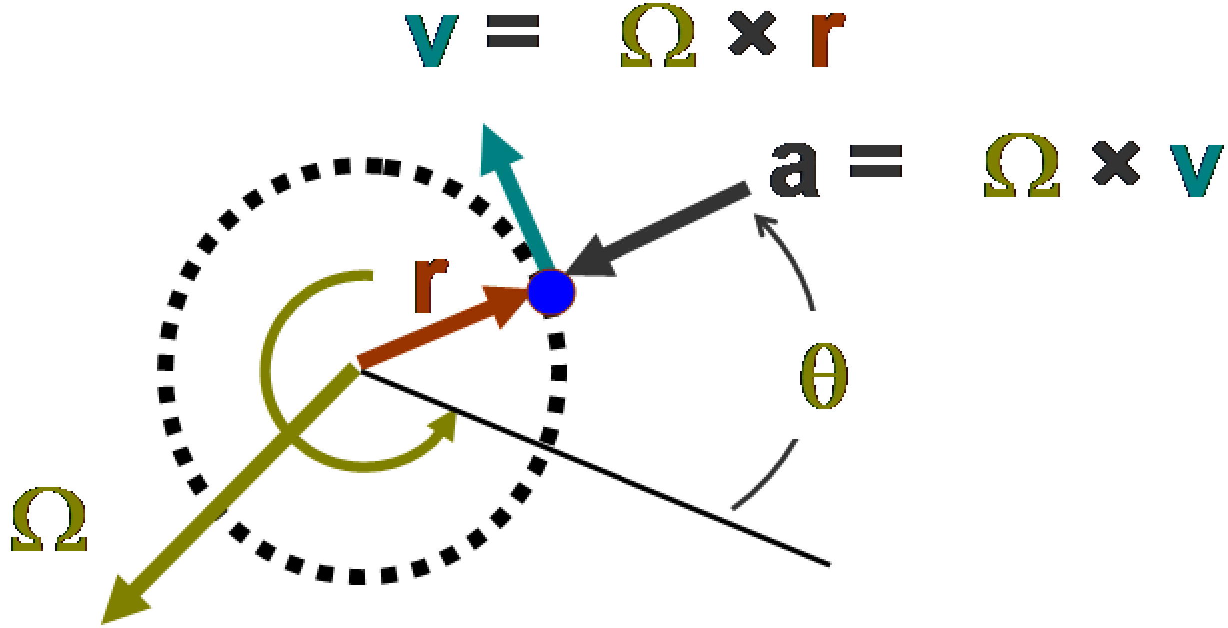
Задача на фазу планет

- Какова фаза Марса в моменты положения планеты в 90° от Солнца на эклиптике? Орбиты Земли и Марса считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

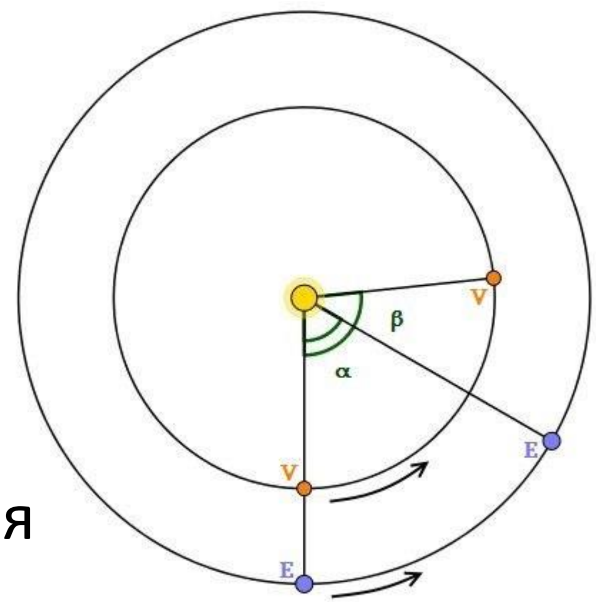
$$\Phi = \frac{d}{D} = \frac{S_{\text{освещенное}}}{S_{\text{всего диска}}} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

- $\sin \alpha = \frac{a_{\text{Земли}}}{a_{\text{Марса}}} = \frac{1}{1,5} \Longrightarrow$
- $\alpha \approx 42°$
- Значит Ф=0,87

Круговое движение



- Угловая скорость
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{V}{R}$
- Связь линейной и угловой скорости
- $V = \omega \cdot R$
- Случай сонаправленного движения
- $\omega_\Sigma = \omega_1 - \omega_2$
- Случай разнонаправленного движения
- $\omega_\Sigma = \omega_1 + \omega_2$



Синодический и сидерический периоды

- **Сидерический период** обращения – период обращения планеты относительно направления на далекие звезды
- **Синодический период обращения** – период обращения относительно направления планета наблюдения – Солнце или период повторения относительного положения трех тел Солнца, планеты с которой мы наблюдаем и наблюдаемой планеты
- Случай внутренней планеты

$$\omega_{\text{синодического периода}} = \omega_{\text{планеты}} - \omega_{\oplus}$$

$$\frac{2\pi}{\mathrm{T}_{\text{синодического периода}}} = \frac{2\pi}{T_{\text{планеты}}} - \frac{2\pi}{T_{\oplus}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{п}}} - \frac{1}{T_{\oplus}} \Longrightarrow \mathrm{T}_{\text{синодического периода}} = \frac{T_{\oplus} \cdot T_{\text{планеты}}}{T_{\oplus} - T_{\text{планеты}}}$$

- Случай внешней планеты

$$\omega_{\text{синодического периода}} = \omega_{\oplus} - \omega_{\text{планеты}}$$

$$\frac{2\pi}{\mathrm{T}_{\text{синодического периода}}} = \frac{2\pi}{T_{\oplus}} - \frac{2\pi}{T_{\text{планеты}}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{п}}} \Longrightarrow \mathrm{T}_{\text{синодического периода}} = \frac{T_{\oplus} \cdot T_{\text{планеты}}}{T_{\text{планеты}} - T_{\oplus}}$$

Задачи на синодический период

- Найдите синодический период планеты Марс?
  - Решение

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_п}$$

Период Марса из справочных данных – 1,88 года

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_п} \Rightarrow \mathrm{T}_{\text{Марса}} = \frac{T_\oplus \cdot T_{\text{Марса}}}{T_{\text{Марса}} - T_\oplus} = \frac{1 \cdot 1{,}88}{1{,}88 - 1} \approx 2{,}14 \text{ года}$$

Конфигурации планет

- Внутренние планеты
  - 8 - Нижнее соединение

$l = 0^\circ\ \Phi = 0$

  - Западная элонгация

$l = \alpha_{\text{макс}}\ \Phi = 0{,}5$

  - 6 - Верхнее соединение

$l = 0^\circ\ \Phi = 1$

  - Восточная элонгация

$l = \alpha_{\text{макс}}\ \Phi = 0{,}5$

- Внешние планеты
  - 1 - Соединение

$l = 0^\circ\ \Phi = 1$

  - 4 - Восточная квадратура

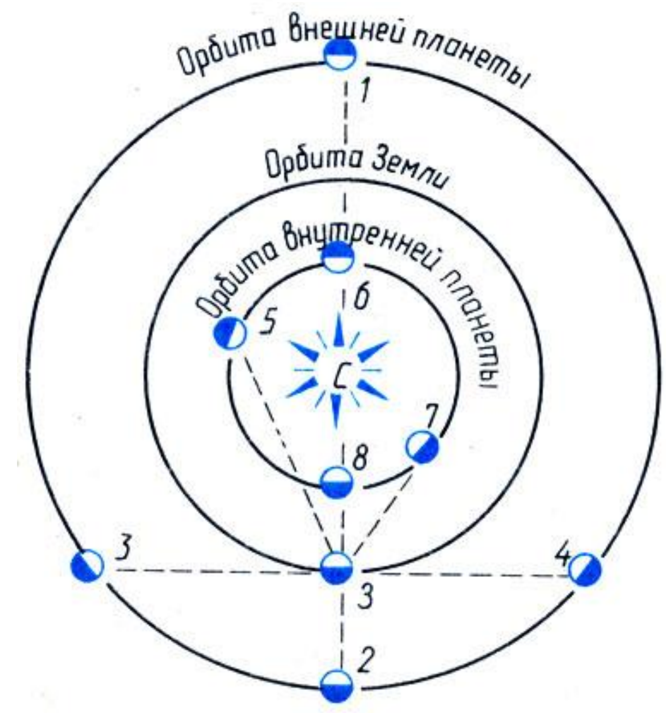
$l = 90^\circ\ \Phi = \Phi_{\text{минимальная}}$

  - 2 - Противостояние

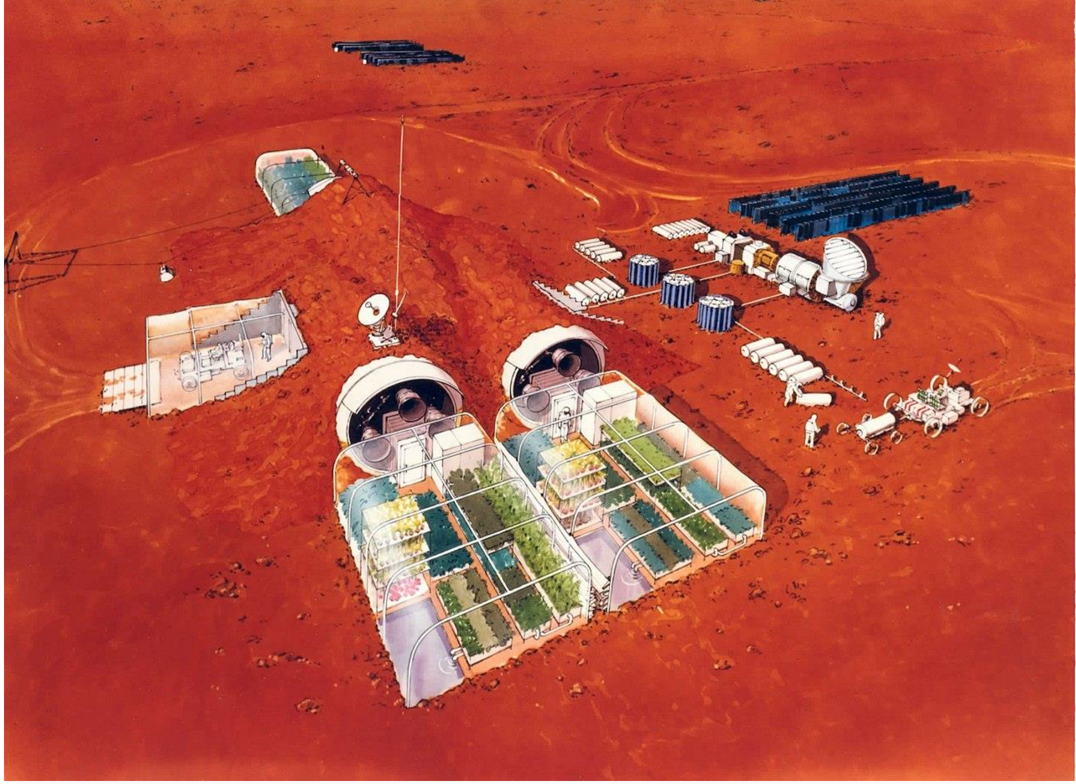
$l = 180^\circ\ \Phi = 1$

  - 3 - Восточная квадратура

$l = 90^\circ\ \Phi = \Phi_{\text{минимальная}}$



- На какой максимальный угол по эклиптике отходят планеты Венера и Земля от Солнца на небе от Марса? Орбиты всех планет считать круговыми.

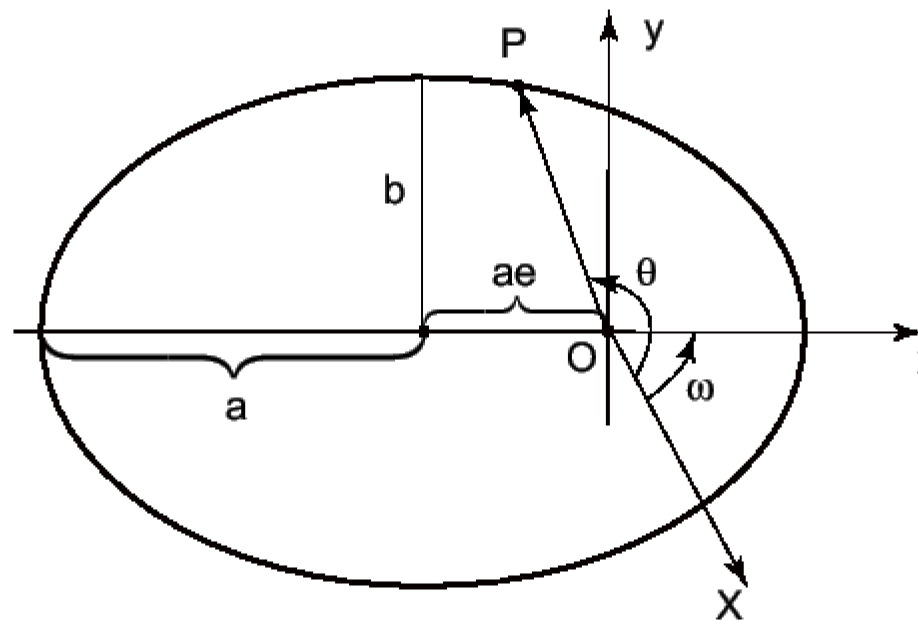


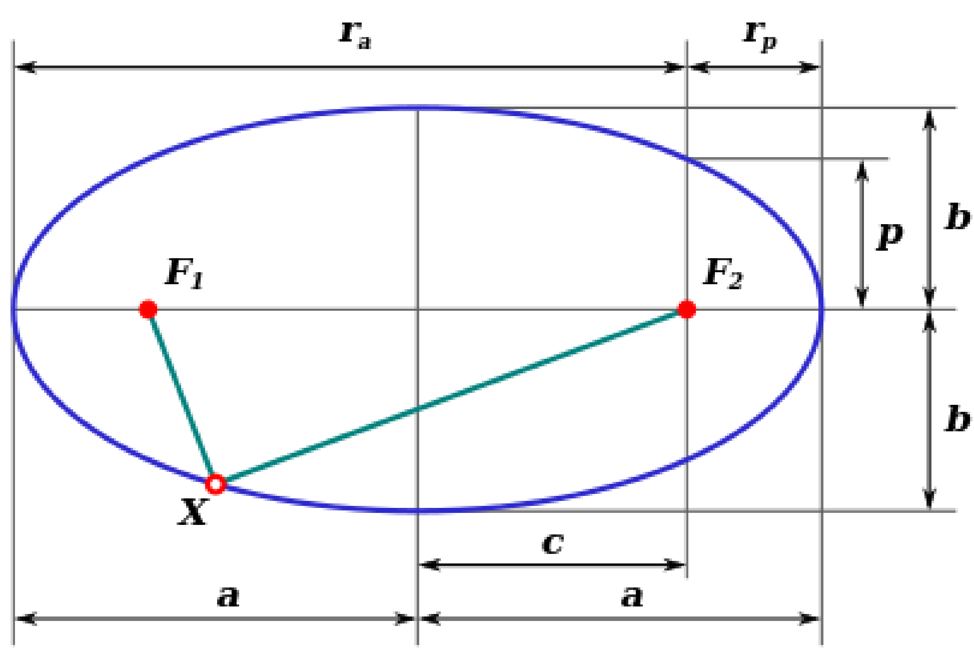
Задача на конфигурации планет

- Решение
- $\sin\alpha = \frac{a_{\text{Земли}}}{a_{\text{Марса}}} = \frac{1}{1{,}5} \Longrightarrow \alpha \approx 42°$
- $\sin\alpha = \frac{a_{\text{Венеры}}}{a_{\text{Марса}}} = \frac{0{,}7}{1{,}5} \Longrightarrow \alpha \approx 28°$

Эллипс

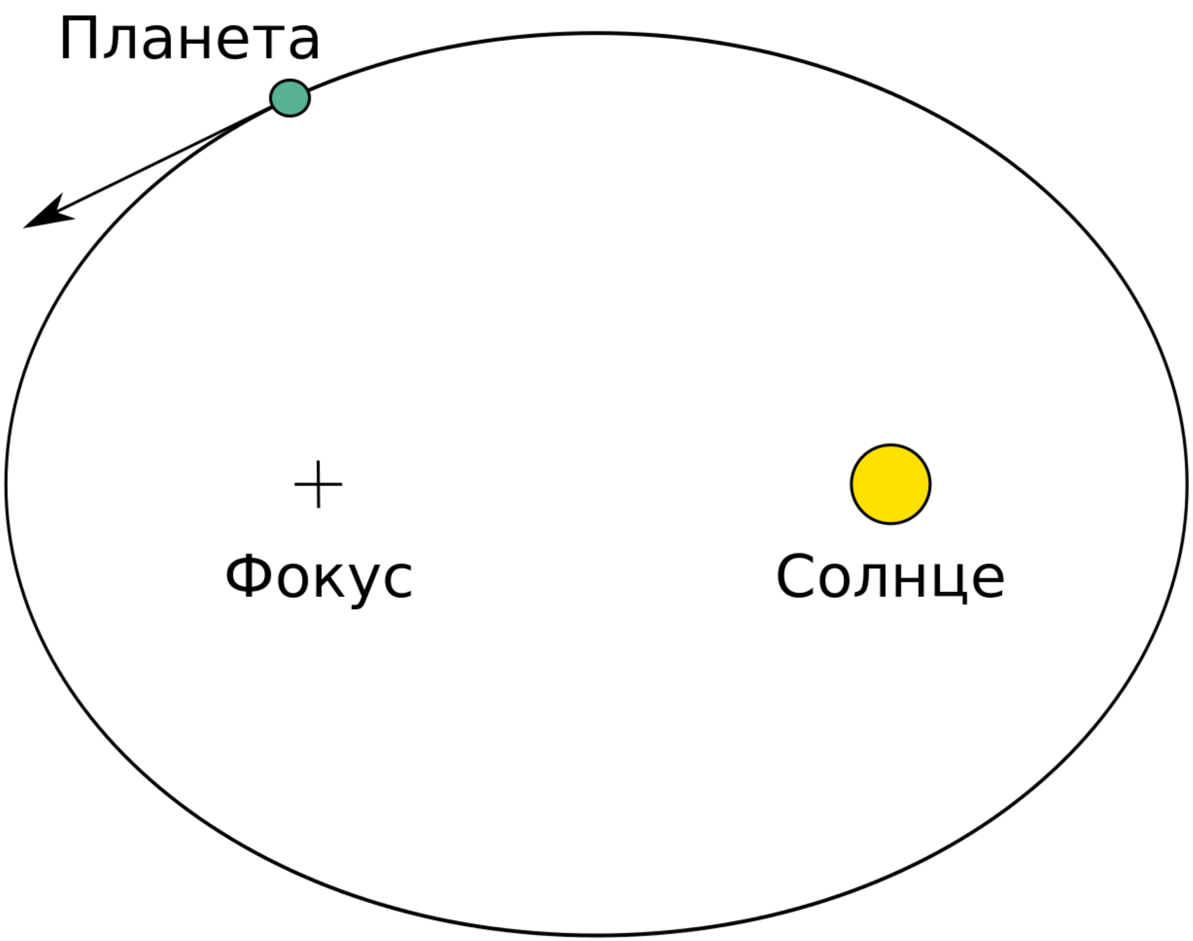
- Свойства эллипса
$$F_1X + F_2X = 2a \qquad S = \pi ab$$
- Фокальное расстояние
$$c = ea$$
- Большая полуось
$$a = \frac{Q+q}{2}$$
- Малая полуось
$$b = a\sqrt{1-e^2}$$
- Эксцентриситет
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{Q-q}{Q+q}$$
- Фокальный параметр
$$p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2)$$
- Перигей (периастр)
$$q = a - c = a(1-e)$$
- Апогей (Апоастр)
$$Q = a + c = a(1+e)$$



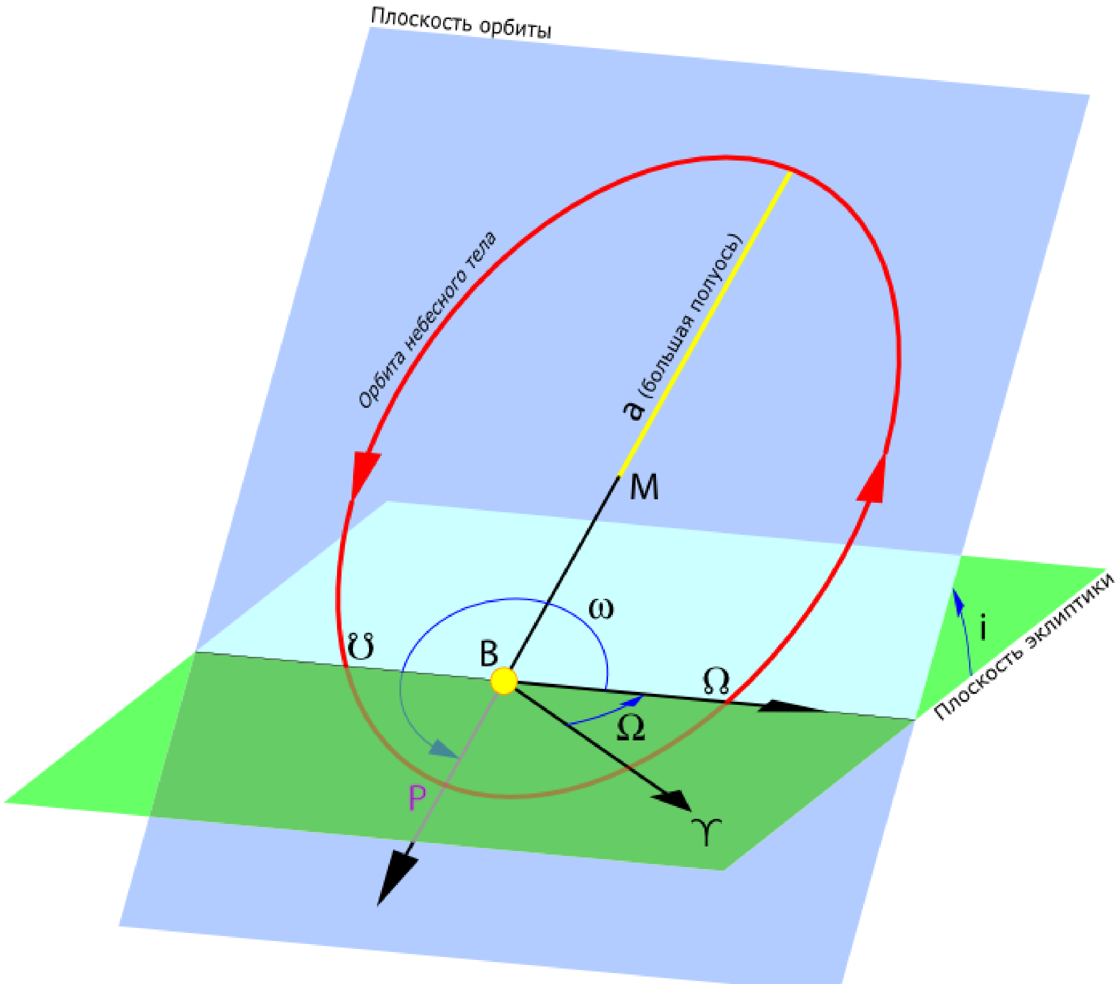


Первый закон Кеплера

- Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.



Орбита и ее элементы



- Большая полуось – a в [а.е.]
- Эксцентриситет – e от [0,1)
- Наклонение орбиты – i в [°]
- Долгота восходящего узла – Ω в [°]
- Аргумент перицентра – ω в [°]
- Период – T в [годы, дни]

Задачи на первый закон Кеплера

- Во сколько раз меняется расстояние от Солнца до кометы Галлея (1P), если эксцентриситет ее орбиты e=0,967?

Решение:

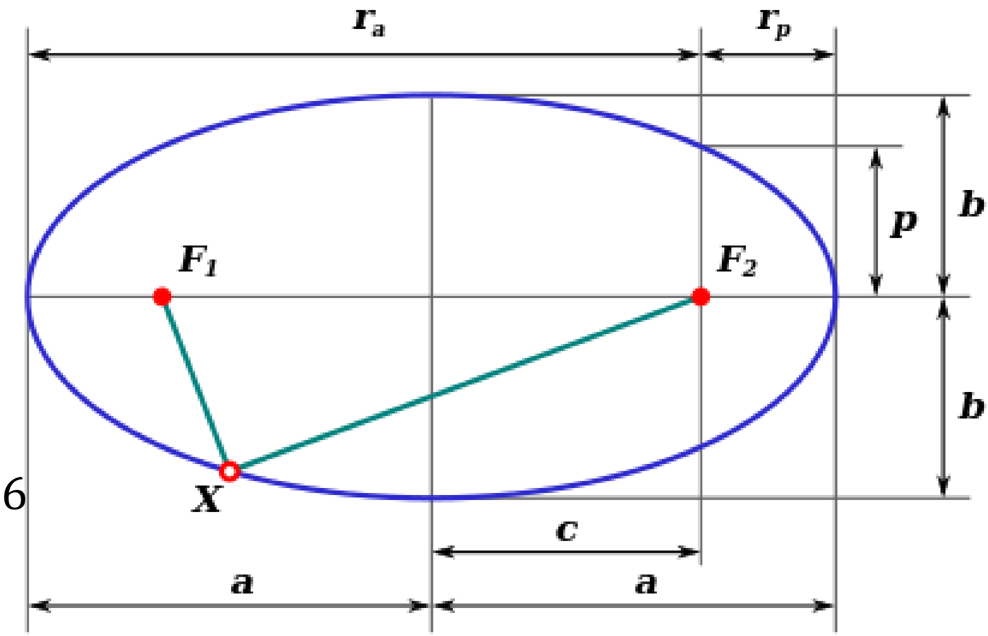
Перигелий (периастр)

$$q = a - c = a(1 - e)$$

Афелий (Апоастр)

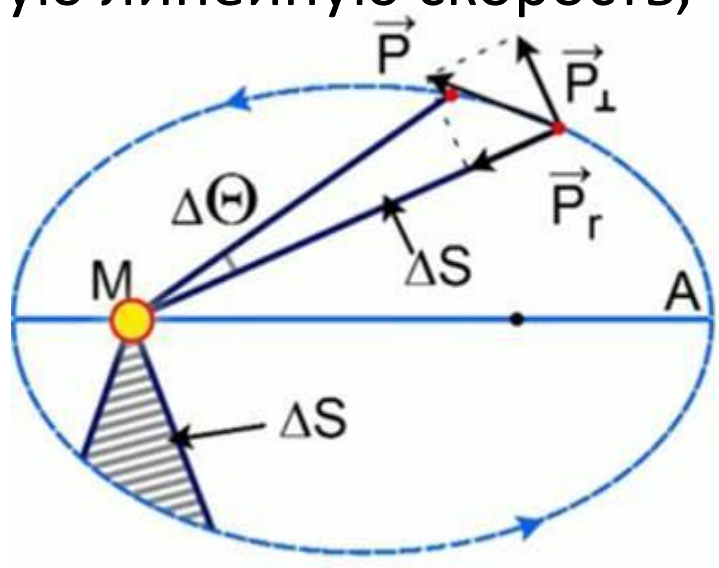
$$Q = a + c = a(1 + e)$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{1+e}{1-e} = \frac{1+0{,}967}{1-0{,}967} = 59{,}6$$



Второй закон Кеплера

- Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.
- перигелий — ближайшая к Солнцу точка орбиты, и афелий — наиболее удалённая точка орбиты. Таким образом, из второго закона Кеплера следует, что планета движется вокруг Солнца неравномерно, имея в перигелии большую линейную скорость, чем в афелии.



$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r^2 \cdot \Delta\Theta}{2 \cdot \Delta t} = \frac{r^2 \cdot \omega}{2}$$

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega = P_\perp \cdot r$$

$$r_p \cdot \upsilon_p = r_a \cdot \upsilon_a$$

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T}$$

Скорости на эллипсе

- Направлена всегда по касательной

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{r} - 1} = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{r} - 1}$$

- Скорость в периастре

$$V_q = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{q} - 1} = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{a(1-e)} - 1} = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

- Скорость в апоастре

$$V_Q = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{Q} - 1} = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{a(1+e)} - 1} = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Задача на скорости на эллипсе

- Чему равны и во сколько раз отличаются скорости движения кометы Галлея (1P) в перигелии и афелии орбиты? если эксцентриситет ее орбиты e=0.967, а период ее обращения 75.3 года

$$V_q = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$V_Q = V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$\frac{V_q}{V_Q} = \frac{V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}{V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{1+e}{1-e}$$

$$= \frac{1.967}{0.033} \approx 59.6$$

$$\frac{T_a^2}{T_\oplus^2} = \frac{a^3}{a_\oplus^3} \Longrightarrow \frac{a_\oplus}{a} = \left(\frac{T_\oplus}{T_a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$V_a = V_{\text{ср}} = \left(\frac{T_\oplus}{T_a}\right)^{\frac{1}{3}} V_\oplus$$

$$\frac{V_a}{V_\oplus} = \frac{\sqrt{\frac{GM_\odot}{a}}}{\sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}}} = \sqrt{\frac{a_\oplus}{a}} \Longrightarrow \left(\frac{T_\oplus}{T_a}\right)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow V_a = \left(\frac{T_\oplus}{T_a}\right)^{\frac{1}{3}} V_\oplus$$

$$= \left(\frac{1}{75.3}\right)^{\frac{1}{3}} 30 \approx 7.1 \text{ км/с}$$

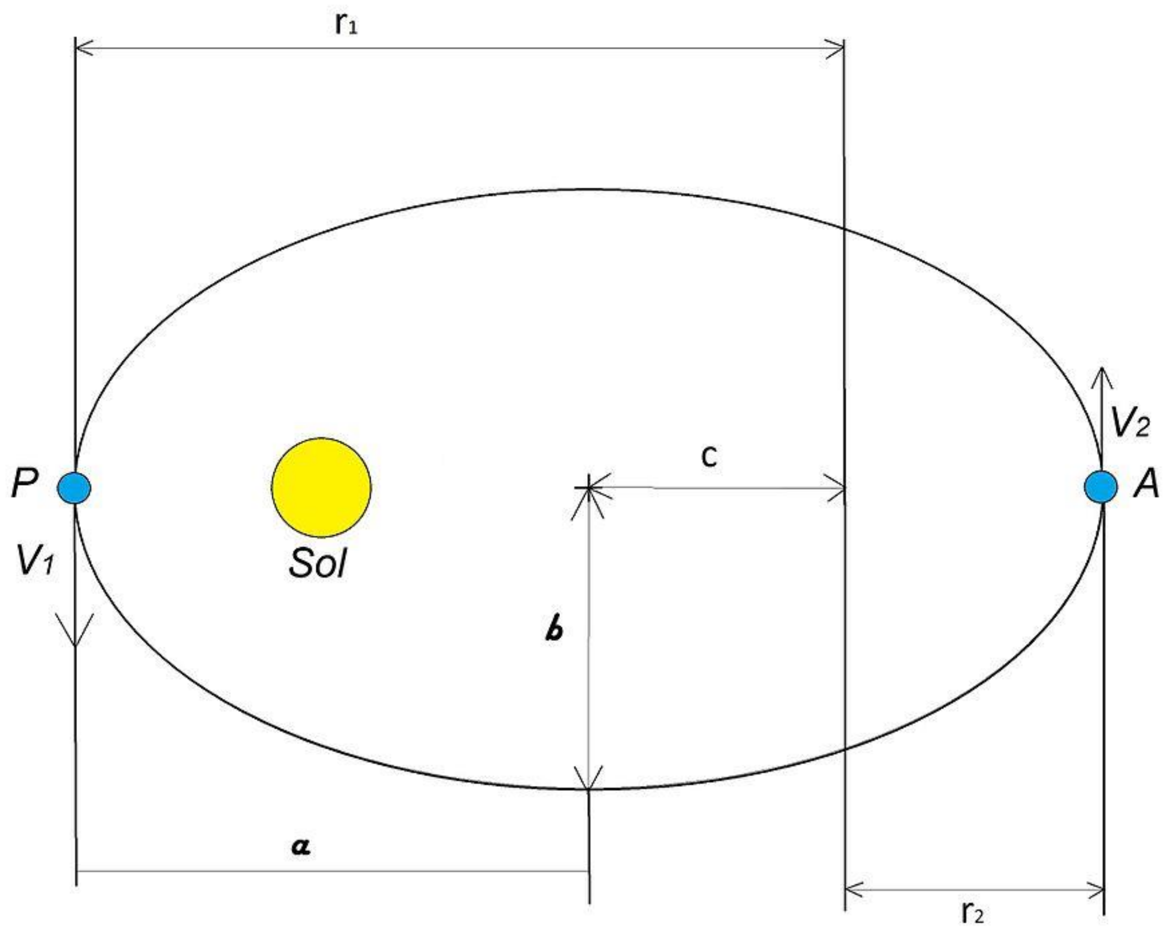
$$V_q = 7.1\sqrt{59.6} = 54.8 \text{ км/с}$$

$$V_Q = 0.9 \text{ км/с}$$

Третий закон Кеплера

- Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

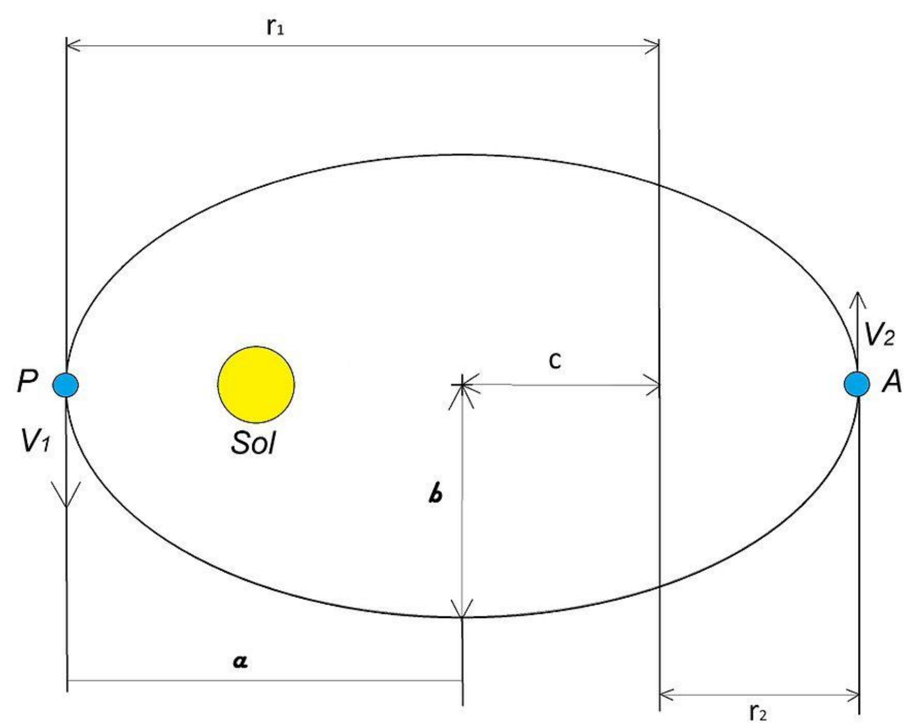


Уточненный третий закон Кеплера

- Произведение суммы масс систем и квадраты периодов обращений планет пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

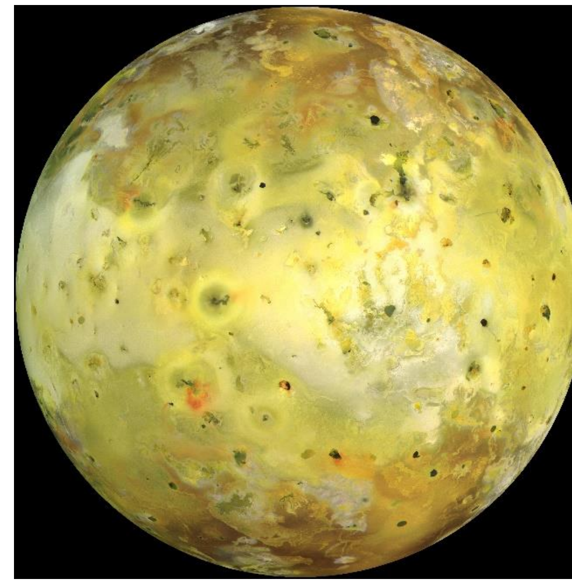
$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$



Задача на уточненный третий закон Кеплера

- Найдите массу планеты Юпитер в массах Земли, если спутник Юпитера Ио делает один оборот вокруг Юпитера 1,77 дня на расстоянии 422 тысячи км от Юпитера. Период обращения Луны вокруг Земли 27,3 дня, расстояние – 384 тысячи км. Считать орбиты Луны и Ио круговыми.



$$\frac{T_1^2(M_1+m_1)}{T_2^2(M_2+m_2)}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\frac{T_{\text{Ио}}^2(M_{\text{Ю}}+m_{\text{Ио}})}{T_{\text{Луны}}^2\left(M_{\text{З}}+m_{\text{Луны}}\right)}=\frac{a_{\text{Ио}}^3}{a_{\text{Луны}}^3}$$

$$\frac{T_{\text{Ио}}^2}{T_{\text{Луны}}^2}=\frac{a_{\text{Ио}}^3\left(M_{\text{З}}+m_{\text{Луны}}\right)}{a_{\text{Луны}}^3(M_{\text{Ю}}+m_{\text{Ио}})}$$

$$\frac{M_{\text{Ю}}}{M_{\text{З}}}=\frac{T_{\text{Луны}}^2 a_{\text{Ио}}^3}{T_{\text{Ио}}^2 a_{\text{Луны}}^3}=\frac{27{,}3^2 422000^2}{1{,}77^2 38400^2}\approx 330$$

Гомановский эллипс

- В первом приближении орбиты планет круговые

$$a_1 \qquad a_2$$

- Скорости движения планет по орбитам

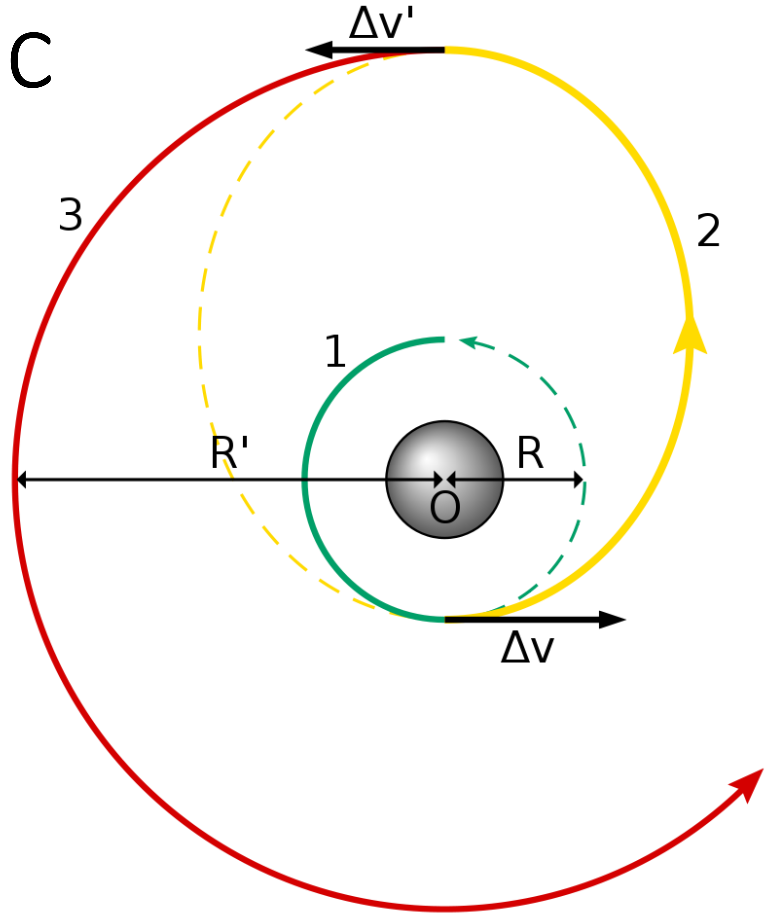
$$V_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_1}} \qquad V_2 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_2}}$$

- Параметры гомановского элипса

$$a_г = \frac{a_1 + a_2}{2} \Leftrightarrow \frac{T_г^2}{T_\oplus^2} = \frac{a_г^3}{a_\oplus^3}$$

- Эксцентриситет

$$e = \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}$$



Скорость в перигелии орбиты этого Эллипса

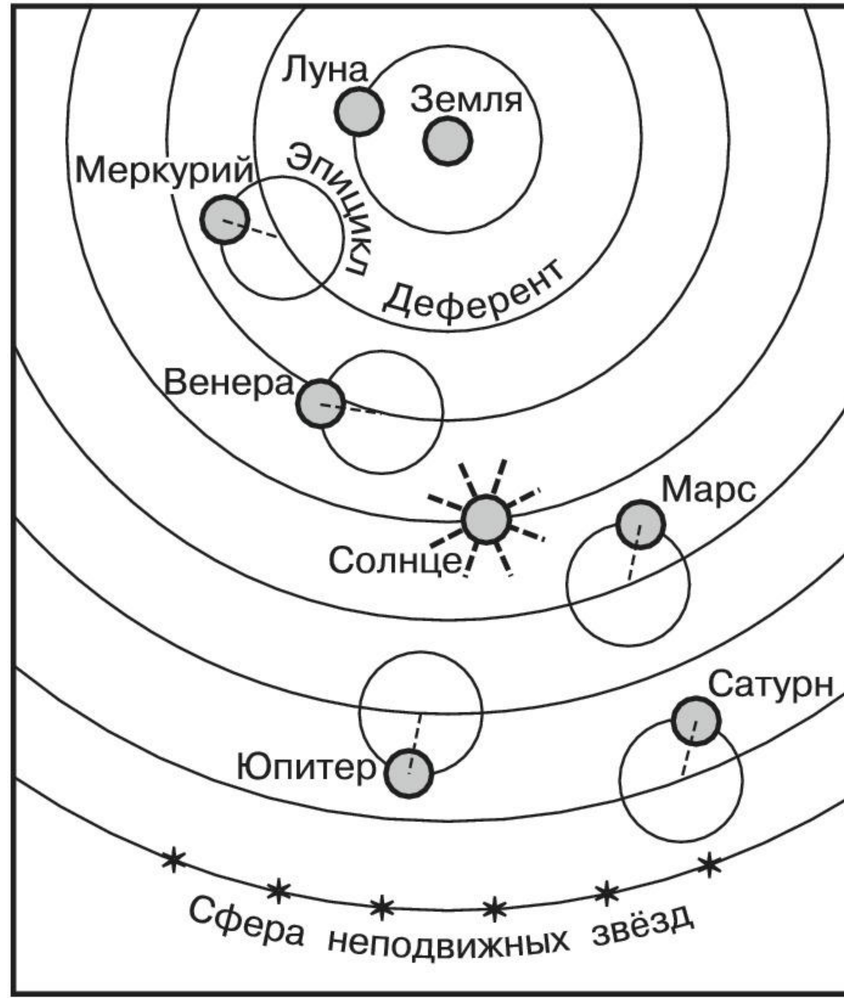
$$V_q = V_{ср} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{a_г}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

Скорость в афелии орбиты этого эллипса

$$V_Q = V_{ср} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{GM}{a_г}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Задача 1

- **Задача.** Возможно ли с помощью системы мира Птолемея предсказывать положение Луны и планет?
- **Ответ:** Возможно, и это с успехом делали.



Задача 2

- **Задача.** Движение каких объектов в системе мира Птолемея и Коперника описываются одинаково?
- **Ответ:** Луны.

Задача 3

- **Задача**. Большая полуось орбиты Земли равна 1 а.е., а эксцентриситет – 0.017. Чему равно минимальное и максимальное расстояние Земли от Солнца?
- **Ответ:** 0.983 а.е., 1.017 а.е.

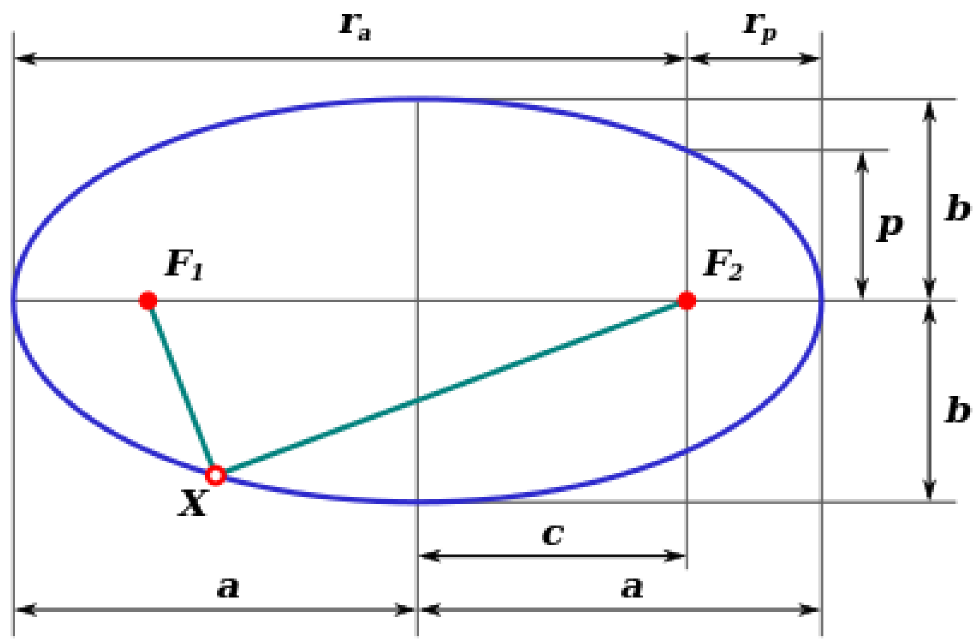
Решение:

Перигелий

$$q = a - c = a(1 - e) = 0.983 \text{ а. е.}$$

Афелий

$$Q = a + c = a(1 + e) = 1.017 \text{ а. е.}$$



Задача 4

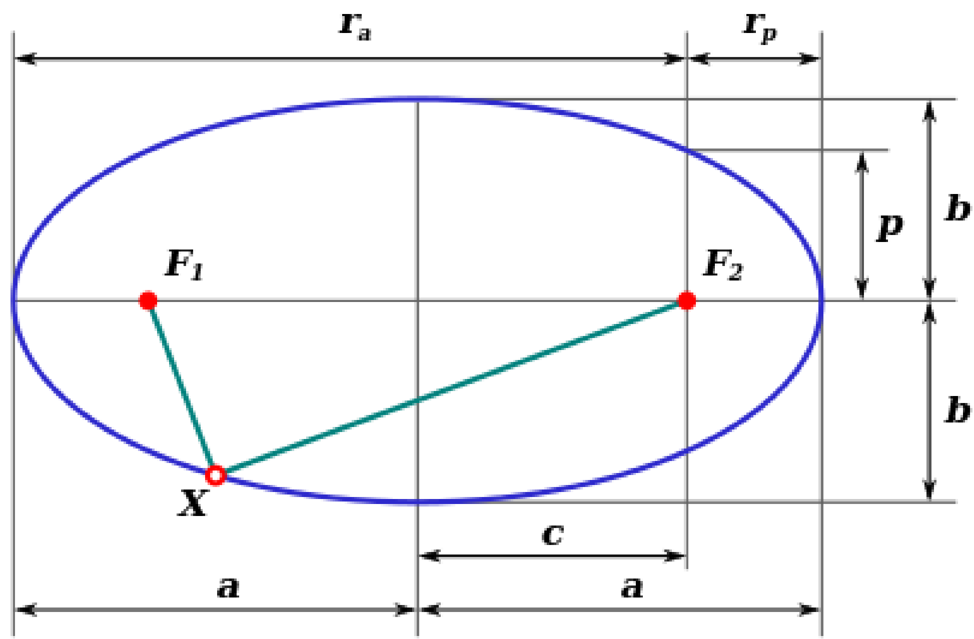
- **Задача**. Большая полуось орбиты Земли равна 1 а.е., а эксцентриситет – 0.017. Определите расстояние от Солнца до второго фокуса земной орбиты в радиусах Солнца?
- **Ответ:** 7.3.

Решение:

$$q = a - c$$
$$Q = a + c$$

Следовательно:

$$2c = 2ae = 2 \cdot \frac{0.017}{1} \cdot 2 \cdot 109$$
$$\approx 7.3$$

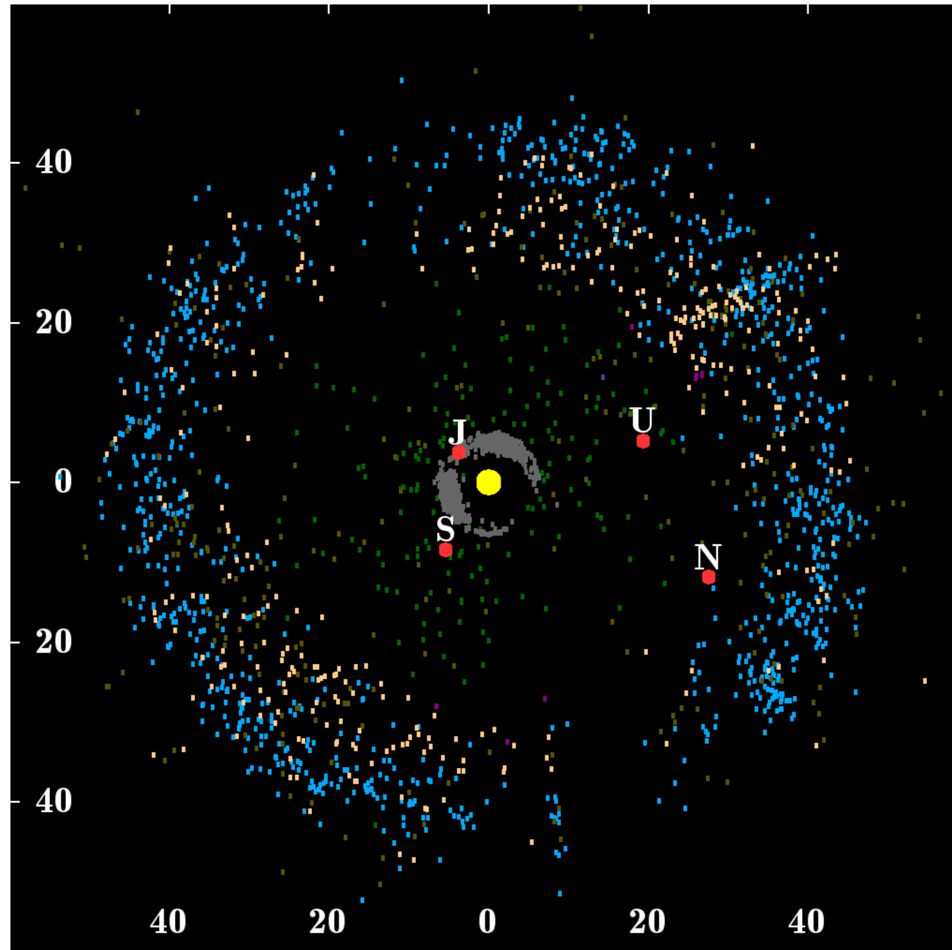


Задача 5

- **Задача**. Астероид (8405) Асбол движется по орбите с большой полуосью 29 а.е. и эксцентриситетом 0.62. Орбиты каких планет он пересекал, если бы плоскость его орбиты совпадала с плоскостью орбит этих планет?
- **Ответ:** Уран и Нептун.

Решение:

$$q = a - c = a(1 - e)$$
$$= 29(1 - 0.62) \approx 11 \text{ а. е.}$$



Задача 6

- **Задача**. В каких пределах меняется угловой размер Луны? Большая полуось орбиты Луны равна 384400 км, эксцентриситет – 0.055, радиус Луны – 1738 км.
- **Ответ:** от 29.47′ до 32.89′

Решение:

$$q = a - c = a(1 - e) = 384400 \cdot (1 - 0.055) \approx 363258 \text{ км}$$

$$\mathrm{Q} = a + c = a(1 + e) = 384400 \cdot (1 - 0.055) \approx 405542 \text{ км}$$

Определим угловые размеры:

$$\alpha = 3438' \frac{2R_{л}}{\Delta}$$

Задача 7

- **Задача**. В каких пределах меняется расстояние до Марса в противостоянии? Радиус орбиты Марса равен 1.52 а.е., эксцентриситет – 0.0934. Орбиту Земли считать круговой. Ответ дайте в миллионах километров.
- **Ответ:** от 56.5 до 99.

Решение:

$$\Delta_{\text{м}} = q_{\text{м}} - a_{\text{з}} = a_{\text{м}} \cdot (1 - \mathrm{e}) - a_{\text{з}} = 1.52 \cdot (1 - 0.0934) - 1 = 0.38\ \text{а.е} \approx 56.5\ \text{млн. км}$$

$$\Delta_{\text{м}} = Q_{\text{м}} - a_{\text{з}} = a_{\text{м}} \cdot (1 + \mathrm{e}) - a_{\text{з}} = 1.52 \cdot (1 + 0.0934) - 1 = 0.66\ \text{а.е} \approx 99\ \text{млн. км}$$

Задача 8

- **Задача**. Астероид движется в плоскости эклиптики. Минимально возможное его расстояние от Земли составляет 20 млн км, а сидерический период составляет 1.4 года. Чему может быть равен эксцентриситет его орбиты, если орбита астероида с земной орбитой не пересекается? Орбиту Земли считать круговой.
- **Ответ:** 0.09.

Решение:

$$\frac{T_A^2}{T_\oplus^2} = \frac{a_A^3}{a_\oplus^3} \Longrightarrow a_A = \mathrm{a}_\oplus \left(\frac{\mathrm{T}_A}{\mathrm{T}_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \left(\frac{1.4}{1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.25\ \text{а. е.}$$

$$q_A - a_з = a_A \cdot (1 - \mathrm{e}) - a_з = 20\ \text{млн. км} \approx 0.13\ \text{а. е} \Longrightarrow e = 1 - \frac{a_з + 0.13}{a_A} = 1 - \frac{1 + 0.13}{1.25} = 0.09$$

Задача 9

- **Задача.** В последний раз комета Ольберса проходила перигелий 19 июня 1956 года. Определите дату следующего прохождения перигелия, если ее большая полуось равна 16.907 а.е. На каком расстоянии от Солнца при этом она окажется? Эксцентриситет равен 0.9303.
- **Ответ:** 25 декабря 2025 г.; 1,18 а.е.

Решение:

$$\frac{T_{\text{К}}^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a_{\text{К}}^3}{a_{\oplus}^3} \Longrightarrow T_K$$

$$= T_{\oplus}\left(\frac{a_K}{a_{\oplus}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{16.907}{1}\right)^{\frac{2}{3}} = 69.52\ \text{г.}$$

Перигелий:

$$q = a - c = a(1 - e)$$
$$= 16.907 \cdot (1 - 0.9303)$$
$$\approx 1.18\ \text{а. е.}$$

Следовательно: – 25 декабря 2025 г.

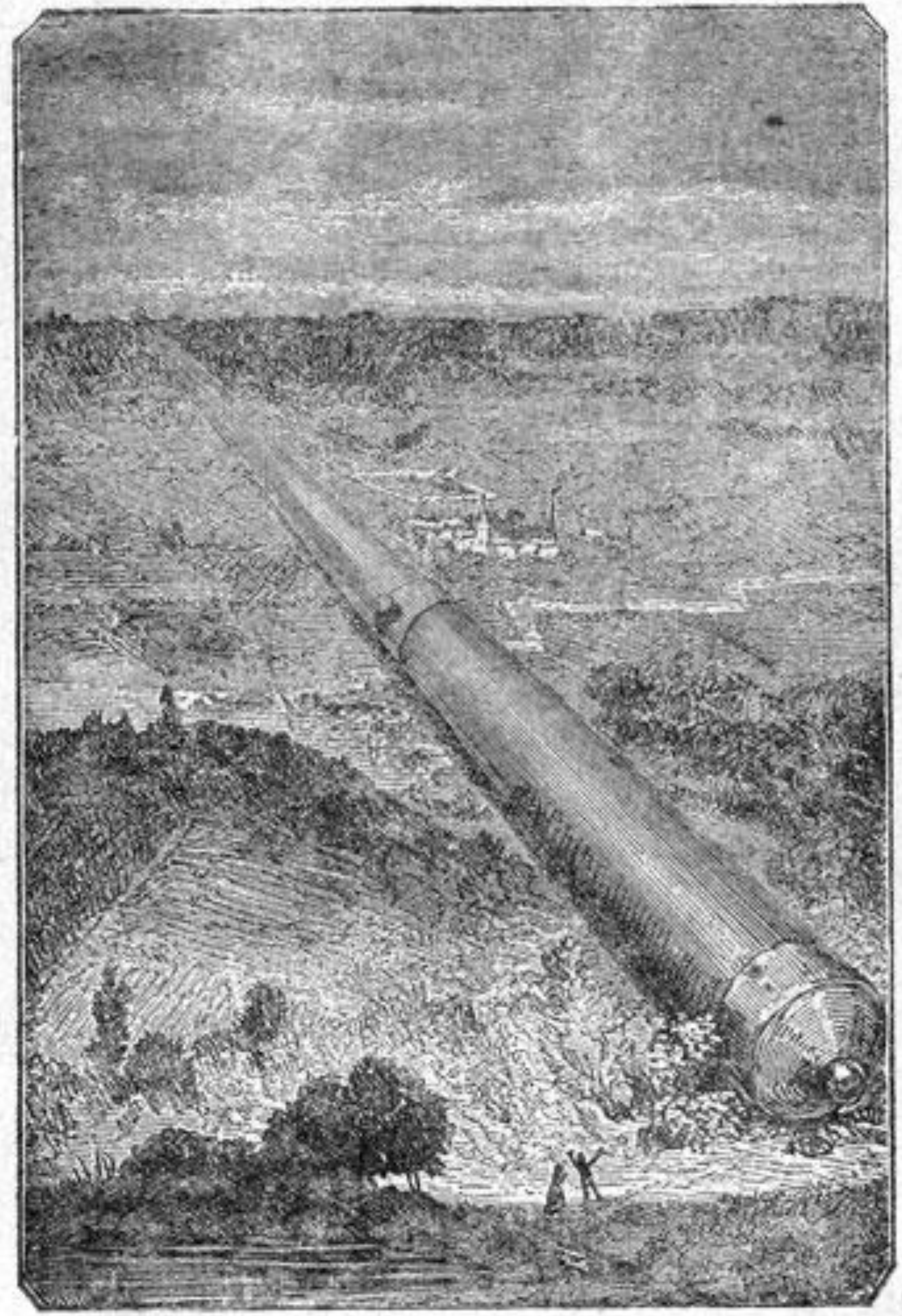
Задача 10

- **Задача**. На каком расстоянии от поверхности Земли должен обращаться спутник, сидерический период которого составляет 3 часа?
- **Ответ:** Примерно 4200 км.

- **Решение:**
- Апогей равен высоте геостационарной орбиты. Следовательно период равен звездным суткам.
- $\frac{T_{исз}^2}{T_л^2} = \frac{a_{исз}^3}{a_л^3} \Longrightarrow \mathrm{a}_{исз} = \mathrm{a}_л \left(\frac{\mathrm{T}_{исз}}{\mathrm{T}_л}\right)^{\frac{2}{3}} = 384000 \cdot \left(\frac{0.125}{27.3}\right)^{\frac{2}{3}} = 4200\ км$

Задача 11

- **Задача**. Дальнобойная пушка, установленная на экваторе Земли, сделала выстрел вертикально вверх. Может ли снаряд упасть обратно на пушку?
- **Ответ:** Нет, этому препятствует вращение Земли. Снаряд упадет к западу от пушки.



Задача 12

- **Задача.** Столица Эквадора Кито находится точно на экваторе. Каждые 6 часов над Кито пролетает спутник. Определите радиус орбиты спутника.
- **Ответ:** 14 400 км

- **Решение:**
- Определим истинный период обращения спутника. Поскольку 6 часов это видимый синодический период:
- $\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{ИСЗ}}} - \frac{1}{P_{\oplus}} \Longrightarrow T_{\text{ИСЗ}} = \frac{S \cdot P_{\oplus}}{S + P_{\oplus}} = \frac{6 \cdot 24}{24+6} = 4.8 \text{ часа}$
- $\frac{T^2_{\text{исз}}}{T^2_{\text{л}}} = \frac{a^3_{\text{исз}}}{a^3_{\text{л}}} \Longrightarrow \text{a}_{\text{исз}} = \text{a}_{\text{л}} \left(\frac{\text{T}_{\text{исз}}}{\text{T}_{\text{л}}}\right)^{\frac{2}{3}} = 384000 \cdot \left(\frac{0.2}{27.3}\right)^{\frac{2}{3}} = 14400 \text{ км}$

Задача 13

- **Задача**. Что притягивает Луну сильнее и во сколько раз: Солнце или Земля?
- **Ответ:** Солнце более чем в 2 раза.

- **Решение:**
- Найдем отношение масс через третий закон Кеплера:
- $\frac{M_\text{с}}{M_\text{З}} = \frac{T_\text{л}^2 a_\text{з}^3}{T_\text{з}^2 a_\text{л}^3}$
- Предположим что Солнце притягивает сильнее и найдем отношение сил притяжения:
- $\frac{F_\text{С}}{F_\text{З}} = \frac{a_\text{С}}{a_\text{З}} = \frac{G\frac{M_c}{a_\text{з}^2}}{G\frac{M_\text{З}}{a_\text{л}^2}} = \frac{M_c}{M_\text{З}}\left(\frac{a_\text{л}}{a_\text{З}}\right)^2 = \frac{T_\text{л}^2 a_\text{з}^3}{T_\text{з}^2 a_\text{л}^3}\left(\frac{a_\text{л}}{a_\text{З}}\right)^2 = \frac{T_\text{л}^2}{T_\text{з}^2}\frac{a_\text{з}}{a_\text{л}} \approx 2.2$

Задача 14

- **Задача**. Определите ускорение свободного падения на Ганимеде (спутник Юпитера), если его радиус в 2.4 меньше, чем у Земли, а масса меньше в 41 раз.
- **Ответ:** 1.4 м/с^2.

- **Решение:**
- Найдем отношение ускорений свободного падения:
- $\frac{g_з}{g_г} = \frac{G\frac{M_з}{R_з^2}}{G\frac{M_г}{R_г^2}} = \frac{M_з}{M_г}\left(\frac{R_г}{R_з}\right)^2 = 41 \cdot \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \approx 7.1 \implies g_г = \frac{g_з}{7.1} = \frac{9.8}{7.1} \approx 1.4$ м/с^2

Задача 15

- **Задача**. Средняя плотность Луны составляет 61% от плотности Земли, а радиус – 27% земного. Рекорд в поднятии штанги на Земле равен 264 кг. Какую массу смог бы поднять штангист-рекордсмен на Луне?
- **Ответ**: 1600 кг.

- **Решение:**
- Найдем отношение ускорений свободного падения:
- $$\frac{g_з}{g_л} = \frac{G\frac{M_з}{R_з^2}}{G\frac{M_л}{R_л^2}} = \frac{M_з}{M_л}\left(\frac{R_л}{R_з}\right)^2 = \frac{\rho_з}{\rho_л}\left(\frac{R_з}{R_л}\right)^3\left(\frac{R_л}{R_з}\right)^2 = \frac{\rho_з}{\rho_л}\frac{R_з}{R_л} = 0.61 \cdot 0.27 \approx 0.16 \Longrightarrow$$
- $$P_Ш = \frac{P_{шз}}{0.16} \approx 1600 \text{ кг}$$

Задача 16

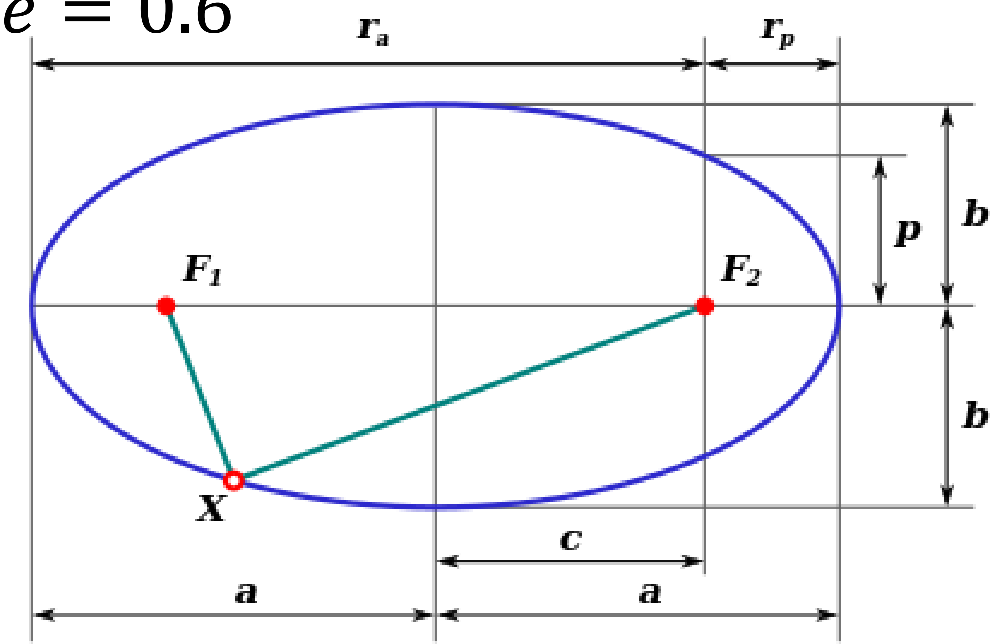
- **Задача**. Чему равен радиус ареостационарной орбиты, т. е. такой орбиты вокруг Марса, двигаясь по которой спутник всегда остаётся над одной и той же точкой поверхности планеты?
- **Ответ:** 20 500 км.

- **Решение:**
- Апогей равен высоте геостационарной орбиты. Следовательно период равен звездным суткам.
- $\frac{T_{исз}^2}{T_л^2}\frac{М_м}{М_з}=\frac{a_{исз}^3}{a_л^3} \Longrightarrow \mathrm{a}_{исз}=\mathrm{a}_л\left(\frac{\mathrm{T}_{исз}}{\mathrm{T}_л}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{М_м}{М_з}\right)^{\frac{1}{3}}=384000\cdot\left(\frac{1.025}{27.3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{3}}=20500\text{ км}$

Задача 17

- **Задача.** Определите эксцентриситет орбиты кометы, если её скорость в перигелии в 4 раза больше, чем в афелии.
- **Ответ:** 0.6.

- **Решение:**
- Апогей равен высоте геостационарной орбиты. Следовательно период равен звездным суткам.
- $\frac{V_q}{V_Q} = \frac{V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}{V_{\text{ср}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{1+e}{1-e} = 4$
- $e = 0.6$



Задача 18

- **Задача.** Комета, двигаясь по параболической орбите, в момент максимального сближения с Солнцем имела скорость 60 км/с. Чему равно расстояние кометы от Солнца в этот момент?
- **Ответ:** 0.5 а.е.

- **Решение:**
- Скорость движения на параболической траектории в каждой точке равна второй космической.
- А вторая космическая скорость
- $V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{a}}$
- Найдем отношение скорости к Скорости движения Земли по орбите 30 км/с и будем считать орбиту круговой
- $\frac{V_{II}}{V_з} = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{a_к}}}{\sqrt{\frac{GM}{a_з}}} = \frac{60}{30} \approx 2$
- Найдем расстояние в а.е.:
- $\frac{a_к}{a_з} = 0.5\ \text{а. е.}$

Задача 19

- **Задача.** Астероид Непер проходит перигелий на расстоянии 1.4 а.е. от Солнца со скоростью 30.9 км/с. Определите большую полуось и эксцентриситет орбиты этого астероида.
- **Ответ:** 2.8 а.е., 0.5.

- **Решение:**
- Скорость движения на параболической траектории в каждой точке равна второй космической.
- А вторая космическая скорость
- $V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{a}}$
- Найдем отношение скорости к Скорости движения Земли по орбите 30 км/с и будем считать орбиту круговой
- $\frac{V_{II}}{V_з} = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{a_к}}}{\sqrt{\frac{GM}{a_з}}} = \frac{60}{30} \approx 2$
- Найдем расстояние в а.е.:
- $\frac{a_к}{a_з} = 0.5 \text{ а. е.}$

Задача 20

- **Задача**. Большая полуось орбиты Меркурия равна 0.387 а.е., а эксцентриситет – 0.206. В каких пределах меняется величина максимальной элонгации Меркурия? Орбиту Земли считать круговой.
- **Ответ:** от 17.9 ° до 27.8°.

- **Решение:**
- Расстояние Меркурия в момент максимальной элонгации может меняться в пределах от перигелийного до афелийного:
- Найдем эти расстояния:
- Перигелий
- $q = a - c = a(1 - e) = 0.387 \cdot (1 - 0.206) = 0.307 \text{ а. е.}$
- Афелий
- $Q = a + c = a(1 + e) = 0.387 \cdot (1 + 0.206) = 0.467 \text{ а. е.}$
- Следовательно в момент максимальной элонгации:
- $\sin\alpha = \frac{\Delta}{a_з} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha_q \approx 17.9° \\ \alpha_Q \approx 27.8° \end{matrix}$

Задача 21

- **Задача**. Астероид (602) Марианна приближается к Солнцу на расстояние 2.31 а.е., а эксцентриситет его орбиты равен 0.25. Найдите большую и малую полуоси орбиты этого астероида и максимальное расстояние от Солнца.
- **Ответ**: 3.08 а.е., 2.98 а.е., 3.85 а.е.

- **Решение:**
- Минимальное расстояние в перигелии следовательно:
- $q = a - c = a(1 - e) \Longrightarrow a = \frac{q}{1-e} = \frac{2.31}{1-0.25} \approx 3.08\, a.e.$
- Афелий – максимальное расстояние от Солнца:
- $Q = a + c = a(1 + e) = \frac{q(1+e)}{1-e} = \frac{2.31(1+0.25)}{1-0.25} = 3.85$ а. е.
- Малая полуось орбиты:
- $\mathrm{b} = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{a(1 - e)a(1 + e)} = \sqrt{qQ} = \sqrt{3.85 \cdot 2.31} \approx 2.98\, a.e.$

Задача 22

- **Задача**. Синодический период Венеры равен 584 дня. Во сколько раз её угловой размер в нижнем соединении больше, чем в максимальной элонгации? Орбиты Земли и Венеры считайте круговыми. Радиус Венеры 6050 км.
- **Ответ:** в 2.5 раза.

- **Решение:**
- Угловой размер в нижнем соединении:
- $\alpha_{\text{нс}} = 206265'' \frac{D_{\text{в}}}{a_{\text{з}} - a_{\text{в}}}$
- Угловой размер в момент максимальной элонгации составит:
- $\alpha_{\text{мэ}} = 206265'' \frac{D_{\text{в}}}{\sqrt{a_{\text{з}}^2 - a_{\text{в}}^2}}$
- Найдем сидерический период обращения из синодического периода:
- $\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{в}}} - \frac{1}{T_{\text{з}}} \Longrightarrow \frac{T_{\text{в}}}{T_{\text{з}}} = \frac{S}{S + T_{\text{з}}} = \frac{584}{584 + 365.25} \approx 0.62$
- Отношение размеров:
- $\frac{\alpha_{\text{нс}}}{\alpha_{\text{мэ}}} = \frac{206265'' \frac{D_{\text{в}}}{a_{\text{з}} - a_{\text{в}}}}{206265'' \frac{D_{\text{в}}}{\sqrt{a_{\text{з}}^2 - a_{\text{в}}^2}}} = \sqrt{\frac{a_{\text{з}} + a_{\text{в}}}{a_{\text{з}} - a_{\text{в}}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{a_{\text{в}}}{a_{\text{з}}}}{1 - \frac{a_{\text{в}}}{a_{\text{з}}}}} =$

$$\sqrt{\frac{1 + \frac{a_{\text{в}}}{a_{\text{з}}}}{1 - \frac{a_{\text{в}}}{a_{\text{з}}}}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{T_{\text{в}}}{T_{\text{з}}}\right)^{2/3}}{1 - \left(\frac{T_{\text{в}}}{T_{\text{з}}}\right)^{2/3}}} = \sqrt{\frac{1 + (0.61)^{2/3}}{1 - (0.61)^{2/3}}} \approx 2.5$$

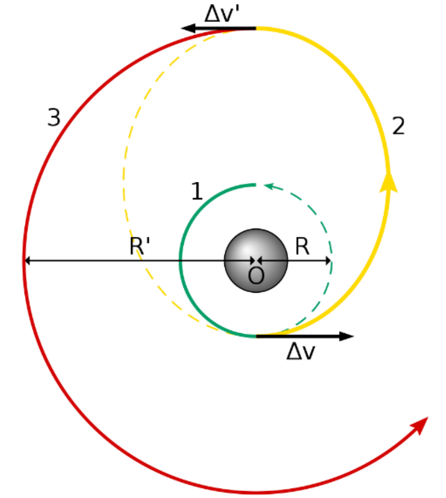
Задача 23

- **Задача**. **Космическая** станция движется вокруг Земли по геостационарной орбите. К ней доставляет продукты и оборудование корабль, который движется вокруг Земли по эллиптической орбите с апогеем на геостационарной орбите. Определите большую полуось орбиты этого корабля, при которой посещения станции будут максимально частыми.
- **Ответ:** Примерно 26 500 км.

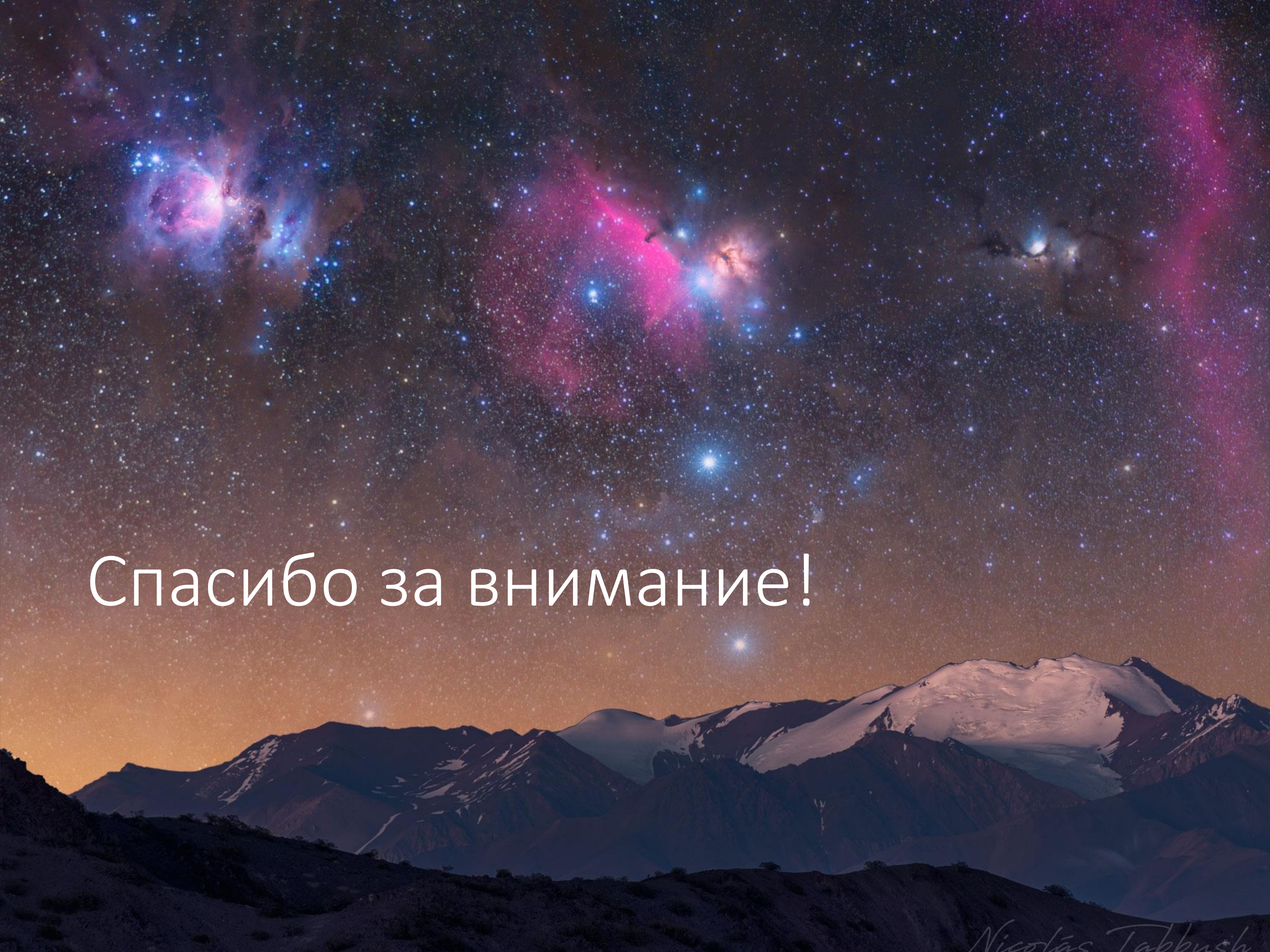
- **Решение:**
- Апогей равен высоте геостационарной орбиты. Следовательно период равен звездным суткам.
- $\frac{T_{исз}^2}{T_л^2} = \frac{a_{исз}^3}{a_л^3} \Longrightarrow \mathrm{a}_{исз} = \mathrm{a}_л \left(\frac{\mathrm{T}_{исз}}{\mathrm{T}_л}\right)^{\frac{2}{3}} = 384000 \cdot \left(\frac{0.997}{27.3}\right)^{\frac{2}{3}} = 42268 \text{ км}$
- Поскольку аппарат приближается к станции каждый оборот следовательно его период кратен периоду станции. Рассмотрим случай когда он меньше ровно в два раза.
- $\mathrm{a}_{исз} = \mathrm{a}_л \left(\frac{\mathrm{T}_{исз}}{\mathrm{T}_л}\right)^{\frac{2}{3}} = 384000 \cdot \left(\frac{0.997}{2 \cdot 27.3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 26655 \text{ км}$
- $a = \frac{Q+q}{2} \Longrightarrow q = 2a - Q \approx 11042 \text{ км}$

Задача 24

- **Задача**. Космическая экспедиция отправляется от Земли к Венере. Как далеко от Солнца и в какой элонгации видна Венера в момент старта, если перелёт совершался по гомановской орбите.
- **Ответ:** 32°, восточная элонгация.



- **Решение:**
- Рассчитаем необходимое время для перелета:
- $a_{\text{г}} = \frac{a_{\text{в}}+a_{\text{з}}}{2} \Leftrightarrow \frac{T_{\text{г}}^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a_{\text{г}}^3}{a_{\oplus}^3}$
- $t_{\text{перелета}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_{\text{в}}+a_{\text{з}}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 0.65^{\frac{3}{2}} \approx 0.39\ \text{а. е.}$



Спасибо за внимание!

Ссылки

- Группа задач Астрономических олимпиад в контакте в документах есть задачи олимпиад разных уровней с решениями в разделе Ресурсы - https://vk.com/astroolympiads
- Сайт ВсОШ по Астрономии с архивами задач и результатами – http://www.astroolymp.ru/
- Сайт Московской Астрономической олимпиады http://mosastro.olimpiada.ru
- Сайт Санкт-Петербургской астрономической олимпиады http://school.astro.spbu.ru/?q=olymp
- Фотоальбом НАСА - https://photojournal.jpl.nasa.gov/
- Проект карта Вселенной на разных масштабах - http://www.atlasoftheuniverse.com/
- Виртуальный планетарий- https://celestiaproject.net/ru/
- Виртуальный планетарий - http://www.stellarium.org/
- Задачи и Упражнения по Общей Астрономии - http://www.astronet.ru/db/msg/1175352/node1.html