ФГОС
ООО

Л. Г. Петерсон, Е. В. Чуткова

Методические рекомендации к учебнику

Алгебра 7 класс

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

ФГОС
ООО

Л. Г. Петерсон, Е. В. Чуткова

Методические рекомендации к учебнику

Алгебра 7 класс

Москва
«Просвещение»
2021

УДК 372.8
ББК 74.262.21
П 29

Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

**Непрерывный курс математики
для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)**

П 29 **Петерсон, Л. Г.** Методические рекомендации к учебнику Алгебра. 7 класс» / Л. Г. Петерсон, Е. В. Чуткова. — М. : Просвещение, 2021. — 414 с. : ил. — ISBN 978-5-09-080659-6.

В методическом пособии описана система работы по учебнику алгебры для 7 класса авторов Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханова и др. Приведены программа, тематическое планирование, основные содержательные цели изучения каждого пункта учебника, методические подходы к организации самостоятельной деятельности учащихся, способы достижения личностных, метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы ФГОС ООО.

В пособии также приведены примеры решения типовых задач и подробно разобрано решение нестандартных заданий, представленных в учебнике.

Курс алгебры для 7 класса авторов Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханова и др. реализует дидактическую систему деятельностного метода Л. Г. Петерсон («Школа 2000...»). Ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование прочной системы математических знаний, культуры исследовательской и проектной деятельности, умения учиться и готовности к саморазвитию. Соответствует современным требованиям ГИА, ЕГЭ.

Курс является составной частью непрерывного курса математики «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и средней школы (Премия Президента РФ в области образования за 2002 год). Может использоваться во всех типах школ на основном и предпрофильном (углубленном) уровнях.

УДК 372.8
ББК 74.262.21

Методические рекомендации к учебнику
АЛГЕБРА
7 класс (16+)

Ведущий редактор ***Н. А. Шихова***
Художники ***П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова***
Оформление ***Н. А. Новак***
Технический редактор ***Е. В. Бегунова***
Компьютерная верстка ***Н. Г. Шаповалова***

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Формат 70x108/16. Уч.-изд. л.12,88.
Акционерное общество «Издательство «Просвещение»
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

ISBN 978-5-09-080659-6

Введение

Курс математики (алгебры) для 7—9 классов основной школы «Учусь учиться» является частью непрерывного курса математики образовательной системы Л. Г. Петерсон и обеспечивает непрерывность математической подготовки учащихся, начиная с дошкольной ступени вплоть до их перехода в старшую школу или получения среднего профессионального образования (на уровне технологии и дидактики, содержания и методики).

Основной целью данного курса является формирование у учащихся умения учиться, их интеллектуальное и духовно-нравственное развитие и воспитание, сохранение и поддержка здоровья детей, овладение каждым учащимся по индивидуальной траектории саморазвития системой глубоких и прочных математических знаний, умений и навыков, необходимых для продолжения образования в любом профиле старшей школы и образовательных учреждениях среднего профессионального образования.

Курс математики «Учусь учиться» для 7—9 классов средней школы обеспечивает организацию учебной деятельности учащихся, в процессе которой создаются условия для надежного достижения целей, поставленных ФГОС ООО — личностных, метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы посредством формирования универсальных учебных действий и умения учиться в целом. Данные цели реализуются на основе «Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России», составляющей идеологическую основу ФГОС, и системно-деятельностного подхода, составляющего методологическую основу ФГОС.

Исходя из «Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России», отбор учебного содержания в курсе математики «Учусь учиться» осуществлялся с ориентацией на формирование базовых национальных ценностей. Средствами учебного предмета математики у учащихся воспитываются ценности созидания и саморазвития, честности и справедливости, открытости и толерантности, уважения к окружающим людям, к отечественной и зарубежной математической культуре. Создаются условия для развития у них познавательного интереса, формирования представлений о математике как о мощном методе познания действительности, едином языке всех наук.

Педагогическим инструментом решения поставленных целей в курсе «Учусь учиться» на всех ступенях обучения с учетом возрастных психологических особенностей развития детей является образовательная система деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон, реализующая методологическую версию системно-деятельностного подхода (Г. П. Щедровицкий, О. С. Анисимов и др.).

Образовательная система деятельностного метода обучения включает в себя:

- описание образовательных целей и метода их реализации,
- технологию деятельностного метода (ТДМ),
- типологию уроков,
- систему дидактических принципов,
- методическое обеспечение,
- систему диагностики и контроля результатов обучения в соответствии с ФГОС,
- систему подготовки педагогических кадров.

Технология деятельностного метода (ТДМ) — это педагогический инструмент, позволяющий учителю, с одной стороны, организовать включение учащихся в учебную деятельность на основе метода рефлексивной самоорганизации (Г. П. Щедровицкий, О. С. Анисимов и др.). Благодаря этому создаются условия для надежного достижения каждым учащимися личностных и метапредметных результатов ФГОС. С другой стороны, в ТДМ заложены все этапы глубокого и прочного усвоения знаний (П. Я. Гальперин), что обеспечивает не только высокий уровень предметных результатов ФГОС и сдачу ГИА, но и создает существенный задел для результативного участия школьников в математических олимпиадах, их успешного обучения в 10—11 классах и подготовки к ЕГЭ.[1]

Содержательные особенности построения курса «Учусь учиться» 7—9 классов

Реализация в курсе деятельностного метода обучения позволяет при изучении всех разделов курса **организовать полноценную математическую деятельность учащихся** по получению нового знания, его преобразованию и применению, включающую все три этапа математического моделирования. Ими являются:

1) этап ***математизации действительности***, то есть построения математической модели некоторого фрагмента действительности;
2) этап ***изучения математической модели***, то есть построения математической теории, описывающей свойства построенной модели;
3) этап ***приложения полученных результатов*** к реальному миру.

При построении математических моделей учащиеся приобретают опыт использования математических знаний для описания объектов и процессов окружающего мира, объяснения причин явлений, оценки их количественных и пространственных отношений.

На этапе изучения математической модели они развивают математический язык, логическое, алгоритмическое и творческое мышление, они учатся исследовать и выявлять свойства и отношения, наглядно представлять полученные данные, строить и выполнять алгоритмы.

Далее, на этапе приложения полученных результатов к реальному миру учащиеся применяют математические знания для решения задач. Здесь они отрабатывают умение выполнять алгоритмы решения уравнений и неравенств, а также их систем, при решении текстовых задач. Учащиеся работают со схемами и таблицами, диаграммами и графиками, анализируют и интерпретируют данные, овладевают грамотной математической речью.

Особенностью программы «Учусь учиться» для 7—9 классов является то, что, в отличие от других программ, учащимся сначала предлагается решить практическую задачу, в ходе построения математической модели которой они приходят к необходимости расширения имеющегося у них математического аппарата. Такой прием используется при введении всех основных видов уравнений (линейного диофантова уравнения, линейного уравнения с двумя переменными и их систем, квадратного уравнения, дробно-рационального уравнения), а также системы и совокупности неравенств. Это позволяет показать учащимся связь «неживых» букв алгебры с окружающим их «живым» миром и является одним из способов мотивации старшеклассников к изучению математики.

С этой же целью в курсе рассматривается большое число физических задач, решение которых сводится к только что изученным приемам и методам. Благодаря чему у учащихся формируется представление о математике, как о мощном инструменте познания реальных процессов в мире.

Этот же подход используется для формирования понятия «функция» — знакомство с любой новой функцией в 7—8 классах начинается с рассмотрения практических задач, обобщенным описанием которых она является. Начиная с 9 класса, функции вводятся исходя из внутренней логики развития математической теории.

Еще одной особенностью курса является возможность углубленного изучения темы «Функция». Этому способствует мощная пропедевтика этого понятия, начинающаяся еще в начальной школе. Уже в 6 классе учащиеся получают пред-

---

[1] Более подробно о ТДМ, проектировании и проведении уроков см. в приложении.

ставление о понятии «функциональная зависимость», что позволяет учащимся в 7 классе работать с понятием «функция» на вполне осознанном уровне. Вплоть до 9 класса к этому понятию учащиеся неоднократно возвращаются и уточняют его. К концу 9 класса у учащихся развивается представление о функции, как об абстрактном правиле сопоставления элементов двух множеств произвольной природы.

Со свойствами функций учащиеся начинают знакомиться, рассматривая их сначала для каждой изучаемой ими функции. В 9 классе эти свойства обобщаются для общего понятия функции и используются при построении графиков. Таким же образом строится работа по изучению преобразований графиков: сначала в 7 классе учащиеся получают представление о получении графика линейной функции из прямой пропорциональности, в 8 классе с помощью параллельного переноса они строят график квадратичной функции, а уже в 9 классе рассматривают этот и другие виды преобразования графиков для общего понятия функции.

Еще одной особенностью содержания программы по изучению функций является работа с ключевой для школьного курса функцией — квадратичной. Эта функция рассматривается в 8 классе в неразрывной взаимосвязи следующих вопросов: квадратное уравнение — квадратичная функция — квадратное неравенство. Это позволяет получить учащимся целостную картину: они понимают, как решение квадратных уравнений помогает для построения графика квадратичной функции, видят, как свойства функции помогают при решении неравенства, чего чаще всего не происходит, если эти вопросы рассматриваются с разрывом во времени. При этом к повторению этих вопросов они возвращаются в 9 классе при решении целых уравнений, неравенств методом интервалов и изучении общих свойств функции.

Методические особенности построения курса «Учусь учиться» для 7—9 классов

Учебники для 7—9 классов адаптированы для реализации ***деятельностного метода*** обучения Л. Г. Петерсон. Их деятельностная направленность помогает учителям реализовывать системно-деятельностный подход к обучению, заявленный в ФГОС ООО.

Ключевой особенностью программы «Учусь учиться» для 7—9 классов является то, что задачный раздел каждого пункта направлен не только на отработку того или иного нового знания (что являлось традиционной задачей учебника), но и на организацию самостоятельной деятельности учащихся по открытию нового понятия или способа действия.

Задачный раздел начинается с системы заданий для организации самостоятельного открытия учащимися новых знаний из программы курса. Вначале учащимся предлагается задание для актуализации изученных способов действий, достаточных для построения нового знания, а также актуализации соответствующих мыслительных операций. Далее предлагается задание, которое выявляет отсутствие у учащихся знания, запланированного к открытию.

Далее предлагается цепочка вопросов либо заданий, которые помогают учащимся открыть новое знание в ходе собственной учебной деятельности (путем наблюдения, эксперимента, аналогии, применения и адаптации уже имеющихся способов к новой ситуации, выдвижения гипотез и их обоснования). После чего происходит сопоставление полученного учащимися результата и текста из теоретической части пункта, выступающего в качестве образца.

Отметим, что учебные тексты теоретической части также выстроены на основе метода рефлексивной самоорганизации. Их структуру можно представить следующим образом:

- постановка новой интересной учащимся задачи, решение которой невозможно известными методами;
- уточнение того, что именно пока недоступно для решения задачи;

- поиск идеи (способа) решения новой конкретной задачи с опорой на имеющиеся к этому моменту у учащихся знания и применение найденного подхода к ее решению;
- обобщение этого подхода в виде метода, позволяющего решать целый класс подобных задач;
- подробный разбор значительного количества примеров применения метода, начиная от простейших и заканчивая содержательными задачами высокого уровня сложности.

Такая структура учебника помогает учащимся самостоятельно работать с теоретическим материалом, что важно для последующего обучения в 10—11 классах и дальнейшего профессионального саморазвития каждого ученика.

Отметим, что задачная часть учебника помимо системы заданий для организации открытия содержит большой набор задач для самостоятельной проработки открытых учащимися знаний (понятий, способов действий). В учебнике представлены задания, разнообразные по уровню сложности, вплоть до задач олимпиадного уровня.

Этот подход соответствует психологическим особенностям подростков. «Чувство взрослости», не подкрепленное еще реальной ответственностью — это особая форма самосознания, возникающая в переходный период и определяющая основные отношения подростков с миром. Это чувство проявляется в потребности равноправия, уважения и самостоятельности, в требовании серьезного, доверительного отношения со стороны взрослых. В учебнике предложено место и средство реализации «чувства взрослости» учащихся.

Такая структура учебника, адаптированная к реализации деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон, учитывает и другие особенности подросткового периода — склонность к фантазированию, некритическому планированию своего будущего: результат действия становится второстепенным, на первый план выступает свой собственный авторский замысел. Если учитель оценивает прежде всего качество "продуктов" учебной работы школьников и не находит места для выращивания детского замысла, то тем самым для ученика обесценивается сам процесс учения. Организация обучения, заложенная в задачном разделе учебника для 7—9 классов, дает возможность учащимся экспериментировать со своими возможностями, что является одной из самой яркой характеристикой подростков. Самостоятельные попытки учащихся по открытию математической теории являются формой такого экспериментирования.

Отметим, что при отборе учебного содержания использовался ***дифференцированный подход.*** С 7 класса начинается работа по подготовке учащихся к предпрофильному уровню обучения, для этого в учебнике выделяются разделы, необязательные для изучения в общеобразовательном классе. Содержание курса расширяется за счет изучения вопросов математической логики, теории делимости, теории линейных уравнений и неравенств (решение уравнений в целых числах, решение неравенств с модулем), а также вопросов практического применения полученных знаний, в частности, в теме «Функциональная зависимость и кодирование информации» и др.

Программа 8—9 класса строится так, что она может быть использована для изучения школьного курса алгебры на основном и предпрофильном (углубленном) уровнях. Заметим, что предложенное учебное содержание обеспечивает возможность работы по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов учащихся разного уровня подготовки. Благодаря увлекающей форме подачи материала и нарастающей сложности задач, предлагаемых как для разбора в классе, так и для самостоятельной проработки дома, каждый учитель или сам ученик могут выбрать тот уровень, который необходим и достаточен для достижения поставленных индивидуальных целей. Это может быть как довольно поверхностное понимание изучаемых вопросов математики, которое обеспечит лишь успешную сдачу государственной итоговой аттестации, так и более глубокая проработка, позволяющая заложить прочный фундамент для более глубокого понимания сложных разделов не только основной, но и средней школы. Последнее немаловажно для учащихся, желающих после школы продолжить свое обучение в университетах с повышенным требованием к знанию математики. Для этого дается первичное (хотя и достаточно глубокое) представление о таких понятиях как:

- сложные высказывания и законы логики для них;
- счетные и несчетные множества;
- метод математической индукции;
- системы линейных уравнений высокого порядка и системы линейных неравенств с модулями;
- симметрические системы уравнений;
- теорема Безу и теорема о рациональных нулях многочленов;
- методы приближенного вычисления квадратных корней;
- иррациональные уравнения и неравенства;
- уравнения и неравенства с параметром;
- вычисление погрешностей и приближенное решение уравнений с заданной точностью;
- задачи на максимум и минимум;
- бесконечные числовые последовательности;
- бесконечно убывающие геометрические прогрессии и их суммы;
- линейные рекуррентные соотношения и формулы их общего члена;
- график функции и качественное его построение;
- дробно-линейная функция и ее график;
- степенные функции с рациональным показателем, их свойства и графики;
- тригонометрические функции числового аргумента и их свойства и др.

Такой многоуровневый подход достигается не только отдельными необязательными параграфами «со звездочкой», но и регулярно встречающимися вставками «текста мелким шрифтом» внутри остальных параграфов. Эти вставки помогают развивать у школьников любопытство, прививают любовь к математике. В них содержатся несколько более сложные задачи, доказательства непростых утверждений, и просто занимательные факты, выходящие за формальные рамки стандартов для общеобразовательной школы. Однако освоение таких тем позволит учащимся успешно справляться со сложными заданиями части 2 ГИА.

Для еще более пытливых умов в каждом пункте каждого параграфа есть однадве (а иногда пять-шесть) задач «на смекалку». Эти задачи знакомят школьников с миром «олимпиадных задач». Большинство из этих задач соответствует уровню районного и регионального (а некоторые даже заключительного) этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике. Они способны подготовить (при желании учащегося) к успешному выступлению на олимпиадах, или хотя бы заинтересовать и побудить его к размышлению, поиску, развитию.

Важно также отметить, что темы (в том числе и без звездочек), пройденные к окончанию 9 класса, охватывают ряд заданий части В ЕГЭ, а также некоторые виды уравнений и неравенств заданий 13 и 15 ЕГЭ, что создает задел для подготовки к ЕГЭ в 10—11 классах.

Содержательно-методические линии курса «Учусь учиться» для 7—9 классов

Учитывая современный уровень развития математической теории, учебное содержание представлено в виде семи основных содержательно-методических линий, изучение которых подготавливается на дошкольной ступени, и затем непрерывно проходит через все ступени обучения с 1 по 9 класс, вплоть до выпускных классов средней школы: линий *моделирования, логической, числовой, алгебраиче-*

ской, геометрической, функциональной и *анализа данных*. Целостность курса достигается постоянным сопоставлением и взаимопроникновением результатов, полученных в различных содержательно-методических линиях.

Выбор последовательности учебного содержания по всем содержательно-методическим линиям курса алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов определяется логикой и этапами формирования математического знания в процессе познания в соответствии со вторым этапом процесса теоретического познания — этапа построения математической теории.

В процессе обучения математике с 1 по 6 классы были созданы условия для качественной подготовки учащихся к изучению всех разделов курса алгебры 7—9 классов основной школы. При этом использование деятельностного метода обучения и новых методик позволило существенно расширить спектр изучаемых вопросов. Так, в 5—6 классах были изучены логические понятия, освоены общие методы математической деятельности, которые создали прочную базу для изучения курса математики в 7—9 классах и старшей школе.

Начиная с 7 класса, изучение алгебраической линии становится основной целью курса и эта линия наряду с функциональной линией занимает существенную его часть. Важное место занимает линия анализа данных, ее материал располагается не отдельным блоком, а вводится «порционно» на протяжении всего курса. Остальные линии теперь выполняют поддерживающую их функцию. В рамках изучения школьного предмета «алгебра» геометрическая линия, начиная с 7 класса, содержательно не развивается и имеет фоновый характер для изучения остальных линий курса.

Рассмотрим содержание каждой линии и особенности ее изучения с точки зрения преемственности с предыдущей ступенью обучения.

Числовая линия

В начальной школе числовая линия строилась на основе счета предметов (элементов множества) и измерения величин: учащиеся осваивали смысл понятия натурального числа и нуля, принципы записи и сравнения целых неотрицательных чисел, смысл и свойства арифметических действий, взаимосвязи между ними, приемы устных и письменных вычислений, прикидки, оценки и проверки результатов арифметических действий, зависимости между их компонентами и результатами, способы нахождения неизвестных компонентов. С другой стороны, они знакомились с различными величинами и общим принципом их измерения, учились выполнять действия со значениями величин (именованными числами).

Использование деятельностного метода обучения позволило не только сохранить в полном объеме содержание программы по математике традиционной начальной школы, но и обогатить его с учетом сенситивных периодов развития детей. Так, в 3 классе они изучали нумерацию и действия с целыми неотрицательными числами в пределах 12 разрядов, в 4 классе — дроби, сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, смешанные числа.

В 5—6 классах учащимися изучены обыкновенные и десятичные дроби (включая и периодические десятичные дроби) и отрицательные числа. Таким образом, к началу 7 класса учащиеся владеют понятием рационального числа и выполняют вычисления с рациональными числами. Учащиеся знакомились с историей развития понятия числа и с методом расширения числовых множеств. Перед ними ставилась проблема недостаточности изученных чисел для измерения величин (например, длины диагонали квадрата со стороной 1), к которой учащиеся вернутся в 8 классе и разрешат путем введения понятия арифметического квадратного корня. На достаточно серьезном уровне с учащимися изучались вопросы, связанные с делимостью чисел: понятие делимости, свойства делимости и признаки делимости на 2, 5, 10, 25 и 4, 125 и 8, на 3 и 9, а также их комбинации, НОД, НОК, простые и составные числа.

В 7 классе учащиеся вновь обращаются к понятию простого и составного числа, знакомятся с *основной теоремой арифметики* (любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей, при этом два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться лишь порядком сомножителей), знакомятся с *каноническим* разложением числа на простые множители, дополняют известные им способы нахождения НОД алгоритмом Евклида. Они уточняют известные им свойства делимости и знакомятся с новыми (на данной ступени обучения эти вопросы уже можно рассматривать как содержание алгебраической линии курса).

В 7 классе в связи с введением аксиоматического метода учащиеся строят теорию делимости на множестве целых чисел. Они получают возможность познакомиться со сравнениями и их свойствами, построить арифметику остатков. Построенная теория делимости важна не только своей эстетикой, возможностью системно повторить известные учащимся свойства делимости, она позволяет применить изученный аксиоматический метод построения математических теорий. Здесь учащиеся осваивают методы решения задач на делимость, которые могут оказаться полезными в разных математических конкурсах и олимпиадах.

В 7 классе учащиеся уточняют понятие рационального числа и учатся переводить периодические дроби в обыкновенные.

В 8 классе они знакомятся с определением арифметического квадратного корня, после знакомства с иррациональными числами у учащихся формируется понятие действительного числа.

В 9 классе понятие корня расширяется: у учащихся формируется понятие кубического корня, они получают представление о корнях высших степеней.

Алгебраическая линия

В рамках изучения алгебраической линии в 5—6 классах учащиеся учились использовать буквенные обозначения для формулировки и доказательства общих утверждений. Это позволяло им проводить доказательство свойств и признаков делимости, свойств пропорций и др. Учащиеся получили представления о числовых и буквенных выражениях, их чтении, записи, целесообразности использования букв. Учащиеся находили значения буквенных выражений при заданных значениях букв, выполняли преобразования при решении уравнений. Таким образом, обеспечена качественная подготовка детей к изучению программного материала по алгебре 7—9 классов.

Рассмотрим, как развивается алгебраическая линия курса в 7—9 классах, условно выделяя следующие ее направления:

- выполнение тождественных преобразований выражений;
- понятие степени числа и применение ее свойств;
- решение уравнений;
- решение неравенств.

В 7 классе повторяются и систематизируются известные учащимися законы арифметических действий, их представления о равносильных выражениях и равносильных *преобразованиях*. Опираясь на известные им законы арифметических действий, учащиеся самостоятельно строят простейшие правила равносильных преобразований. После того как правила равносильных преобразований сформулированы, учащиеся выполняют преобразования буквенных выражений, которые выполнялись ими и раньше, однако обосновывают они их теперь по-новому. В связи с мощной алгебраической подготовкой, которая осуществлялась в курсе, выполнение подобных заданий у основной части семиклассников не вызовет затруднений. В отличие от предыдущей ступени обучения выполнение равносильных преобразований алгебраических выражений на данном этапе обучения является обязательным навыком.

Далее с учащимися рассматриваются преобразования алгебраических выражений, содержащих произведения и частные. В связи с формулировкой правил равносильных преобразований произведений учащиеся получают возможность научиться преобразовывать алгебраические дроби и выражения, содержащие знак деления.

В 7 классе у учащихся формируются понятия одночлена и многочлена, их стандартного вида, их степени; формируется умение выполнять арифметические действия с одночленами, складывать и вычитать многочлены; умножать одночлен на многочлен и многочлен на многочлен. В 8 классе в рамках углубленного изучения математики учащиеся учатся делить многочлен на многочлен и применяют это умение для выделения целого выражения в дробном (что используется, например, при решении дробно-рациональных уравнений, доказательстве ограниченности последовательностей и пр.)

В 7 классе учащиеся получают представление о формулах сокращенного умножения, как о формулах, позволяющих рационализировать процесс алгебраических преобразований, связанных с умножением. Учащиеся знакомятся со следующими из них: формулами квадрата суммы и квадрата разности; разности квадратов; куба суммы и куба разности; суммы кубов и разности кубов. Учащиеся учатся применять формулы сокращенного умножения для алгебраических преобразований, связанных с умножением, и рационализации вычислений. Более подготовленных учащихся можно познакомить с использованием треугольника Паскаля для возведения двучлена в произвольную натуральную степень.

При углубленном уровне изучения математики в 9 классе учащиеся возвращаются к этому вопросу. Они знакомятся (а в рамках углубленного изучения учатся доказывать) с биномом Ньютона и формулами суммы и разности высоких степеней. Учащиеся обнаруживают связь между треугольником Паскаля (с которым они познакомились в седьмом классе), числами сочетаний (восьмой класс) и коэффициентами в разложении бинома Ньютона.

В 7 классе учащиеся учатся раскладывать многочлены на множители следующими способами: вынесением за скобки общего множителя, способом группировки, с помощью формул сокращенного умножения. Они применяют при разложении многочленов на множители различные вспомогательные приемы, такие как, перестановка слагаемых; представление члена многочлена в виде суммы или разности подобных ему членов; прибавление и вычитание одного и того же слагаемого, выделение полного квадрата. Далее они применяют разложение на множители для алгебраических преобразований, решений уравнений (включая квадратные уравнения) и рационализации вычислений. В рамках опережающего обучения семиклассникам предлагается использовать разложение на множители для сокращения алгебраических дробей.

В 8 классе после введения понятия алгебраической дроби учащиеся выполняют преобразование дробно-рациональных выражений. После того, как учащиеся познакомятся с понятием квадратного арифметического корня и его свойствами, они учатся выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни. В 9 классе с развитием понятий корня и степени учащиеся получают возможность научиться преобразовывать соответствующие выражения.

К седьмому классу у учащихся сформировано *понятие степени* натурального числа с натуральным показателем, они умеют находить в простейших случаях значения степеней с натуральным показателем и выполнять действия в простейших числовых выражениях, содержащих степени.

В пятом классе было введено определение степени с натуральным показателем на множестве натуральных чисел. Однако учащиеся имеют представление и о степени рационального числа, потому что по мере их знакомства с числами в курсе 5—6 классов учащимся предлагались простейшие задания на возведение в степень обыкновенных и десятичных дробей, отрицательных чисел. Эта работа велась с целью формирования первичного опыта у учащихся или как опережающее обучение для более подготовленной части учащихся, поэтому знание понятия степени и умение его применять на множестве рациональных чисел не являлись обязательными результатами обучения для всех учащихся. В седьмом классе задачи формирования у всех учащихся понятия натуральной степени рационального числа, умение применять свойства степеней для преобразования выражений и рационализации вычислений становятся обязательными.

В 7 классе вводится определение степени рационального числа с натуральным показателем, понятие нулевой степени рационального числа. Учащиеся знакомятся со свойствами степеней и используют их для преобразований выражений.

В 9 классе понятие степени расширяется следующим образом. Сначала учащиеся рассматривают степень с отрицательным показателем, в более подготовленных классах доказывается, что известные учащимся свойства степеней выполняются для степеней с отрицательным показателем. Изучение корня *n*-ой степени дает возможность рассмотреть с учащимися степень с дробным показателем, у них формируется понятие степени с рациональным показателем. Учащиеся учатся преобразовывать алгебраические выражения со степенями с рациональным показателем.

К 7 классу учащиеся владеют следующими знаниями *об уравнениях*: понятием уравнения, переменной в уравнении, корня уравнения, они знают, что значит решить уравнение, им известен способ решения уравнения с помощью равносильных преобразований. Помимо традиционно предлагаемых для решения в 5—6 классах уравнений, учащиеся знакомились с решением простейших уравнений с модулями. В 7 классе учащиеся знакомятся с определением равносильных уравнений, равносильных преобразований уравнений, уточняют правила равносильных преобразований уравнений. Учащиеся знакомятся с понятием линейного уравнения с одной переменной, семиклассники выводят алгоритм решения линейного уравнения с одной переменной. Учащиеся учатся решать уравнения с модулями следующих видов: $|kx + b| = c$ $(k \neq 0)$, $|ax + b| = |cx + d|$, а также уравнения, содержащие несколько модулей. Более подготовленные учащиеся имеют возможность познакомиться со способом решения линейных диофантовых уравнений с двумя переменными.

В 7 классе учащиеся уточняют свои представления о системе уравнений, вводится понятие системы линейных уравнений с двумя переменными. Для этого сначала семиклассники знакомятся с понятием линейного уравнения с двумя переменными, учатся строить его график и находить его решения. После этого учащиеся знакомятся с понятием системы уравнений и графическим способом ее решения. Более подготовленные учащиеся имеют возможность научиться применять теорему о целочисленных точках графика уравнения для решения систем. Далее учащиеся знакомятся с алгебраическими способами решения систем.

В 8 классе учащиеся возвращаются к системам линейных уравнений. Они повторяют способы их решения в ходе решения текстовых задач, а также при решении систем уравнений с модулями, которые сводятся к решению систем линейных уравнений с двумя переменными. В ходе углубленного изучения математики рассматриваются вопросы аналитического способа определения количества решений системы, а также решения систем с большим количеством переменных.

В 7 классе учащиеся переходят к рассмотрению других видов рациональных уравнений. Сначала у учащихся формируется понятие квадратного уравнения: они учатся решать квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным, с помощью замены переменной (вводится понятие биквадратного уравнения). После того как учащиеся познакомятся с понятием алгебраической дроби и ее свойствами и научатся выполнять арифметические действия с алгебраическими дробями, они переходят к решению дробно-рациональных уравнений. При решении дробно-рациональных уравнений учащиеся используют несколько способов решения, основанных на преобразовании дробных выражений к целым с учетом

ОДЗ и на условии равенства алгебраической дроби нулю, а также на основном свойстве пропорции. Более подготовленные учащиеся имеют возможность познакомиться и с другими способами решения дробно-рациональных уравнений — замены переменной и выделении целой части алгебраической дроби, а также их комбинировании.

В 9 классе учащиеся учатся решать новые типы рациональных уравнений высоких степеней (в том числе и возвратные уравнения), сводя их к решению квадратных и линейных уравнений. В рамках углубленного изучения они знакомятся с методом неопределенных коэффициентов. Кроме того, используя следствие из теоремы Безу и изученный в восьмом классе способ деления многочленов в столбик, учатся раскладывать многочлены на множители (а значит, и сводить рациональные уравнения к более простым) при помощи угадывания корней. Они знакомятся (а в рамках углубленного изучения доказывают) теорему о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами. Учащиеся учатся решать простейшие (а в рамках углубленного изучения и более сложные) иррациональные уравнения. Также происходит первичное знакомство с некоторыми приближенными методами решения уравнений.

В 9 классе имеющиеся навыки решения систем линейных уравнений методами подстановки и алгебраического сложения переносятся на системы нелинейных уравнений. Также рассматриваются некоторые типы систем, которые решаются другими методами: системы с однородными уравнениями и др. В рамках углубленного изучения учащиеся знакомятся с методом упрощения симметрических систем уравнений.

К 7 классу учащиеся уже умеют решать простейшие *неравенства*, изображая их решение на числовой прямой. В 7 классе уточняются имеющиеся у учащихся знания о неравенствах (что такое неравенство, решение неравенства, что значит решить неравенство), вводится понятие строгого и нестрого неравенств. Знакомясь с кусочно-линейными функциями, семиклассники рассматривали различные числовые промежутки, их названия, обозначения и геометрическое представление на упрощенной числовой прямой. Поэтому при изучении неравенств они только повторяют такие числовые промежутки, как открытый и замкнутый лучи, а также знакомятся с промежутком вида $(-\infty; +\infty)$.

В 7 классе учащиеся знакомятся с определением равносильных неравенств, равносильных преобразований неравенств, с правилами равносильных преобразований неравенств, после чего знакомятся с понятием линейного неравенства с одной переменной и выводят алгоритм решения линейного неравенства с одной переменной. Учащиеся имеют возможность научиться решать уравнения с модулями. Однако формирование этого умения не является обязательным для изучения при 3 ч алгебры в неделю.

В 8 классе учащиеся учатся решать системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной (параллельно тренируясь находить объединение и пересечение числовых промежутков); знакомятся с графическим представлением решения линейных неравенств с двумя переменными, а также их систем. В рамках углубленного изучения учатся решать подобные задачи с модулями. Восьмиклассники учатся решать квадратные неравенства, знакомятся с методом интервалов для решения рациональных неравенств, учатся доказывать неравенства.

В 9 классе учащиеся учатся решать простейшие (а в рамках углубленного изучения и более сложные) иррациональные неравенства. Известные способы решения систем и совокупностей линейных неравенств переносятся на системы и совокупности квадратных и иррациональных неравенств.

Линия моделирования

Большинство изученных алгоритмов решения уравнений и неравенств учащиеся применяют при решении текстовых задач. Особенностью курса является то, что мотивацией к изучению нового типа уравнений (или неравенств) служит необходимость решения практических задач (исключением здесь служит 9 класс). После того, как получен общий способ решения той или иной математической модели, учащиеся возвращаются к решению задачи, вызвавшей необходимость в построении новой математической теории (введения новых понятий и алгоритмов действий). Таким образом, уделяется внимание всем трем этапам математического моделирования (этапу математизации действительности; этапу изучения математической модели и этапу приложения полученных результатов к реальному миру). В результате учащиеся осознают практическую значимость математической науки и ее место в окружающем их мире. В рамках линии моделирования (линии текстовых задач) учащиеся овладевают всеми видами математической деятельности, осознают практическое значение математических знаний, у них формируются универсальные учебные действия, развивается мышление, воображение, речь.

Для решения задач в 7—9 классах учащиеся используют наработанный ими за 1—6 класс инструментарий (схемы и таблицы и пр.), применяют алгоритм решения задач методом математического моделирования и уточняют его. Они узнают, что в качестве математической модели может быть получено не только уравнение, но и неравенство, а также несколько соотношений, описывающих взаимосвязи между величинами, указанные в условии задачи (или заданные в условии задачи неявно).

В 9 классе учащиеся знакомятся с абсолютной и относительной погрешностью, а также учатся ее применять для решения реальных задач, входные данные которых не могут быть вычислены точно.

Функциональная линия

Рассмотрим, как развивается функциональная линия курса в 7—9 классах, условно выделяя следующие ее направления:

- Понятие функции;
- Изучаемые виды функций;
- Изучаемые свойства функций;
- Числовые последовательности, как функции натурального аргумента;
- Тригонометрические функции.

К 7 классу в результате функциональной пропедевтики учащиеся знают понятие переменной, умеют работать с координатной плоскостью, имеют опыт построения графиков по формулам и таблицам. Им известно, что с помощью переменных можно представлять зависимости между величинами, фиксировать их с помощью формул, таблиц и графиков. Имеют представление об обратной и прямой пропорциональности, их графиках. Кроме того, в шестом классе учащиеся получили первичное представление об обобщенной функциональной зависимости между величинами как о зависимости определенного вида. Поэтому в 7 классе при введении одного из центральных математических понятий — *понятия функции*, учащимся остается лишь еще раз уточнить его практическую значимость (прогнозирование реальных событий, кодирование) и познакомиться с его новым названием. Вплоть до 9 класса учащиеся неоднократно возвращаются к понятию функции и уточняют его. В итоге у учащихся формируется понятие функции, как правила сопоставления элементов двух множеств произвольной природы.

В соответствии с общим методологическим подходом, принятым в данном курсе, знакомство с любой новой функции в 7—8 классах начинается с рассмотрения практических задач, обобщенным описанием которых она является. Таким образом изучаются следующие *виды функций*: в 7 классе — прямая пропорциональность, линейная и кусочно-линейная функция, в 8 классе — нелинейные функции $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, степенные функции с натуральным показателем $y = x^2$, $y = x^3$, кусочно-заданная функция, а также квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$.

Начиная с 9 класса, функции вводятся в курсе исходя из внутренней логики развития математической теории. В рамках углубленного изучения рассматриваются: степенная функция с рациональным показателем и дробно-линейная функция, числовые последовательности рассматриваются как функции, заданные на множестве натуральных чисел, вводятся тригонометрические функции числового аргумента.

Отметим, что изучение кусочно-линейной функции в 7 классе было подготовлено работой с графиками движения с переменной скоростью (учащиеся анализировали и строили графики движения, начиная с 4 класса). Это понятие расширяется в 8 классе до кусочно-заданной функции и используется при построении графиков функций с модулем, вплоть до изучения общего способа построения графиков вида $y = |f(x)|$ $y = f(|x|)$.

Каждая из изучаемых функций исследуется, строится ее график, выявляются ее *свойства*, такие как монотонность, четность и нечетность и др. В 9 классе знания о свойствах функции систематизируются — рассматриваются общие свойства функции. В рамках углубленного изучения функций учащиеся знакомятся с такими свойствами, как периодичность и ограниченность. Дается общий план построения графика функции.

В 9 классе рассматриваются вопросы преобразования графиков функций, что позволяет на основе изученных ранее простых функций строить графики более сложных, используя параллельный перенос, симметрию, сжатие (растяжение).

В 9 классе вводится понятие *числовой последовательности* как функции, заданной на множестве натуральных чисел. Рассматриваются способы задания последовательностей. В рамках углубленного изучения рассматриваются такие свойства последовательностей как монотонность и ограниченность.

Изучаются важные виды последовательностей — арифметические и геометрические прогрессии. Выводятся формулы общего члена, суммы первых членов прогрессии.

В рамках углубленного изучения рассматриваются сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, линейные рекуррентные соотношения (и как их частные случаи арифметико-геометрическая прогрессия, последовательность Фибоначчи).

В 9 классе учащиеся получают возможность познакомиться с элементами тригонометрии. После введения понятия *тригонометрических функций* числового аргумента, изучаются их основные свойства и выводятся основные формулы тригонометрии, что готовит учащихся к изучению тригонометрии в старших классах.

Логическая линия

Достаточно серьезное внимание уделяется в курсе развитию логической линии. В 5—6 классах логическая линия разворачивается в цепочку взаимосвязанных вопросов: математический язык — высказывания — доказательство — методы доказательства — определения — равносильные предложения — отрицание — логическое следование — теорема и т.д. В 7 классе к изучению некоторых из этих вопросов учащиеся возвращаются. Так учащиеся уточняют структуру определения, знакомятся с доказательством методом от противного, получают возможность изучить понятие логического вывода на основе диаграмм Эйлера — Венна и причины и виды логических ошибок.

В 8 классе уточняются понятия «необходимость», «достаточность», «свойство», «признак», «критерий». Учащиеся получают представление о понятиях конъюнкция и дизъюнкция. Изучаются сложные высказывания. Выводятся формулы де Моргана.

Стохастическая линия

Стохастическая линия, начиная с начальной школы, целенаправленно формирует у учащихся информационную грамотность; умение самостоятельно получать информацию — из наблюдений, справочников, энциклопедий, Интернет-источников, бесед; работать с полученной информацией: анализировать, систематизировать и представлять в форме схем, таблиц, конспектов, диаграмм и графиков; делать выводы; выявлять закономерности и существенные признаки; проводить классификацию; осуществлять систематический перебор вариантов.

В 7 классе учащиеся возвращаются к вопросу о способах упорядочивания информации, систематизируют накопленные знания и используют при выполнении различных заданий практической направленности. Рекомендуется продолжать эту работу не только на уроках, но и во внеурочной проектной деятельности, кружковой работе, при создании собственных информационных объектов — презентаций, сборников задач и примеров, стенгазет и информационных листков и т. д. В ходе этой деятельности учащиеся получают возможность развивать навыки работы с компьютером, необходимые для обучения в школе и современной жизни.

В 7—9 классах классе учащиеся знакомятся также с *элементами комбинаторики*, *статистики, теории вероятностей*.

В начальной школе, а затем в 5—7 классах у учащихся формируется опыт систематического перебора вариантов с помощью выбора логики перебора, таблиц, дерева возможностей. Они использовали его для обоснования суждений методом перебора и для решения задач на смекалку. В 8 классе учащиеся систематизируют этот опыт и выводят новые для них правила комбинаторики: правило произведения, понятие перестановки и формулу подсчета числа перестановок. Как обычно, целесообразность построения нового математического инструмента раскрывается посредством рефлексивного анализа практической задачи, в ходе решения которой выявляется недостаточность имеющихся инструментов перебора.

Аналогично, в 9 классе исследуются перестановки с повторениями, выводятся формулы для числа размещений и сочетаний, что позволяет решать комбинаторные задачи достаточно высокого уровня сложности.

С проблемой статистических характеристик процессов учащиеся сталкиваются в 7 классе и знакомятся со следующими статистическими показателями: *среднее значение, мода, медиана и размах* набора данных. В 8 классе эти характеристики дополняются статистическими показателями *дисперсия* и *частота*, причем показатель частота используется как мостик, связывающий изучение статистики и теории вероятностей. Также в рамках изучения статистики рассматривается понятие диаграммы рассеивания; случайной изменчивости; случайного выброса; понятие случайного выбора.

Здесь же, в 8 классе учащиеся знакомятся с классическим определением вероятности, а после этого рассматривают статистическую вероятность и взаимосвязь этих понятий. Далее вводится современное определение вероятности, которое формулируется на языке теории множеств. Учащиеся знакомятся с применением диаграмм Эйлера-Венна для решения задач по теории вероятностей. Вводятся понятия противоположных событий, объединения и пересечения событий. Рассматривается умножение вероятностей, понятие условной вероятности, формула полной вероятности.

В 9 классе учащиеся получают представление о геометрической вероятности, решают более сложные вероятностные задачи с применением комбинаторных рассуждений. Далее учащиеся изучают случайные величины и их распределения, операции со случайными величинами. Рассматривается понятие математического ожидания и дисперсии в теории вероятностей; формулируется закон больших чисел.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПО КУРСУ «УЧУСЬ УЧИТЬСЯ» ДЛЯ 7 КЛАССА

Организовать работу по данному учебнику возможно в условиях различных учебных планов образовательных учреждений. Тематическое планирование по изучению курса 7 класса разработано в двух вариантах — на 102 ч и на 136 ч.

3 ч в неделю, всего 102 ч

№ п.п. учебника	Название пункта	Кол-во часов
Глава 1. Построение математической теории (6 часов)		
§ 1. Математическое моделирование реальных процессов		**4**
1.1.1	Математическая модель реальной задачи	2
1.1.2	Основные требования к математической модели	2
Контрольная работа на повторение. К1—3		2
Глава 2. Введение в теорию делимости (8 часов)		
§ 1. Делимость на множестве натуральных чисел		**8**
2.1.1	Делимость чисел и ее свойства	2
2.1.2	Простые числа	2
2.1.3	Деление с остатком	2
2.1.4	Алгоритм Евклида	2
Глава 3. Законы равносильных преобразований алгебраических выражений (11 часов)		
§ 1. Рациональные числа и законы арифметики		**4**
3.1.1	Множество рациональных чисел	2
3.1.2	Законы арифметических действий и равносильные преобразования	2
§ 2. Равносильные преобразования алгебраических выражений		**7**
3.2.1	Равносильные преобразования алгебраических сумм	2
3.2.2	Равносильные преобразования произведений	3
Контрольная работа к главам 2 и 3. К2—3		2
Глава 4. Введение в теорию многочленов (37 часов)		
§ 1. Степень с натуральным показателем		**9**
4.1.1	Понятие степени с натуральным показателем	2
4.1.2	Свойства степени с натуральным показателем	5
Контрольная работа к § 1 главы 4. К3-3		2
§ 2. Многочлены и действия с ними		**10**
4.2.1	Одночлены	1
4.2.2	Многочлены	1
4.2.3	Сложение и вычитание многочленов	2
4.2.4	Умножение одночлена на многочлен	1
4.2.5	Умножение многочлена на многочлен	3
Контрольная работа к § 2 главы 4. К4—3		2

№ п.п. учебника	Название пункта	Кол-во часов
§ 3. Формулы сокращенного умножения		**9**
4.3.1	Квадрат суммы и разности	2
4.3.2	Разность квадратов	2
4.3.3	Куб суммы и разности	2
4.3.4	Сумма и разность кубов	3
§ 4. Разложение многочленов на множители		**9**
4.4.1	Вынесение общего множителя за скобки	2
4.4.2	Способ группировки	2
4.4.3	Формулы сокращенного умножения и разложение многочленов	1
4.4.4	Разложение на множители с применением нескольких способов	2
Контрольная работа к §§ 3 и 4 главы 4. К5-3		2
Глава 5. Введение в теорию функций (13 часов)		
§ 1. Понятие функции и ее практическое применение		**4**
5.1.1	Функциональная зависимость между величинами	2
5.1.2	Способы задания функции	2
§ 2. Линейные процессы и линейная функция		**9**
5.2.1	Прямая пропорциональность	2
5.2.2	Линейная функция и ее график	2
5.2.3	Кусочно-линейные функции	3
Контрольная работа к главе 5, К6-3		2
Глава 6. Введение в теорию линейных уравнений и неравенств (20 часов)		
§ 1. Линейные уравнения		**7**
6.1.1	Линейные уравнения и их решение	3
6.1.2	Решение уравнений с модулями	4
§ 2. Линейные неравенства		**5**
6.2.1	Линейные неравенства и их решение	3
Контрольная работа к главе 6. К7-3		2
§ 3. Системы линейных уравнений		**8**
6.3.1	Линейное уравнение с двумя переменными и его график	2
6.3.2	Системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Графическое решение системы	2
6.3.3	Алгебраические методы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными: способ подстановки и способ сложения	4
Глава 7. Введение в статистику (4 часа)		
§ 1. Сбор и анализ информации		**4**
7.1.1	Способы упорядочивания информации	2

№ п.п. учебника	Название пункта	Кол-во часов
7.1.2	Статистические характеристики	2
Повторение (3 часа)		
Повторение материала 7 класса		**3**

4 ч в неделю, всего 136 ч

Глава 1. Построение математической теории (12 часов)		
§ 1. Математическое моделирование реальных процессов		**4**
1.1.1	Математическая модель реальной задачи	2
1.1.2	Основные требования к математической модели	2
§ 2. Основы построения математической теории		**9**
1.2.1	Метод построения математической теории	2
1.2.2	Некоторые методы математического доказательства	2
1.2.3	Логический вывод	2
1.2.4	Логические ошибки	1
Контрольная работа на повторение. К1—4		2
Глава 2. Введение в теорию делимости (19 часов)		
§ 1. Делимость на множестве натуральных чисел		**8**
2.1.1	Делимость чисел и ее свойства	2
2.1.2	Простые числа	2
2.1.3	Деление с остатком	2
2.1.4	Алгоритм Евклида	2
§ 2. Развитие теории делимости		**11**
2.2.1	Делимость целых чисел	2
2.2.2	Классификация целых чисел по остаткам от деления	2
Контрольная работа по Главе 2. К2—4		2
2.2.3	Сравнения и их свойства.	2
2.2.4	Арифметика остатков.	1
2.2.5	Решение задач с помощью сравнений.	2
Глава 3. Законы равносильных преобразований алгебраических выражений (8 часов)		
§ 1. Рациональные числа и законы арифметики		**4**
3.1.1	Множество рациональных чисел	2
3.1.2	Законы арифметических действий и равносильные преобразования	2
§ 2. Равносильные преобразования алгебраических выражений		**4**
3.2.1	Равносильные преобразования алгебраических сумм	2
3.2.2	Равносильные преобразования произведений	2
Глава 4. Введение в теорию многочленов (44 часа)		
§ 1. Степень с натуральным показателем		**10**

№ п.п. учебника	Название пункта	Кол-во часов
4.1.1	Понятие степени с натуральным показателем	3
4.1.2	Свойства степени с натуральным показателем	5
Контрольная работа к Главе 3 и § 1 Главы 4. К3—4		2
§ 2. Многочлены и действия с ними		**9**
4.2.1	Одночлены	1
4.2.2	Многочлены	2
4.2.3	Сложение и вычитание многочленов	2
4.2.4	Умножение одночлена на многочлен	2
4.2.5	Умножение многочлена на многочлен	2
§ 3. Формулы сокращенного умножения		**12**
4.3.1	Квадрат суммы и разности	2
4.3.2	Разность квадратов	3
4.3.3	Куб суммы и разности	2
4.3.4	Сумма и разность кубов	3
Контрольная работа к §2—3 главы 4. К4—4		2
§ 4. Разложение многочленов на множители		**13**
4.4.1	Вынесение общего множителя за скобки	1
4.4.2	Способ группировки	3
4.4.3	Формулы сокращенного умножения и разложение многочленов на множители	2
4.4.4	Разложение на множители с применением нескольких способов	3
4.4.5	Решение задач с помощью разложения многочленов на множители	2
Контрольная работа к § 4 главы 4. К5—4		2
Глава 5. Введение в теорию функций (14 часов)		
§ 1. Понятие функции и ее практическое применение		**5**
5.1.1	Функциональная зависимость между величинами	2
5.1.2	Способы задания функции	2
5.1.3	Функциональная зависимость и кодирование информации	1
§ 2. Линейные процессы и линейная функция		**9**
5.2.1	Прямая пропорциональность	1
5.2.2	Линейная функция и ее график	2
5.2.3	Кусочно-линейные функции	4
Контрольная работа к Главе 5. К6—4		2
Глава 6. Введение в теорию линейных уравнений и неравенств (27 часов)		
§ 1. Линейные уравнения		**8**
6.1.1	Линейные уравнения и их решение	3

№ п.п. учебника	Название пункта	Кол-во часов
6.1.2	Решение уравнений с модулями	3
6.1.3	Решение линейных уравнений в целых числах	2
§ 2. Линейные неравенства		**9**
6.2.1	Линейные неравенства и их решение	3
6.2.2	Решение неравенств с модулями	4
Контрольная работа к главе 6. К7—4		2
§ 3. Системы линейных уравнений		**10**
6.3.1	Линейное уравнение с двумя переменными и его график	2
6.3.2	Системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Графическое решение системы	2
6.3.3	Алгебраические методы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными: способ подстановки и способ сложения	4
Контрольная работа в Главе 6 (§3)		2
Глава 7. Введение в статистику (8 часов)		
§ 1. Сбор и анализ информации		**8**
7.1.1	Способы упорядочивания информации	3
7.1.2	Статистические характеристики	3
Контрольная работа к Главе 7. К8-4		2
Повторение (2 часов)		
1.1.1 — 7.1.2	Повторение материала 7 класса	2

Общие рекомендации для учителя

Учителю средней школы, который начинает работать по учебникам 7 класса, важно знать программу 5—6 классов по данному курсу. Поэтому необходимо познакомиться с учебниками для 5—6 классов и системой эталонов (способов действий), которые учащиеся изучили в начальной школе.

В настоящее время разработаны варианты сценариев уроков для 7 классов по курсу математики «Учусь учиться», реализующих ТДМ и обеспеченных дидактическими, раздаточными и презентационными материалами (в программе Powe*r* Poi*nt*).

Система обучающего контроля

На уроках открытия нового знания, при проведении обучающих самостоятельных работ и выполнении заданий творческого уровня оценивается только успех, ошибки выявляются и корректируются на основе определения их причин (то есть правил, алгоритмов, определений, которые усвоены недостаточно). На уроках рефлексии используется самоконтроль, отметки в журнал выставляются по желанию. Отметки за контрольную работу выставляются всем учащимся, при этом уровень трудности подбирается так, чтобы отметки 4 и 5 по силам было получить примерно 75% учащихся класса.

Отметим, что в курсе не ставится цель, чтобы каждым учеником были выполнены все задания из учебника. Обязательным минимумом результатов обучения по программе является уровень, определенный в образовательных стандартах, а уровень, который желательно достичь основной части учащихся общеобразовательной школы, определяется заданиями раздела «Задачи для самоконтроля».

Домашнее задание

Домашние задания состоят из двух частей:

- обязательная часть включает в себя 2—3 посильных для каждого учащегося задания примерно на 30 мин самостоятельной работы учащихся;
- необязательная часть — по 1—2 дополнительных задания.

В качестве обязательной части домашнего задания учителем выбираются задания из раздела, отмеченного буквой «Д». С учетом возрастных особенностей учащихся рекомендуется привлекать к отбору домашнего задания самих учащихся. В качестве необязательной части домашнего задания можно использовать задания из раздела «С».

Самопроверка учащимися обязательной части домашних заданий, коррекция ошибок и выставление в тетради отметок может осуществляться в начале урока самими учащимися по готовому образцу, представленному учителем с помощью презентаций, кодоскопа, переносных досок и т.д. Тогда при проверке тетрадей учитель оценивает лишь правильность самопроверки.

Дополнительную часть домашнего задания рекомендуется проверять индивидуально. Правильное решение задач на смекалку учащиеся по заданию учителя оформляют на листках, после чего они вывешиваются в классе с указанием фамилий тех, кто верно решил предложенные задачи. При оценке этих заданий выставляются только положительные отметки.

Методические рекомендации к организации учебного процесса

Глава 1. Построение математической теории

Основные цели изучения данной главы:

- повторить и систематизировать знания учащихся, полученные ими в курсе математики 5—6 классов;
- сформировать представление о математическом методе исследования реального мира (уточнить представления о методе математического моделирования, о математической модели);
- сформировать умение применять уточненный алгоритм решения задач методом математического моделир ования;
- сформировать представление об аксиоматическом методе построения математической теории;
- уточнить и систематизировать известные учащимся методы доказательства математических утверждений и познакомить учащихся с методом доказательства от противного;
- уточнить понятия делимости, простого и составного числа, изучить вопросы делимости, связанные с данными понятиями и систематизировать их с уже известными.

В первой главе 7 класса ранее изученный материал повторяется параллельно с изучением темы «Построение математической теории», что позволяет повторить ключевые темы 5—6 классов в интересной для учащихся форме. Таким образом, учащиеся имеют возможность вспомнить ранее изученный материал, выявить и устранить возможные пробелы в знаниях, но при этом «не топчутся на месте», а продвигаются вперед, существенно расширяя свои представления о математическом методе исследования реального мира. Этот прием «повторения с прибавлением» использовался и в начале пятого, и в начале шестого классов — он же применяется и в седьмом классе.

Следует понимать, что основной целью изучения этой главы является повторение, поэтому и контрольная работа по ее содержанию в основной своей части контролирует ключевые вопросы 5—6 классов: навыки вычислений с рациональными числами, решения уравнений и др. Этим же вопросам уделяется внимание и в разделе «Задачи для самоконтроля к Главе 1».

Изучая первую главу, учащиеся должны подготовиться к изучению содержания следующей главы «Введение в теорию делимости», поэтому из раздела для повторения учителю рекомендуется отбирать задания на применение свойств делимости, признаков делимости, соответствующих определений (№№ 42, 58 и др.)

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания учащиеся:

- *повторяют и систематизируют* полученные знания;
- *используют* математическую терминологию в устной и письменной речи;
- *составляют* математические модели реальных задач;
- *используют* схемы и таблицы;
- *строят и выполняют* алгоритмы чтения, записи и составления выражений;
- *работают* с различными математическими моделями;
- *решают* текстовые задачи;
- *решают* простейшие уравнения;
- *выполняют* действия с рациональными числами;
- *определяют вид*, истинность высказывания, *строят* отрицание ложных высказываний;
- *используют* методы проб и ошибок и полного перебора для решения уравнений.

§ 1. Математическое моделирование реальных процессов

П. 1.1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Основные содержательные цели:

1) Уточнить понятие математического моделирования и его этапов;

2) Повторить и уточнить алгоритм решения задач методом математического моделирования;

3) Тренировать умение применять новые шаги алгоритма для решения задач;

4) Тренировать умение читать и записывать буквенные выражения, выполнять простейшие преобразования буквенных выражений, находить их значения при данных значениях букв; закрепить действия с десятичными дробями и отрицательными числами; решение уравнений; решение простых задач вида $a + b = c$, $ab = c$, *на разностное и кратное сравнение; закрепить решение задач с помощью уравнений.*

Особенности изучения учебного содержания

В пятом классе учащиеся получили представление о математической модели, при решении задач они составляли различные модели: выражение, уравнение, пару уравнений. Пятиклассники получили опыт построения математической модели и работы с ней. В конце шестого класса учащиеся возвращались к понятию математического моделирования, были выделены три его основных этапа. При решении задач с помощью уравнения учащиеся фактически использовали частный случай алгоритма математического моделирования (называли они его алгоритмом решения задач с помощью уравнений).

В данном пункте известный учащимся алгоритм решения задач методом математического моделирования уточняется тремя новыми шагами:

- определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины;
- проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением;
- зафиксировать искомую величину.

Учащиеся оформляют составленную математическую модель по-новому. Так, например, при решении задачи **№ 3 (а)** учащиеся в качестве математической модели ранее записали бы только уравнение

$$x + (x + 49{,}58) + (x - 178{,}92) = 700{,}46.$$

Теперь математической моделью будет система, которая состоит не только из уравнения, но и неравенства, полученного из анализа множества значений, которые может принимать x. Помимо этого здесь же фиксируется искомая величина. Математическая модель имеет следующий вид.

$$\begin{cases} x + (x + 49{,}58) + (x - 178{,}92) = 700{,}46 \\ x > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x - 178{,}92 = ?}$$

Математическая модель, которая составляется учащимися по новому, уточненному, алгоритму, ее оформление, помогают избежать типичных ошибок учащихся при решении задач методом моделирования.

Часто полученный корень уравнения, составленного при решении задачи, еще не является ответом к ней. Фиксация значения величины, которую требуется найти, не даст учащемуся «забыть» о вопросе задачи и, как это бывает, автоматически записать найденный корень уравнения в ответ к задаче.

Определение множества значений, которые могут принимать переменные, и внесение этих соотношений в математическую модель направлено на предотвращение еще одной распространенной ошибки учащихся: найденное решение не соотносится учащимися с реальным процессом и бездумно записывается ими в ответ (вспомним всем известные 1,5 землекопа).

Учащиеся знакомятся со знаком системы, который означает, что все соотношения, отмеченные фигурной скобкой, должны выполняться одновременно. На данном этапе с учащимися рассматриваются системы уравнений с одной переменной и системы с двумя и более переменными (такие системы решаются методом подстановки и дальнейшего применения метода перебора). Решение систем второго вида на данном этапе является заданием повышенной сложности и не входит в обязательные результаты обучения.

Далее предлагается основа уроков открытия нового знания в технологии деятельностного метода.

Урок. Математическая модель реальной задачи

Новое знание

Уточненный алгоритм решения задач методом математического моделирования.

Актуализация

Повторить: этапы математического моделирования и алгоритм решения задач методом математического моделирования.

Задание на пробное действие

Дополнить алгоритм решения задач методом математического моделирования новыми шагами.

Фиксация затруднения

Мы не можем дополнить новыми шагами алгоритм.

Мы не можем обосновать то, что мы дополнили алгоритм всеми нужными шагами и то, что эти шаги правильные.

Фиксация причины затруднения

Не знаем, какие еще шаги требуются для решения задач методом математического моделирования.

Цель деятельности

Построить новый алгоритм решения задач методом математического моделирования.

Эталон

Уточненный алгоритм решения задач методом математического моделирования

I. Построение математической модели

1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

6) Установить взаимосвязи между величинами.
7) Составить уравнение и обосновать его.
8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.
9) Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью

10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод

11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

Приведем **примеры решений** некоторых заданий.

№ 2 (б)

Пусть x — необходимое количество яиц.
По условию $5(x - 3) - 2x$ на 5 больше x, т. е. равно $x + 5$.
Составим уравнение:
$5(x - 3) - 2x = x + 5$ $\longrightarrow$ $\boxed{3x - ?}$

$5x - 15 - 2x = x + 5 \Leftrightarrow 2x = 15 + 5 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = 10,\ 10 \in N$
$3 \cdot 10 = 30$ (я.) — удовл. условию задачи
Ответ: нужно взять 30 яиц для приготовления трех пирогов.

№ 2 (в)

	Высота,м	**Высота, после указанных изменений, м**
Останкинская башня	$x + 216$	$3(x + 216)$
Эйфелева башня	$x,\ x \in Q_+$	$x — 134$

По условию, сумма величин после изменения $3(x + 216)$ и $x - 134$ равна 1810.
Составим уравнение:
$3(x + 216) + (x — 134) = 1810,\ x \in Q_+$ $\longrightarrow$ $\boxed{x + 216 - ?}$
$3(x + 216) + (x - 134) = 1810,\ x \in Q_+$

$3x + 648 + x - 134 = 1810 \Leftrightarrow 4x + 514 = 1810 \Leftrightarrow 4x = 1296 \Leftrightarrow x = 324$
$324 + 216 = 540$ (м)
Ответ: высота Останкинской башни – 540 м.

№ 3 (а)

Пусть x тыс. руб. — выручка в феврале ($x > 0$). Выручка в январе была ($x + 49{,}58$) тыс. руб., в марте ($x - 178{,}92$) тыс. руб. Общая выручка за квартал составит $x + (x + 49{,}58) + (x - 178{,}92)$, что по условию равно 700,46 тыс. руб.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину.

$\begin{cases} x + (x + 49{,}58) + (x - 178{,}92) = 700{,}46 \\ x > 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boxed{x - 178{,}92 = ?}$

$x + x + 49{,}58 + x - 178{,}92 = 700{,}46;$
$3x = 700{,}46 + 178{,}92 - 49{,}58;$
$3x = 829{,}8;$
$x = 276{,}6;$
$276{,}6 > 0$
$276{,}6 - 178{,}92 = 97{,}68$ (тыс. руб.)

Ответ: 97,68 тысяч рублей получил магазин в марте.

№ 3 (б)

Пусть x Мб — размер первого файла, $x > 0$. Второй файл занимает $(x - 4{,}54)$ Мб, а третий — $(x + 5{,}61)$ Мб. Три файла занимают $x + (x - 4{,}54) + (x + 5{,}61)$, что по условию равно 112,73 Мб.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину.

$$\begin{cases} x + (x - 4{,}54) + (x + 5{,}61) = 112{,}73 \\ x > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x - 4{,}54 = \ ?}$$

$x + (x - 4{,}54) + (x + 5{,}61) = 112{,}73;$
$x + x - 4{,}54 + x + 5{,}61 = 112{,}73;$
$3x - 4{,}54 + 5{,}61 = 112{,}73;$
$3x + 1{,}07 = 112{,}73;$
$3x = 111{,}66;$
$x = 37{,}22$
$37{,}22 > 0$
$37{,}22 - 4{,}54 = 32{,}68$
Ответ: 32,68 Мб.

№ 3 (в)

Пусть фабрика выпустила x т клубничных конфет, тогда $x > 0$. Миндальных конфет выпустили $(x - 39{,}56)$ т, а сливочных — $(x + 97{,}69)$ т. Всего трех сортов фабрика выпустила $(x + (x - 39{,}56) + (x + 97{,}69))$ т, что по условию равно 524,48 т. Кроме того, из задачи ясно, что на фабрике не могли произвести отрицательное количество миндальных конфет, тогда $x - 39{,}56 \geqslant 0$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину.

$$\begin{cases} x - 39{,}56 \geqslant 0 \\ x + (x - 39{,}56) + (x + 97{,}69) = 524{,}48 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x - 39{,}56 = \ ?}$$

$3x = 466{,}35$
$x = 155{,}45$
$155{,}45 - 39{,}56 \geqslant 0$
Ответ: в августе 115,89 т выпустили миндальных конфет.

№ 4 (а)

Пусть x шт. — количество дисков, которое окупит все расходы ($x \in N$). «Чистая» прибыль с каждого диска равна (250 – 50) руб.

Тогда «чистая» прибыль с x дисков $(250 - 50)x$ руб. Сумма всех расходов за месяц 50 000 + 100 000 + 200 000 + 30 000 должна окупаться, т. е. должна быть равна $(250 - 50)x$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину.

$$\begin{cases} x \in N \\ (250 - 50)x = 50\,000 + 100\,000 + 200\,000 + 30\,000 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = \ ?}$$

$200x = 380\,000;$
$x = 1900$
$1900 \in N$
Ответ: 1900 дисков.

№ 4 (в)

Пусть цена закупки одного фонаря x руб., тогда $x > 0$. Доходы от продажи 4570 фонарей составят $570 \cdot 4570$ (руб.).

Расходы в месяц составят $(x \cdot 4570 + 300\,000 + 400\,000 + 76\,900)$ руб. Расходы окупаются, если доходы равны расходам.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину.

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4570x + 300\,000 + 400\,000 + 76900 = 570 \cdot 4570 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = \ ?}$$

$4570x = 1\ 828\ 000$
$x = 400$
$400 \geqslant 0$

Ответ: компания должна закупать фонари по цене 400 руб.

№ 5 (а)

I. $\begin{cases} x + y = 12, x \in N, y \in N \\ x = 5a + 3, a \in N_0 \\ y = 5b + 4, b \in N_0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x, y = ?}$

II. $(5a + 3) + (5b + 4) = 12$
$5(a + b) = 5$
$a + b = 1$
$x = 5 \cdot 0 + 3 = 3$ или $x = 5 \cdot 1 + 3 = 8$
$y = 5 \cdot 1 + 4 = 9$ $\quad y = 5 \cdot 0 + 4 = 4$

III. Две пары чисел 3 и 9; 8 и 4 удовлетворяют смыслу задачи: являются натуральными. При ненатуральных решениях задача о делимости теряет смысл.

№ 5 (б)

Пусть x и y — искомые числа, $x \in N, y \in N$, т.к. в условии говорится, что числа натуральные. По условию $x + y = 28$. Обозначим неполные частные соответствующих чисел a и b. Тогда по формуле деления с остатком имеем

$x = 8a + 5$, $y = 8b + 7$, где $a, b \in N_0$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомые величины:

$\begin{cases} x + y = 28, x \in N, y \in N \\ x = 8a + 5, a \in N_0 \\ y = 8b + 7, b \in N_0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x, y = ?}$

Все взаимосвязи, заданные в условии задачи, описаны соответствующими уравнениями.

$(8a + 5) + (8b + 7) = 28;$
$8(a + b) = 16;$
$a + b = 2;$

$a = b = 1;$	$a = 0, b = 2;$	$a = 2, b = 0;$
$x = 8 + 5 = 13;$	$x = 5;$	$x = 21;$
$y = 8 + 7 = 15;$	$y = 23;$	$y = 7.$

Все найденные числа являются натуральными.

Ответ: 5 и 23; 13 и 15; 21 и 7.

№ 7

а) Истинное.

б) Ложное, т. к. средним арифметическим называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

в) Истинное.

г) Ложное, т. к. натуральной степенью n числа a называется число a^n ,равное произведению n множителей, каждый из которых равен a.

№11 (б)

Пусть x чел. — первоначальное количество людей в вагоне. $x \in N$. После того, как из него вышли 9 человек, а вошли 17, в вагоне стало x — 9 + 17 чел., что по условию в 1,5 раза больше, чем x.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$x - 9 + 17 = 1{,}5x, x \in N \longrightarrow \boxed{1{,}5x \text{ — ?}}$

Все взаимосвязи, заданные в условии задачи, описаны данным уравнением.

$x + 8 = 1,5x \Leftrightarrow 0,5x = 8 \Leftrightarrow x = 16,\ 16 \in N$

$1,5 \cdot 16 = 24$ (чел.) — удовлетворяет условию задачи

Ответ: стало 24 человека.

№ 14

–31,2 — Т; –21,6 — О; –15,2 — П; –10,2 — О; –5,7 — Л; –3,9 — О; 20 – Г; 22,3 — И; 23,7 — Я.

№ 15*

Пусть было x учеников. $x \in N$. Каждый из них обменялся фотографиями с $(x - 1)$ людьми. Значит, всего обменов было $x(x - 1)$, что по условию равно 650.

$x(x - 1) = 650$

$x \in N$

Решение:

Методом проб и ошибок найдем $x = 26$, $26 \cdot 25 = 650$ (И). Для натуральных значений x:

если $x < 26$, то $x(x - 1) < 650$;

если $x > 26$, то $x(x - 1) > 650$.

Значит, решение единственное.

Ответ: 26 учеников.

№ 16*

Пусть длина неподвижного эскалатора равна a ступенек, скорость мальчика v ст./ед., а скорость эскалатора — x ст./ед.

	Скорость движения мальчика, ст./ед.
Неподвижный эскалатор	v
Движение вниз	$v + x$
Движение вверх	$v - x$

Рассмотрим движение мальчика и с точки зрения человека, стоящего вне эскалатора, и с точки зрения человека, стоящего на эскалаторе.

Время движения:

на эскалаторе	**вне эскалатора**
$\frac{45}{v}$	$\frac{a}{v + x}$
$\frac{225}{v}$	$\frac{a}{v - x}$

— значит, времени на движение вверх он затратил в 5 раз больше.Время величина постоянная как для наблюдателя на эскалаторе, так и для наблюдателя со стороны. Значит, $\frac{a}{v - x}$ в 5 раз больше .

Можно составить равенство: $\frac{a}{v - x} = \frac{5a}{v + x}$

$\frac{a}{v - x} = \frac{5a}{v + x} = \Leftrightarrow v + x = 5\,(v - x) \Leftrightarrow 4v = 6x \Leftrightarrow v = 1,5x,$

т. е. скорость мальчика в 1,5 раза больше скорости эскалатора.

Время величина постоянная как для наблюдателя на эскалаторе, так и для наблюдателя со стороны (воспользуемся выражениями для времени движения вниз):

$$\frac{45}{v} = \frac{a}{v + x}$$

Отсюда, $a = \frac{45(v + x)}{v}$, подставим в это равенство полученное выше соотношение $v = 1{,}5x$, получим $a = \frac{45(1{,}5\,x + x)}{1{,}5\,x} = \frac{45 \cdot 2{,}5\,x}{1{,}5\,x} = 75$

Ответ: 75 ступенек.

П. 1.1.2. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление об основных требованиях к математической модели: непротиворечивости и полноте;

2) уточнить алгоритм решения задач методом математического моделирования;

3) тренировать умение применять новые шаги алгоритма для решения задач;

4) повторить: методы работы с математическими моделями — метод проб и ошибок, метод перебора; виды высказываний; понятие отрицания высказывания; способы решения простейших неравенств;

5) тренировать умение выполнять действия с обыкновенными и десятичными дробями, отрицательными числами; умение решать простейшие уравнения и неравенства; решать составные задачи с использованием всех основных видов простых задач; решать задачи с помощью уравнений; умение определять вид высказывания и строить отрицание единичных высказываний, общих высказываний и высказываний о существовании.

Особенности изучения учебного содержания

Учащиеся знакомятся с основными требованиями к математической модели. Математическая модель должна удовлетворять требованиям достаточной простоты и достаточной полноты.

В связи с требованием достаточной полноты к математической модели алгоритм решения задач методом математического моделирования уточняется еще раз. При построении математической модели учащиеся учатся устанавливать те взаимосвязи между величинами, которые заданы в условии не явно, а возникают из свойств моделируемого объекта. Так, например, при решении задачи **№ 18 (а)** учащимися будет найдена длина ломаной AD: $AB + BC + CD = 2{,}4 + 2 + 3 = 7{,}4$ (см), однако все попытки учащихся построить эту ломаную, выполняя **№ 18 (б)** останутся неудачными. Ведь при составлении математической модели учащиеся не учли важного свойства моделируемого объекта: длина любой ломаной больше расстояния между ее началом и концом, и при решении задачи учащиеся получили ломаную, которая не существует. Выполнение этого задания можно использовать для проблематизации необходимости уточнения алгоритма новым шагом: «установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта)».

Для отработки нового шага алгоритма используется и другой геометрический материал: свойство углов треугольника. Гипотеза данного свойства была сформулирована учащимися еще в начальной школе при исследовании свойств треугольника, следует обговорить с учениками, что эту гипотезу они докажут позже на уроке геометрии (**№ 19**).

При нахождении решений построенной математической модели учащимися помимо традиционного метода равносильных преобразований используется метод перебора. Разберем его применение при решении задачи **№ 20**.

Далее Вам предлагается основа уроков открытия нового знания в технологии деятельностного метода.

Урок. Требование достаточной полноты к математической модели

Новое знание

Требование достаточной полноты математической модели. Уточненный алгоритм решения задач методом математического моделирования.

Актуализация

Повторить: алгоритм решения задач методом математического моделирования.

Задание на пробное действие

Задача № 17.

Постройте такую математическую модель к задаче, чтобы она удовлетворяла требованию достаточной полноты.

Фиксация затруднения

Не смогли построить нужную математическую модель.

Не смогли правильно построить.

Не смогли обосновать, что построенная математическая модель действительно удовлетворяет требованию достаточной полноты.

Фиксация причины затруднения

Не знаем, в чем заключается требование достаточной полноты; у нас нет алгоритма построения достаточно полной математической модели.

Цель деятельности

Узнать, в чем заключается требование достаточной полноты математической модели; научиться строить математическую модель, удовлетворяющую данному требованию.

Эталон

Требование достаточной полноты математической модели

Математическая модель удовлетворяет **требованию достаточной полноты**, если она содержит все существенные для решения задачи требования, которые следуют как из условия задачи, так и из свойств исследуемых объектов, которые могут и не описываться в явном виде.

Уточненный алгоритм решения задач методом математического моделирования

I. Построение математической модели

1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

6) Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта).
7) Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.
8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением.
9) Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью

10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод

11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 19 (2)

Так как величины углов последовательные четные числа, обозначим первый угол $2x°$, тогда второй угол равен $2x + 2°$, а третий равен $2x + 4°$.

Определим множество значений x.

По условию $2x \in N$. Величина угла любого треугольника это положительное число, меньшее 180°, значит, $0 < 2x < 180$. Учитывая, что величина угла является натуральным числом, левую часть неравенства можно опустить, достаточно указать $2x < 180$. Два условия можно записать в одно: $x = \{1; 2; 3...90\}$.[2]

По уточненному алгоритму нужно установить взаимосвязи, которые возникают из свойств треугольника (могут быть явно не указаны): сумма углов любого треугольника равна 180°.

По уточненному алгоритму нужно записать не только уравнение, но и *неравенство:*

$$\begin{cases} 2x < 180,\ 2x \in N \\ 2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 180. \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x = ? \\ 2x + 2 = ? \\ 2x + 4 = ? \end{matrix}$$

$6x + 6 = 180$

$x + 1 = 30$

$x = 29$, значит, $2x = 58$ $(58 < 180)$, $2x + 2 = 60$; $2x + 4 = 62$.

Ответ: 58°, 60°, 62°.

№ 19 (3)

Так как величины углов последовательные числа, кратные трем, обозначим первый угол $3x°$, тогда второй угол равен $3x + 3°$, а третий — $3x + 6°$.

Определим множество значений x. По условию $3x \in N$. Величина угла любого треугольника это положительное число, меньшее 180°, значит, $0 < 3x < 180$. Учитывая, что величина угла является натуральным числом, левую часть неравенства можно опустить, достаточно указать $3x < 180$.

Сумма углов $3x + (3x + 3) + (3x + 6)$ любого треугольника равна 180°.

Составим математическую модель и зафиксируем искомые величины.

$$\begin{cases} 3x < 180,\ 3x \in N \\ 3x + (3x + 3) + (3x + 6) = 180. \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 3x = ? \\ 3x + 3 = ? \\ 3x + 6 = ? \end{matrix}}$$

$3x + (3x + 3) + (3x + 6) = 180;$

$3x + 3x + 3 + 3x + 6 = 180;$

$9x + 9 = 180;$

$x + 1 = 20;$

$x = 19$

[2] Преобразовывать неравенство и сводить два этих условия к одному условию необязательно, т.к. данное действие является фактически решением системы неравенств. На данный момент у учащихся формируется умение строить математическую модель задачи. Решая задачу, учащиеся проверяют соответствие найденных корней неравенству подстановкой.

$3 \cdot 19 < 180$; $3 \cdot 19 \in N$

$57 < 180$, $57 \in N$

$57 + 3 = 60°$; $57 + 6 = 63°$.

Ответ: 57°; 60°; 63°.

№ 20 (а)

Пусть x дер. — количество тополей, y дер. — количество берез. Тогда дубов — y дер., кленов — y дер., т. к. количество берез, дубов и кленов одинаковое. Так как количество деревьев может выражаться только натуральным числом, то $x \in N$, $y \in N$. По условию x более, чем в три раза превышает число всех остальных деревьев, т. е. $x > 3(y + y + y)$. Известно, что число кленов и тополей меньше 12, т. е. $x + y < 12$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину

$$\begin{cases} x \in N, y \in N \\ x > 3(y + y + y) \\ x + y < 12. \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = ?}$$

$$\begin{cases} x \in N, y \in N \\ x > 9y \\ x + y < 12. \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = ?}$$

Найдем решение методом перебора ($x \in N$, $y \in N$).

Так как $x + y < 12$, то множество возможных значений сократится до $x < 12$, $y < 12$, т. е.

$x = \{1; 2; 3...11\}$ и $y = \{1; 2; 3...11\}$.

1. Если $y = 1$, то $x > 9 \cdot 1 \Leftrightarrow x > 9$.

   1.1. $y = 1$, $x = 10$, то $1 + 10 < 12$ (и);

   1.2. $y = 1$, $x = 11$, то $1 + 11 < 12$ (л).

2. Если $y = 2$, то $x > 9 \cdot 2 \Leftrightarrow x > 18$ ($x \notin \{1; 2; 3...11\}$).

3. Если $y > 2$, то $x > 18$ ($x \notin \{1; 2; 3...11\}$).

Ответ: в парке 10 тополей.

№ 20 (б)

Пусть в зоопарке было x крокодилов, y тигров. Тогда слонов тоже x и обезьян — x. $x, y \in N$. По условию у более чем на 11 превышает $x + x$, тогда $y > 11 + x + x$. При этом сумма x и y меньше 16.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину

$$\begin{cases} y > 11 + x + x \\ y + x < 16 \\ x \in N, y \in N \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = ?}$$

Найдем решение методом перебора.

$x \in N$, $y \in N$. Проверим, можно ли сократить количество элементов данных множеств. Из первого неравенства ясно, что $y = \{14; 15; ...\}$.Из неравенства $y + x < 16$ ясно, что $x = \{1; 2; ...14\}$, $y = \{14; 13; ...1\}$. Тогда оба неравенства будут верными при $y = 14$.

Чтобы сумма x и 14 была меньше 16, x должен быть меньше 2, значит, $x = 1$. При этом $14 > 11 + 1 + 1$(И.).

Ответ: в зоопарке 1 крокодил.

№ 20 (в)

Пусть x игроков набрали 10 баллов, у игроков набрали 8 баллов. $x, y \in N$. Тогда по условию 7 баллов набрали x игроков, 5 баллов набрали x игроков. В турнире принимали участие не менее 12 игроков, при этом игроков, набравших другое количество баллов, не было, значит, $y + 3x \geqslant 12$. Игроков, набравших 8 баллов, было больше, чем всех остальных, тогда $y > x + x + x$. При этом больше 7 баллов, т. е. 8 и 10 баллов набрали менее 10 игроков, т.е. $y + x < 10$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину

$$\begin{cases} y + 3x \geqslant 12 \\ y > x + x + x \\ y + x < 10 \\ x \in N, y \in N \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = ?\ x + 10 — ?}$$

Найдем решение методом перебора.

$x \in N, y \in N$. Проверим, можно ли сократить количество элементов данного множества. Из неравенства $y + x < 10$ ясно, что x = {1; 2; ...8}, y ={1; 2; ...8}.

Оформим решение в виде таблицы, проверим для каждой пары элементов составленного множества, являются ли они решениями данных неравенств.

	$y > 3x$	$y + x < 10$	$y + 3x \geqslant 12$
$x = 1$	$y > 3 \cdot 1$	$4 + 1 < 10$ (и)	$4 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 4$	$5 + 1 < 10$ (и)	$5 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 5$	$6 + 1 < 10$ (и)	$6 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 6$	$7 + 1 < 10$ (и)	$7 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 7$	$8 + 1 < 10$ (и)	$8 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 8$	$y + 1 < 10$ (л)	
	$y > 9$		
$x = 2$	$y > 3 \cdot 2$ $y = 7$	$7 + 2 < 10$ (и)	$7 + 3 \cdot 2 \geqslant 12$ (и)
	$y = 8$	$8 + 2 < 10$ (л)	
	$y > 8$	$y + 2 < 10$ (л)	
$x = 3$	$y > 3 \cdot 3$ $y > 9$	$y + 3 < 10$ (л)	
$x > 3$	$y > 12$	$y + x < 10$ (л)	

Ответ: 7 игроков.

№ 21

а) Общее, ложное. Температура воздуха в Красноярске иногда не равна 30°C.

в) Общее, ложное. Некоторые насекомые не являются животными.

д) О существовании, истинное.

ж) О существовании, истинное.

и) Истинное.

л) Общее, ложное. Некоторые учителя — мужчины.

№ 24 (а)

Пусть x — первое число, по условию $x \in N$.Тогда x +10 второе число. Их произведение

$x(x + 10)$ по условию 375. Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину.

$x(x + 10) = 375, x \in N$

Найдем решения методом проб и ошибок.

1.Пусть $x = 15$, тогда 15 (15 +10) = 375.

2. Покажем, что других решений нет.

Если $x > 15$, то (15 +10) > 25, тогда 15 (15 +10) > 375

Если $x < 15$, то (15 +10) < 25, тогда 15 (15 +10) < 375

Ответ: Ваня загадал 15 и 25.

№ 26 (б, д)

Задание выполняется у доски с комментарием.

б) $\frac{x}{5}+\frac{x}{4}=1\frac{7}{20}$; умножим обе части уравнения на 20

$4x+5x=27;$

$9x=27;$

$x=3$

Ответ: 3.

д) $\frac{5x}{7}-\frac{7x}{5}=4$; умножим обе часть уравнения на 35

$25x-49x=140;$

$-24x=140;$

$x=-\frac{140}{24};$

$x=-5\frac{5}{6}$

Ответ: $-5\frac{5}{6}$.

№ 27

Пусть $x°$ — величина меньшего острого угла, $0 < x < 90$. Тогда второй угол равен $x + 26°$, третий угол равен 90° (т.к. треугольник прямоугольный). По свойству углов любого треугольника их сумма $x + (x + 26) + 90$ равна 180° .Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину.

$$\begin{cases} 0 < x < 90 \\ x+(x+26)+90=180 \end{cases}$$

$x+(x+26)+90=180;$

$x+x=26+90=180;$

$2x=180-26-90;$

$2x=64;$

$x=32$

$0<32<90$

Ответ: меньший угол равен 32°.

№ 28

5 лет = 12 · 5 мес. = 60 мес.

Пусть x руб. — ежемесячная сумма, на которую должна уменьшаться стоимость оборудования. Тогда $x > 0$. За 5 лет стоимость оборудования всего уменьшится на $60x$ руб. По условию к концу 5 года стоимость 50 100 уменьшиться до нуля, т. е. $60x$ должна составить 50 100 руб.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x>0 \\ 60x=50\,100 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x=?}$$

$x=835$

$835>0$

Ответ: На 835 рублей должна уменьшаться первоначальная стоимость оборудования.

№ 30 (а, в)

а) $2x-\frac{1}{5}=\frac{3}{7}$ — умножим обе части равенства на 35

$70x-7=15$

$70x=22$

$x=\frac{11}{35}$ *Ответ:* $\{\frac{11}{35}\}$.

б) $\frac{3x}{12} = \frac{5x}{6} - 1$; сократим дробь

$\frac{x}{4} = \frac{5x}{6} - 1$; умножим обе части на 12

$3x = 10x - 12$

$7x = 12$

$x = \frac{12}{7}$

Ответ: $\frac{12}{7}$.

№ 32*

Ответ: В 8 соревнованиях.

§ 2. Основы построения математической теории

П. 1.2.1. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление об аксиоматическом методе построения математической теории, о понятиях: аксиома, первоначальное понятие, теорема, определение, род и видовые признаки определяемого понятия; сформировать представление об основных требованиях к системе аксиом;

2) повторить понятие определения;

3) повторить задачи на дроби; порядок действий в выражениях; запись высказываний с помощью кванторов; понятия множества и подмножества; методы доказательства общих высказываний и высказываний о существовании;

4) тренировать умение выполнять действия с обыкновенными и десятичными дробями, отрицательными числами; умение решать уравнения и неравенства; решать задачи с помощью уравнений; решать три типа задач на дроби; умение определять род и видовое отличие определяемых понятий; определять вид высказывания, строить их отрицание, доказывать и опровергать высказывания общего вида и высказывания о существовании.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с аксиоматическим методом построения математической теории. Рассмотрение вопросов, связанных с построением математической теории формирует у учащихся *целостное представление* о мире, реализуя один из важнейших принципов ДСДМ «Школа 2000...».

В курсе математики 5—6 классов велась систематическая работа над понятием определения и умением его формулировать. В 7 классе эта работа продолжается: учащиеся учатся выделять в определении род и видовое отличие, что способствует более грамотному формулированию определения учащимися в дальнейшем. Учащиеся выявляют, что, если понятие *A* определяется через понятие *B*, то *B* называют родом для *A*, а указанные в определении новые существенные признаки *A* — *видовым отличием A*. Соотношение между родовым понятием и определяемым с его помощью понятием изображается с помощью диаграммы Эйлера-Венна. На этой диаграмме отражается, что определяемое понятие является подмножеством своего родового понятия. Так, например, множество равнобедренных треугольников является подмножеством множества треугольников.

Умение грамотно формулировать определения пригодится учащимся не только на уроках математики. Это умение является метапредметным.

Урок. Метод построения математической теории

Новое знание

Понятие рода и видового отличия.

Актуализация

Повторить: понятие «определение», признак определения.

Задание на пробное действие

Назвать род и видовое отличие в определениях из № 36.

Фиксация затруднения

Мы не можем назвать род и видовое отличие в этих определениях.

Мы не можем обосновать то, что правильно указали род и видовое отличие.

Фиксация причины затруднения

Не знаем, что такое род и видовое отличие и как их определять.

Цель деятельности

узнать, что такое род и видовое отличие и как их определять.

Эталон

Понятие рода и видового отличия

Если понятие *A* определяется через понятие *B*, то *B* называют родом для *A*, а указанные в определении новые существенные признаки *A* — **видовым отличием** *A*.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 39 (а)

Теорема. Яблоко — сладкое.

Доказательство. Яблоко является ториком (по опр.). Торик — сладкий (A_2). Значит, Яблоко — сладкое, ч.т.д.

№ 43

а) $\frac{2}{3} \cdot 1,2 = 0,8$;

б) $0,25 \cdot 5,6 = 5,6 : 4 = 1,4$;

в) $0,14 : \frac{1}{7} = 0,98$;

г) $90 : 0,3 = 900 : 3 = 300$;

д) $0,25 : \frac{1}{3} = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$;

е) $0,8 : 2\frac{1}{5} = 0,8 : 2,2 = 8 : 22 = \frac{4}{11}$.

№ 47

П — определение числа, обратного данному.

~~Л~~

У — определение произведения двух натуральных чисел.

А — определение делимости одного числа на другое.

~~О~~

~~Д~~

~~Н~~

~~М~~

З — определение производительности.

ПУАЗ

№ 48 (а)

Теорема. Алюминий — твердый.

Доказательство. Алюминий является таллом (по опр.). Талл — твердый (A_3). Значит, алюминий — твердый, ч. т. д.

№ 49

Пусть x п. продали в марте, $x \in N$. Тогда $\frac{5}{7}x$ п. продали в феврале. Всего за два месяца продали $x + \frac{5}{7}x$, что по условию равно 480.

$x + \frac{5}{7}x = 480,\ x \in N \longrightarrow \boxed{\frac{5}{7}x = ?}$

$1\frac{5}{7}x = 480 \Leftrightarrow x = 480 : \frac{12}{7} \Leftrightarrow x = 280;$

$280 \in N$

$\frac{5}{7} \cdot 280 = 200$

Ответ: 200 пончиков.

№ 52*

Ответ: 1,5 часа.

П. 1.2.2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Основные содержательные цели:

1) уточнить и систематизировать известные учащимся методы доказательства математических утверждений;

2) сформировать представления о прямых и косвенных доказательствах; о методе доказательства от противного;

3) повторить понятия логического следования, отрицания следования, обратного утверждения, равносильности; основное свойство дроби, его использование для сокращения дробей и приведения дробей к новому знаменателю; способы решения задач на совместную работу;

4) тренировать вычислительные умения, упрощение дробных выражений; перевод единиц измерения и сравнение именованных чисел; умение решать задачи на совместную работу с помощью уравнений.

Особенности изучения учебного содержания

Изучение вопросов построения математической теории тесно связано с методами математического доказательства. Метод перебора и метод проб и ошибок использовались учащимися при решении уравнений и при доказательстве утверждений. В данном пункте метод перебора и метод проб и ошибок уточняются как методы доказательства. Чтобы доказать утверждение методом перебора следует проверить истинность утверждения для каждого элемента рассматриваемого множества. Метод проб и ошибок предполагает подбор конкретного объекта с заданными свойствами..

В этом же пункте вводится новый метод — доказательство от противного. В связи с тем, что в курсе математики 5—6 классов учащиеся освоили понятие отрицания высказывания и знакомились с законом исключенного третьего, метод доказательства от противного учащиеся смогут «открыть» самостоятельно. В силу этих же причин метод от противного усваивается учащимися на более осознанном уровне.

Метод доказательства от противного традиционно используется в курсе геометрии. В данной программе широко представлены различные виды задач (алгебраические и арифметические), при решении которых применяется метод от противного.

Учащиеся знакомятся с понятиями прямого и косвенного доказательства высказывания о существовании. Целесообразно с учащимися сопоставить прямой и косвенный метод при доказательстве одного и того же утверждения (№ 56).

Урок. Некоторые методы математического доказательства

Новое знание

Алгоритм доказательства методом от противного.

Актуализация

Повторить: понятие доказательства в математике, алгоритм доказательства методом перебора, алгоритм доказательства методом проб и ошибок, определение отрицания, закон исключенного третьего.

Задание на пробное действие

Докажите, используя метод от противного, что высказывание «Не существует наибольшего нечетного числа» истинно.

Фиксация затруднения:

Не можем доказать утверждение методом от противного.

Можем доказать утверждение, но не можем обосновать почему так можно проводить доказательство.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма, которым можно было бы воспользоваться при выполнении задания.

Цель деятельности

Построить алгоритм доказательства методом от противного.

Эталон

Алгоритм доказательства методом от противного

1) Предположить, что доказываемое утверждение (A) неверно, т. е. ($\neg A$) верно.
2) Исходя из этого предположения, либо получить противоречие, либо прийти к выводу об истинности заведомо ложного утверждения.
3) Сделать вывод о том, что предположение ($\neg A$) неверно, а значит, верно доказываемое утверждение (A).

Второй и третий уроки проводятся по структуре урока рефлексии тренировочного типа.

Далее проводится урок обучающего и развивающего контроля (ОРК).

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 53 (а, в, г)

A	**¬*A***
Сумма двух чисел не зависит от порядка слагаемых. (И.)	Сумма двух чисел зависит от порядка слагаемых. (Л.)
Разность двух натуральных чисел a и b всегда число натуральное.(Л.)	Существуют такие два натуральных числа a и b, разность которых не является натуральным числом.(И.)
Частное двух чисел a и b может быть целым числом. (И.)	Частное двух чисел a и b всегда является дробным числом. (Л.)

№ 54 (а)

Доказательство методом от противного.

1) Предположим, что утверждение «Есть хотя бы один номер, в котором живет не менее 3 человек» неверно, тогда во всех номерах живет менее трех человек.

2) Даже, если во всех номерах живет по два человека, тогда в 124 номерах поместится 248 человек, что противоречит условию, о том, что в гостинице живут 250 человек.

3) Значит, наше предположение неверно. Тогда, есть хотя бы один номер, в котором живет не менее 3 человек, ч. т. д.

№ 55 (в)

А: Не существует натурального числа, которое при делении на 18 дает остаток 5, а при делении на 27 дает остаток 3.

Доказательство (методом от противного).

1. Предположить, что доказываемое утверждение (*A*) неверно.

Предположим, что $\exists\, n \in N$: $n = 18a + 5$ и $n = 27b + 3$, где $a, b \in N$.

2. Исходя из этого предположения, либо получить противоречие, либо прийти к выводу об истинности заведомо ложного утверждения.

Тогда, выполняется равенство

$18a + 5 = 27b + 3 \Leftrightarrow 27b - 18a = 5 - 3 \Leftrightarrow 9(3b - 2a) = 2$

(получили противоречие, т. к. правая часть равенства делится на 9, а левая нет).

3. Сделать вывод о том, что предположение (¬ *A*) неверно, а значит, верно доказываемое утверждение (*A*).

Следовательно, наше предположение не верно, а, значит, *A* (И.), ч. т. д.

№ 56

Доказательство 1 (рекомендуется провести в побуждающем диалоге).

Методом проб и ошибок учащиеся должны выйти на пару чисел 187 и 188.

Если $n = 187$, то $n(n + 1) = 187 \cdot 188 = 35\,156$, меньше 35 419.

Если $n = 188$, то $n(n + 1) = 188 \cdot 189 = 35\,532$, больше 35 419.

При $n \leqslant 187$, то $n(n + 1) < 35\,419$, при $n > 187$, $n(n + 1) > 35\,419$, значит, такого $n \in N$ не существует.

Доказательство 2 (методом от противного, проводится одним из сильных учащихся).

1. Предположим, что существует такое натуральное число, при котором $n(n + 1) = 35\,419$.

2. Тогда 35 419 делится на n и на $n + 1$. При этом n и $n + 1$ два последующих числа, значит одно из них четно, а другое нечетно. Тогда 35 419 делится на четное число, т. е. среди простых делителей 35 419 должно быть 2. А число 35 419 нечетное и не делится на 2.

3. Полученное противоречие, показывает, что предположение неверно. Значит, равенство $n(n + 1) = 35\ 419$ неверно при любом натуральном n.

№ 56 (б)

Доказательство прямым методом.

$2m(m + 1) = 37\ 582 \Leftrightarrow m(m + 1) = 18\ 791$

Методом проб и ошибок выходим на пару чисел 136 и 137.

Если $n = 136$, то $n(n + 1) = 136 \cdot 137 = 18\ 632$, меньше 18 791.

Если $n = 137$, то $n(n + 1) = 137 \cdot 138 = 18\ 906$, больше 18 791.

При $n \leqslant 137$, то $n(n + 1) < 18\ 791$, при $n > 137$, $n(n + 1) > 18\ 791$, значит, такого $n \in N$ не существует.

Доказательство методом от противного.

1. Предположим, что существует такое натуральное число, при котором верно $2m(m + 1) = 37\ 582$.

2. Разделим обе части равенства на 2. Получим

$m(m + 1) = 18\ 791$. При этом m и $m + 1$ два последующих числа, значит, одно из них четно, а другое нечетно. Тогда произведение $m(m + 1)$ четное число, а число 18 791 нечетно.

Можно найти и другое противоречие:

m и $m + 1$ два последующих числа, значит, одно из них четно, а другое нечетно. Произведение $m(m + 1)$ четно, тогда в равенстве левая часть $2m(m + 1)$ делится на 4, а правая часть 37582 на 4 не делится (82 не делится на 4).

3. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно. Значит, равенство

$2m(m + 1) = 37\ 582$ неверно при любом натуральном m.

№ 57 (а)

А: При любом натуральном a и b число15 не может быть корнем уравнения $ax^2 + bx + 48 = 0$.

Доказательство (методом от противного).

1. Предположим, что 15 корень уравнения $ax^2 + bx + 48 = 0$.

2. Тогда выполняется равенство $225a + 15b + 48 = 0$ (Л., т. к. $225a > 0$ при $a \in N$ и $15b > 0$ при $b \in N$, а сумма трех положительных чисел $225a + 15b + 48 > 0$).

3. Следовательно, наше предположение неверно , а, значит, А (И.), ч.т.д.

№ 57 (б)

Доказательство методом от противного.

1. Предположим, что 3 корень уравнения $ax^3 + bx^2 + x + 9 = 0$.

2. Тогда, выполняется равенство $27a + 9b + 3 + 9 = 0 \Leftrightarrow 27a + 9b + 12 = 0$ (противоречит тому, что $27a > 0$ при $a \in N$, $9b > 0$ при $b \in N$, а сумма положительных чисел $27a + 9b + 12 > 0$).

3. Следовательно, наше предположение неверно, а, значит, число 3 не может быть корнем уравнения $ax^3 + bx^2 + x + 9 = 0$, при любых натуральных a и b.

№ 58

в) Если натуральное число делится на 2, то оно оканчивается нулем. (Л., 14).

Если число оканчивается нулем, то оно делится на 2.(И.)

г) Если натуральное число оканчивается на 5 или 0, то оно делится на 5. (И.)

Если натуральное число делится на 5, то оно оканчивается на 5 или 0.(И.)

Натуральное число делится на 5 в том и только в том случае, когда оно оканчивается на 5 или 0.

д) Если сумма цифр натурального числа делится на 9, то оно делится на 3. (И.)

Если натуральное число делится на 3, то его сумма цифр делится на 9. (Л., 33)

№ 60 (а, в)

а) 0,057 т + 6,43 кг + 870 г – 0,003 ц = 57 кг + 6,43 кг + 0,87 кг – 0,3 кг =
= 64 кг.

в) 30 мин + 1 день – 3,5 часа + 2700 с = 0,5 ч. + 24 ч. – 3,5 ч + $\frac{2700}{3600}$ ч. =
= 21 ч. + 0, 75 ч. = 21, 75 ч.

№ 62 (3)

А: Существует бесконечно много натуральных чисел вида $4k + 1$, где $k \in N$.
Доказательство (методом от противного).

1. Предположим, что не существует бесконечно много натуральных чисел вида $4k + 1$, где $k \in N$, т.е. их множество конечно.

2. Тогда среди них есть наибольшее число n вида $4k + 1$. Однако, прибавив к этому числу 4, получим $4k + 1 + 4 = 4(k + 1) + 1$, где $k + 1 \in N$. Обозначив $k + 1$ за m, получим число вида $4m + 1$, где $m \in N$, большее, чем n, что противоречит предположению о том, что n наибольшее.

3. Следовательно, наше предположение неверно, а, значит, A (И.), ч. т. д.

№ 63

А: При любых натуральных a и b число 7 не может быть корнем уравнения $ax^2 + bx + 5 = 0$.
Доказательство (методом от противного).

1. Предположим, что 7 корень уравнения $ax^2 + bx + 5 = 0$.

2. Тогда выполняется равенство $49a + 7b + 5 = 0$ (Л., т. к. $49a > 0$ при $a \in N$ и $7b > 0$ при $b \in N$, а сумма трех положительных чисел $49a + 7b + 5 > 0$).

3. Следовательно, наше предположение неверно, а, значит, A (И.), ч. т. д.

№ 64

а) Если $|a| = |b|$, то $a = b$. (Л., контрпример: противоположные числа)
Если $a = b$, то $|a| = |b|$. (И.)

б) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$ (И.)
Если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$ (Л., контрпример: отрицательные числа)

в) Если число оканчивается на одну из цифр 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на 2. (И.)
Если число делится на 2, то оно оканчивается на одну из цифр 0, 2, 4, 6, 8. (И.)
Число делится на 2 $\Leftrightarrow$ число оканчивается на одну из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

№ 68*

Первое нечетное число равно 1, второе — $1 + 2$, третье — $1 + 2 \cdot 2$, тогда n-ое нечетное число равно $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.

Ищем сумму n нечетных чисел: будем складывать попарно первое с последним, второе с предпоследним и т.д. Все суммы будут равны между собой и равны $2n - 1 + 1 = 2n$.

1. Если n (количество слагаемых) — четное число, то таких сумм $\frac{n}{2}$. Тогда сумма n первых нечетных чисел равна $\frac{2n \cdot n}{2} = n^2$.

2. Если n (количество слагаемых) — нечетное число, то таких сумм $\frac{n}{2}$. Тогда при нахождении суммы среднее нечетное число останется без пары. Номер этого среднего числа — $\frac{n-1}{2} + 1$. Среднее число будет равно

$$1 + 2\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = 1 + n - 1 = n.$$

Значит, сумма n первых нечетных чисел равна $\frac{2n(n-1)}{2} + n = n^2$.

№ 78 (а)

Пусть первая фабрика за день выполняет x часть заказа, $x > 0$. Тогда производительность второй фабрики — $0{,}4x$ часть заказа. Общая производительность равна $x + 0{,}4x$. Работая 20 дней, они выполнят $(x + 0{,}4x) \cdot 20$, что по условию составит весь заказ, т. е. 1.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину (время и производительность — взаимно обратные величины).

$$\begin{cases} x > 0 \\ (x + 0{,}4x) \cdot 20 = 1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{0{,}4\,x} - ?}$$

$1{,}4x \cdot 20 = 1 \Leftrightarrow 28x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{28}$

$\frac{1}{28} > 0$

$$\frac{1}{0{,}4\,x} = \frac{1}{0{,}4 \cdot \frac{1}{28}} = 70$$

Ответ: вторая фабрика смогла бы выполнить заказ за 70 дней.

№ 86*

Ответ: колесо из 18 зубьев должно сделать 7 оборотов, колесо из 63 зубьев должно сделать 2 оборота.

№ 108*

Анализ причин недоразумения.

Из второго ящика продавец мог брать персики по 15 штук всего 20 раз. В соответствии с условием задачи, добавляя к каждым 15 персикам из второго ящика по 10 штук из первого, он заберет из первого ящика только 200 персиков. Таким образом, наборов по 25 персиков, в которых будет 15 штук из второго ящика и 10 штук из первого, будет всего 20 штук. После этого останется $600 - 25 \cdot 20 = 100$ персиков из первого ящика. Они, по условию, должны были быть проданы за $100 : 10 \cdot 100 = 1000$ р., а реально были проданы за $100 : 25 \cdot 200 = 800$ р. Поэтому 200 р. и было недополучено при продаже.

В данной задаче продавец, изменив способ расчета, фактически заменил одну задачу на другую, не равносильную первой.

Исходная задача состоит в том, что каждые 25 персиков, составленные из 10 персиков первого ящика и из 15 персиков второго, должны быть проданы за 200 р., а оставшиеся персики из первой корзины должны продаваться по установленной для них цене.

А продавец, по сути, решал другую задачу, продавая все персики по цене 200 р. за 25 штук. Отсюда и возникло расхождение.

№ 109*

Сосед изменил задачу, т. к. братья стали искать свои доли не от 7, а от 8 овец. Сыновья не выполнили условие завещания, т.к. каждый из них получил больше, чем должен был.

Задачи для самоконтроля к главе 1

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№110 (а)

$(2,55 + 2{,}7) : (0{,}1 - \frac{1}{80}) - 3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{5} = 5{,}25 : (\frac{1}{10} - \frac{1}{80}) - \frac{15 \cdot 6}{4 \cdot 5} = 60 - 4{,}5 = 55{,}5$

№ 111 (б)

$9{,}78 - 1{,}2(x - 13{,}8) = 4{,}8(x - 7{,}3)$

$9{,}78 - 1{,}2x - 16{,}56 = 4{,}8x - 35{,}04$

$9{,}78 - 16{,}56 + 35{,}04 = 4{,}8x + 1{,}2x$

$6x = 61{,}38$

$x = 10{,}23$

Ответ: $\{10{,}23\}$.

№ 114 (а)

Известна общая выручка компании за год, неизвестно, сколько выручила компания за каждый из кварталов. Нужно найти выручку за 4 квартал.

Единицы измерения согласованы (в тысячах рублей).

Пусть x — величина выручки во втором квартале, $x > 0$.

Тогда по условию выручка в первом квартале составит $(x + 78{,}6)$ тыс. руб., а в третьем равна $2{,}5x$ тыс. руб. Выручка за 4 квартал равна среднему арифметическому первых трех кварталов, т. е.

$(x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x) : 3$ (тыс. руб.) Всего за год выручка составит

$x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x + (x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x) : 3$, что по условию равно 659,8 тыс. рублей.

Составим математическую модель.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x + (x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x) : 3 = 659{,}8 \end{cases} \longrightarrow \boxed{(x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x) : 3 = ?}$$

Каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением.

$x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x + (x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x) : 3 = 659{,}8$

$4{,}5x + 78{,}6 + (4{,}5x + 78{,}6) : 3 = 659{,}8$

$4{,}5x + 78{,}6 + 1{,}5x + 26{,}2 = 659{,}8$

$6x = 659{,}8 - 26{,}2 - 78{,}6;$

$6x = 555;$

$x = 555 : 6;$

$x = 92{,}5$

$92{,}5 > 0$

$(x + (x + 78{,}6) + 2{,}5x) : 3 = (92{,}5 + (92{,}5 + 78{,}6) + 2{,}5x) : 3 = 164{,}95$ (тыс. руб.)

При решении 164,95 тыс. рублей задача смысла не теряет.

Ответ: 164,95 тыс. рублей.

№ 115 (б)

Пусть $x°$ — величина третьего угла, $0 < x < 180$. Тогда первый угол равен $2x°$, второй угол равен $(2x + 30)°$. По свойству углов любого треугольника их сумма $x + 2x + (2x + 30)$ равна $180°$

Составим математическую модель и зафиксируем искомые величины.

$$\begin{cases} 0 < x < 180 \\ x + 2x + (2x + 30) = 180 \end{cases} \longrightarrow \boxed{2x + 30 = ?}$$

$x + 2x + 2x + 30 = 180$

$5x + 30 = 180$

$5x = 150$

$x = 30$

$0° < 30° < 180°$

$2 \cdot 30° + 30° = 90°$

Ответ: 90°.

№ 117 (а)

Обозначим часть павильона, которую вторая бригада отремонтирует за день — x (часть), $x > 0$. Тогда производительность первой бригады $1{,}3x$ (часть). Общая производительность равна $x + 1{,}3x$. Работая 13 дней, они отремонтируют $(x + 1{,}3x) \cdot 13$, что по условию составит весь павильон, т. е. 1.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину (время и производительность — взаимно обратные величины).

$$\begin{cases} x > 0 \\ (x + 1{,}3x) \cdot 13 = 1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1{,}3x} = ?}$$

$2{,}3x \cdot 13 = 1 \Leftrightarrow 29{,}9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{299} > 0$

$$\frac{1}{1{,}3x} = \frac{1}{1{,}3 \cdot \frac{10}{299}} = \frac{10 \cdot 299}{13 \cdot 10} = 23$$

Ответ: первая бригада самостоятельно отремонтировала бы павильон за 23 дня.

№ 122 (в, е)

$$4am : \frac{8mx}{2x^2} = \frac{4am \cdot 2x \cdot x}{8mx} = ax$$

$$\left(\frac{25xy}{3ab} \cdot \frac{24b^2}{35x^2y}\right) : \frac{1}{x} = \frac{25xy \cdot 24b \cdot b \cdot x}{3ab \cdot 35x \cdot x \cdot y} = \frac{5 \cdot 8b}{7a} = \frac{40b}{7a}$$

П. 1.2.3. ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД*

Основные содержательные цели:

1) уточнить представление о логическом выводе как способе проведения математического доказательства;

2) познакомить учащихся со способом проверки правильности логического вывода с помощью диаграмм Эйлера — Венна;

3) повторить понятие диаграммы Эйлера — Венна, правила раскрытия скобок, понятия коэффициента и подобных слагаемых, правила приведения подобных слагаемых, частные случаи умножения и деления с 0 и 1;

4) тренировать вычислительные умения, преобразование алгебраических выражений со скобками, нахождение их значений; умение строить отрицание следования; умение решать задачи на совместную работу.

П. 1.2.4. ЛОГИЧЕСКИЕ ОШИБКИ*

Основные содержательные цели:

1) систематизировать типовые логические ошибки и сформировать умение находить их причины;

2) сформировать отношение к ошибке как к рабочей ситуации и к исправлению ошибок как к способу саморазвития;

3) повторить понятия делителя и кратного, НОД, НОК, признаки делимости; порядок действий в выражениях; понятия взаимно обратных задач, противоположных и взаимно обратных чисел, модуля числа; решение задач на встречное движение;

4) тренировать вычислительные умения, решение уравнений, преобразование алгебраических выражений; умение строить отрицание следования, решение задач на встречное движение.

Особенности изучения учебного содержания

Содержание данных пунктов «Логический вывод» и «Логические ошибки» носит развивающий характер и не является обязательным для изучения при 3 часах алгебры в неделю. Изучение данных пунктов может быть вынесено учителем на факультативные занятия. В результате учащиеся познакомятся со способом проверки правильности логического вывода с помощью диаграмм Эйлера — Венна, типовые логические ошибки будут систематизированы, у учащихся будет сформировано умение находить их причины.

Изучение пункта «Логические ошибки» дает возможность формировать у семиклассников отношение к ошибке как к рабочей ситуации и к исправлению ошибок как к способу саморазвития. Традиционно у учащихся складывалось негативное отношение к ошибке, чтобы его преодолеть и выработать отношение к ошибке как к сигналу поиска способа ее преодоления в ДСДМ «Школа 2000...» используются уроки рефлексии коррекционного типа.

Сценарии уроков рефлексии (как и сценарии остальных типов уроков деятельностной направленности) размещены на сайте www.sch2000.ru.

Глава 2. Введение в теорию делимости

Основные цели изучения данной главы:

• уточнить представления о делении с остатком на множестве натуральных чисел; сформировать представления о существовании и единственности деления с остатком для любого натурального числа;

• уточнить понятия общего делителя и НОД, построить алгоритм Евклида нахождения НОД двух чисел и сформировать умение его применять;

• сформировать представление о принципах развития математической теории;

• построить определения делимости и деления с остатком на множестве целых чисел; построить алгоритм деления с остатком на множестве целых чисел и сформировать умение его применять;

• сформировать представление о рациональных числах как о бесконечных периодических десятичных дробях;

• сформировать умение переводить бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную;

• сформировать представление об алгебре, равносильных выражениях и правилах равносильных преобразований и умение их применять.

В начальной школе учащиеся выполняли деление с остатком на множестве натуральных чисел. Известная им формула деления с остатком имеет вид:

$$\boldsymbol{a = bc + r,\ r < b}$$

В пятом классе учащиеся знакомились с понятием делимости, выводили свойства делимости, признаки делимости на 2, на 5, на 10, на 3, на 9, на 4, на 25, на 8 и на 125 и применяли их, решали задачи по комбинации известных признаков, определяли простые и составные числа.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания учащиеся:

• *повторяют и систематизируют* знания, полученные в начальной школе и 5—6 классах;

• *используют* математическую терминологию в устной и письменной речи;

• *доказывают* свойства делимости;

• *применяют* свойства и признаки делимости;

• *доказывают* теоремы о простых числах;

• *используют* при решении задач понятия «простое» и «составное» число;

• *доказывают* и *используют* теорему делимости;

• *строят* и *используют* алгоритм деления с остатком натуральных чисел;

• *строят* и *используют* алгоритм Евклида для нахождения НОД натуральных чисел;

• *строят* определение делимости целых чисел;

• *строят* и *используют* алгоритм деления с остатком целых чисел;

• *проводят* классификацию целых чисел;

• *используют* схемы и таблицы;

• *строят* и *выполняют* алгоритмы чтения, записи и составления выражений;

• *работают* с различными математическими моделями;

• *решают* текстовые задачи;

• *решают* простейшие уравнения;

• *выполняют* действия с рациональными числами;

• *определяют* вид, истинность высказывания, *строят* отрицание ложных высказываний.

§ 1. Делимость на множестве натуральных чисел

П. 2.1.1. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ И ЕЕ СВОЙСТВА

Основные содержательные цели:

1) уточнить представление о делимости натуральных чисел, построить доказательства новых свойств делимости на множестве натуральных чисел;

2) повторить изученные ранее свойства и признаки делимости, алгоритм деления с остатком, способы нахождения НОК и НОД чисел, понятие взаимно простых чисел; основное свойство дроби; выделение целой части дроби, запись смешанной дроби в виде неправильной; понятие процента и способы решения задач на проценты;

3) тренировать умение выполнять действия с многоэтажными дробями, решение задач на делимость и на проценты, умение выполнять преобразование неправильной дроби в смешанное число и обратно.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся повторяют определение делимости чисел, доказывают пять новых свойств делимости.

Теорема 1. Если число a делится на число b, то существует единственное число c, такое, что $a = bc$.

Теорема 2. Любо натуральное число делится на 1.

Теорема 3. Любое натуральное число делится на себя.

Теорема 4. Если число а делится на число b, а число b, в свою очередь. делится на число a, то $a = b$.

Теорема 5. Если число a делится на число c, а число b делится на число d, то ab делится на cd.

Так же доказываются четыре уже известных им свойства делимости на множестве натуральных чисел.

Теорема 6. Если $a \vdots b$, a $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Теорема 7. Если $a \vdots c$, и $b \vdots c$, то $(a + b) \vdots c$ и $(a - b) \vdots c$.

Теорема 8. Если $a \vdots c$, и $b \not\vdots c$, то $(a + b) \not\vdots c$ и $(a - b) \not\vdots c$.

Теорема 9. Если $a \vdots c$, или $b \vdots c$, то $ab \vdots c$.

На примере доказательства свойств делимости учащиеся учатся строить доказательство, опираясь на то или иное понятие (в данном случае, на понятие делимости).

Если в пятом классе учитель не ввел обозначения для записи делимости, то при изучении этого пункта нужно ввести их и сформировать умение использовать эти обозначения при выполнении заданий на делимость.

Урок. Делимость чисел и ее свойства

Новое знание

Свойства делимости.

Актуализация

Повторить: понятие делимости, изученные ранее свойства делимости.

Задание на пробное действие

Обосновать истинность утверждений № 128 (а, б), используя свойства делимости.

Фиксация затруднения

Не можем обосновывать эти утверждения указанным способом.

Фиксация причины затруднения

Затруднение возникает в подборе нужного свойства, так как нами еще не были сформулированы и доказаны такие свойства, которые требуются.

Цель деятельности

Сформулировать и доказать новые свойства делимости, которые помогут обосновать данные утверждения.

Эталон

Новые свойства: теоремы 1—5.

Урок. Делимость чисел и ее свойства (РТ)

Урок проводится по структуре урока рефлексии тренировочного типа.

Основные цели:

1) тренировать умение доказывать утверждения, опираясь на понятие делимости натуральных чисел;
2) тренировать умение применять свойства и признаки делимости и решать задачи на делимость;
3) тренировать умение выполнять действия с многоэтажными дробями, умение выполнять преобразование неправильной дроби в смешанное число и обратно.
4) формировать логические универсальные учебные действия: построение логической цепи рассуждений.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 128

а) (И), т. к. любое натуральное число делится на единицу (по теореме 2).

б) (И), т. к. любое натуральное число должно делиться на само себя (по теореме 3).

з) Число 555 555 делится на 15, истинно, т.к. 555 555 оканчивается на 5, а сумма цифр равна 30, т. е. число делится и на 3 и на 5.

и) Число 143 526 не делится на 6, ложно, т. к. число четное (оканчивается на 6) и делится на 3 (сумма цифр равна 21), т. е. данное число должно делиться на 6.

Отрицание: Число 143 526 делится на 6. (И.)

№ 129

а) Задание выполняется у доски одним из сильных учащихся.

<u>Доказательство.</u>

1. $n \vdots 4 \Rightarrow n = 4a$ (по опр.);
2. $n \vdots 3$, тогда $4a \vdots 3$, $4 \not\vdots 3$, тогда $a \vdots 3$, $a = 3c$ (по опр.)
3. $n = 4 \cdot 3c = 12c$.Значит, $n \vdots 12$, ч. т. д.

б) Задание выполняется на планшетках.

Ложно, контрпример: 36.

в) Если натуральное число делится на 12, то оно всегда делится на 3 (И.).

<u>Доказательство.</u>

Если число $a \vdots 12$, то $a = 12b$ (по определению делимости). Отсюда, $a = 3\,(4n)$, а значит, число делится на 3.

д) (И), так как если число a делится на число c, а число b делится на d, то ab делится на cd (по теореме 5).

е) Если произведение двух натуральных чисел делится на 9, то хотя бы одно из натуральных чисел делится на 9 (Л.).

Можно привести контрпример произведения, в котором каждый из множителей делится на 3: $(6 \cdot 15) \vdots 9$, при этом ни 6, ни 15 не делится на 9.

№ 131 (а)

$a \vdots b \Rightarrow a = bc$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{bc-b}{bc+b} = \frac{b(c-1)}{b(c+1)} = \frac{c-1}{c+1}$$

№ 133 (б, в, г, д)

б) Если натуральное число b четное, то $3b$ делится на 6.

Доказательство.

Если натуральное число b четное, то оно делится на 2, тогда $b = 2n$.

$3b = 3(2n) = 6n$, тогда $3b$ делится на 6.

в) Если $5c$ делится на 3, то с делится на 3 ($c \in N$).

Доказательство.

По условию $5c$ делится на 3, но множитель $5 \not\vdots\, 3$ (более того, они взаимно простые), значит, c делится на 3.

г) Если $21d$ делится на 7, то d не всегда делится на 7 ($d \in N$).

Доказательство.

Так как множитель $21 \vdots 7$, то по свойству делимости (теорема 9) достаточно, чтобы хотя бы один из множителей делился на 7. Значит, d может не делиться на 7.

д) Если $6a + 3b$ делится на 6, то b делится на 2 ($a, b \in N$).

Доказательство.

Если $6a + 3b$ делится на 6 и первое слагаемое $6a \vdots 6$, тогда второе слагаемое $3b$ должно делиться на 6 (иначе, по свойству делимости 8, их сумма не будет делиться на 6). Если $3b \vdots 6$, то $3b = 6k$ (по определению делимости).

$3b = 6k$ (разделим обе части равенства на 3), отсюда, $b = 2k$. Значит, b делится на 2.

№ 134 (а)

Каждый лист состоит из 2 страниц, сумма номеров которых нечетная, т.к. это два последовательных числа.

Вырвали 37 листов, а, значит, складывали 37 нечетных чисел, при этом должны получить нечетное число. Поэтому 2354 в результате получить не могли.

№ 135 (б)

Доказательство.

Обозначим цифру единиц тысяч данного четырехзначного числа a, цифру сотен b, цифру десятков c,цифру единиц d. Тогда данное число будет равно $1000a + 100b + 10c + d$, а число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке будет равно$1000d + 100c + 10b + a$. Запишем их разность и преобразуем полученное выражение:

$1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) =$

$= 1000a - a + 100b - 10b + +10c - 100c + d - 1000d =$

$= 999a + 90b - 90c - 999d.$

Полученное выражение делится на 9, т. к. каждое из произведений делится на 9, а значит, их сумма (разность) также делится на 9 (по теореме 7), ч. т. д.

№ 137 (в).

НОД $(a, b) = 2^3 \cdot 7$;

НОК $(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

№ 141 (а, з)

а) $3,5 : 0,28 - 3,5 = 12,5 - 3,5 = 9$ (км)

Ответ: осталось пробежать 9 км.

з)

До изменения	a	b	c	abc
После изменения	$100\% + 20\% =$ $= 120\%$ $1{,}2a$	$100\% - 25\% =$ $= 75\%$ $0{,}75b$	$100\% + 10\% =$ $= 110\%$ $1{,}1c$	$1{,}2a \cdot 0{,}75b\ 1{,}1c =$ $=0{,}99abc$

$0{,}99abc$ составляет 99% от abc.

$100\% - 99\% = 1\%$

Ответ: произведение уменьшилось на 1 %.

№ 143 (а)

а) $49^4 \cdot 6^2 \vdots 14$. Так как $49 \vdots 7$, значит, $49^4 \vdots 7$, а $6 \vdots 2$, значит, $6^2 \vdots 2$ (по свойству делимости произведения (теорема 9)), тогда их произведение $49^4 \cdot 6^2$ делится на $(7 \cdot 2)$ по свойству делимости (теорема 5);

$49^4 \cdot 6^2 \vdots 42$. Так как $49 \vdots 7$, значит, $49^4 \vdots 7$, а $6 \vdots 6$ (по свойству делимости (теорема 3)), значит, $6^2 \vdots 6$ (по свойству делимости произведения (теорема 9)), тогда их произведение $49^4 \cdot 6^2 \vdots (7 \cdot 6)$ по свойству делимости (теорема 5).

№ 144

$$\frac{7a - 9b}{2a - 5b} = \frac{7cb - 9b}{2cb - 5b} = \frac{7b(c - 9)}{b(2c - 5)} = \frac{7c - 9}{2c - 5}$$

($a = cb$ по определению делимости)

Ответ: дробь сократима.

№ 145

а) Если натуральное число a не делится на 3, то $5a$ не делится на 3. (И.)

Доказательство.

Так как число $a \not\vdots 3$ и $5 \not\vdots 3$ и 3 — простое, то $5a \not\vdots 3$.

б) Если $7c$ делится на 2, то c делится на 2 ($c \in N$).(И.)

Доказательство.

По условию $7c$ делится на 2, но множитель $7 \vdots 2$ (более того, они взаимно простые), значит, с делится на 2.

в) Если натуральное число делится на 48, то оно всегда делится на 12.

Доказательство.

1 способ. Если $a \vdots 48$, тогда $a = 48c$ (по определению делимости).

$48c = 12(4c)$ 12 (по определению делимости).

2 способ.

Натуральное число делится на 48 (по условию), а $48 \vdots 12$, тогда это натуральное число делится на 12 (по свойству делимости (теорема 6)).

г) Если одно натуральное число делится на 9, а другое натуральное число делится на 8, то их произведение делится на 72.

Доказательство.

1 способ. Если $a \vdots 9$, тогда $a = 9c$, если $b \vdots 8$, тогда $b = 8d$ (по определению делимости).

$ab = 9c \cdot 8d = 9 \cdot 8cd = 72cd \vdots 72$.

2 способ.

Если одно натуральное число делится на 9, а другое натуральное число делится на 8, то их произведение делится на $8 \cdot 9$, т.е. на 72 (по свойству делимости (теорема 5)).

д) Если одно натуральное число делится на 6, а другое натуральное число делится на 4, то их произведение делится на 24.(И.)

Если одно натуральное число делится на 6, а другое натуральное число делится на 4, то их произведение делится на $6 \cdot 4$, т.е. на 24 (по свойству делимости (теорема 5)).

е) Если произведение двух натуральных чисел делится на 25, то хотя бы одно из натуральных чисел делится на 25.(Л.)

Можно привести контрпример: произведение, в котором каждый из множителей делится на 5 : (35 · 15) ⋮ 25, при этом ни 35, ни 15 не делятся на 25.

№ 146

На каждой странице по 8 пронумерованных фото, т.е. на странице 8 последовательных чисел: 4 четных и 4 нечетных числа. Сумма четного и нечетного чисел это нечетное число, а четыре таких пары в сумме дают число четное. Значит, сумма номеров на любой странице — число четное. Ваня посчитал сумму номеров фотографий на вырванных страницах (их 10, так как листов 5).Сумма 10 четных чисел — четна. Значит, он не мог получить в сумме 1375.

№ 152 (а, б)

а) 16% = 0,16

8560 : 0,16 = 53 500 (руб.)

Ответ: выручка за первый год составила 53500 рублей.

б) 1) 21 768 – (5612 + (5612 – 1215) + 5612 · 1,5) = 21 768 – 18427 = 3341 (руб.) — расходы в четвертом квартале;

2) $\frac{3341}{21768} \cdot 100\% \approx 15{,}35\%$ — составили расходы четвертого квартала от всех расходов за год.

Ответ: 15,35%.

№ 153 (А, В)

$$\frac{\left(9-5\frac{3}{8}\right)\cdot\left[4\frac{5}{12}-4:2\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{2}:4\right)\cdot\frac{4}{7}\right]}{\frac{1}{24}+\frac{1}{4}:11\frac{1}{3}}=\frac{\frac{29}{8}\cdot\left[4\frac{5}{12}-1\frac{1}{2}+\left(0{,}3-0{,}125\right)\cdot\frac{4}{7}\right]}{\frac{1}{24}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 40}}=$$

$$=\frac{\frac{29}{8}\cdot\frac{181}{60}}{\frac{29}{480}}=\frac{29\cdot 81\cdot 480}{8\cdot 60\cdot 29}=181$$

$$В=\left[\frac{\left(3\frac{2}{5}+1\frac{5}{7}\right)\cdot 11\frac{2}{3}}{1\frac{2}{9}-1\frac{1}{18}}-\frac{\left(9\frac{3}{4}+5\frac{1}{6}\right)\cdot 6}{\left(5\frac{3}{20}-4\frac{1}{4}\right)\cdot 1\frac{1}{9}}\right]:1\frac{1}{2}=179$$

НОД (181; 179) = 1, т. к. 181 – 179 = 2, а 181 и 179 нечетные.

П. 2.1.2. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Основные содержательные цели:

1) уточнить представления о простых и составных числах, сформировать понятие канонического разложения числа на простые множители; доказать теорему о бесконечности множества простых чисел;

2) построить способ установления того, простым или составным числом является заданное число;

3) повторить понятия отношения и пропорции, решение задач на пропорциональное деле-

ние; действия с именованными числами; примеры на совместные действия с десятичными и обыкновенными дробями; порядок действий в выражениях; степень; приемы устных вычислений.

4) тренировать умение находить модуль числа, выполнять действия с многоэтажными дробями, отрицательными числами, доказывать утверждения методом от противного.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся повторяют понятия простого и составного числа (**№№ 156—158**), алгоритм разложения числа на простые множители.

Здесь же учащиеся знакомятся с основной теоремой арифметики: любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей, при этом два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться лишь порядком сомножителей. Доказательство этой теоремы, естественно, остается за рамками данного курса. Однако обсуждение следствия этой теоремы приводит учащихся к проблеме неоднозначности при записи разложения числа на простые множители. Можно предложить семиклассникам самим придумать вариант однозначной записи разложения. Скорее всего, они самостоятельно придут к общепринятому каноническому разложению числа на простые множители. После чего с учащимися останется лишь уточнить понятие канонического разложения числа на простые множители и продолжить тренировать их умение раскладывать числа на простые множители (**№ 162**).

В данном пункте учащиеся узнают алгоритм определения того, простым или составным является заданное число, и учатся его применять. Проблематизацию можно организовать, предложив учащимся определить за одну-две минуты, *является ли данное разложение на множители каноническим разложением на простые множители:*

$$315\,894 = 2 \cdot 3 \cdot 163 \cdot 323?$$

Затруднение возникнет при ответе на вопрос, являются ли множители 163 и 323 простыми, т. к. эти числа достаточно велики. Причиной затруднения является отсутствие у учащихся способа определения того, простым или составным числом является заданное число, который бы позволил быстро выполнить задание.

После знакомства с новым алгоритмом учащиеся учатся его применять. Выполняя **№ 159**, учащиеся обосновывают свой выбор, проговаривая алгоритм. При выполнении задания учащиеся должны прийти к выводу, что данный алгоритм применяется только в случае, если известные им признаки делимости не дают ответа на вопрос. Если ребята начнут применять алгоритм нерационально (например, для числа 206 или 117), учитель может дать возможность им сделать это, но потом обратить внимание на более простой способ выполнения задания (признаки делимости показывают, что данные числа составные).

Алгоритм определения того, простым или составным числом является заданное число, отрабатывается при выполнении заданий **№№ 160—161**.

Урок. Простые числа

Новое знание

Основная теорема арифметики: понятие канонического разложения числа на простые множители: алгоритм определения того, простым или составным числом является данное число a; алгоритм разложения чисел на простые множители.

Актуализация

Повторить: определение простого числа, определение составного числа, понятие разложения чисел на простые множители, понятие степени числа.

Задание на пробное действие

Определить за минуту, является ли данное разложение на множители каноническим разложением на простые множители: $315\,894 = 2 \cdot 3 \cdot 163 \cdot 323$.

Фиксация затруднения

Не можем **быстро** определить, является ли данное разложение на множители каноническим разложением на простые множители.

Фиксация причины затруднения

Затруднение возникает при ответе на вопрос, являются ли множители 163 и 323 простыми, так как эти числа достаточно велики. Причиной затруднения является отсутствие у нас способа определения того, простым или составным числом является заданное число, который бы сократил время на выполнение задания.

Цель деятельности

Найти способ, которым можно быстро установить, простым или составным является данное число, и научиться его применять.

Эталон

1) Основная теорема арифметики.

> Любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей. При этом два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться лишь порядком множителей.

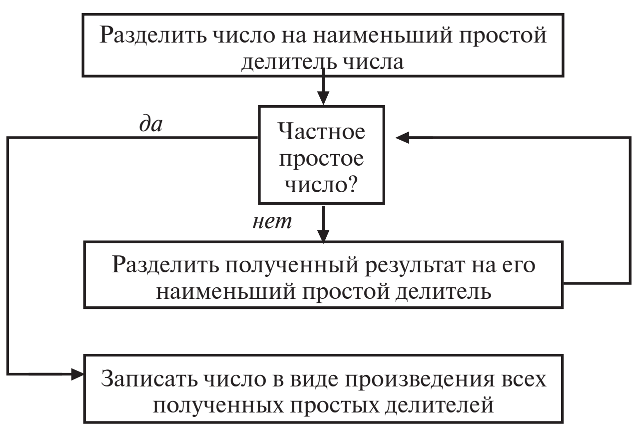
2) Понятие канонического разложения числа на простые множители.

> Разложение числа на простые множители, называется каноническим, если:
> 1. все простые множители записаны в порядке возрастания;
> 2. произведение одинаковых простых множителей записано в виде степени.

3) Алгоритм определения того, простым или составным числом является данное число a.

1. Выписать все простые числа, квадраты которых меньше a.
2. Если a делится хотя бы на одно из выписанных чисел, то a — составное.
3. Если a не делится ни на одно из выписанных чисел, то a — простое.

4) Алгоритм разложения чисел на простые множители



Урок. Делимость чисел. Простые числа (РК)

Урок проводится по структуре урока рефлексии коррекционного типа.

Основные цели:

1) Организовать самоконтроль усвоения понятий простых и составных чисел; признаков делимости, способа установления того, простым или составным является заданное число;
2) тренировать вычислительные навыки[1] и умение решать задачи на проценты, используя для решения метод математического моделирования.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 159

б) Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 89. Так как 102 = 100 > 89, то выпишем числа 2, 3, 5, 7. Число 89 не делится на 2, 3, 5 по признакам делимости. На 7 тоже не делится: убедились в этом, непосредственно вычисляя частное, получили 12 с остатком 5. Запишем $89 = 7 \cdot 12 + 5$. Так как 89 не делится ни на одно из выписанных чисел, значит, 89 — простое.

г) 117 делится на 3, т. к. сумма его цифр делится на 3. Значит, это число составное.

е) 123 делится на 3, т. к. сумма цифр делится на 3. Значит, число 123 составное.

з) Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 149. Так как 132 = 169 > 149, то выпишем числа 2, 3, 5, 7, 11. Число 149 не делится на 2, 3, 5 по признакам делимости. На 7 и 11 тоже не делится. Мы убедились в этом, непосредственно вычисляя частное: $149 = 7 \cdot 21 + 2$; $149 = 11 \cdot 13 + 6$. Так как 149 не делится ни на одно из выписанных чисел, значит, 149 — простое.

к) Так как 132 = 169 > 163, то выпишем числа 2, 3, 5, 7, 11. Число163 не делится на 2 , 3, 5 по признакам делимости (сумма цифр равна 10). Кроме того, $163 = 7 \cdot 23 + 2$; $149 = 11 \cdot 14 + 9$.

Значит, 163 — простое.

м) Число 357 делится на 3 по признаку делимости на 3 (сумма цифр равна 15). Значит, число 357 — составное.

№ 160

а) Чтобы найти это число, нужно проверять все натуральные числа, следующие после 40.

1) 41 — проверяем делимость 41 на простые числа до 7, т. к. $7^2 > 41$.

41 $\not\vdots$ 2 , 3, 5 по признакам делимости (сумма цифр равна 5).

Ответ: первое простое число, следующее за 40 это 41.

б)

1) 111 делится на 3, значит, 111 — составное

2) Число 112- четное и не равно 2, тогда оно составное.

(Все остальные четные числа, следующие за 112 — составные)

3) 113

1) Так как $11^2 = 121 > 113$, то выпишем числа 2; 3; 5; 7.

2) 113 $\not\vdots$ 2; 3; 5 по признакам делимости (число нечетное, последняя цифра ни 0, ни 5, сумма цифр равна 5).

113 $\not\vdots$ 7 ($113 = 7 \cdot 16 + 1$)

Значит, 113 — простое и первое простое число следующее за 110 это 113.

в) 201 делится на 3, значит 201 — составное.

202 делится на 2, значит, 202 — четное и не равно 2, тогда оно составное.

---

[1] Если учитель считает целесообразным использование калькулятора при определении простым или составным является данное число, то он может разрешить учащимся его использовать. Причем, обговаривается, что, даже при использовании калькулятора, учащиеся подтверждают, что данное число a не делится на b оформлением: $a = bn + r$. В этом случае учителю не нужно готовить тренировочное задание на деление в столбик.

(Все остальные четные числа, следующие за 200 — составные)

Проверим число 203.

1) Так как $15^2 = 225 > 202$, то выпишем числа 2, 3; 5; 7; 11; 13.

$203 \not\vdots\ 2; 3; 5$ по признакам делимости (число нечетное, последняя цифра ни 0, ни 5, сумма цифр равна 5).

$203 \vdots\ 7$ ($203 = 7 \cdot 29$), значит, 203 — составное.

Число 20$\underline{5}$ делится на 5 (число оканчивается на 5), значит, 205 — составное

Число 207 — составное, так как $207 \vdots\ 3$ (сумма цифр равна 9, 9 делится на 3)

Проверим число 209.

1) Так как $15^2 = 225 > 209$, то выпишем числа 2; 3; 5; 7; 11; 13

2) $20\underline{9} \not\vdots\ 2; 3; 5$ по признакам делимости (число нечетное, последняя цифра ни 0, ни 5, сумма цифр равна 8).

$209 \not\vdots\ 7$ ($209 = 7 \cdot 29 + 6$).

$209 \vdots\ 11$ ($209 = 11 \cdot 19$), значит, 209 — составное.

Проверим число 211.

1) Так как $15^2 = 225 > 211$, то выпишем числа 2; 3; 5; 7; 11; 13

2) $211 \not\vdots\ 2; 3; 5$ по признакам делимости (сумма цифр равна 4).

$211 \not\vdots\ 7$ ($211 = 7 \cdot 30 + 1$).

$211 \not\vdots\ 11$ ($211 = 11 \cdot 19 + 2$).

$211 \not\vdots\ 13$ ($211 = 13 \cdot 16 + 3$), значит, 211 — простое и первое простое число, следующее за 200 — это 211.

№ 161 (б)

1) 151 — проверяем делимость 151 на простые числа до 13, т. к. $13^2 > 151$.
   $151 \not\vdots\ 2$, 3, 5 по признакам делимости (сумма цифр равна 7), значит, 151 — простое.
2) $15\underline{2} \vdots\ 2$.
3) $153 \vdots\ 3$ (сумма цифр равна 9).
4) $15\underline{5} \vdots\ 5$.
5) 157 — проверяем делимость 157 на простые числа до 13, т. к. $13^2 > 157$.
   $157 \not\vdots\ 2$,3, 5 по признакам делимости (сумма цифр равна 13).
   $157 = 7 \cdot 22 + 3$; $157 = 11 \cdot 14 + 3$, значит, 157 — простое.
6) $159 \vdots\ 3$ (сумма цифр равна 15).

Ответ: два простых числа: 151 и 157.

№ 162 (в)

Возможные варианты решения:

1 способ.

$$\begin{array}{r|l} 184\,275 & 25 \\ 7371 & 9 \\ 819 & 9 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

2 способ.

$$\begin{array}{r|l} 184\,275 & 3 \\ 61425 & 3 \\ 20475 & 3 \\ 6825 & 3 \\ 2275 & 5 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$184\ 275 = 5^2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 13 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$.

№ 163

б) $D(p^2 q) = \{1; p; q; p^2; pq; p^2q\}$.

в) $D(p^2 q^2) = \{1; p; p^2; q; q^2; pq; p^2q; pq^2; p^2q^2\}$. 9 делителей.

№ 164

а) $(a + b) \vdots p$;

$\underline{ab \vdots p.}$

$a \vdots p$ и $b \vdots p$

Доказательство (методом от противного) на множестве натуральных чисел.

1. Предположим, что хотя бы одно из данных чисел не делится на p. Для однозначности определим: $a \not\vdots p$ и $b \vdots p$.

Так как $(a + b) \vdots p$, по определению делимости $\exists n$: $a + b = np$.

Тогда: $a + b = np \Leftrightarrow a = np - b$. Полученная разность делится на p (по свойству делимости суммы и разности), тогда и левая часть равенства $a \vdots p$, что противоречит предположению.

2. Предположим теперь, что оба числа не делятся на p, т. е. $a \not\vdots p$ и $b \not\vdots p$.

Так как $ab \vdots p$, то по определению делимости $\exists m$: $ab = mp$. Тогда в полученном равенстве правая часть делится на p, а левая — нет.

3. Полученные противоречия показывают, что наши предположения неверны, а значит, каждое из этих чисел делится на p, ч. т. д.

б) Простое число не может оканчиваться на 0 или на 5, т.к. в этом случае оно делится на 5. Не может оканчиваться на 2; 4; 6; 8, т. к. оно будет делиться на 2. Тогда можно сделать вывод, что простое число может оканчиваться цифрами 1; 3; 7; 9. Примерами таких чисел могут служить: 11; 13; 17; 19. Значит, любое простое число, большее 5, может оканчиваться только цифрами 1; 3; 7; 9, ч. т. д.

№ 170

а) Пусть на 6% депозит положили x руб., $x \geqslant 0$. Тогда на 10 % депозит положили $(1800 - x)$ руб. Доход от 6 % депозита составит $0{,}06x$ руб., а от 10 % составит $0{,}1(1800 - x)$ руб. По условию по обоим депозитам получен одинаковый доход, т. е. $0{,}06x$ равно $0{,}1(1800 - x)$ руб.

Составим математическую модель и зафиксируем искомые величины.

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 0{,}06x = 0{,}1(1800 - x) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = ? \\ 1800 - x = ? \end{array}}$$

$0{,}06x = 0{,}1(1800 - x)$;

$0{,}06x = 180 - 0{,}1x$;

$0{,}16x = 180$;

$x = 1125$

$1125 \geqslant 0$

$1800 - 1125 = 675$ (руб.)

Ответ: под 6 % годовых компания положила 1125 руб., а под 10 % — 675 руб.

б) В какую сумму превратится вклад в 10 000 р. через 3 года, если банк начисляет процентный доход в размере 8% годовых?

1) простой процентный рост

$10\,000\,(1 + 0{,}08 \cdot 3) = 12\,400$ (руб.)

2) сложный процентный рост

$10\,000\,(1 + 0{,}08)^3 = 12\,597{,}\ 12$ (руб.)

Ответ: 12 400 рублей или 12 597 рублей 12 копеек.

№ 171

Решение индивидуальное в зависимости от личных данных.

№ 172

в) 91 делится на 7, 91 = 7 · 13. Значит, это число составное.

д) 173. Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 173: 2; 3; 5; 7; 11; 13 (т. к. $14^2 = 196 > 173$).

$173 \not\vdots\, 2$ (нечетное число)
$173 \not\vdots\, 3$ (сумма цифр 11)
$17\underline{3} \not\vdots\, 5$ (последняя цифра ни 0, ни 5)
$173 \not\vdots\, 7$ ($173 = 7 \cdot 24 + 5$)
$173 \not\vdots\, 11$ ($173 = 11 \cdot 15 + 8$)
$173 \not\vdots\, 13$ ($173 = 13 \cdot 13 + 4$).

173 не делится ни на одно из выписанных чисел, значит, 173 — простое.

е) 177 делится на 3, т. к. сумма его цифр равна 15. Значит, это число составное.

№ 173

б) Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 101: 2; 3; 5; 7 (т. к. $11^2 = 121 > 101$).

$101 \not\vdots\, 2$ (нечетное число)
$101 \not\vdots\, 3$ (сумма цифр 2)
$10\underline{1} \not\vdots\, 5$ (последняя цифра ни 0, ни 5)
$101 \not\vdots\, 7$ ($101 = 7 \cdot 14 + 3$)

101 не делится ни на одно из выписанных чисел, значит, 101 — простое.

Ответ: первое простое число, следующее за числом 100 — 101.

в)

1) $116 \vdots 2$ (Все остальные четные числа, следующие за 116 — составные)
2) $117 \vdots 3$ (сумма цифр 9)
3) 119

Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 119: 2, 3, 5, 7 (т. к. 112 = 121 > 119).

$119 \not\vdots\, 2$
$119 \not\vdots\, 3$ (сумма цифр 11)
$11\underline{9} \not\vdots\, 5$
$119 \vdots 7$ ($119 = 7 \cdot 17$)

4) $121 \vdots 11$, $121 = 11 \cdot 11$;
5) $123 \vdots 3$ (сумма цифр 6)
6) $12\underline{5} \vdots 5$
7) 127

Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 127: 2, 3, 5, 7, 11 (т. к. $12^2 = 144 > 127$).

$127 \not\vdots\, 2$
$127 \not\vdots\, 3$ (сумма цифр 10)
$12\underline{7} \not\vdots\, 5$
$127 \not\vdots\, 7$ ($127 = 7 \cdot 18 + 1$)
$127 \not\vdots\, 11$ ($127 = 11 \cdot 11 + 6$)

127 не делится ни на одно из выписанных чисел, значит, 127 — простое.

Ответ: первое простое число, следующее за числом 115 — 127.

№ 174 (а)

1) 181

Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 181: 2, 3, 5, 7, 11, 13, (т. к. $14^2 = 196 > 181$).

$181 \not\vdots\, 2$
$181 \not\vdots\, 3$ (сумма цифр 10)
$181 \not\vdots\, 5$
$181 \not\vdots\, 7$ ($181 = 7 \cdot 25 + 6$)
$181 \not\vdots\, 11$ ($181 = 11 \cdot 16 + 5$)

$181 \not\vdots 13$ $(181 = 13 \cdot 13 + 12)$
181 не делится ни на одно из выписанных чисел, значит, 181 — простое.
2) $182 \vdots 2$ (Все остальные четные числа между 180 и 190 — составные)
3) $183 \vdots 3$ (сумма цифр 12)
4) $185 \vdots 5$
5) 187
Выпишем все простые числа, квадраты которых меньше 187: 2, 3, 5, 7, 11, 13, (т. к. $14^2 = 196 > 187$).
$187 \not\vdots 2$
$187 \not\vdots 3$ (сумма цифр 10)
$187 \not\vdots 5$
$187 \not\vdots 7$ $(187 = 7 \cdot 26 + 5)$
$187 \vdots 11$ $(187 = 11 \cdot 17)$
6)$189 \vdots 3$ (сумма цифр 18).
Ответ: между 180 и 190 есть единственное простое число — 181.

№ 175 (б)
$65\,520 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$

№ 176 (б)
Любое число либо делится на 6 (т. е. остаток от деления равен 0), либо не делится (тогда остатки это натуральные числа меньшие 6) То есть остатки при делении на 6 равны одному из чисел 0; 1; 2; 3; 4 или 5.

Остаток 0 — число делится на 6,следовательно, для числа, большего 6, в этом случае можно сделать вывод, что оно составное (для 6 — существует делитель 2, значит, тоже составное).

Остаток 3 — число делится на 3 ($n = 6m + 3$ делится на 3 по свойству делимости суммы и произведения) , следовательно, оно составное.

Остаток 4 — число делится на 2 ($n = 6m + 4$ делится на 2 по свойству делимости суммы и произведения), следовательно, оно составное, ч.т.д

№ 180

$$\frac{5932 \cdot 6001 - 69}{6001 \cdot 5931 + 5932} - \frac{\frac{1}{5} : \left(-0{,}3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 0{,}08 : (-0{,}2)\right)}{1\frac{17}{21} - 2\frac{1}{7}} =$$

$$\frac{(5931 + 1) \cdot 6001 - 69}{6001 \cdot 5931 + 5932} - \frac{\frac{1}{5} : \left(-\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 0{,}8 : (-2)\right)}{-1\left(\frac{24}{21} - 1\frac{17}{21}\right)} =$$

$$\frac{5931 \cdot 6001 + 6001 - 69}{6001 \cdot 5931 + 5932} - \frac{\frac{1}{5} : \left(\frac{1}{5} + 0{,}4\right)}{-\frac{7}{21}} = \frac{5931 \cdot 6001 + 5932}{6001 \cdot 5931 + 5932} - \frac{\frac{1}{5} : \frac{3}{5}}{-\frac{1}{3}} = 1 + 1 = 2$$

$2 : 7 = 0$ (ост. 2)
$2 = 7 \cdot 0 + 2$
Ответ: неполное частное равно 0, а остаток 2.

№ 181*
а) 140; 141; 142; 143; 144; 145; 146; 147; 148;
б) 114; 115; 116;...125; 126.

П. 2.1.3. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Основные содержательные цели:

1) уточнить представления о делении с остатком на множестве натуральных чисел; сформировать представления о существовании и единственности деления с остатком для любого натурального числа;

2) повторить формулу деления с остатком, понятия прямой и обратной пропорциональности; запись общих высказываний и высказываний о существовании с помощью кванторов; задачи на масштаб;

3) тренировать умение преобразовывать выражения со скобками, решать уравнения, задачи на части, вычислительные умения.

Особенности изучения учебного содержания

В начальной школе учащиеся выполняли деление с остатком на множестве натуральных чисел. Известная им формула деления с остатком имеет следующий вид.

делимое делитель частное остаток

$$\boldsymbol{a = b \cdot c + r, \quad r < b}$$

Делимое равно произведению делителя и частного плюс остаток (остаток меньше делителя).

Изучение данного пункта подготовлено изучением содержания предыдущих пунктов. Знакомясь с аксиоматическим методом построения математической теории, учащиеся актуализировали свои представления о понятии определения и осознали необходимость введения четких математических определений. При изучении предыдущего пункта учащиеся уже вспомнили формулу деления с остатком. Они использовали ее при обосновании того, что некоторое число не делится (нацело) на другое число. Так, при применении алгоритма определения того, простым или составным числом является заданное число, они, например, писали: $127 \,\vdots\, 7$ $(127 = 7 \cdot 18 + 1)$.

В данном пункте представления учащихся о делении с остатком уточняются. Вводится определение деления с остатком на множестве натуральных чисел.

Разделить число a на число b с остатком значит представить число a в виде $a = bc + r$, где $r < b$ ($a, b \in N$; $c, r \in N_0$). При этом число с называют *неполным частным*, а число r — *остатком* от деления a на b.

Важно, чтобы учащиеся понимали смысл каждой переменной в этом определении и смысл ограничений, наложенных на их значения. Полезным будет после введения (построения) данного определения задать учащимся вопросы на понимание. Приведем пример такой беседы.

— Прочтите определение еще раз. Обратите внимание, в каком порядке в равенстве $a = bc + r$ записываются множители. Что пишется в произведении на первом месте? (Делитель.)

— Что пишется на втором? (Неполное частное.)

— Как вы думаете, для чего нужно соблюдать этот порядок? (Чтобы по этой записи можно было сразу определить, где именно делитель, а где неполное частное, и понять на какое число делили с остатком. Также по этой записи удобно проверять меньше ли полученный остаток делителя.)

— Объясните, какие значения могут принимать переменные из этого определения ($a, b \in N; c, r \in N_0$).

— Переведите запись на русский язык. (Делимое и делитель должны быть натуральными числами, а неполное частное и остаток от деления могут принимать также и значение нуль.)

Далее учащиеся работают на планшетках. Один из учащихся озвучивает верный ответ.

— Приведите пример, когда неполное частное равно 0. (Например, при делении 1 на 100 неполное частное будет равно нулю, а в общем случае: если делитель меньше делимого.)

— Чему будет равен остаток от деления в этом случае? (При $c = 0$, $r = a$.)

— В каком случае $r = 0$? (Если a делится на b, то остаток от деления равен нулю.)

— Приведите пример. (При делении 28 на 4 остаток равен нулю.)

В связи с введением определения уточняется формула деления с остатком (частное теперь называют неполным частным, указывается область допустимых значений входящих в формулу переменных).

Учащимися строится общий алгоритм деления с остатком на множестве натуральных чисел. Семиклассники могут самостоятельно построить этот алгоритм, используя какой-нибудь простой пример данного действия.

Учащиеся знакомятся с теоремой делимости.

Для любых натуральных чисел a и b существует единственная пара чисел c и r из множества N_0 такая, что $a = bc + r$, где $r < b$.

Эта теорема уточняет представление учащихся о существовании и единственности деления с остатком для любого натурального числа.

Содержание данного пункта готовит учащихся к введению нового способа поиска НОД чисел — алгоритма Евклида, который опирается на деление с остатком.

При выполнении задания № 183 учащиеся сформулируют свойство, которое в дальнейшем будет распространено и на целые числа (П. 2.2.1). Отмечая на координатной прямой указанные числа, учащиеся должны сформулировать следующую гипотезу.

«Разность между двумя соседними числами, дающими при делении на число b остаток r, равна b».

Урок. Деление с остатком

Новое знание

Определение деления с остатком, теорема о делимости, алгоритм деления с остатком натурального числа a на b.

Актуализация

Повторить: определение сложения, вычитания, умножения и деления, формула деления с остатком, определение определения.

Задание на пробное действие

Уточнить известное из начальной школы определение деления с остатком.

Фиксация затруднения

Не можем правильно уточнить определение деления с остатком.

Могут возникнуть разные варианты: не можем выявить единственно правильное определение.

Не можем обосновать правильность сформулированного определения.

Фиксация причины затруднения

Затруднение возникает при составлении определения деления с остатком или при обосновании, что сформулированное определение верное.

Причиной затруднения является отсутствие определения деления с остатком (отсутствие эталона, сверив с которым полученное определение, можно было бы утверждать, что его правильно сформулировали).

Цель деятельности

Построить определение деления с остатком.

Эталон

Определение деления с остатком

Разделить число a на число b с остатком значит представить число a в виде $a = bc + r$, где $r < b$ ($a, b \in N$; $c, r \in N_0$). При этом число с называют неполным частным, a число r — остатком от деления a на b.

Теорема о делимости

Для любых натуральных чисел a и b существует единственная пара чисел c и r из множества N_0 такая, что $a = bc + r$, где $r < b$.

Алгоритм деления с остатком натурального числа *a* на *b*

1. Найти наибольшее натуральное число k, кратное делителю b и не превышающее делимого a.
2. Разделить k на делитель b, в ответе — неполное частное c ($c \in N_0$).
3. Вычесть k из делимого a, в ответе — остаток r ($0 \leqslant r < b$).
4. Сделать проверку с помощью формулы деления с остатком ($a = bc + r$, где $0 \leqslant r < b$).
5. Записать ответ.

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 183

Отмечая на координатной прямой указанные числа, учащиеся должны сформулировать следующую гипотезу: «Разность между двумя соседними числами, дающими при делении на число b остаток r, равна b».

Для доказательства используется метод введения обозначений. Основная сложность у учащихся возникает при записи на математическом языке двух соседних чисел, дающих при делении на число a остаток r. Для преодоления этого затруднения учитель может пойти от частных примеров к общему виду и попросить учащихся записать несколько отмеченных ими на координатной прямой чисел с помощью формулы деления с остатком.

По записям: $3 = 2 \cdot 1 + 1$; $5 = 2 \cdot 2 + 1$; $7 = 2 \cdot 3 + 1$; $9 = 2 \cdot 4 + 1$... учащиеся смогут заметить, что неполные частные двух таких соседних чисел отличаются на единицу. Далее доказательство учащиеся могут провести самостоятельно.

Доказательство.

$a_1 = bc + r$

$a_2 = b(c + 1) + r$

$b(c + 1) + r - (bc + r) = bc + b + r - bc - r = b$, ч. т. д.

№ 184

Делимое	56	111	175	175	217	530	697
Делитель	9	11	5; 35; 7; 25; 1 или 175	7	7	8	7
Неполное частное	6	10	35; 5; 7; 25; 175 или 1	25	31	—	98
Остаток	2	1	0	0	0	5	11

№ 185 (а, е)

а) $32 = 6 \cdot 5 + 2$;

е) $241 = 17 \cdot 14 + 3$.

№ 186 (а, б)

а) $2n + 1$, при $n = 5$, $2n + 1 = 11$, $11 > 10$;

б) $13n + 3$, при $n = 1$, $13n + 3 = 16$, $16 > 10$.

№ 189 (а)

Перед выполнением этого задания рекомендуется в ходе обсуждения с учащимися выбрать метод доказательства и проговорить основные шаги проведения доказательства методом от противного.

Возможный вариант решения.

А: Если натуральное число делится на 4, то оно не может при делении на 16 давать остаток 5.

Доказательство (методом от противного).

1. Предположим, что $\exists\, n, m \in N$: $A = 4n$ и $A = 16m + 5$.

2. Тогда выполняется равенство $4n = 16m + 5 \Leftrightarrow 4n - 16m + 5 \Leftrightarrow 4(n - 4m) = 5$ (получили противоречие, т. к. правая часть равенства делится на 4, а левая нет).

3. Следовательно, наше предположение неверно, а, значит, A (И.), ч. т. д.

№ 192 (а, г)

а) $6(5y - 30) = 5(y - 1)$;

$30y - 180 = 5y - 5$;

$30y - 5y = - 5 + 180$;

$25y = 175$;

$y = 7$

Ответ: $\{7\}$

г) $(7m - 2) : 2 - 0{,}8(m + 3) + 6 = 1{,}5(m + 2)$;

$3{,}5m - 1 - 0{,}8m - 2{,}4 + 6 = 1{,}5m + 3$;

$3{,}5m - 1{,}5m - 0{,}8m = 2{,}4 + 3 + 1 - 6$;

$1{,}2m = 0{,}4$;

$m = \frac{1}{3}$

Ответ: $\{\frac{1}{3}\}$.

№ 204*

Найти два натуральных числа, сумма и произведение которых нечетны. невозможно.

Доказательство.

Если сумма двух натуральных чисел нечетна, значит, одно из них четное, а другое нет (иначе сумма была бы четной). Произведение нечетного и четного числа — число четное (по свойству делимости произведения). Значит, найти два натуральных числа, сумма и произведение которых нечетны, нельзя.

П. 2.1.4. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Основные содержательные цели:

1) уточнить понятия общего делителя и НОД, вывести алгоритм Евклида нахождения НОД двух чисел;

2) повторить понятия делителя и кратного, способы нахождения НОД двух чисел, формулу расстояния между точками числовой прямой, решение простейших неравенств с модулями с помощью числовой прямой;
3) тренировать умение преобразовывать выражения со скобками, решать уравнения, решать задачи методом математического моделирования.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся уточняют понятия общего делителя и наибольшего общего делителя (НОД), известные им из курса 5 класса. Понятие наибольшего общего делителя расширяется на множество N_0 : НОД(a; 0) = a ($a \in N$).

В 5 классе учащиеся находили НОД чисел несколькими способами: методом полного перебора, метод перебора делителей меньшего числа, методом перебора делителей разности, методом применения разложения на простые множители. В седьмом классе они познакомятся с еще одним способом нахождения наибольшего общего делителя — алгоритмом Евклида. Идею этого способа нахождения НОД можно сформулировать следующим образом: «Вместо того, чтобы искать НОД чисел a и b, можно искать НОД меньших чисел − b и r, где r — остаток от деления a на b. Причем процедуру поиска меньших чисел с тем же НОД можно продолжать далее».

Новый способ нахождения наибольшего общего делителя строится на основе теоремы о НОД, которая звучит следующим образом.

«Если $a = bc + r$, то НОД (a; b) = НОД (b; r)».

Чтобы учащиеся поняли это свойство НОД, рекомендуется, чтобы они сформулировали соответствующую гипотезу, исходя из собственных наблюдений. Можно организовать эту работу на этапе актуализации.

— Приведите пример из домашнего задания на использование алгоритма деления с остатком. (№ 185 (б)).

На доске одним из учащихся выписывается результат выполнения задания № 185 (б). Если необходимо решение корректируется другими учениками.

$$78 = 15 \cdot 5 + 3$$

— Выпишите делимое и делитель. Найдите их НОД.

После выполнения задания представитель одной из групп проговаривает решение и его результат. «Мы выписали числа 78 (это делимое) и 15 (это делитель). Нашли их наибольший общий делитель, он равен 3. Для этого выписали делители наименьшего числа D (15) = {1, 15, 3, 5} затем, начиная с наибольшего, проверили, является ли это число делителем 78».

— Теперь выпишите делитель и остаток. Найдите их НОД.

После выполнения задания представитель другой группы проговаривает решение и его результат. «Мы выписали числа 15 (это делитель) и 3 (это остаток). Затем нашли их наибольший общий делитель, он равен 3, потому что 15 делится на 3.»

На доске остается запись:

78 = 15 · 5 + 3;
НОД (78; 15) = 3;
НОД (15; 3) = 3.

— Проанализируйте результаты, что вы можете сказать про полученные наибольшие общие делители? (Они равны.)

— Хорошо. Теперь разделите, пожалуйста, 171 на 78 с остатком.

Далее проводится аналогичная работа. Для нахождения общего делителя 171 и 78 используется их разложение на простые множители (171 = 3² · 19; 78 = 2 · 3 · 13).

На доске остается запись:

$$171 = 78 \cdot 2 + 15;$$
$$\text{НОД } (171; 78) = 3;$$
$$\text{НОД } (78; 15) = 3.$$

— Проанализируйте обе записи, что интересного вы замечаете? Какую гипотезу можно сформулировать? (НОД делимого и делителя равен НОД делителя и остатка.)

— Придумайте пример, на котором можно еще раз проверить выполнение сформулированной вами гипотезы.

Одна из групп предлагает свой результат деления с остатком одного натурального числа на другое.

— Наибольшие общие делители каких чисел нужно сравнить? (Сначала делимого и делителя, а затем делителя и остатка.)

После того как гипотеза будет проверена еще раз, группам предлагается сформулировать подмеченное свойство в буквенном виде. После того как представитель одной из групп сформулирует его, на доске вывешивается соответствующий эталон.

Данное свойство доказывается на доске учителем в подводящем диалоге.

Для проблематизации учащимся можно предложить найти НОД (17 880; 171) за 10 секунд. Выполнить это задание быстро, возможно только при использовании алгоритма Евклида

$$\text{НОД } (17880; 171) = \text{НОД } (171; 78) = \text{НОД } (78; 15) = \text{НОД } (15; 3) = 3.$$

Все шаги по делению делителя на остаток и деления остатка на последующий остаток, кроме первого, уже выполнены учащимися на этапе актуализации.

После того, как алгоритм Евклида будет построен, учащиеся применяют его для нахождения НОД двух чисел. Рекомендуется при этом оформлять решение следующим образом:

$$319 = \underline{187} \cdot 1 + \underline{132}$$
$$187 = \underline{132} \cdot 1 + \underline{55}$$
$$132 = \underline{55} \cdot 2 + \underline{22}$$
$$55 = \underline{22} \cdot 2 + \underline{11}$$
$$22 = 11 \cdot 2 + \underline{\underline{0}}$$
$$\text{НОД } (319; 187) = 11$$

При подчеркивании делителя и остатка и использовании стрелок даже слабые учащиеся успешно усваивают новый способ.

Принцип вариативности, заложенный в ДСДМ «Школа 2000...» реализуется и при изучении этого пункта. Так, при выполнении № 206 учащиеся находят НОД чисел различными способами. При этом они не только повторяют все известные им методы нахождения НОД, но и выясняют случай, в котором алгоритм Евклида является наиболее рациональным методом поиска НОД.

Алгоритм Евклида используется учащимися при сокращении дробей (**№ 208**).

Урок. Алгоритм Евклида

Новое знание

Алгоритм Евклида.

Актуализация

Повторить: определение деления с остатком; теорема о делимости; алгоритм деления с остатком натурального числа а на *b*; определение общего делителя двух натуральных чисел; определение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел; известный алгоритм нахождения НОД натуральных чисел; расширение определения НОД.

Задание на пробное действие

Найти НОД (17 880; 171) за 10 секунд.

Фиксация затруднения

Не можем найти НОД (17880; 171) за указанное время известными методами.

Фиксация причины затруднения

Затруднение проявится в том, что, используя известные способы нахождения НОД двух чисел, не хватит указанного времени для выполнения задания.

Причиной затруднения является отсутствие рационального для данного задания способа нахождения НОД.

Цель деятельности

Найти новый способ нахождения НОД двух чисел.

Эталон

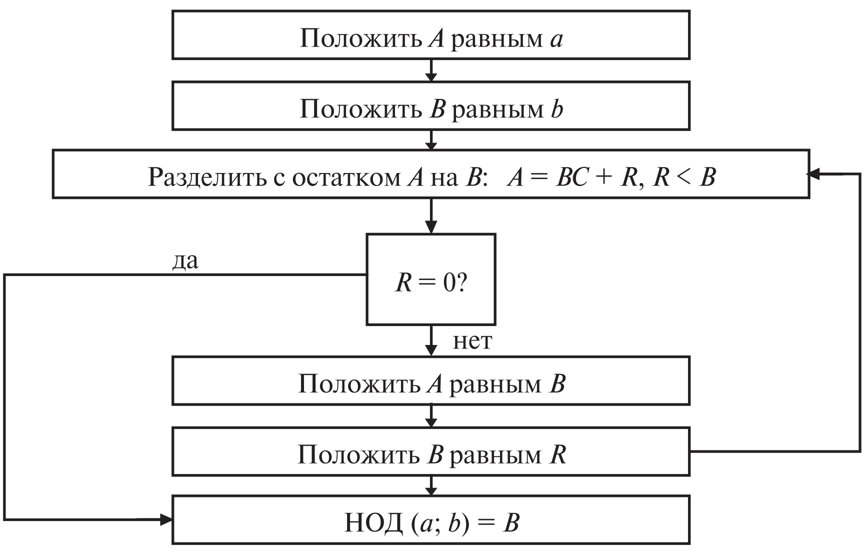
Уточнение для определения НОД

НОД $(a; 0) = a \quad (a \in N)$.

Теорема о НОД

Если $a = bc + r$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.

Алгоритм Евклида нахождения НОД двух натуральных чисел a и b ($a > b$)



Урок. Деление с остатком. Алгоритм Евклида (РТ)

Основные цели

1) тренировать умение применять понятие и алгоритм деления с остатком;
2) тренировать умение находить НОД с помощью алгоритма Евклида;
3) повторить различные способы нахождения НОД;
4) повторить понятия делителя и кратного, решение задач на масштаб.

Урок. Деление с остатком. Алгоритм Евклида (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения применять формулу деления с остатком на множестве натуральных чисел и алгоритм Евклида для нахождения НОД двух чисел;

2) тренировать умение применять формулу площади прямоугольника, находить часть от числа, выраженную дробью, использовать понятие масштаба при решении задач методом математического моделирования.

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 182

в) Имеется натуральное число, которое при делении на 24 дает остаток 7.
$\exists\, n \in N$: $n = 24b + 7$
Доказательство. Да, например, 55 ($24b + 7 = 55$ при $b = 2$).

г) Нет натуральных чисел, которые при делении на 38 дают остаток 45.
$\forall\, n \in N$: $n \neq 38c + 45$
Доказательство (от противного).

1. Предположим, что $\exists\, n \in N$: $n = 38c + 45$.
2. По определению деления с остатком при делении с остатком на 38 $n = 38c + r,\ \ r < 38$, а по нашему предположению остаток $45 > 38$. Получили противоречие с определением деления с остатком.
3. Наше предположение не верно, а значит, $\forall\, n \in N$: $n \neq 38c + 45$, ч. т. д.

№ 187 (а, б, в)

а) $7n + 3$ при делении на 7 дает остаток 3 (по формуле деления с остатком).
б) $12n + 2$ при делении на 2 дает остаток 0 (т. к. оба слагаемых делятся на 2).
в) $10n + 6 = 10n + 5 + 1 = 5(2n + 1) + 1 = 5m + 1$ при делении на 5 дает остаток 1.

№ 188

$a = bn + r$, где $r < b$ ($a, b \in N$; $n, r \in N_0$)

а) Увеличим в 2 раза делимое — $2a$, увеличим в 2 раза делитель — $2b$.
Зная, что $a = bn + r$, имеем $2a = 2(bn + r)= 2bn + 2r = \underline{(2b)n + 2r}$, т. е.
$\underline{2a} = \underline{(2b)n + 2r}$, а по формуле деления с остатком это означает, что при делении $2a$ на $2b$ неполное частное равно n , остаток равен $2r$, т.е. при увеличении делимого и делителя в 2 раза неполное частное не изменится, а остаток увеличится вдвое.

б) Увеличим в 5 раз делимое — $5a$, увеличим в 5 раз делитель — $5b$.
$\underline{5a} = 5(bn + r) = \underline{5bn + 5r = (5b)n + 5r}$, т. е. $\underline{5a} = \underline{(5b)n + 5r}$. Это означает, что при увеличении делимого и делителя в 5 раз неполное частное не изменится, а остаток увеличится в 5 раз.

в) Увеличим в k раз делимое – ka, увеличим в k раз делитель – kb.
$ka = k\,(bn + r)= kbn + kr = (kb)\mathrm{n} + kr$, т.е. $ka = (kb)n + kr$. Это означает, что при увеличении делимого и делителя в k раз неполное частное не изменится, а остаток увеличится в k раз.

Сформулируем гипотезу: при увеличении делимого и делителя в несколько раз, остаток от деления увеличится во столько же раз, а неполное частное не изменится (если натуральное число а при делении на натуральное число b дает остаток r, то натуральное число ka при $\forall\ k \in N$ при делении на натуральное число kb даст остаток, равный kr, а неполное частное при этом не изменяется).

Дано:
$a = bn + r$, где $r < b$ ($a, b \in N$; $n, r \in N_0$), $\ \ k \in\ N$
Док-ть: $ka = kbn + kr$.

Доказательство.
$a = bn + r,$ умножим обе части равенства на k.
Получим $ka = k(bn + r) \Leftrightarrow ka = = kbn + kr \Leftrightarrow ka = (kb)n + kr$, а по формуле деления с остатком это означает, что при делении ka на kb неполное частное равно n,

остаток равен kr, т.е. при увеличении делимого и делителя в несколько раз остаток увеличится во столько же раз, а неполное частное не изменится, ч. т. д.

№ 189 (г)

А: Если натуральное число при делении на 60 дает остаток 19, то оно не делится на 12.

Доказательство (методом от противного).

1. Предположим, что $\exists\ n, m \in N$: $A = 60m + 19$ и $A = 12n$.

2. Тогда, выполняется равенство

$60m + 19 = 12n \Leftrightarrow 12n - 60m = 19 \Leftrightarrow 12(n - 5m) = 19$ (получили противоречие, т. к. правая часть равенства делится на 12, а левая нет).

3. Следовательно, наше предположение неверно, а, значит, *А* (И.), ч. т. д.

№ 193

а) $M = 2$ дм: 21,7 м = 2 дм : 217 дм = 2 : 217 = 1 : 108,5.

1) $3{,}3 \cdot 108{,}5$ дм = 358, 05 дм ≈ 360 дм = 36 м;

2) $7{,}1$ дм $\cdot\ 108{,}5 = 770{,}35 \approx 770$ дм = 77 м;

3) $12{,}8 \cdot 108{,}5 = 1388{,}8$ дм ≈ 1390 дм = 139 м.

б) для решения задачи можно вспомнить и метод пропорции:

$1 : 108{,}5 = x : 5034$

$108{,}5\,x = 5034$

$x = 5034 : 108{,}5$ м $\approx 46{,}4$ м

Ответ: высота горы Казбек на рисунке художника должна быть 46,4 м.

в) 1) $7{,}5 \cdot \frac{3}{5} = 4{,}5$ (см) — меньшая сторона на плане

2) $7{,}5 \cdot 5000 = 37500$ (см) = 375 (м) — большая сторона в реальности

3) $4{,}5 \cdot 5000 = 22500$ (см) = 225 (м) — меньшая сторона в реальности

4) $225 \cdot 375 = 84\,375$ (м^2) — реальная площадь участка

84 375 м^2 = 8 га 43 а 75 м^2

Ответ: реальная площадь участка равна 8 га 43 а 75 м^2

г) 5 см = 0,05 м

Пусть x м равна большая сторона, тогда $\frac{3}{4}x$ м — меньшая сторона участка. $x > 0$. Площадь участка равна $\frac{3}{4}x \cdot x$ м^2, что по условию равно 2700 м^2.

Составим математическую модель.

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot x = 2700 \\ x > 0 \end{cases}$$

$\frac{3}{4}x^2 = 2700$

$x^2 = 2700 : \frac{3}{4}$

$x^2 = 3600$

$x = \pm 60$

$\begin{cases} x = 60 \\ x > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -60 \\ x > 0 \end{cases}$

$x = 60$ или $x = \varnothing$

$x = 60$

$0{,}05 : x = 0{,}05 : 60 = 5 : 6000 = 1 : 1200$

Ответ: масштаб данного плана равен 1 : 1200.

№ 206

а) $a = 6$, $b = 15$

$D(6) = \{1; 2; \underline{3}; 6\}$

НОД (6; 15) = 3;

б) $a = 39$, $b = 390$

390   39 $\Leftrightarrow$ НОД (39; 390) = 39

в) $a = 4$, $b = 17$

НОД (4; 17) = 1;

г) $a = 527$, $b = 528$

$528 - 527 = 1$

НОД (527; 528) = 1;

д) $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $b = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$

НОД $(a; b) = 2^2 \cdot 5 = 20$;

е) $a = 851$, $b = 943$.

$943 = 851 \cdot 1 + 92$

$851 = 92 \cdot 9 + 23$

$92 = 23 \cdot 4 + 0$

НОД (851; 943) = 23.

№ 207

а) $247 = \underline{143} \cdot 1 + \underline{104}$

$143 = \underline{104} \cdot 1 + \underline{39}$

$104 = \underline{39} \cdot 2 + \underline{26}$

$39 = \underline{26} \cdot 1 + \underline{13}$

$26 = 13 \cdot 2 + \underline{\underline{0}}$ (получили остаток нуль, значит, НОД равен последнему ненулевому остатку, вернемся к нему, покажем круговой стрелкой)

НОД (247; 143) = 13

б) $319 = \underline{187} \cdot 1 + \underline{132}$

$187 = \underline{132} \cdot 1 + \underline{55}$

$132 = \underline{55} \cdot 2 + \underline{22}$

$55 = \underline{22} \cdot 2 + \underline{11}$

$22 = 11 \cdot 2 + \underline{\underline{0}}$

НОД (319; 187) = 11

в) $533 = 451 \cdot 1 + 82$

$451 = 82 \cdot 5 + 41$

$82 = 41 \cdot 2 + 0$

НОД (533; 451) = 41

г) $945 = \underline{307} \cdot 3 + \underline{24}$

$307 = \underline{24} \cdot 12 + \underline{19}$

$24 = \underline{19} \cdot 1 + \underline{5}$

$19 = \underline{5} \cdot 3 + \underline{4}$

$5 = \underline{4} \cdot 1 + \underline{1}$

$4 = \underline{1} \cdot 4 + \underline{\underline{0}}$

НОД (945; 307) = 1

д) $867 = 391 \cdot 2 + 85$
$391 = 85 \cdot 4 + 51$
$85 = 51 \cdot 1 + 34$
$51 = 34 \cdot 1 + 17$
$34 = 17 \cdot 2 + 0$
НОД (867; 391) = 17

№ 208

а) $\frac{545}{4578} = \frac{545 : 109}{4578 : 109} = \frac{5}{42}$
$4578 = 545 \cdot 8 + 218$
$545 = 218 \cdot 2 + 109$
$218 = 109 \cdot 2 + 0$
НОД (545; 4578) = 109

б) $\frac{1067}{1552} = \frac{1067 : 97}{1552 : 97} = \frac{11}{16}$
$1552 = 1067 \cdot 1 + 485$
$1067 = 485 \cdot 2 + 97$
$485 = 97 \cdot 5 + 0$
НОД (1067; 1552) = 97.

в) $\frac{3201}{5335} = \frac{3201 : 1067}{5335 : 1067} = \frac{3}{5}$
$5335 = 3201 \cdot 1 + 2134$
$3201 = 2134 \cdot 1 + 1067$
$2134 = 1067 \cdot 2 + 0$
НОД (5335; 3201) = 1067.

г) $20\,398 = 1085 \cdot 18 + 868$
$1085 = 868 \cdot 1 + 217$
$868 = 217 \cdot 4 + 0$
НОД (20 398; 1085) = 217
$\frac{1085}{20398} = \frac{1085 : 217}{20398 : 217} = \frac{5}{94}$

№ 210 (а).

$D(70) = \{1; \underline{70}; 2; \underline{35}; \underline{5}; 14; 7; \underline{10}\}$
Ответ: {5; 10; 35; 70}.

№ 211 (а; в).

а) $x : y = 7 : 3$ и НОД $(x, y) = 4$;
$\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$, дробь $\frac{7}{3}$ — несократимая и так как НОД $(x, y) = 4$, то $x = 7 \cdot 4 = 28$, $y = 3 \cdot 4 = 12$.

в) $x : y = 5 : 8$ и НОД $(x, y) = 12$
$\frac{x}{y} = \frac{5}{8}$, дробь $\frac{5}{8}$ — несократимая и так как НОД $(x, y) = 12$, то $x = 5 \cdot 12 = 60$, $y = 8 \cdot 12 = 96$.

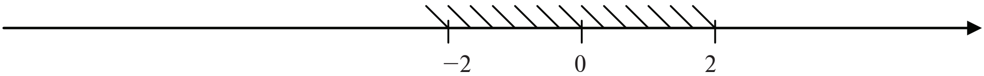
№ 213 (а; в; д)

а) Если $a = 3$, $b = 5$, то $|a - b| = |3 - 5| = 2$.
в) $a = -1$, $b = -2$, то $|a - b| = |1 - (-2)| = |-1 + 2| = 1$.
д) $a = -8$, $b = 4$, то $|a - b| = |-8 - 4| = 12$.

№ 214 (а, б)

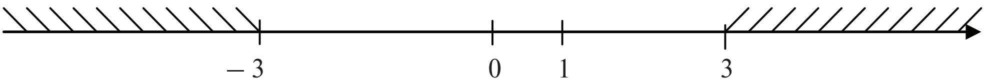
а) $|x| \le 2$

Для решения необходимо изобразить на числовой прямой точки, расстояние от которых до начала отсчета меньше либо равно 2.



б) $|x| \ge 3$

Для решения необходимо изобразить на числовой прямой точки, которые находятся от начала отсчета на расстоянии, большем или равным 3.



№ 218

а) $22\,127 = 5075 \cdot 4 + 1827$

$5075 = 1827 \cdot 2 + 1421$

$1827 = 1421 \cdot 1 + 203$

$406 = 203 \cdot 2 + 0$

НОД (22 127; 5075) = 203;

$160\,787 = 16\,027 \cdot 10 + 517$

$16\,027 = 517 \cdot 31 + 0$

НОД (160 787; 16 027) = 517.

№ 219

а) $\dfrac{3031}{173\,200} = \dfrac{3031 : 433}{173\,200 : 433} = \dfrac{7}{400}$

$173\,200 = 3031 \cdot 57 + 433$

$3031 = 433 \cdot 7 + 0$

б) $\dfrac{20329}{282\,503} = \dfrac{701 \cdot 29}{701 \cdot 403} = \dfrac{24}{403}$

$282\,503 = 20\,329 \cdot 13 + 18\,226$

$20\,329 = 18\,226 \cdot 1 + 2103$

$18\,226 = 2103 \cdot 8 + 1402$

$2103 = 1402 \cdot 1 + 701$

$1402 = 701 \cdot 2 + 0$

№ 220

а) Если $a = 7$, $b = 25$, то $|a - b| = |7 - 25| = 18$.

б) $a = -11$, $b = -9$, то $|a - b| = |-11 - (-9)| = |-11 + 9| = 2$.

в) $a = 15$, $b = -4$, то $|a - b| = |15 - (-4)| = |15 + 4| = 19$.

№ 223

а) $x : y = 5 : 2$ и НОД $(x, y) = 3$;

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2}$, дробь $\dfrac{5}{2}$ — несократимая и так как НОД $(x, y) = 3$, то $x = 5 \cdot 3 = 15$, $y = 2 \cdot 3 = 6$.

б) $x : y = 4 : 3$ и НОД $(x, y) = 6$.

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3}$, дробь $\dfrac{4}{3}$ — несократимая и так как НОД $(x, y) = 6$, то $x = 4 \cdot 6 = 24$, $y = 3 \cdot 6 = 18$.

№ 226*

Основная идея решения состоит в том, чтобы вспомнить (понять), что соседние шестеренки крутятся в разных направлениях.

Если шестеренка 1 крутится по часовой стрелке, то соседняя с ней шестеренка 2 должна крутиться против часовой стрелки, соответственно следующая шестеренка 3 будет крутиться по часовой стрелке и т. д. Рассмотрим нечетное число шестеренок, замкнутых в круг. Первая, третья, пятая...и т. д. должны крутиться в одну сторону, а шестеренки с четными номерами в противоположную. Получили, что первая и семнадцатая шестеренки должны крутиться в одну сторону, т. к. их номера нечетные, в то же самое время в замкнутом круге они должны быть соседними и должны крутиться в разные стороны. Это невозможно, т. к. одна шестеренка не может крутиться одновременно и по и против часовой стрелки.

§ 2. Развитие теории делимости

П. 2.2.1. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ*

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление о принципах развития математической теории;

2) построить определения делимости и деления с остатком на множестве целых чисел;

3) вывести алгоритм деления с остатком на множестве целых чисел и сформировать умение его применять;

3) повторить понятие множества, задание множеств списком и характеристическим свойством, диаграммы Эйлера — Венна; понятия объединения и пересечения множеств, среднего арифметического, средней скорости движения; формулы движения по реке;

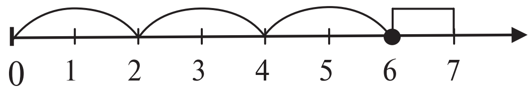
4) тренировать вычислительные навыки, решение уравнений и задач на движение по реке.

Особенности изучения учебного содержания

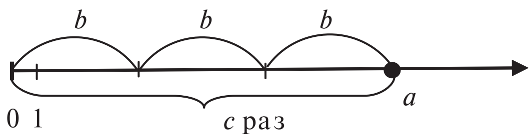
При изучении данного пункта у семиклассников формируется представление о принципах развития математической теории. Они знакомятся с фундаментальным принципом построения математической теории: ***определения новых понятий и их свойства не должны противоречить ранее введенным понятиям и доказанным утверждениям.*** Учащиеся имеют опыт расширения математической теории: в свое время множество натуральных чисел было расширено до множества целых чисел, ими были получены способы выполнения арифметических действий с целыми числами, которые не противоречили способам выполнения арифметических действий с натуральными числами. На этот опыт можно ссылаться при знакомстве учащихся с принципом развития математической теории и его применении для построения определения делимости и деления с остатком на множестве целых чисел.

В данном пункте основные определения делимости расширяются с множества натуральных чисел на множество целых чисел. При этом понятие делимости на множество целых чисел можно расширить, используя материал учебника на *стр.* 69—70, с помощью которого учащиеся знакомятся с принципом развития математической теории. Учитель может строить новое определение деления с остатком, используя подводящий диалог. В более подготовленном классе построение нового определения деления с остатком может быть проведено учащимися самостоятельно (см. ниже).

При построении определения деления с остатком на множестве целых чисел, учащиеся изменяют известное им определение, рассматривая уже не натуральные числа, а целые, они применяют фундаментальный принцип построения математической теории. Чтобы подготовить это открытие следует актуализировать знания учащихся об использовании схем для моделирования деления с остатком. Такие схемы использовались учащимися в начальной школе. Так, например, равенство $7 = 2 \cdot 3 + 1$ (полученное при делении 7 на 2 с остатком) иллюстрировалось на луче.



Для иллюстрации общего понятия деления с остатком на множестве натуральных чисел можно использовать следующую схему.



Используя данную модель, учащихся следует вывести на мысль, что при делении натуральных чисел под остатком мы фактически понимаем *расстояние от делимого a до наибольшего числа, кратного делителю b* и не превышающего *a*. Эта идея, поможет учащимся самостоятельно построить новое определение.

После того, как построено новое определение деления с остатком на множестве целых чисел, строится алгоритм деления с остатком на множестве целых чисел. Учащиеся учатся его применять. Теперь они могут делить с остатком не только целые положительные числа, но и отрицательные.

После выполнения **№№ 232—233** (которые можно выполнять параллельно) нужно обсудить с учащимися закономерность, которую можно заметить при выполнении задания. (Если делимое отрицательное число, то наибольшее кратное k по модулю больше делимого; если делимое положительное число, то наибольшее кратное k по модулю меньше делимого (как мы привыкли на множестве натуральных чисел)). Это свойство поможет менее подготовленным учащимся выполнять деление с остатком на множестве целых чисел.

При выполнении **№ 231** учащиеся формулируют свойства чисел, которые при делении на число b дают один и тот же остаток. После его доказательства учащиеся могут отмечать такие числа на координатной прямой, следующим образом.

1. Используя понятие деления с остатком, записать число, дающее при делении на b остаток r на математическом языке: $a = bc + r$
2. Вычислить значение a по формуле, например, при $c = 0$.
3. Воспользоваться свойством: «разность между соседними числами, дающими при делении на b остаток r, равна b (на множестве целых чисел)» или «расстояние между соседними числами, дающими при делении на b остаток r, на координатной прямой равно $|b|$».

Урок. Делимость целых чисел

Новое знание

Определение делимости на множестве целых чисел, определение деления с остатком на множестве целых чисел, алгоритм деления с остатком целых чисел.

Актуализация

Повторить: определение делимости на множестве натуральных чисел, определение деления с остатком на множестве натуральных чисел, алгоритм деления с остатком натурального числа a на b на множестве натуральных чисел.

Задание на пробное действие

Разделить с остатком число –7 на число –2.

Фиксация затруднения

Не можем выполнить деление числа –7 на –2.

Не можем обосновать, что выполнили задание правильно.

Фиксация причины затруднения

Затруднение возникает при выборе неполного частного и остатка от деления, т. к. используя известный алгоритм, можно подобрать множество пар, которые будут результатом деления –7 на –2 с остатком (при $c = 2$, $r = -3$; при $c = 1$, $r = -5$ и т. д.). Затруднение возникло потому, что у нас нет понятия о делении с остатком для целых чисел и нет алгоритма деления с остатком на множестве целых чисел

Цель деятельности

Расширить понятие деления с остатком на множество целых чисел и скорректировать старый алгоритм деления с остатком в соответствии с полученным понятием о делении с остатком.

Эталон

Определение делимости на множестве целых чисел

Целое число a *делится* (без остатка) на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое число c, что $a = bc$. Числа b и c – делители числа a, число a — кратное чисел b и c.

Определение деления с остатком на множестве целых чисел

Разделить число a на число b с остатком значит представить число a в виде $a = bc + r$, где $0 \leqslant r < |b|$ ($a, b, c \in Z$; $r \in N_0$). При этом число c называют неполным частным, а число r — остатком от деления числа a на число b.

Алгоритм деления с остатком целых чисел *a* и *b*

1. Найти наибольшее целое число k, кратное делителю b и не превышающее делимого a.
2. Разделить k на делитель b, в ответе — неполное частное c ($c \in Z$).
3. Вычесть k из делимого a, в ответе — остаток r ($0 \leqslant r < |b|$).
4. Сделать проверку по формуле деления с остатком ($a = bc + r$, где $0 \leqslant r < |b|$).
5. Записать ответ.

Урок. Деление целых чисел (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение применять понятие делимости на множестве целых чисел;
2) тренировать умение применять понятие деления с остатком на множестве целых чисел;
3) повторить формулы движения по реке и их применение при решении задач.

Урок. Деление целых чисел (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль усвоения понятия деления с остатком на множестве целых чисел;
2) организовать самоконтроль умения применять алгоритм деления с остатком на множестве целых чисел;
3) повторить понятие среднего арифметического, средней скорости движения.

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 228

а) $-32 \vdots 8$, т. к. существует целое число -4 такое, что $-32 = 8 \cdot (-4)$;

б) $50 \vdots (-25)$, т. к. существует целое число -2 такое, что $50 = -25 \cdot (-2)$;

в) $-45 \not\vdots 7$, т. к. не существует целого числа c такого, что $-45 = 7 \cdot c$;

г) $-207 \vdots (-9)$, т. к. существует целое число 23[2], такое что $-207 = -9 \cdot 23$;

д) $-4 \not\vdots 0$, т. к. на 0 делить нельзя;

е) $0 \vdots (-12)$, т. к. существует целое число 0, такое что $0 = -12 \cdot 0$;

ж) $-x \vdots x$ $(x \in N)$, т. к. существует целое число -1, такое что $-x = x \cdot (-1)$.

з) $y \vdots -y$ $(y \in Z)$, т. к. существует целое число -1, такое что $y = -y \cdot (-1)$, если $y \neq 0$.

№ 229

Признак делимости на -2 будет звучать следующим образом: «целое число делится на -2 в том и только в том случае, если оно оканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8».

№ 230 (а, г, ж)

а) $-78\,958$ делится на -2, т. к. оканчивается на 8;

г) $-413\,208$ делится на 9, т. к. сумма его цифр 18 делится на 9;

ж) $249\,564$ не делится на -8, т. к. три его последние цифры образуют число 564, которое на 8 не делится.

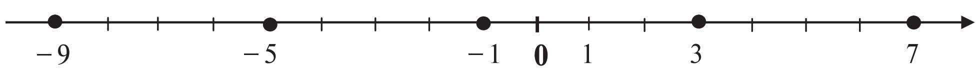
№ 231 (а, в)

а) $a = 4c + 3$

при $c = -3$ $a = 4 \cdot (-3) + 3 = -9$; при $c = 0$ $a = 4 \cdot 0 + 3 = 3$;

при $c = -2$ $a = 4 \cdot (-2) + 3 = -5$; при $c = 1$ $a = 4 \cdot 1 + 3 = 7$;

при $c = -1$ $a = 4 \cdot (-1) + 3 = -1$; при $c = 2$ $a = 4 \cdot 2 + 3 = 11$



б) $a = 5c + 2$

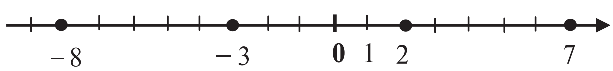
<u>1 способ.</u>

Если $c = -2$, то $a = 5 \cdot (-2) + 2 = -8$;

если $c = -1$, то $a = 5 \cdot (-1) + 2 = -3$;

если $c = 0$, то $a = 5 \cdot 0 + 2 = 2$;

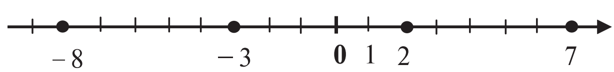
если $c = 1$, то $a = 5 \cdot 1 + 2 = 7$;



<u>2 способ.</u>

Если $c = 0$, то $a = 5 \cdot 0 + 2 = 2$;

Отметим на числовой прямой число 2, а остальные числа отметим как числа, находящиеся как справа , так и слева от 2 на расстоянии, равном 5.



в) $a = -4c + 3$

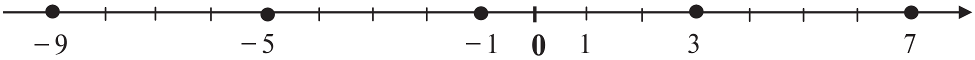
при $c = -2$ $a = -4 \cdot (-2) + 3 = 11$; при $c = 1$ $a = -4 \cdot 1 + 3 = -1$;

при $c = -1$ $a = -4 \cdot (-1) + 3 = 7$; при $c = 2$ $a = -4 \cdot 2 + 3 = -5$;

при $c = 0$ $a = -4 \cdot 0 + 3 = 3$; при $c = 3$ $a = -4 \cdot 3 + 3 = -9$

---

[2] При попытке учащихся сослаться на признак делимости, учитель поясняет, что ранее ими использовались признаки делимости на множестве натуральных чисел. Формулировкой признаков делимости для целых чисел они займутся позже, после чего начнут ими пользоваться.



<u>Гипотеза 1.</u> Разность между соседними числами, дающими при делении на b остаток r, равна b (на множестве целых чисел).

<u>Доказательство</u> (проводится также как и аналогичное свойство для натуральных чисел).

$a_1 = bc + r$

$a_2 = b(c + 1) + r$

$b(c + 1) + r - (bc + r) = bc + b + r - bc - r = b.$

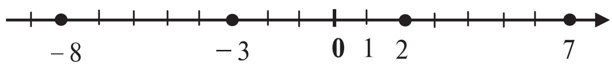
<u>Гипотеза 2.</u> Множества чисел, дающих при делении на противоположные числа один и тот же остаток, совпадают. (Множество чисел, дающих при делении на a остаток r и множество чисел, дающих при делении на $-a$ остаток r совпадают).

<u>Доказательство.</u>

Множество чисел, дающих при делении на a остаток $r - A = \{x : x = ab + r, b \in Z\}$; множество чисел, дающих при делении на $-a$ остаток $r - B = \{y : y = -ac + r, c \in Z\}$.

При $b = -c$ $x = y$ и наоборот при $c = -b$ $y = x$. Таким образом, при противоположных значениях неполного частного, мы получаем одно и тоже число. А так как b, $c \in Z$, а множество целых чисел включает в себя как сами числа, так и им противоположные, то множество A совпадает с множеством B.

г) $a = -5c + 2$



Так как множества чисел, дающих при делении на противоположные числа один и тот же остаток, совпадают, то на числовой прямой, отметим те же числа, что и при делении на 5.

№ 232

д) $5 = 7 \cdot 0 + 5$

е) $-5 = 7 \cdot (-1) + 2$

и) $-32 = 7 \cdot (-5) + 3$

к) $32 = 7 \cdot 4 + 4$

№ 233

д) $5 = -7 \cdot 0 + 5$

е) $-5 = -7 \cdot 1 + 2$

и) $-32 = -7 \cdot 5 + 3$

к) $32 = -7 \cdot (-4) + 4$

№ 234

а) $-9a + 4 = 9 \cdot (-a) + 4 = 9b + 4 \Rightarrow$ остаток от деления равен 4;

б) $17a + 15 = -17\,(-a) + 15 = -17c + 15 \Rightarrow$ остаток от деления равен 15

в) $-12a + 8 = -12a + 6 + 2 = -6(2a - 1) + 2 = -6c + 2 \Rightarrow$ остаток от деления равен 2.

г) $-25a + 10 = 5\,(-5a + 1) = 5c + 0 \Rightarrow$ остаток от деления равен 0.

№ 235

а) <u>Доказательство.</u> $a \not\vdots\,(-7)$ и $4 \not\vdots\,(-7) \Rightarrow 4a \not\vdots\,(-7)$ (т. к. 7 — простое число).

б) $b \,\vdots\, (-4) \Rightarrow b = -4k$ (по определению делимости) $\Rightarrow 2b = 2 \cdot (-4k) =$
$= \underline{-4}(2k) \Rightarrow 2b \,\vdots\, (-4)$ (по определению делимости).

д) <u>Доказательство (методом от противного)</u>.

1. Предположим, что указанное число при делении на -10 дает остаток 7.
2. Тогда $\exists\ a, b \in Z$: $A = -5a$ и $A = -10b + 7$. Получим $-5a = -10b + 7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10b - 5a = 7 \Leftrightarrow 5(2b - a) = 7$. Левая часть равенства делится на 5, а правая нет. Получили противоречие.

3. Значит, наше предположение неверно и целое число, которое делится на (–5), не может при делении на (–10) давать остаток 7.

з) <u>Доказательство (методом от противного).</u>

1. Предположим, что указанное число делится на –15.

2. Тогда $\exists\ a, b \in Z$: $A = -45a + 39$ и $A = -15b$. Получим $-45a + 39 = -15b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 45a - 15b = 39 \Leftrightarrow 15(3a - b) = 39$. Левая часть равенства делится на 15, а правая нет. Получили противоречие.

3. Значит, наше предположение неверно и целое число, которое при делении на (–45) дает остаток 39 не делится на (–15).

№ 236

а) $A = \{1; 2; 3; 4\}$;
б) $A = \{-1; 0; 1; 2\}$;
в) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$;
г) $A = \{-6; -1; 4; 9\}$.

№ 240

а) (7,5 + 3,8) : 2 = 5,65;
б) (12,8 + 39,4 + 72,6) : 3 = 41,6
в) (6,3 + 13,2 + 27,4 + 76,9) : 4 = 30,95.

№ 241 (а)

Пусть собственная скорость яхты x км/ч. $x > 0$.

	***v*, км/ч**	***t*, ч**	***S*, км**
По течению	$x + 3$	9	$9\,(x + 3)$
Против течения	$x - 3$	14	$14(x - 3)$

Ясно, что расстояние от города *A* до города *B* равно расстоянию от города *B* до *A*. Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину[3] .

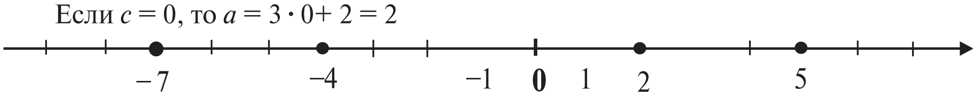
$$\begin{cases} x > 0 \\ 9\,(x + 3) = 14(x - 3) \end{cases}$$

$9x + 27 = 14x - 42$;
$9x - 14x = -42 - 27$;
$-5x = -69$;
$x = 13{,}8$
$13{,}8 > 0$

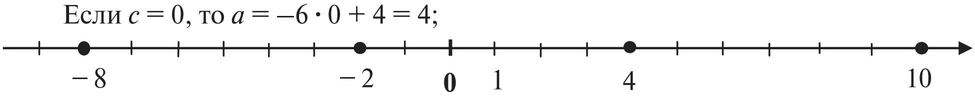
Ответ: скорость яхты равна 13,8 км/ч.

№ 243

а) при делении на 3 дают остаток 2 числа вида $a = 3c + 2$
Если $c = 0$, то $a = 3 \cdot 0 + 2 = 2$



б) при делении на (–6) дают остаток 4 числа вида $a = -6c + 4$
Если $c = 0$, то $a = -6 \cdot 0 + 4 = 4$;



№ 244

а) $0 = -5 \cdot 0 + 0$; б) $12 = -5 \cdot (-2) + 2$; в) $3 = -5 \cdot 0 + 3$;
г) $-4 = -5 \cdot 1 + 1$; д) $39 = -5 \cdot (-7) + 4$; е) $-25 = -5 \cdot 5 + 0$.

---

[3] Ответ на вопрос о средней скорости движения яхты можно оставить на следующий урок (чтобы иметь возможность сравнить с учащимися понятия среднего арифметического и средней скорости движения).

	а)	б)	в)	г)	д)	е)
неполное частное	0	– 2	0	1	– 7	5
остаток	0	2	3	1	4	0

№ 246

$A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

$B = \{3; 5; 7\}$

$A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 5; 7\}$

$A \cap B = \varnothing$

№ 247

а) $2\frac{5}{7} : (2x - 5\frac{3}{7}) = \frac{5}{6} + 3\frac{11}{12};$

$2\frac{5}{7} : (2x - 5\frac{3}{7}) = 3\frac{10 + 11}{12}$

$2\frac{5}{7} : (2x - 5\frac{3}{7}) = 3\frac{21}{12}$

$2\frac{5}{7} : (2x - 5\frac{3}{7}) = 3\frac{7}{4}$

$2x - 5\frac{3}{7} = \frac{19}{7} : \frac{19}{4}$

$2x - 5\frac{3}{7} = \frac{19 \cdot 4}{7 \cdot 19}$

$2x - 5\frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

$2x = \frac{4}{7} + 5\frac{3}{7}$

$2x = 6$

$x = 3$

Ответ: {3}.

б) $13\frac{1}{16} - 7\frac{5}{32} = (x : 2\frac{7}{9}) \cdot 6\frac{9}{16};$

$6\frac{2 - 5}{32} = (x : 2\frac{7}{9}) \cdot 6\frac{9}{16}$

$5\frac{34 - 5}{32} = (x : 2\frac{7}{9}) \cdot 6\frac{9}{16}$

$5\frac{29}{32} = (x : 2\frac{7}{9}) \cdot 6$

$x : 2\frac{7}{9} = \frac{189}{32} : \frac{105}{16}$

$x : 2\frac{7}{9} = \frac{\overset{9}{\cancel{189}} \cdot \overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{2}{\cancel{32}} \cdot \underset{5}{\cancel{105}}}$

$x : 2\frac{7}{9} = \frac{9}{10}$

$x = \frac{9}{10} \cdot 2\frac{7}{9}$

$x = \frac{25 \cdot 9}{9 \cdot 10}$

$x = 2,5$

Ответ: {2,5}.

№ 249 (а)
1) $20 \cdot 0{,}1 = 2$ (км/ч) — скорость течения реки
2) $594 : (20 + 2) = 27$ (ч) — время движения по течению
3) $594 : (20 - 2) = 33$ (ч) — время движения против течения реки
4) $27 + 33 = 60$ (ч) — общее время движения
5) $60 \cdot 0{,}25 = 15$ (ч) — время стоянок
6) $60 + 15 = 75$ (ч) — общее время мероприятия
75 ч = 3 суток 3 ч
Ответ: 3 суток 3 часа было затрачено на мероприятие.

№ 251*
Так как код делится на 4 и состоит только из 2 и 3, значит, последние две цифры образуют число 32.
*****32
Из оставшихся пяти цифр двоек больше, чем троек. При этом, чтобы число делилось на 3, сумма его цифр должна делиться на 3.
1) Если среди первых пяти цифр 5 двоек, то сумма цифр всего кода равна $2 \cdot 5 + 3 + 2 = 15$.
2) Если среди первых пяти цифр 4 двойки, то сумма цифр всего кода равна $2 \cdot 4 + 3 + 3 + 2 = 16$, а 16 не делится на 3, значит, такая комбинация не подходит.
3) Если среди первых пяти цифр 3 двойки, то сумма цифр всего кода равна $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 + 2 = 17$, а 17 не делится на 3, значит, такая комбинация не подходит.
4) Если среди первых пяти цифр менее 3 двоек, то троек будет больше, чем двоек, а это противоречит условию.

Значит, указанных данных достаточно для однозначного определения кода сейфа: 2222232.

П. 2.2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПО ОСТАТКАМ ОТ ДЕЛЕНИЯ

Основные содержательные цели:
1) уточнить представление о классификации множества;
2) познакомить учащихся с классификацией множества целых чисел по остаткам от деления на некоторое натуральное число;
3) повторить формулу деления с остатком, понятие среднего арифметического, осевой и центральной симметрий, свойство делимости разности, прямоугольную систему координат;
4) тренировать умение определять координаты точек и строить точки по их координатам, решать задачи методом математического моделирования, решать уравнения.

Особенности изучения учебного содержания

Данный пункт изучается при 4-х часах алгебры в неделю. При его изучении уточняются представления учащихся о классификации множества, и строится новая классификация множества целых чисел по остаткам от деления на некоторое натуральное число.

Рассмотрим возможный ход урока по данной теме.

На этапе актуализации целесообразно выполнить следующие упражнения: **№ 253 (а, г); № 254; № 255**.

В ходе решения уточняется представление учащихся о классификации множества.

Для пробного действия можно предложить следующее задание.

«Укажите признак, по которому можно разбить множество целых чисел на три класса, используя понятие деления с остатком».

<u>Возможные затруднения:</u> не сможем разбить множество целых чисел на три класса, используя понятие деления с остатком, или разобьем, но не сможем обосновать, что данное разбиение будет классификацией.

Этап фиксации причины затруднения можно построить следующим образом.

— Посовещайтесь в группах в течение 1 минуты и ответьте на вопросы.

1) Какое задание должны были выполнить?

2) Чем могли воспользоваться при выполнении задания?

3) В каком месте и почему возникнет затруднение?

Одна из групп озвучивает результат обсуждения, остальные при необходимости уточняют, дополняют.

<u>Возможный вариант ответа.</u>

1) Надо было разбить множество целых чисел на два, три класса, используя понятие деления с остатком.
2) Могли разбить на два класса по признаку: делится на данное число с остатком и без остатка, но в задании требовалось разбить множество на три класса, а не на два.
3) Затруднение возникнет при поиске признака, по которому множество целых чисел можно разбить на три класса (с использованием понятия деления с остатком).

Этап построения проекта выхода из затруднения.

— Посовещайтесь в группах в течение 1 минуты и сформулируйте цель дальнейшей деятельности.

Одна из групп озвучивает результат обсуждения, остальные при необходимости уточняют, дополняют.

Возможный вариант ответа.

Цель: найти признак, по которому можно разбить множество целых чисел на три класса.

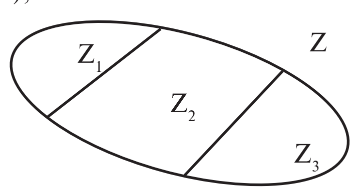
План:

1. Проанализировать классы, которые предложены в карточках (для сильных классов карточка не используется);

$\boldsymbol{Z}_1 = \{...-4;\ -1;\ 2;\ 5;\ 8;\ ...\}$

$\boldsymbol{Z}_2 = \{...-5;\ -2;\ 1;\ 4;\ 7;\ ...\}$

$\boldsymbol{Z}_3 = \{...-6;\ -3;\ 0;\ 3;\ 6;\ ...\}$



2. Найти признак, по которому множество целых чисел разбито на три класса;
3. Сформулировать признак, по которому можно провести разбиение множества целых чисел на три класса;
4. Доказать, что полученное разбиение является классификацией (доказательство можно провести в подводящем диалоге).

После реализации плана проводится обобщение: полученный признак дает возможность проводить классификацию целых чисел по их остаткам от деления на некоторое число.

Эталон

Признаком, на основании которого можно проводить классификацию целых чисел, является величина остатка от деления на некоторое заданное число.

На **этапе первичного закрепления** целесообразно выполнить упражнения:

№ 256 (в, г) — выполняется на доске.

№ 257 (а) — выполняется в парах.

А **на этапе самостоятельной работы:** № 257 (б).

На этапе повторения выполняются упражнения: **№ 258 (а); № 259 (б); № 260 (в); № 265 (а, б, в).**

На дом можно задать: **п. 2.2.2. № 266, № 267 (а), № 271 (а), № 272***.

П. 2.2.3. СРАВНЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА*

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление о понятии сравнения по некоторому модулю, доказать простейшие свойства сравнений;

2) повторить понятие линейной диаграммы, признаки делимости;

3) тренировать вычислительные навыки, умение выполнять преобразование алгебраических выражений, решение уравнений и задач на совместную работу.

П. 2.2.4. АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ*

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление об арифметике остатков как эффективном способе решения задач на делимость;

2) повторить сравнения обыкновенных дробей, сокращение алгебраических дробей, решение уравнений с модулями, зависимость между компонентами и результатами умножения;

3) тренировать вычислительные навыки, умение выполнять действия с модулями чисел, умение решать задачи на проценты и пропорциональное деление.

П. 2.2.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СРАВНЕНИЙ*

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление о методах решения задач на делимость с помощью сравнений;

2) повторить формулы одновременного движения двух объектов, понятие системы счисления;

3) тренировать вычислительные навыки, умение выполнять действия с модулями, решать уравнения и задачи на одновременное движение двух объектов, записывать натуральные числа в разных системах счисления, осуществлять перевод из одной системы счисления в другую.

Содержание данных пунктов не является обязательным для изучения. Их изучение может быть вынесено учителем на факультативные занятия.

Задачи для самоконтроля к главе 2

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 356 (а, б, г)

а) 53

Первое простое число, следующее за числом 50, это число 53, т. к. числа 2; 3; 5; 7 простые числа, квадраты которых меньше 53, а число 53 не делится ни на одно из этих чисел.

б) 140

Первое простое число, следующее за числом 140, число 149, т. к. числа 2; 3; 5; 7; 11 простые числа, квадраты которых меньше 149, а число 149 не делится ни на одно из этих чисел.

г) 435

Первое простое число, следующее за числом 435, число 437, т. к. числа 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19 простые числа, квадраты которых меньше 437, а число 437 не делится ни на одно из этих чисел.

№ 359 (б, в)

б) $\frac{611}{799} = \frac{13}{17}$;

$799 = 611 \cdot 1 + 188;$

$611 = 188 \cdot 3 + 47;$

$188 = 47 \cdot 4 + 0$

НОД $(611; 799) = 47$

в) $\frac{469}{1139} = \frac{7}{17}$

$1139 = 469 \cdot 2 + 201;$

$469 = 201 \cdot 2 + 67;$

$201 = 67 \cdot 3 + 0$

НОД $(469; 1139) = 67$

а) $\frac{497}{781}$

$781 = 497 \cdot 1 + 284;$

$497 = 284 \cdot 1 + 213;$

$284 = 213 \cdot 1 + 71;$

$213 = 71 \cdot 3 + 0$

НОД $(497; 781) = 71$

$\frac{497}{781} = \frac{7}{11}$

Глава 3. Законы равносильных преобразований алгебраических выражений

Основные цели изучения данной главы:

- тренировать умение применять правила равносильных преобразований;
- уточнить правила раскрытия скобок в алгебраических суммах и произведениях;
- сформировать умение преобразовывать алгебраические суммы, содержащие внутренние скобки;
- сформировать умение преобразовывать выражения с внутренними скобками, содержащие умножение и деление.

Правила равносильных преобразований сформулированы в предыдущем месяце, теперь учащиеся выполняют преобразования буквенных выражений, применяя открытые ими правила. В связи с мощной алгебраической подготовкой, которая осуществлялась в курсе, подобные задания основной частью семиклассников воспринимаются как задания на повторение и не вызывают трудностей. Следует обратить внимание учащихся на то, что новая терминология не изменяет самих преобразований.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания учащиеся:

- *повторяют и систематизируют* знания, полученные в 5—6 классах;
- *используют* математическую терминологию в устной и письменной речи;
- *представляют* обыкновенные дроби в виде периодических десятичных дробей;
- *представляют* периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей и смешанных чисел;
- *применяют* законы арифметических действий для равносильных преобразований;
- *применяют* правила раскрытия скобок в алгебраических суммах;
- *применяют* правила равносильных преобразований произведений;
- *используют* схемы и таблицы;
- *строят и выполняют* алгоритмы чтения, записи и составления выражений;
- *работают* с различными математическими моделями;
- *решают* текстовые задачи;
- *решают* простейшие уравнения;
- *выполняют* действия с рациональными числами;
- *определяют* вид, истинность высказывания, *строят* отрицание ложных высказываний.

§ 1. Рациональные числа и законы арифметики

П. 3.1.1. МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление о рациональных числах как о бесконечных периодических десятичных дробях и о том, что помимо рациональных чисел существуют другие, неизвестные нам пока иррациональные числа;

2) построить способ записи любого рационального числа в виде десятичной дроби; любой бесконечной периодической десятичной дроби в виде обыкновенной;

3) повторить взаимосвязь между множествами N, Z, Q, понятие выражения, приемы рациональных вычислений с использованием законов арифметических действий, правила сравнения обыкновенных и десятичных дробей, решение задач на одновременное движение;

4) тренировать умение читать и записывать буквенные выражения, сравнивать рациональные числа; закрепить совместные действия с десятичными и обыкновенными дробями; решение линейных уравнений и задач на одновременное движение.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении данного пункта повторяются и систематизируются следующие знания учащихся о рациональных числах: взаимосвязь между множествами N, Z, Q, представления о конечной и бесконечной (периодической) десятичной дроби, об обыкновенных дробях, об условиях перевода обыкновенной дроби в конечную десятичную и обратно, уточняется алгоритм перевода обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь (и обратно), алгоритм перевода обыкновенной дроби в периодическую десятичную дробь. Последние алгоритмы рассматриваются и для отрицательных чисел (**№№ 386—388**).

При изучении данного пункта учащиеся знакомятся со свойством периодических десятичных дробей: любая периодическая десятичная дробь представима в виде обыкновенной дроби, и обратно. Из чего делается важный вывод: ***множество периодических десятичных дробей совпадает с множеством рациональных чисел.***

В данном курсе учащиеся знакомятся с правилом перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь уже в 7 классе. Ведь по программе «Учусь учиться» они познакомились с понятием бесконечной десятичной дроби уже в 5 классе, знают, какая дробь называется периодической десятичной дроби, и умеют ее записывать.

Сначала учащиеся знакомятся с общей идеей перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную путем умножения на $10n$ и вычитания полученного равенства из исходного, что дает возможность избавиться от бесконечного «хвоста». После чего учащиеся формулируют обобщенное правило.

Чтобы записать положительную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби, нужно:

1) из числа, образованного цифрами, стоящими до второго периода, вычесть число, образованное цифрами, стоящими до первого периода, и записать эту разность как числитель;
2) в знаменателе записать цифру девять столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток записать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Учащиеся выполняют перевод и отрицательных периодических десятичных дробей, используя те же правила с поправкой на знак. Ведь построенное правило сохранится и для отрицательных рациональных чисел, так как если мы поставим перед обыкновенной или десятичной дробью знак минус, то в записи изменится только знак.

Учащиеся пользуются алгоритмом перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь для сравнения рациональных чисел и нахождения значения выражений (**№№ 390—391**).

При выполнении **№ 392** ставится вопрос о существовании чисел, которые не являются рациональными (бесконечные непериодические дроби).

Урок. Множество рациональных чисел

Новое знание

Правило записи периодической дроби в виде обыкновенной дроби.

Актуализация

Повторить: алгоритмы представления десятичных дробей в виде обыкновенных и наоборот.

Задание на пробное действие

Запишите периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей:

а) 0,(7); б) –5,1(38).

Фиксация затруднения

Не можем выполнить задание, или не можем обосновать свой ответ.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма представления периодических дробей в виде обыкновенных дробей.

Цель деятельности

Сформулировать алгоритм представления периодических дробей в виде обыкновенных дробей.

Эталон

Правило записи периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби

Чтобы записать положительную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной, нужно:
1) из числа, образованного цифрами, стоящими до второго периода, вычесть число, образованное цифрами, стоящими до первого периода, и записать эту разность как числитель;
2) в знаменателе записать цифру девять столько раз, столько цифр в периоде, и после девяток записать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Урок. Множество рациональных чисел (РТ)

Урок проводится по структуре урока рефлексии тренировочного типа.

Основные цели:
1) тренировать умение преобразовывать периодические дроби в обыкновенные дроби;
2) формировать умение выполнять действия с рациональными числами;
3) тренировать умение решать задачи методом моделирования;
4) тренировать умение анализировать собственную деятельность.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 386 (а, в)

а) $34{,}6 = \frac{346}{10} = 34\frac{6}{10} = 34\frac{3}{5}$; в) $-49{,}37 = -\frac{4937}{100} = -49\frac{37}{100}$

№ 387 (а, д)

а) $\frac{15}{300}$

Чтобы определить возможность представления дроби в виде десятичной дроби необходимо данную дробь сократить и знаменатель разложить на простые множители:

$\frac{15}{300} = \frac{1}{20}$, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$.

Так как в разложении только 2 и 5, значит, дробь можно представить в виде десятичной дроби.

$\frac{15}{300} = 0{,}05$

д) $-\frac{693}{308}$

Чтобы определить возможность представления дроби в виде десятичной дроби необходимо данную дробь сократить и знаменатель разложить на простые множители:

$-\frac{693}{308} = -\frac{9}{4}$, $4 = 2 \cdot 2$.

Так как в разложении только 2, значит, дробь можно представить в виде десятичной дроби.

$-\frac{693}{308} = -2{,}25$

№ 388 (а, б, в, г)

а) $0,5 = 0,5(0)$;   б) $-27 = -27,(0)$;   в) $-\frac{5}{30} = -0,1(6)$ г) $\frac{7}{11} = 0,(63)$

$$\begin{array}{r|l} \underline{5,} & \underline{30\quad} \\ -50 & 0,1666... \\ \underline{30} & \\ -200 & \\ \underline{180} & \\ 200 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \underline{7,0} & \underline{11\quad} \\ -70 & 0,63... \\ \underline{66} & \\ -40 & \\ \underline{33} & \\ 70 & \end{array}$$

№ 389

б) $-0,(15)$

Не обращая внимания на знак, записать дробь, в числителе которой разность чисел: первое число образованно цифрами, стоящими до второго периода, второе число образовано цифрами, стоящими до первого периода.

В знаменателе записать девятку столько раз, сколько цифр в периоде, а после девятки записать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

$0,(15) = \frac{15-0}{99} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$

$-0,(15) = -\frac{5}{33}$

в) $1,(25) = \frac{125-1}{99} = \frac{124}{99} = 1\frac{25}{99}$;

г) $-3,(781) = -3\frac{781}{999}$;

е) $15,16(2) = 15\frac{73}{450}$

ж) $-29,37(1) = -\frac{29371-2937}{900} = -\frac{26434}{900} = -\frac{13217}{450} = -29\frac{167}{450}$

з) $315,2(76)$

$315,2(76) = \frac{315276-3152}{990} = \frac{312124}{990} = \frac{156062}{495}$

№ 390

а) $0,091$ и $\frac{1}{11}$

$\frac{1}{11} = 0,(09)$

$0,091 > 0,0909...$

$0,091 > \frac{1}{11}$

б) $-\frac{3}{11}$ и $-0,3$

$\frac{3}{11} = 0,(27)$

$-0,2727... > -0,3$

$-\frac{7}{11} > -0,3$

в) $0,(31)$ и $0,31$

$0,3131... > 0,31$

$0,(31) > 0,313$

г) $-0,789$ и $-0,7(8)$

$-0,789 < -0,7888...$

$-0,789 < -0,7(8)$

д) $0,(451)$ и $\frac{5}{11}$

$\frac{5}{11} = 0,(45)$

$0,451451... < 0,4545...$

$0,(451) < \frac{5}{11}$

е) $-\frac{4}{7}$ и $-0,(5)$

$-0,(5) = -\frac{5}{9}$

$-\frac{4}{7} < -\frac{5}{9}$

$-\frac{4}{7} < -0,(5)$

№ 391

а) $\dfrac{0,6(4)-0,4(8)}{\frac{7}{27}} \cdot \dfrac{3,512+2,488-1,2(3)}{14,3} \cdot 10 = 2$

$0,6(4) = \dfrac{64-6}{90} = \dfrac{58}{90} = \dfrac{29}{45};$

$0,4(8) = \dfrac{48-4}{90} = \dfrac{44}{90} = \dfrac{22}{45};$

$1,2(3) = \dfrac{123-12}{90} = \dfrac{111}{90} = \dfrac{37}{30}$

1) $\dfrac{29}{45} - \dfrac{22}{45} = \dfrac{7}{45};$

2) $\dfrac{7}{45} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5};$

3) $3,512 + 2,488 = 6;$

4) $6 - \dfrac{37}{30} = 6 - 1\dfrac{7}{30} = 4\dfrac{23}{30};$

5) $\dfrac{143}{30} : \dfrac{143}{10} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3};$

6) $\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 10 = 2$

б) $3,5 - 2,(4) - 1,(5) + (0,5 + 0,(5) - \dfrac{2}{3}) : 0,(3) = \dfrac{2}{3} = 0,(6)$

$2,(4) = \dfrac{24-2}{9} = \dfrac{22}{9} = 2\dfrac{4}{9};$

$1,(5) = \dfrac{15-1}{9} = \dfrac{14}{9} = 1\dfrac{5}{9};$

$0,(5) = \dfrac{5}{9};$

$0,(3) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{9+10-12}{18} = \dfrac{7}{18};$

2) $3\dfrac{1}{2} - 2\dfrac{4}{9} - 1\dfrac{5}{9} = \dfrac{9-8-10}{18} = -\dfrac{9}{18} = -\dfrac{1}{2};$

3) $\dfrac{7}{18} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{6} = 1\dfrac{1}{6};$

4) $-\dfrac{1}{2} + 1\dfrac{1}{6} = -\dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} = 0,(6)$

в) $7,5 \cdot \dfrac{11}{25} - (2,(4) \cdot 5\dfrac{8}{11}) : (-\dfrac{35}{4}) = 4,9$

$2,(4) = \dfrac{24-2}{9} = \dfrac{22}{9}$

1) $7,5 \cdot \dfrac{11}{25} = 0,3 \cdot 11 = 3,3;$

2) $\dfrac{22}{9} \cdot \dfrac{63}{11} = 14;$

3) $14 : (-\dfrac{35}{4}) = -\dfrac{8}{5};$

4) $3,3 - (-1,6) = 3,3 + 1,6 = 4,9$

г) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}+1(3)\right):0{,}25}{(5{,}(6)-0{,}(42)+1{,}(75))}\cdot\dfrac{9}{4}=3\dfrac{3}{5}=3{,}6$

$1{,}(3)=\dfrac{13-1}{9}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3};$

$5{,}(6)=\dfrac{56-5}{9}=\dfrac{51}{9}=\dfrac{17}{3};$

$0{,}(42)=\dfrac{42}{99}=\dfrac{14}{33};$

$1{,}(75)=\dfrac{175-1}{99}=\dfrac{174}{99}=\dfrac{58}{33}$

1) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{6}{3}=2$;

2) $2:0{,}25=8$

3) $\dfrac{17}{3}-\dfrac{14}{33}+\dfrac{58}{33}=\dfrac{187+14-58}{33}=\dfrac{231}{33}=\dfrac{77}{11}=7;$

4) $7\cdot\dfrac{5}{7}=5;$

5) $\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{18}{5}=3\dfrac{3}{5}=3{,}6$

№ 392

а) 0,125 = 0,125 (0) — рациональным
б) – 4,(27) — рациональным
в) 3,0030003 — рациональным
г) – 7,070070007... — не является рациональным
д) – 5,06060606... — рациональным
е) 21,32332333233332 — не является рациональным

№ 395

а) $0{,}5(x-1)=-3(-0{,}05x-1{,}7);$
$0{,}5x-0{,}5=0{,}15x+5{,}1;$
$0{,}5x-0{,}15x=5{,}1+0{,}5;$
$0{,}35x=5{,}6;$
$x=16$
Ответ: {16}.

б) $-0{,}2(17-1{,}8y)=0{,}3(0{,}4y-1{,}2);$
$-3{,}4+0{,}36y=0{,}12y-0{,}36;$
$0{,}36y-0{,}12y=-0{,}36+3{,}4;$
$0{,}24y=3{,}04;$
$y=12{,}(6)$
Ответ: {12,(6)}.

в) $10(3y-2)-3(5y+2)=-5(6y-7)+29;$
$30y-20-15y-6=-30y+35+29;$
$15y+30y=64+26;$
$45y=90;$
$y=2$
Ответ: {2}.

г) $(5x-1)-3(0{,}9x-0{,}1x)=6(1{,}1-0{,}1x);$
$5x-1-2{,}7x+0{,}3x=6{,}6-0{,}6x;$
$2{,}6x+0{,}6x=6{,}6+1;$
$3{,}2x=7{,}6;$
$x=2{,}375$
Ответ: {2,375}.

№ 396 (б)

Пусть скорость второго автомобиля x км/ч ($x>0$), тогда $(75-x)$ км/ч — скорость сближения. Известно, что встреча произошла через 10 ч, а первоначальное расстояние равно 150 км. Составим уравнение и решим его:

$150:(75-x)=10;$
$75-x=150:10;$
$75-x=15;$

$x = 75 - 15;$

$x = 60.$

Ответ: скорость второго автомобиля равна 60 км/ч

№ 398 (а, б)

а) $-5,3 = -5,3(0);$

б) $\frac{13}{15} = 0,8(6)$

№ 399 (а, б)

а) $0,(2) = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9};$

б) $-3,(12) = -\frac{312-3}{99} = -\frac{309}{99} = -\frac{103}{33}$

№ 400

а) $0,7$ и $\frac{7}{11}$	б) $-0,(28)$ и $-0,283$	в) $2,(45)$ и $\frac{22}{9}$
$0,7 = \frac{7}{10}$	$-0,2828... > -0,283$	$\frac{22}{9} = 2,(4)$
$\frac{7}{10} > \frac{7}{11}$	$-0,(28) > -0,283$	$2,4545... > 1,4444...$
$0,7 > \frac{7}{11}$		$2,(45) > \frac{22}{9}$

П. 3.1.2 ЗАКОНЫ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ И РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основные содержательные цели:

1) уточнить представления о числовых и буквенных выражениях, их чтении, записи, целесообразности использования букв; нахождении значения буквенного выражения при известном значении букв; уточнить и систематизировать известные учащимся законы арифметических действий;

2) сформировать представление об алгебре, равносильных выражениях и равносильных преобразованиях; сформулировать правила равносильных преобразований, основанные на законах арифметических действий;

3) повторить задачи на совместную работу;

4) тренировать умение читать и записывать буквенные выражения, упрощать их и находить их значения; закрепить действия с десятичными дробями, отрицательными числами, решение уравнений и задач на совместную работу.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении данного пункта уточняются представления учащихся о числовых и буквенных выражениях, их чтении, записи, целесообразности использования букв. Учащиеся находят значения буквенных выражений при заданных значениях букв. Семиклассники повторяют и систематизируют известные им законы арифметических действий.

Здесь же можно уточнить представление об алгебре, как разделе математики. В этом пункте учащимися уточняются их представления о равносильных выражениях и равносильных преобразованиях.

Опираясь на известные им законы арифметических действий, учащиеся самостоятельно строят правила равносильных преобразований.

1. В любой алгебраической сумме можно произвольным образом переставлять слагаемые и объединять их в группы.
2. В любом произведении можно как угодно переставлять множители и объединять их в группы.
3. Ели несколько слагаемых алгебраической суммы имеют общий множитель, то его можно вынести за скобку.

После того как правила равносильных преобразований сформулированы, учащиеся выполняют преобразования буквенных выражений, которые выполнялись ими и раньше, однако обосновывают они их теперь по-новому. В связи с мощной алгебраической подготовкой, которая осуществлялась в курсе, подобные задания для основной части семиклассников будут восприниматься как задания на повторение и не вызовут затруднений. Следует обратить внимание учащихся на то, что новая терминология не изменяет самих преобразований.

Следует понимать, что в отличие от предыдущей ступени обучения выполнение равносильных преобразований выражений на данном этапе обучения является обязательным навыком.

Урок. Законы арифметических действий и равносильные преобразования

Новое знание

Правила равносильных преобразований.

Актуализация

Повторить: законы арифметических действий.

Задание на пробное действие

Докажите, что выполненные преобразования равносильны:

$5x - 2y - 3x + y = 2x - y$

Фиксация затруднения

Не можем доказать, что выполнены равносильные преобразования; не можем обосновать, что доказательство проведено правильно.

Фиксация причины затруднения

Нет правил равносильных преобразований.

Цель деятельности

Сформулировать правила равносильных преобразований.

Эталон

Правила равносильных преобразований

1. В любой алгебраической сумме можно произвольным образом переставлять слагаемые и объединять их в группы.
2. В любом произведении можно как угодно переставлять множители и объединять их в группы.
3. Ели несколько слагаемых алгебраической суммы имеют общий множитель, то его можно вынести за скобку.

Урок. Законы арифметических действий и равносильные преобразования (РК)

Урок проводится по структуре рефлексивного урока.

Основные цели:

1) организовать самоконтроль усвоения способа записи рационального числа в виде бесконечной десятичной дроби и в виде обыкновенной дроби, а также способов перевода из одной записи в другую; проведения рациональных вычислений и равносильных преобразований, основанных на законах арифметических действий;
2) организовать самоконтроль умения упрощать выражения; решать задачи на одновременное движение.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 411

а) $a + b - c + d =$ слагаемые: $a, b, -c, d$
$= a + b + (-c) + d$
б) $a + c - b + d =$ слагаемые: $a, c, -b, d$
$= a + c + (-b) + d$
в) $a + d - c + b =$ слагаемые: $a, d, -c, b$
$= a + d + (-c) + b$
г) $d + b + a - c =$ слагаемые: $d, b, a, -c$
$= d + b + a + (-c)$

№ 412

а) $38 + 17 + 43 = 38 + (17 + 43)$, сумма чисел 38, 17 и 43 равна сумме числа 38 и суммы чисел 17 и 43; равенство верно, использовался сочетательный закон сложения;

б) $25 \cdot 13 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 13$, произведение чисел 25, 13 и 4 равно произведению произведения чисел 25, 4 и числа 13; равенство верно, использовались переместительный и сочетательные законы умножения;

в) $15 \cdot 12 + 15 \cdot 8 = 15 \cdot (12 + 8)$, сумма произведения чисел 15, 12 и произведения чисел 15 и 8 равно произведению числа 15 и суммы чисел 12 и 8; равенство верно, использовался распределительный закон умножения;

г) $28 \cdot 3{,}56 + 3{,}56 \cdot 72 = (28 + 72) \cdot 3{,}56$, сумма произведения чисел 28 и 3,56 и произведения чисел 3,56 и 72 равна произведению суммы чисел 28, 72 и числа 3,56; равенство верно, использовались распределительный, переместительный законы.

№ 413

а) $A = 7a + 15bc - 3a + 5bc =$
= можно использовать первое правило $(7a - 3a) + (15bc + 5bc) =$
= можно использовать третье правило $(7 - 3)a + (15 + 5)bc = 4a + 20bc$
$B = 4a + 20bc$
$A = B$

б) $A = 3c - 6bc - 5a + 7bc = -2a + bc$ $\qquad B = -2a + bc$
$A = B$ переместительный и сочетательный закон
г) $A = 2xy - 7xy^2 - 9x^2 = x(2y - 7y^2 - 9x) = x(-7y^2 + 2y - 9x)$
$B = x(-7y^2 + 2y - 9x)$
$A = B$

№ 415

а) $7a + b + 2a - 2b = (7a + 2a) + (b - 2b) = (7 + 2)a + (1 - 2)b = 9a - b$
в) $3mn^2 - 7m^2n + 5mn^2 - 2m^2n = (3mn^2 + 5mn^2) + (-7m^2n - 2m^2n) =$
$= (3 + 5)mn^2 + (-7 - 2)m^2n = 8mn^2 - 9m^2n$

г) $5c^2dk + 2cdk^2 - 3dkc^2 - 4k^2dc = \underset{\text{Соч. з. сл.}}{5c^2dk - 3c^2dk + 2cdk^2 - 4dck^2} =$

$= (5c^2dk - 3c^2dk) + (2cdk^2 - 4dck^2) =$

$\overset{\text{Расп.}}{=} (5-3)c^2dk + (2-4)dck^2 = 2c^2dk - 2dck^2$

№ 419

а) $1 : (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = 1 : 1 = 1$ (с.)

Ответ: за сутки будет съедена копна сена.

в) $(300 + 4 \cdot 16) : (48 : 2 + 129 : 6) = 364 : 45{,}5 = 8$ (ч)

Ответ: за 8 ч выкачают два насоса всю воду.

№ 420

а) $(5{,}7 + 3{,}2) - (3{,}2 - 5{,}7) - 1{,}4 = 5{,}7 + 3{,}2 - 3{,}2 + 5{,}7 - 1{,}4 =$
$=(5{,}7 + 5{,}7) + (3{,}2 - 3{,}2) - 1{,}4 = 11{,}4 + 0 - 1{,}4 = 10;$

б) $-2{,}3 - (5{,}8 \cdot 25 - 6{,}3 \cdot 25) : 5 = -2{,}3 - 25(5{,}8 - 6{,}3) : 5 =$
$= -2{,}3 - 5(5{,}8 - 6{,}3) = -2{,}3 - 5 \cdot (-0{,}5) = -2{,}3 + 2{,}5 = 0{,}2$

№ 421 (а)

а) $3(y-2) - 2(y+5) - 5(6-7y) + 16y = 6;$
$3y - 6 - 2y - 10 - 30 + 35y + 16y = 6;$
$52y = 6 + 42;$
$52y = 52;$
$y = 1$

Ответ: $\{1\}$.

№ 423 (а, г)

а) $A = 5x + 7y - 3x + 5y = 2x + 12y;$ $B = 2x + 12y;$ $A = B$

г) $A = -5x - 7x^2 - 9x^3 = -x(5 + 7x + 9x^2);$ $B = -x(5 - 7x - 9x^2);$ $A \neq B$

№ 424 (а, б)

а) $6x + 3y - 3x - 4y = 3x - y;$

б) $\frac{2}{5}cd - \frac{1}{3}cd + \frac{4}{15}cd + \frac{1}{6}cd = \frac{1}{2}cd$

№ 426

а) $3a^5$ при любых значениях a;

б) $\frac{2}{4y-5}$ $\frac{8c}{(c-5)(c+2)}$ г) $\frac{m-5}{(2m+3)(6-m)}$

$4y + 5 \neq 0;$ $(c-5)(c+2) \neq 0;$ $(2m+3)(6-m) \neq 0$
$4y \neq -5;$ $c \neq 5; c \neq -2$ $m \neq -1{,}5; m \neq 6$
$y \neq -1{,}25$

§ 2. Равносильные преобразования алгебраических выражений

П. 3.2.1. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СУММ

Основные содержательные цели:

1) Уточнить правила раскрытия скобок в алгебраических суммах, сформировать умение преобразовывать алгебраические суммы, содержащие внутренние скобки;

2) повторить понятие противоположного числа; приемы рациональных вычислений, свойства деления целых чисел с остатком; способы решения задач на проценты;
3) тренировать вычислительные навыки, умение упрощать и находить значение буквенного выражения; решать уравнения; решать задачи на смеси и сплавы.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте обосновываются правила раскрытия скобок, которые учащиеся уже давно используют. В шестом классе эти правила формулировались, исходя из правила вычитания суммы из числа и прибавления суммы к числу. Теперь эти правила доказываются более строго: на основании сочетательного, распределительного законов, а также определения вычитания, как сложения с противоположным числом.

В связи с тем, что правила раскрытия скобок учащимся уже известны, проблематизацию можно организовать, предложив учащимся после выполнения **№ 434** *обосновать* применяемые ими правила раскрытия скобок с помощью законов арифметических действий и известных им определений. Чтобы подготовить открытие на актуализации следует повторить правила раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+», знак «−», законы арифметических действий, понятие противоположных чисел, а также определение вычитания.

В данном пункте учащиеся преобразовывают алгебраические суммы, содержащие несколько скобок. В этом случае рекомендуется начинать раскрывать скобки поэтапно, начиная с внутренних скобок.

Учащиеся применяют правила раскрытия скобок при решении уравнений (**№ 437**, **№ 440**). При выполнении этих заданий учащиеся готовятся к изучению шестой главы, в которой они уточнят правила равносильных преобразований уравнений.

Важно обратить внимание учащихся, как правила раскрытия скобок помогают рационализировать вычисления. Для этого учащимся предлагается применить правила раскрытия скобок при упрощении выражений, составленных к задачам, а также найти значение буквенных выражений при указанных значениях букв, предварительно упрощая их.

При отработке умения раскрывать скобки учащиеся получают возможность вспомнить правило «весов» для решения уравнений (**№ 437**).

Следует обратить внимание учащихся на то, что раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «+», знак «−», или множитель, также является равносильным преобразованием выражений. Это можно сделать, предложив семиклассникам сравнить формулировки заданий **№ 435** и **№ 436**.

Урок. Равносильные преобразования алгебраических сумм

Новое знание

Правила раскрытия скобок.

Актуализация

Повторить: законы арифметических действий, противоположные числа, преобразования алгебраических сумм.

Задание на пробное действие

Раскройте скобки и обоснуйте свои действия, используя законы арифметических действий: $(6 - x) - (a - y)$.

Фиксация затруднения

Не можем обосновать правила раскрытия скобок, используя законы арифметических действий.

Фиксация причины затруднения

Не знаем обоснования правил раскрытия скобок, используя законы арифметических действий.

Цель деятельности

Доказать правила раскрытия скобок, используя законы арифметических действий.

Эталон

Правило раскрытия скобок.

Урок. Равносильные преобразования алгебраических сумм (РТ)

Урок проводится по структуре урока рефлексии тренировочного типа.

Основные цели урока:

1) тренировать умение применять правила раскрытия скобок в алгебраических суммах, тренировать умение преобразовывать алгебраические суммы, содержащие внутренние скобки;

2) тренировать вычислительные навыки, умение упрощать, находить значение буквенного выражения; решать уравнения; решать задачи.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 433

а) $-7{,}5$; б) $2\frac{5}{8}$; в) $-0{,}4(15)$; г) $2 - 5 \cdot 4$; д) a; е) $-(-m + n)$

№ 435

б) $-(5y + 2) + (7y - 3) = -5y - 2 + 7y - 3 = 2y - 5$;

в) $(-5a + 2c - b) - (4b - c - 5a) = 3c + 2b$;

г) $(3m - 5n - 4k) - (-6k + 3m) + 4n = 3m - 5n - 4k + 6k - 3m + 4n = -n + 2k$

д) $-3(2c - d) + 5(c - 2d) = -6c + 3d + 5c - 10d = -c - 7d$

е) $2(m + 4n) - 7(2m - n) = -12m + 15n$

№ 436

а) $(2x + 3y) - ((x + 4y) - 6) - (x - 2y + 5) = 2x + 3y - x - 4y + 6 - x + 2y - 5 = y + 1$

б) $3a + ((a - c) + (c - b)) - (4a - b + c) = 3a + a - c + c - b - 4a + b - c = -c$

в) $-5y - (-5x - (3y - 2x - 3)) - (2x + 3 - 2y) = x - 6$;

г) $(5a - 3c) - ((3c - 5a) - 2) - (-2c + (2 - 4c)) = 10a$

№ 438

а) Первый участник прошел дистанцию за x мин;

второй – за $(x + 10)$ мин

третий – за $((x + 10) - 6)$ мин

четвертый – за $(((x + 10) - 6) - 15)$ мин.

$x + (x + 10) + ((x + 10) - 6) + (((x + 10) - 6) - 15) =$

$= x + x + 10 + (x + 10 - 6) + (x + 10 - 6 - 15) =$

$= x + x + 10 + x + 10 - 6 + x + 10 - 6 - 15 = 4x + 3$

Ответ: команда прошла дистанцию за $(4x + 3)$ мин

б) Комедии — a;

боевики — $a - 126$;

мелодрамы — $a - 126 - 68$;

документальные фильмы — $(a + a - 126) : 2$.

$a + (a - 126) + (a - 194) + (2a - 126) : 2 =$

$a + a - 126 + a - 194 + a - 63 = a - 383$

Ответ: в магазине $a - 383$ фильмов.

№ 439

а) $5 + ((2(x + 1) - 3x) + 5x) - 0{,}5(4x - (2x - 4)) + 4x - (5 - 2x) =$

$= 5 + ((2x + 2 - 3x) + 5x) - 0{,}5(4x - 2x + 4) + 4x - 5 + 2x =$

$= 5 + (2x + 2 - 3x + 5x) - 2x + x - 2 + 4x - 5 + 2x =$
$= 5 + 2x + 2 \underline{- 3x} \underline{+ 5x} - 2x \underline{+ x} - 2 \underline{+ 4x} - 5 + 2x = 9x$

в) $-(3(2a - b) + 2(2b - 1)) + 2(1 - (a - 4b) + 3(a - b) + 2) - (a + (b - 2a)) =$
$= -(6a - 3b + 4b - 2) + 2(1 - a + 4b + 3a - 3b + 2) - (a + b - 2a) =$
$= -6a \underline{+ 3b} \underline{- 4b} \underline{+ 2} \underline{+ 2} - 2a \underline{+ 8b} + 6a \underline{- 6b} \underline{+ 4} - a \underline{- b} + 2a = - a + 8$

г) $p - 3(q - 2(r - s)) - (- p - 4(q - 1{,}5(r - s))) + (p + 2q - 3(p + q)) =$
$= p - 3(q - 2r + 2s) - (- p - 4(q - 1{,}5r + 1{,}5s)) + (p + 2q - 3p - 3q) =$
$= p - 3q + 6r - 6s - (- p - 4q + 6r - 6s) + (p + 2q - 3p - 3q) =$
$= \underline{p - 3q} + 6r - 6s + \underline{p + 4q} - 6r + 6s + \underline{p} + \underline{2q} \underline{- 3p} \underline{- 3q} = 0$

№ 440

а) $3(x + 2) + (x - 2(1 - x)) + (5 - (3x - 2(2 - 3x))) = -2;$
$3x + 6 + (x - 2 + 2x) + (5 - (3x - 4 + 6x)) = -2;$
$3x + 6 + (3x - 2) + (5 - (9x - 4)) = -2;$
$3x + 6 + 3x - 2 + (5 - 9x + 4) = -2;$
$6x + 4 + (9 - 9x) = -2;$
$6x + 4 + 9 - 9x = -2;$
$-3x + 13 = -2;$
$-3x = - 15;$
$x = 5$

Ответ: $\{5\}$.

в) $a - (2a + 2(a - (5 - a))) + 4 - 3(2a - (4a - 9)) + (a - 3 + 4a) = 5;$
$a - (2a + 2(a - 5 + a)) + 4 - 3(2a - 4a + 9) + (5a - 3) = 5;$
$a - (2a + 2a - 10 + 2a) + 4 - 6a + 12a - 27 + 5a - 3 = 5;$
$a - 2a - 2a + 10 - 2a + 4 - 6a + 12a - 27 + 5a - 3 = 5;$
$6a - 16 = 5;$
$6a = 21;$
$a = 3{,}5$

Ответ: $\{3{,}5\}$.

г) $1 - ((c - 1) - 2(c + 2)) - 3c + (5c - 3(2c - 3(3c - 4))) = - 6;$
$1 - (c - 1 - 2c - 4) - 3c + (5c - 3(2c - 9c + 12)) = - 6;$
$1 - c + 1 + 2c + 4 - 3c + (5c - 6c + 27c - 36) = - 6;$
$1 - c + 1 + 2c + 4 - 3c + 5c - 6c + 27c - 36 = - 6;$
$24c - 30 = - 6;$
$24c = - 6 + 30;$
$24c = 24;$
$c = 1$

Ответ: $\{1\}$.

№ 444 (г, е)

г) $\left(5\frac{4}{72} - 7\frac{7}{36} + 2\frac{3}{12}\right) \cdot 36 = \left(5\frac{1}{18} - 7\frac{7}{36} + 2\frac{1}{4}\right) \cdot 36 = 182 - 259 + 81 = 4;$

е) $$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{15} + \frac{4}{45}} \cdot \frac{37}{90} = \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18}\right) \cdot 18 \cdot 45 \cdot 37}{\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{15} + \frac{4}{45}\right) \cdot 45 \cdot 18 \cdot 90} = \frac{(12 + 15 - 7) \cdot 45 \cdot 37}{(27 + 6 + 4\,) \cdot 18 \cdot 90} =$$
$$= \frac{20 \cdot 45 \cdot 37}{37 \cdot 18 \cdot 90} = \frac{5}{9}$$

№ 445 (ж, з)

ж) $\frac{0{,}12 \cdot 35x^3y^4}{0{,}7 \cdot 30x^4y^3} = 0{,}2\frac{y}{x};$

з) $\frac{-0{,}44 \cdot 13a^3b^2c^4}{-0{,}143a^2bc^3} = 40abc$

№ 448

а) $(7x-3)-(5x-4)=\underline{7x}-3\underline{-5x}+4=2x+1;$

б) $(m-n-k)-(k-m)+n=\underline{m}-n\underline{-k}\underline{-k}+\underline{m}+n=2m-2k;$

в) $-2(3a+b)+3(2a-b)=-6a\underline{-2b}+6a\underline{-3b}=-5b;$

г) $0{,}3(-c+2d)-0{,}4(c-d)+0{,}5(c-2d)=\underline{-0{,}3c}+0{,}6d\underline{-0{,}4c}+0{,}4d+\underline{0{,}5c}-d==-0{,}2c$

№ 449

а) $-(a-2b)-(5-(2a+b))+(4-(a+b)=-a+2b-(5-2a-b)+(4-a-b)=$
$=-a+2b\underline{-5}+2a+b\underline{+4}-a-b=2b-1;$

б) $((3m-2n)-(m-2))-(3n-(n-2))+(-m-(m+2n))=$
$=(3m-2n-m+2)-(3n-n+2)+(-m-m-2n)=$
$=3m\underline{-2n}-m+2\underline{-3n}+\underline{n}-2-m-m\underline{-2n}=-6n$

№ 452 (а)

а) $5(3a-2)-15(2a-5)=10(3-4a)+25;$

Разделить обе части на 5

$3a-2-3(2a-5)=2(3-4a)+5;$
$3a-2-6a+15=6-8a+5;$
$-3a+13=11-8a;$
$-3a+8a=11-13;$
$5a=-2;$
$a=-0{,}4$

Ответ: $\{-0{,}4\}$

б) $4(9x-8)-20(x-4)=16(3+2x)-8(3x+1);$

Разделить обе части на 4

$9x-8-5(x-4)=4(3+2x)-2(3x+1);$
$9x-8-5x+20=12+8x-6x-2;$
$4x+12=10+2x;$
$4x-2x=10-12;$
$2x=-2;$
$x=-1$

Ответ: $\{-1\}$

№ 456 (б)

Смешали x 15% сахарного сиропа и y 5% сахарного сиропа, получили (x + y) 12% сахарный сироп.

$(x+y)\cdot 12=15x+5y;$
$12x+12y=15x+5y;$
$3x=7y;$
$x:y=7:3$

Ответ: надо смешать два сахарных сиропа в отношении 7 к 3.

№ 458

Будем решать задачу, используя обратный ход, т. е. с конца.

1. Борис получил 20, до зачеркивания это было трехзначное число вида 20*, которое являлось результатом умножения на 8. Значит, это число должно делиться на 8, возможны два варианта – 200 и 208. $200=25\cdot 8$ или $208=26\cdot 8$.

2. До зачеркивания последней цифры 25 или 26 были трехзначными числами вида 25* или 26* и эти числа были результатами умножения на 13, т.е. они кратны 13. Проанализировав произведения $13\cdot 19=247$ и $13\cdot 20=260$, можно сделать вывод о том, что нет ни одного трехзначного числа кратного 13, запись которого начиналась бы с 25. Значит, это число вида 26*, при этом 260 делится на 13 и оно единственное.

Значит, Борис задумал число 260.

Ответ: 260.

П. 3.2.2. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Основные содержательные цели:

1) Уточнить правила раскрытия скобок в произведении, сформировать умение преобразовывать выражения с внутренними скобками, содержащие умножение и деление;
2) сформировать представление о тождествах и их доказательстве;
3) тренировать вычислительные навыки, умение сокращать дроби, упрощать буквенные выражения и находить их значения; решать уравнения; решать задачи на проценты.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте рассматриваются преобразования алгебраических выражений, содержащих произведения и частные. Учащиеся учатся преобразовывать дроби и выражения, содержащие знак деления. Это становится возможным в связи с тем, что формулируются следующие правила равносильных преобразований произведений.

- В выражениях операцию деления на число, отличное от нуля, можно заменить либо умножением на число, обратное делителю, либо записать как дробь, в числителе которой стоит делимое, а в знаменателе — делитель.
- Произведение нескольких дробей можно записать как единую дробь, числитель которой равен произведению числителей исходных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.
- Если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель, отличный от нуля, то дробь на него можно сократить.

При выполнении преобразований учащиеся могут вести запись несколькими способами в зависимости от того, какое правило они применяют, что дает возможность реализовывать принцип вариативности.

В данном пункте учащиеся не только выполняют равносильные преобразования произведений, но и получают представление о допустимых значениях переменных в дробных выражениях, как о значениях переменных, при которых выражение имеет смысл. Учащиеся получают опыт определения допустимых значений переменных в алгебраических дробях. При этом они пользуются известным им правилом: «на нуль делить нельзя».

При выполнении **№ 465** формируется первичный опыт решения дробно-рациональных уравнений. Пока с такими уравнениями может справиться лишь более подготовленная часть класса, однако, реализуя принцип минимакса, каждому ученику предлагается возможность освоить учебный материал на максимальном для него уровне, но этот материал не является обязательным для всех учащихся. При работе с этими уравнениями следует учитывать, что правилам равносильных преобразований уравнений будут посвящены отдельные уроки при изучении шестой главы.

При трех часах алгебры в неделю после выполнения заданий из разделов «Задачи для самоконтроля к Главе 2» и «Задачи для самоконтроля к Главе 3» учащиеся пишут контрольную работу по содержанию второй и третьей глав.

Урок. Равносильные преобразования произведений

Новое знание

Правила равносильных преобразований.

Актуализация

Повторить: взаимно обратные числа, основное свойство дроби, преобразование дробных выражений.

Задание на пробное действие

Упростите выражение: (6 : (5x)) · ((10x) : 3).

Фиксация затруднения

Не можем упростить выражение.

Фиксация причины затруднения

Не знаем правил преобразования выражений, в которых есть частное и произведение.

Цель деятельности

Сформулировать правила преобразования выражений, в которых есть частное и произведение.

Эталон

Алгоритм работы с дробным выражением

1) Определить знак результата.
2) Выполнить действия с модулями чисел.
3) Записать результат.

Урок. Равносильные преобразования произведений (РТ)

Урок проводится по структуре урока рефлексии тренировочного типа.

Основные цели:

1) тренировать умение применять правила преобразования произведений и алгебраических сумм;
2) тренировать вычислительные навыки, умение упрощать, находить значение буквенного выражения; решать уравнения; решать задачи.

Урок. Подготовка к контрольной работе (РТ)

Урок проводится по структуре урока рефлексии тренировочного типа.

Основные цели урока:

1) организовать контроль усвоения понятий делимости и делении с остатком целых чисел; понятий простых и составных чисел; алгоритма Евклида;

2) организовать контроль усвоения правил раскрытия скобок в алгебраических суммах и произведениях;

3) организовать контроль вычислительных умений, умения сокращать дроби и упрощать выражения со скобками; решать уравнения, задачи.

Урок. Контрольная работа (ОРК)

Основные цели:

1) формировать способность учащихся к осуществлению процедуры контроля;

2) формировать способность учащихся к выявлению причин затруднений собственной деятельности;

3) контроль знаний, умений, навыков по темам: «Ведение в теорию делимости», «Законы равносильных преобразований алгебраических выражений».

Рассмотрим **примеры решений** некоторых заданий.

№ 460

а) $\frac{1}{8}$; б) $-\frac{1}{12}$; в) $\frac{7}{3}$; г) $-\frac{4}{9}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $\frac{1}{m-n}$; ж) $-x$; з) $c-d$

№ 461

в) $(-p^2 : (6q)) \cdot ((3q) : r) : p$

Способ 1:

$$(-p^2 : (6q)) \cdot ((3q) : r) : p = -p^2 \cdot \frac{1}{6q} \cdot \frac{3q}{r} \cdot \frac{1}{p} = \frac{-p^2 \cdot 1 \cdot 3q \cdot 1}{6q \cdot r \cdot p} = -\frac{p}{2r}$$

Способ 2:

$$(-p^2 : (6q)) \cdot ((3q) : r) : p = \frac{-p^2}{6q} \cdot \frac{3q}{rp} = \frac{-p^2 \cdot 3q}{6q \cdot rp} = -\frac{p}{2r}$$

г) $(9 : (a^2n)) \cdot a : \frac{1}{n^2} \cdot (-a : 15)$

Способ 1:

$$(9 : (a^2n)) \cdot a : \frac{1}{n^2} \cdot (-a : 15) = \frac{9}{a^2n} \cdot a \cdot n^2 \cdot (-a) \cdot \frac{1}{15} = \frac{9 \cdot 1 \cdot a \cdot n^2 \cdot (-a) \cdot 1}{a^2n \cdot 15} = -\frac{3}{5}n$$

Способ 2:

$$(9 : (a^2n)) \cdot a : \frac{1}{n^2} \cdot (-a : 15) = \frac{9}{a^2n} \cdot an^2 \cdot (-\frac{a}{15}) = -\frac{9an^2 \cdot a}{a^2n \cdot 15} = \frac{3}{5}n$$

д) $(7 : m) \cdot m^2 \cdot (-x : a) : (mx : 12) \cdot (-a^2 : 28) = 3a;$

е) $(20 : (-a^2b)) : \frac{c^3}{ab} \cdot ((ab) : 16) : (b : (4c^2)) = -\frac{5}{c}$

ж) Способ 1

$$-\frac{9}{bx} : (-a^2 : b^2) \cdot ((ay) : 18) : ((-by) : (2a)) =$$

$$= -\frac{9}{bx} \cdot \frac{1}{-a^2 \cdot \frac{1}{b^2}} \cdot (ay) \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{-by \cdot \frac{1}{2a}} = \frac{9}{bx} \cdot \frac{b^2}{-a^2} \cdot (ay) \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{2a}{-by} =$$

$$= \frac{9 \cdot b^2 \cdot ay \cdot 2a}{bx \cdot (-a^2) \cdot 18 \cdot (-by)} = \frac{1}{x}$$

Способ 2

$$\frac{9}{bx} : (-a^2 : b^2) \cdot ((ay) : 18) : ((-by) : (2a)) = \frac{\frac{9}{bx}}{-\frac{a^2}{b^2}} \cdot \frac{\frac{ay}{18}}{-\frac{by}{2a}} = \frac{9}{bx} \cdot \left(-\frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \frac{ay}{18} \cdot \left(-\frac{2a}{by}\right) =$$

$$= \frac{9 \cdot b^2 \cdot ay \cdot 2a}{bx \cdot (-a^2) \cdot 18 \cdot (-by)} = \frac{1}{x}$$

№ 462 (б, г, е)

б) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

$x - 1 \neq 0;$ $x + 2 \neq 0;$

$x \neq 1;$ $x \neq -2$

Выражение имеет смысл при всех значениях x, кроме -2; 1.

г) $\frac{1}{mn} - \frac{1}{m-1}$

$m \neq 0;$ $n \neq 0;$ $m - 1 \neq 0$

$m \neq 1$

Выражение имеет смысл при всех значениях m, n кроме 0; 1.

е) $\frac{ab}{c-d} : \frac{a-1}{a} = \frac{ab}{c-d} \cdot \frac{a}{a-1}$

$c - d \neq 0;$ $\qquad a - 1 \neq 0$
$c \neq d$ $\qquad a \neq 1$

Выражение имеет смысл при всех значениях переменных, кроме случая, когда $c = d$, $a = 1$

№ 464 (л, м)

л) $\frac{pq-4q}{4pq} \cdot \frac{p^2q^2}{4p-q^2} = \frac{q(p-4) \cdot p^2q^2}{4pq \cdot p(4-p)} = \frac{-q(4-p)p^2q^2}{4p^2q\,(4-p)} = -\frac{q^2}{4};$

м) $\frac{mn-ml}{nk+kl} \cdot \frac{mn+ml}{nl-kn} = \frac{m(n-1) \cdot m(n+1)}{k(n+l) \cdot k(l-n)} = -\frac{m^2(l-n)}{k^2(l-n)} = -\frac{m^2}{k^2};$

№ 465

а) $(32x : 8) \cdot (5x^2 : x) : x = 4;$
$4x \cdot 5x : x = 4;$
$20x = 4;$
$x = 0{,}2$
Ответ: $\{0{,}2\}$.

б) $7(x-9)^2 \cdot \frac{5}{42(5x-45)} = 2\,;$

$\frac{7(x-9)^2 \cdot 5}{42 \cdot 5 \cdot (x-45)} = 2\,;$

$\frac{x-9}{6} = 2$

$x - 9 = 12;$
$x = 21$
Ответ: $\{21\}$.

в) $(y-3) \cdot (5-y) : (2y-6) = 1;$

$\frac{(y-3)(5-y)}{2(y-3)}\ 1$

$\underline{y \neq 3}$

$\frac{5-y}{2} = 1$

$5 - y = 2;$
$y = 3$
Ответ: $\{\varnothing\}$.

г) $\frac{(3x-6)(5x-1)(2x+16)}{(3x+24)(x-2)} = 18$

$\frac{3(x-2)(5x-1) \cdot 2(x+8)}{3(x+24)(x-2)} = 18$

$x \neq -8 \qquad x = \neq 2$
$2(5x-1) = 18;$
$5x - 1 = 9;$
$5x = 10;$
$x = 2$
Ответ: $\{\varnothing\}$.

№ 466

а) $\frac{27dc^3}{9bc^2} \cdot \frac{4bc^2}{16bc} \cdot \frac{2b}{3cd} = \frac{27dc^3 \cdot 4bc^2 \cdot 2b}{9bc^2 \cdot 16bc \cdot 3cd} = \frac{27 \cdot 4 \cdot 2 \cdot b^2c^5d}{9 \cdot 16 \cdot 3 \cdot b^2c^4d} = \frac{c}{2}$

Если $c = 2$, то $\frac{2}{2} = 1$

в) $\frac{(3x + 7 - (5 - 4x))(4y - 9 + (15 - 2y))(7x + 2y - (4y - 3x))}{4(3 + y)(2 + 7x)} =$

$= \frac{(3x + 7 - 5 + 4x)(4y - 9 + 15 - 2y)(7x + 2y - 4y + 3x)}{4(3 + y)(2 + 7x)} =$

$= \frac{(7x + 2)(2y + 6(10x - 2y)}{4(3 + y)(2 + 7x)} = \frac{\cancel{(7x + 2)} \cdot \cancel{2}\cancel{(y + 3)} \cdot \cancel{2}(5x - y)}{\cancel{4}\cancel{(3 + y)}\cancel{(2 + 7x)}} = 5x - y$

Если $x = 1$, $y = -1$, то $5 \cdot 1 - (-1) = 5 + 1 = 6$

г) $\frac{5a^2b - 3ab^2 - (4a^2b - 2ab^2)}{4a^2b^2} \cdot \frac{12ab(2a + 3b)}{(a - b)} =$

$= \frac{5a^2b - 3ab^2 - 4a^2b + 2ab^2}{4a^2b^2} \cdot \frac{12ab(2a + 3b)}{(a - b)} =$

$= \frac{a^2b - ab^2}{4a^2b^2} \cdot \frac{12ab(2a + 3b)}{(a - b)} =$

$= \frac{ab(a - b) \cdot 12ab(2a + 3b)}{4a^2b^2 \cdot (a - b)} = 3(2a + 3b)$

Если $a = 2$, $b = -1$, то $3(2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)) = 3(4 - 3) = 3 \cdot 1 = 3$

№ 467

а) $\frac{0{,}15xy^3 - 0{,}25x^3y - (0{,}05 - - 0{,}2x^3y) + 0{,}05x^3y)}{0{,}2xy^2} = 0{,}5y$

Преобразовываем левую часть равенства:

$\frac{0{,}15xy^3 - 0{,}25x^3y - 0{,}05xy^3 + 0{,}2x^3y + 0{,}05x^3y)}{0{,}2xy^2} =$

$= \frac{0{,}1xy^3}{0{,}2xy^2} = \frac{1}{2}y = 0{,}5y$

$0{,}5y = 0{,}5y$ (И) при $x \neq 0$, $y \neq 0$

г) $\frac{(m^2 - (mn - 2m^2)) - 3mn + 2m^2 - (1 - (2 - (3 - mn - m^2) - 2}{(2m - n)} = 3m$

Преобразовываем левую часть:

$\frac{(m^2 - (mn - 2m^2)) - 3mn + 2m^2 - (1 - (2 - (3 - mn - m^2) - 2}{(2m - n)} =$

$= \frac{(m^2 - mn + 2m^2) - 3mn + 2m^2 - (1 - (2 - (3 - mn - m^2) - 2}{(2m - n)} =$

$= \frac{3m^2 - mn - 3mn + 2m^2 - (-1 + 3 - mn - m^2 - 2)}{(2m - n)} =$

$= \frac{3m^2 - 4mn + 2m^2 + 1 - 3 + mn + m^2 + 2}{(2m - n)} = \frac{6m^2 - 3mn}{2m - n} = \frac{3m(2m - n)}{2m - n} = 3m$

$3m = 3m$ (И) при $m \neq \frac{1}{2}n$

№ 476

а) $(7:6x)\cdot(9x:7)=\frac{7}{6x}\cdot\frac{9x}{7}=\frac{7\cdot 9x}{6x\cdot 7}=\frac{3}{2}=1{,}5$;

б) $(-q^3:p)\cdot(p^2:q):q=-\frac{q^3}{p}\cdot\frac{p^2}{q}\cdot\frac{1}{q}=-\frac{q^3\cdot p^2}{p\cdot q^2}=-qp$

№ 477

в) $\frac{c+4}{(c+4)(c-7)}$

$c+4\neq 0;\quad c-7\neq 0$
$c\neq -4\qquad c\neq 7$
Ответ: выражение имеет смысл при всех значениях c, кроме -4 и 7.

№ 478

а) $\frac{2(a+3)}{a+3}=2$ при $a\neq -3$;

б) $\frac{p(p-q)}{5q(p-q)}=\frac{p}{5q}$ при $p\neq q$

№ 479 (а)
а) $(7a:12)\cdot(48a^3:a):a^2=7$;

$\frac{7a}{12}\cdot\frac{48a^3}{a}\cdot\frac{1}{a^2}=7$

$\frac{7a\cdot 48a^3}{12\cdot a\cdot a^2}=7$

$28a=7$;

$a=\frac{7}{28}$;

$a=0{,}25$
Ответ: $\{0{,}25\}$.

№ 480 (а)

а) $\frac{54x^2y^3}{33zy^2}\cdot\frac{21yz^2}{9yxz^3}\cdot\frac{11z^3}{21xz}=\frac{54\cdot 21\cdot 11\cdot x^2\cdot y^4\cdot z^5}{33\cdot 9\cdot 21\cdot x^2\cdot y^3\cdot z^5}=2y$

Если $y=-2$, то $2\cdot(-2)=-4$
№ 481 (а)

а) $\frac{0{,}32ab^2-0{,}48a^3b^2-(0{,}12ab^2+0{,}12a^3b^2)-0{,}2b^2a)}{-0{,}3a^3b}=2b$

$a\neq 0,\ b\neq 0$

$\frac{0{,}32ab^2-0{,}48a^3b^2-(0{,}12ab^2+0{,}12a^3b^2)-0{,}2b^2a)}{-0{,}3a^3b}=$

$=\frac{0{,}32ab^2-48a^3b^2-0{,}12ab^2-0{,}12a^3b^2-0{,}2b^2a}{-0{,}3a^3b}=\frac{-0{,}6a^3b^2}{-0{,}3a^3b^2}=2b$

$2b=2b$ (И) при $a\neq 0,\ b\neq 0$

№ 484
Метод от противного.
1. Предположим, что можно расставить числа в таблице так, чтобы сумма в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной.

2. Тогда, просуммировав все числа в таблице по строкам, сделаем вывод, что сумма всех чисел в таблице есть число положительное, т.к. сумма положительных чисел (сумм чисел каждой строки) положительна. Просуммировав все числа в таблице по столбцам, можно сказать, что сумма всех чисел в таблице есть число отрицательное, т. к. сумма отрицательных чисел (сумм чисел каждого столбца) — отрицательна.

3. Мы пришли к противоречию: сумма чисел в одной и той же таблице является и положительным и отрицательным числом. Значит, наше предположение неверно и расставить числа в таблице указанным способом нельзя.

№ 485

Семья успеет на электричку, если будут переходить мост следующим образом.

1. Мама и папа — 4 мин.
2. Папа возвращается с фонарем — 2 мин.
3. Бабушка и внучка — 16 мин.
4. Мама возвращается с фонарем — 4 мин.
5. Мама и папа — 4 мин.

Итого $4 + 2 + 16 + 4 + 4 = 30$ минут.

Задачи для самоконтроля к главе 3

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 488 (в, г)

а) $0,(7) = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}$

б) $-2,(54) = -\frac{254-2}{99} = -\frac{252}{99} = -2\frac{54}{99} = -2\frac{6}{11}$

в) $-8,(370) = -\frac{8370-8}{999} = -\frac{8362}{999} = -8\frac{370}{999}$;

г) $3,0(36) = \frac{3036-30}{990} = \frac{3006}{990} = \frac{334}{110} = 3\frac{4}{110} = 3\frac{2}{55}$

№ 491

в) $(3a - 4) - (2a + 1) = 3a - 4 - 2a - 1 = a - 5$

г) $\left(\frac{1}{7}cd - 3\frac{1}{2}c^2\right) - \left(\frac{5}{14}cd - 1\frac{1}{4}c^2\right) - \left(-\frac{8}{21}cd - 2,5c^2\right) =$

$= \frac{1}{7}cd - 3\frac{1}{2}c^2 - \frac{5}{14}cd + 1\frac{1}{4}c^2 + \frac{8}{21}cd + 2,5c^2 =$

$= \left(\frac{1}{7}cd - \frac{5}{14}cd + \frac{8}{21}cd\right) + \left(-3\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{1}{4}c^2 + 2,5c^2\right) =$

$= \frac{1}{6}cd + 1,25c^2$

№ 492

б) $-(4p - 2q) + (-2p - (3q + 5)) - (2q - (7 + 6p)) - (p - 3q) =$
$= -4p + 2q + (-2p - 3q - 5) - (2q - 7 - 6p) - p + 3q =$
$= -4p + 2q - 2p - 3q - 5 - 2q + 7 + 6p - p + 3q = -p + 2$

в) $5s + 4(t - 0,5(2r - 4s)) - (3s - 2(s - 2(t - r))) + 2(3t + r - 3(t + 2s)) =$
$= 5s + 4(t - r + 2s) - (3s - 2(s - 2t + 2r)) + 2(3t + r - 3t - 6s) =$
$= 5s + 4t - 4r + 8s - (3s - 2s + 4t - 4r) + 2(r - 6s) =$
$= 13s + 4t - 4r - 3s + 2s - 4t + 4r + 2r - 12s = 2r$

№ 498 (в)

30 мин = 0,5 ч

1) 410 – 399 = 11 (км) пробежал бегун за 30 мин

2) 11 : 0,5 = 22 (км/ч) скорость удаления

3) 22 – 10 = 12 (км/ч)

Ответ: скорость второго бегуна 12 км/ч.

№ 502

в) $41(x-8)^2 \cdot \dfrac{21}{41(7x-56)} = 9;$

$\dfrac{41(x-8)^2 \cdot 21}{41 \cdot 7(x-8)} = 9;$

$x - 8 \neq 0;$

$x \neq 8$

$3(x-8) = 9;$

$x - 8 = 3;$

$x = 11$

Ответ: $\{11\}$.

г) $\dfrac{(5x-35)(3x-4)(7x+42)}{(5x+30)(7-x)} = -21\ ;$

$\dfrac{5(x-7)(3x-4) \cdot 7(x+6)}{5(x+6)(7-x)} = -\ 21;$

$x + 6 \neq 0;$ $\quad$ $7 - x \neq 0$

$x \neq -\ 6;$ $\quad$ $x \neq 7$

$\dfrac{-\ 5(x-7)(3x-4) \cdot 7(x+6)}{5(x+6)(7-x)} = -21;$

$-7(3x-4) = -21;$

$3x - 4 = 3;$

$3x = 7;$

$x = 2\dfrac{1}{3}$

Ответ: $\{2\dfrac{1}{3}\}$.

Глава 4. Законы Введение в теорию многочленов

Основные цели изучения данной главы:

- уточнить понятие степени рационального числа, первой степени рационального числа; сформировать понятие нулевой степени рационального числа;
- сформировать умение применять свойства степеней для преобразования выражений и рационализации вычислений;
- сформировать понятия одночлена и многочлена, их стандартного вида, и степени;
- сформировать умение выполнять арифметические действия с одночленами, складывать и вычитать многочлены; умножать одночлен на многочлен.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания учащиеся:

- *повторяют и систематизируют* знания, полученные в 5—6 классах;
- *используют* математическую терминологию в устной и письменной речи;
- *вычисляют* степени с натуральным показателем;
- *доказывают* свойства степеней;
- *используют* свойства степеней для нахождения значения выражений;
- *применяют* алгоритм записи одночлена в стандартном виде;
- *определяют* степень одночлена;
- *применяют* алгоритм записи многочлена в стандартном виде;
- *используют* алгоритмы сложения и вычитания многочленов «в столбик»;
- *применяют* правило умножения одночлена на многочлен;
- *применяют* правило умножения многочлена на многочлен;
- *используют* формулы квадрата суммы и квадрата разности для рационализации вычислений;
- *используют* правило возведения в квадрат натурального числа, оканчивающегося на 5;
- *используют* формулу квадрата трехчлена;
- *применяют* формулы произведения разности и суммы двух выражений для рационализации упрощения выражений;
- *применяют* формулу разности квадратов для рационализации упрощения выражений;
- *применяют* формулы куб разности и куб суммы для рационализации упрощения выражений;
- *используют* алгоритм возведения двучлена в n-ю степень, $n \in N$;
- *используют* формулы сумма и разность кубов для рационализации упрощения выражений;
- *применяют* разные способы (вынесения общего множителя, группировка) для разложения многочлена на множители;
- *применяют* формулы сокращенного умножения для разложения многочлена на множители;
- *решают* задачи с помощью разложения многочленов на множители;
- *используют* схемы и таблицы;
- *строят и выполняют* алгоритмы чтения, записи и составления выражений;
- *работают* с различными математическими моделями;
- *решают* текстовые задачи;
- *решают* простейшие уравнения;
- *выполняют* действия с рациональными числами;
- *определяют* вид, истинность высказывания, *строят* отрицание ложных высказываний.

§ 1. Степень с натуральным показателем

П. 4.1.1. ПОНЯТИЕ СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Основные содержательные цели:

1) сформировать понятие степени рационального числа с натуральным показателем, установить способ определения ее знака, правило порядка действий в выражениях со степенями;
2) повторить прямые и косвенные методы доказательства, метод доказательства от противного; алгоритм построения математической модели; способы сравнения именованных величин; свойства делимости;
3) тренировать умение записывать высказывания на математическом языке с помощью кванторов, определять их истинность и строить отрицания; сравнивать значения именованных чисел (в том числе и записанных нестандартным способом); находить целые решения неравенств (в том числе с модулями); строить математические модели задач по установленному алгоритму; проводить вычисления с многоэтажными дробями; использовать свойства делимости при решении задач.

Особенности изучения учебного содержания

К седьмому классу у учащихся сформировано понятие степени натурального числа с натуральным показателем, они умеют находить в простейших случаях значения степеней с натуральным показателем и выполнять действия в простейших числовых выражениях, содержащих степени.

В пятом классе было введено определение степени с натуральным показателем на множестве натуральных чисел. Однако учащиеся имеют представление и о степени рационального числа, потому что по мере их знакомства с числами в курсе 5—6 классов учащимся предлагались простейшие задания на возведение в степень обыкновенных и десятичных дробей, отрицательных чисел. Эта работа велась с целью формирования первичного опыта у учащихся, ее можно расценивать и как опережающее обучение для более подготовленной части учащихся. Вместе с тем знание понятия степени и умение его применять на множестве рациональных чисел не являлись обязательными результатами обучения для всех учащихся. В седьмом классе задачи формирования у всех учащихся понятия степени рационального числа, умения применять свойства степеней для преобразования выражений и рационализации вычислений становятся обязательными.

Понятно, что к моменту изучения этого пункта у основной части класса уже имеется некоторое представление о степени с натуральным показателем рационального числа, однако специальным образом определение степени на множество рациональных чисел не расширялось. Следует обратить внимание учащихся на то, что в 5 классе было дано определение степени *только для натуральных чисел*, и предложить им распространить их знания о степени на множество рациональных чисел (**№ 1**). После этого вводится определение степени рационального числа с натуральным показателем, уточняется понятие первой степени рационального числа.

При отработке понятия степени учащиеся уточняют понятие основания и показателя степени и учатся указывать их в степени (**№ 4**).

Здесь же с учащимися разбираются различные записи степеней со скобками, уточняется, какое влияние скобки оказывают на смысл полученных записей (**№ 5**). Прежде чем заменять степени произведениями учащиеся должны пояснить, что в данных выражениях является основанием степени. Можно предложить учащимся сравнить пары выражений со скобками и без них и подчеркнуть в них основания степеней. Такая работа дает возможность учащимся избежать в дальнейшем ошибок при записях степеней: часто возникающая путаница со знаком «минус» и др.

Учащимся предлагается использовать понятие степени не только для числовых выражений (**№№ 2, 4** и т. п.), но и для буквенных выражений (**№№ 3, 5**). В связи с мощной алгебраической пропедевтикой данные задания не будут вызывать трудностей у семиклассников. Однако нужно понимать, что на данном этапе обучения, в отличие от предыдущих, применение понятия степени для буквенных выражений является обязательным умением для всех учеников.

Ограничивать применение понятия степени только к алгебраическим выражениям не стоит, ведь важно показать использование понятия степени при вычислениях. Кроме того, следует продолжать работу над тренировкой вычислительных навыков.

В данном пункте учащиеся доказывают простейшие свойства степеней, связанные со знаком степени.

- Любая натуральная степень положительного рационального числа — это число положительное.
- Отрицательное число, возведенное в четную степень, есть число положительное, а отрицательное число, возведенное в нечетную степень – число отрицательное.

После чего эти свойства используются для определения знака степени (**№ 9**).

Важно дать учащимся возможность обосновать эти свойства в общем виде самостоятельно. Для проблематизации можно предложить семиклассникам определить знак значения выражений:

$$\text{а) } (-27)^{99};\ \text{б)} (-311)^{210}.$$

Для того чтобы доказательство свойств было проведено учащимися успешно, на актуализации следует не только вспомнить понятие степени натурального числа и уточнить его для рационального числа, но и повторить правила знаков при умножении положительных и отрицательных чисел.

При выполнении задания **№ 11** в речи учащихся используются выражения «квадрат суммы», «сумма квадратов», «куб суммы» и «сумма кубов» и т. п., которые потом начнут систематически употребляться ими в формулах сокращенного умножения. После нахождения значения этих выражений учителю следует заострить внимание учащихся на том, что «похожие» на слух и по записи выражения имеют совершенно разные значения и задать вопрос, почему так происходит. Такая работа поможет в дальнейшем избежать ошибок учащихся, связанных с тем, что они воспринимают записи $a^2 + b^2$ и $(a + b)^2$ как одинаковые, не говоря уже о путанице, возникающей при их чтении.

При изучении данного пункта учащиеся фиксируют правило, устанавливающее порядок действий в выражениях, содержащих степени и применяют его (**№ 12**).

Перед изучением содержания данного пункта следует показать семиклассникам, для каких целей используется понятие степени с натуральным показателем в реальной жизни. Одним из примеров необходимости степени является ее удобство при записи больших чисел, которые часто используются в разных науках, например, в астрономии. Можно предложить им узнать во внеурочное время, в каких еще науках применяются степени.

Урок. Понятие степени с натуральным показателем

Новое знание

Правило определения знака степени.

Актуализация

Повторить: понятие степени с натуральным показателем; понятие первой степени числа.

Задание на пробное действие

Определите знак выражений, не используя понятие степени:

а) $(-27)^{99}$; б) $(-311)^{210}$

Фиксация затруднения

Не можем выполнить задание, не используя определение степени, или не можем обосновать свой ответ.

Фиксация причины затруднения

Нет свойства, по которому можно было бы быстро определить знак любой степени рационального числа.

Цель деятельности

Сформулировать свойство степени, при котором можно определить знак любой степени рационального числа.

Эталон

Определение знака степени

Любая натуральная степень **положительного** рационального числа — это число **положительное**.

Отрицательное число, возведенное **в четную степень**, есть число **положительное**, а отрицательное число, возведенное **в нечетную степень** — число о**трицательное.**

Понятие степени нуля

Нуль в любой натуральной степени равен нулю.

Правило порядка действий в выражениях, содержащих степени

В выражениях со степенями без скобок сначала производят возведение в степень, затем умножение и деление, а уже потом — сложение и вычитание.

Если в выражениях есть скобки, то сначала в указанном порядке выполняют действия в скобках, а потом в том же порядке — остальные действия.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 1 (а)

а) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^7$; $25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^3$; $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

№ 9

а) $(-8)^{97}$ — отрицательное число, т. к. основание степени отрицательное число, а показатель — нечетное число (отрицательное число, возведенное в нечетную степень — число отрицательное).

б) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{314}$ — положительное число, т. к. основание степени отрицательное число, а показатель степени — четное число (отрицательное число, возведенное в четную степень, есть число положительное).

в) $(-2{,}8)^{153} \cdot (-0{,}15)^{725}$ — положительное число, т. к. $(-2{,}8)^{153}$ — отрицательное число (отрицательное число, возведенное в нечетную степень — число отрицательное), $(-0{,}15)^{725}$ — отрицательное число (отрицательное число, возведенное в нечетную степень — число отрицательное), произведение отрицательных чисел — есть число положительное.

г) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{2009} : (-60{,}4)^{2010}$ — отрицательное число, т. к. — отрицательное число (отрицательное число, возведенное в нечетную степень — число отрицательное),

$(-60{,}4)^{2010}$ — положительное число (отрицательное число, возведенное в четную степень, есть число положительное), частное чисел с разными знаками — есть число отрицательное.

№ 12 (в)

5 3 6 7 1 2 8 4

$-2 \cdot (-5)^3 : 6\frac{1}{4} + \left(-3 : \left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 - (-2)^5 = 76$

1) $-3 : \frac{3}{2} = -3 \cdot \frac{2}{3} = -2$;

2) $(-2)^2 = 4$;
3) $(-5)^3 = -125$;
4) $(-2)^5 = -32$;
5) $-2 \cdot (-125) = 250$;
6) $250 : 6\frac{1}{4} = 250 : \frac{25}{4} = 250 \cdot \frac{4}{25} = 40$;
7) $40 + 4 - (-32) = 76$.

№ 13

а) 1 м = 10^2 см;
б) 1 км = 10^4 дм;
в) 1 га = 10^6 дм^2;
г) 1 ц = 10^5 г;
д) 1 дм^3 = 10^3 см^3;
е) 1 м^3 = 10^9 мм^3.

№ 20

а) x — первое число ($x \in N$), $(27 - x)$ — второе число ($27 - x \in N$).
$x = 7a + 4$, $27 - x = 7c + 2$ (a, c — частные от деления чисел на 7).
$27 - (7a + 4) = 7c + 2$;
$27 - 7a - 4 = 7c + 2$;
$23 - 7a = 7c + 2$;
$21 = 7c + 7a$;
$a + c = 3$;
$a = 0$; $c = 3$; первое число: 4, второе число: 23
$a = 1$; $c = 2$; первое число: 11, второе число: 16
$a = 2$; $c = 1$; первое число: 18, второе число: 9
$a = 3$; $c = 0$; первое число: 25, второе число: 2
Ответ: 4 и 23; 11 и 16; 18 и 9; 25 и 2.

б) Второй угол — x, первый угол — $x + 30$, третий угол — $3(x + 30)$.
$x + x + 30 + 3(x + 30) = 180$;
$x + x + 30 + 3x + 90 = 180$;
$5x + 120 = 180$;
$5x = 180 - 120$;
$5x = 60$;
$x = 12$
Ответ: 126°.

в) Расстояние между концами ломаной — x см, $AK = \frac{1}{4}x$ см; $KL = (\frac{1}{4}x - 0{,}6)$ см;
$LN = 2 \cdot (\frac{1}{4}x - 0{,}6)$ см

$\frac{1}{4}x + (\frac{1}{4}x - 0{,}6) + 2 \cdot (\frac{1}{4}x - 0{,}6) = 15{,}6$;

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x - 0{,}6 + \frac{1}{2}x - 1{,}2 = 15{,}6$;

$x - 1{,}8 = 15{,}6;$
$x = 17{,}4$

$AK = \frac{1}{4} \cdot 17{,}4 = 4{,}35$ (см)

Ответ: 4,35 см длина звена *AK*.

№ 25

а) $(-16)^{102} < 0;$ в) $(-0{,}9)^{58} : (-1{,}2)^{923} < 0;$

б) $\left(-2\frac{4}{15}\right)^{237};$ г) $(-7{,}5)^{123} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^{345} > 0.$

№ 27 (е)

$\left(-0{,}6^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(2\frac{1}{2} - (-4)^2\right)\right) : (-0{,}1)^2 = 14$

1) $(-4)^2 = 16;$

2) $2\frac{1}{2} - 16 = -13\frac{1}{2};$

3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27};$

4) $-0{,}6^2 = -0{,}36;$

5) $-\frac{1}{27} \cdot \left(-13\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{27} \cdot \frac{27}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$

6) $-0{,}36 + 0{,}5 = 0{,}14;$

7) $(-0{,}1)^2 = 0{,}01;$

8) $0{,}14 : 0{,}01 = 14$

№ 33*

Для сравнения полученных выражений будем сравнивать их со степенями числа 2. Отметим степени числа 2 на числовой прямой и будем отмечать значения полученных выражений на ней.

1) $222 = 2 \cdot 111$

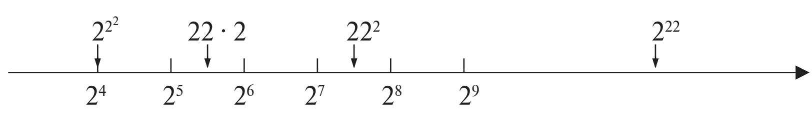
Подберем пару степеней числа 2, между которыми расположено число111: 64 и 128, тогда

$2 \cdot 64 < 2 \cdot 111 < 2 \cdot 128$
$2 \cdot 2^6 < 2 \cdot 111 < 2 \cdot 2^7$
$27 < 2 \cdot 111 < 2 \cdot 27$
$2^7 < 222 < 2^8 \cdot$

2) Аналогично, $22 \cdot 2 = 11 \cdot 2 \cdot 2 = 11 \cdot 2^2$
$2^2 \cdot 8 < 2^2 \cdot 11 < 2^2 \cdot 16$
$2^5 < 2^2 \cdot 11 < 2^6$

3) Аналогично $22^2 = (2 \cdot 11)^2 = 2^2 \cdot 11^2 = 2^2 \cdot 121$
$2^2 \cdot 64 < 2^2 \cdot 121 < 2^2 \cdot 128$
$28 < 22^2 < 2^9$

4) $2^{2^2} = 2^4$



№ 34*

Сумма данных исходных чисел нечетна ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$). Каждый раз разрешается к любым двум числам прибавлять по 1, значит, каждый раз сумма чисел будет увеличиваться на 2, продолжая оставаться нечетным числом.

Сумма шести равных чисел делится на 6, а значит, должна быть четной. Следовательно, указанным способом нельзя сделать все числа равными.

№ 35*

Будем решать задачу, используя обратный ход. После всех трех операций каждый из них получил одинаковое число бубликов, по 8 бубликов (24 :3 = 8). Будем учитывать, что каждый из братьев отдавал остальным по четверти имеющихся у него бубликов. В результате операции «деления с братьями» у того, кто делился, оставалось в 2 раза меньше, чем было до этой операции, значит, до данной операции у него было в 2 раза больше, чем количество, полученное в результате операции.

	младший брат	**средний брат**	**старший брат**
после деления старшим	8	8	8
до деления старшим	8 – 16 : 4 =4	8 – 16 : 4 = 4	8 · 2 =16
до деления средним	4 – 8 : 4 = 2	4 · 2 = 8	16 – 8 : 4 =14
до деления младшим	2 · 2 = 4	8 – 4 : 4 = 7	14 – 4 : 4 = 13

Количество полученных каждым братом бубликов на три меньше, чем ему лет. Тогда младшему 7 лет, среднему — 10 лет, а старшему 16 лет.

П. 4.1.2. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Основные содержательные цели:

1) сформировать понятие степени с нулевым показателем, установить свойства степени и правила вычислений со степенями;

2) сформировать умение решать примеры на порядок действий со степенями, упрощать выражения, содержащие степени, основываясь на свойствах степеней;

3) повторить понятие модуля числа; алгоритма Евклида; задачи на движение по реке и аналогичные им; свойства делимости;

4) тренировать умение изображать на координатной прямой решение неравенств (в том числе с модулями); находить НОД двух чисел с помощью алгоритма Евклида; упрощать выражения; решать уравнения; производить совместные действия с десятичными и обыкновенными дробями; использовать свойства делимости при решении задач.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся выводят следующие свойства:

- свойство произведения степеней;
- свойство частного степеней;
- свойство возведения степени в степень;
- свойство степени произведения;
- свойство степени частного (дроби).

Это традиционное для курса алгебры содержание, однако, его изучение, как и изучение содержания всего курса, организуется через самостоятельные открытия учащихся. Если учитель систематически организует уроки в технологии деятельностного метода обучения Л.Г. Петерсон, то и сформулировать, и доказать свойства степеней будет под силу основной части семиклассников.

Гипотезы о свойствах степеней формулируют сами учащиеся (эту работу можно организовать по примеру на свойство произведения степеней — **№ 36**). Менее подготовленные учащиеся могут доказывать сформулированные гипотезы по учебнику либо с помощью учителя в подводящем диалоге. Однако современные цели образования предполагают использование системно-деятельностного подхода обучения и требуют активного включения учащихся в учебную деятельность. Поэтому учитель должен стремиться увеличивать степень самостоятельности учащихся в учебной деятельности.

Правила применения свойств степеней могут быть представлены в виде алгоритмов. Так, например, алгоритм умножения степеней с одинаковым основанием содержит два шага.

1. Записать общее основание степеней.

2. В показатель степени записать сумму показателей степеней множителей.

На изучение этого пункта отводится 5 часов, из которых два урока рекомендуется посвятить открытию свойств степеней. На первом уроке учащиеся формулируют и доказывают свойства произведения, частного степеней и возведения степени в степень. В качестве пробного задания можно предложить им упростить выражения:

$$\text{а) } a^n \cdot a^m;\ \text{б) } b^n : b^m;\ \text{в) } (c^n)^m.$$

Сделать самостоятельное открытие учащиеся могут, реализовав, составленный ими план.

1. Рассмотреть выражения с небольшими числовыми показателями степеней: произведение степеней, частное степеней, степень степени.
2. Упростить числовые выражения, применяя определение степени.
3. Проанализировать результаты.
4. Сделать вывод, сформулировать свойства.
5. Доказать свойства, введя обозначения или рассмотреть доказательство по учебнику.
6. Составить алгоритм нахождения произведения, частного степеней с одинаковым основанием и возведения степени в степень.

Перед проблематизацией важно мотивировать учащихся к открытию свойств степеней. Например, можно предложить им вычислить значение выражения с достаточно большими показателями степеней $2^2 \cdot 2^{321} : (2^{32})^{10}$ или воспользоваться примерами из текста учебника, в которых применение свойств существенно упрощает вычисления. После чего сообщить учащимся, что свойства, которыми обладают степени, позволят выполнить данное задание без особых усилий меньше чем за минуту.

На втором уроке учащиеся открывают свойство произведения и частного степени. Для проблематизации можно предложить им возвести произведение в степень, не используя определение степени: $(2mn)^5$. Поставив условие неиспользования определения, мы мотивируем учащихся к открытию нового свойства степени. При открытии учащиеся могут использовать следующий план.

1. Выполнить пробное задание, используя определение степени и свойства степеней.
2. Проанализировать результат.
3. Сделать вывод, сформулировать свойство.
4. Доказать сформулированное свойство или рассмотреть доказательство по учебнику.
5. Составить алгоритм нахождения степени произведения.

После того, как учащиеся откроют свойство возведения произведения в степень, можно предложить им сформулировать и доказать свойство степени частного.

После формулировки свойств, руководствуясь фундаментальным принципом развития математической теории, вводится определение степени с нулевым показателем:

$$\forall a \in Q,\ a \neq 0 : a^0 = 1$$

Оно строится с учетом непротиворечивости свойству частного степеней.

Все задания данного пункта разбиты на группы на три блока в соответствии со свойствами, которые в них отрабатываются: произведение и частное степеней, возведение степени в степень и степень произведения и частного.

При отработке свойства возведения степени в степень данное свойство рассматривается в сравнении со свойством умножения степеней, что помогает учащимся лучше усвоить новое свойство (**№ 46**).

При упрощении дробных выражений появляется возможность вспомнить с учащимися понятие допустимых значений переменных. При выполнении заданий из **№№ 43, 51** с учащимися следует вспомнить, что значит сократить дробь, и выполнить сокращение, пользуясь правилами равносильных преобразований.

• Если несколько слагаемых алгебраической суммы имеют общий множитель, то его можно выносить за скобку.

• Если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель, отличный от нуля, то дробь на него можно сократить.

Чтобы предотвратить распространенную ошибку, связанную с сокращением дробей, эти правила учащиеся должны обязательно вспомнить и проговаривать вслух.

Для выполнения вычислений рациональным способом учащиеся учатся переходить от одного основания степени к другому для приведения всех степеней к одному и тому же основанию. Они осваивают этот прием постепенно. В задании **№ 52** им предлагается записать выражение в виде степени с указанным основанием; в **№ 58** учащиеся должны заменить в основании десятичную дробь обыкновенной; в **№ 60** они заменяют основание степени на произведение удобных чисел; в **№ 64** переходят от одного основания степени к другому, удобному для применения свойств.

Для более подготовленной части учащихся в учебнике предлагаются задания типа **№№ 66—67**, в которых учащиеся подбирают значение показателя с опорой на условие равенства степеней с одинаковыми основаниями. В задании **№ 68** они получают возможность сформулировать определение степени рационального числа с целым показателем (при этом можно напомнить учащимся, как было получено определение степени с нулевым показателем). При работе с этими заданиями учитель должен учитывать принцип минимакса.

При 3 часах алгебры в неделю после изучения первого параграфа учащиеся пишут контрольную работу по теме «Степени». Готовность к контрольной работе можно проверить, используя раздел «Задачи для самоконтроля к главе 4».

Урок. Свойства степени с натуральным показателем

Новое знание

Свойства степеней: степень произведения, частного, степень степени.

Актуализация

Повторить: понятие степени с натуральным показателем; понятие первой степени числа, определение знака степени, понятие степени нуля, правило порядка действий в выражениях, содержащих степени.

Задание на пробное действие

Упростите выражения: а) $a^n \cdot a^m$; б) $b^n : b^m$; в) $(c^n)^m$.

Фиксация затруднения

Не можем упростить выражения, (не можем найти произведение степеней с одинаковыми основаниями, не можем найти частное степеней с одинаковыми основаниями, не можем возвести степень в степень), или не можем обосновать свои ответы.

Фиксация причины затруднения

Не доказаны свойства степени произведения, частного, степени.

Цель деятельности

Сформулировать и доказать свойства произведения, частного степеней и свойство возведения степени в степень.

Эталон

Свойство произведения степеней

Для любого рационального числа a и любых натуральных m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Свойство частного степеней

Для любого рационального числа a, отличного от 0, и любых натуральных m и n таких, что $m > n$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Свойство возведения степени в степень

Для любого рационального числа a и любых натуральных m и n,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Нулевая степень чисел

Нулевой степенью рационального числа а, отличного от нуля, называется число 1.

$$\forall\, a \in Q,\ a \neq 0 : a^0 = 1$$

Алгоритм нахождения произведения степеней с одинаковым основанием

1. Записать общее основание.
2. В показатели степени записать сумму показателей степеней множителей.

Алгоритм нахождения частного степеней с одинаковым основанием

1. Записать общее основание.
2. В показатели степени записать разность показателей степеней делимого и делителя.

Алгоритм возведения степени в степень

1. Записать основание степени.
2. В показатели степени записать произведение показателей.

Урок. Свойства степени с натуральным показателем

Новое знание

Свойства степеней: степень произведения, степень частного.

Актуализация

Повторить: понятие степени с натуральным показателем; изученные свойства степеней

Задание на пробное действие

Возведите произведение в степень, не используя определение степени: $(2mn)^5$.

Фиксация затруднения

Не можем возвести в степень произведение трех множителей, не используя определения степени и свойства, или не можем обосновать свои ответы.

Фиксация причины затруднения

Нет правила возведения в степень произведения.

Цель деятельности
Построить свойство возведения в степень произведения.
Эталон

Степень произведения

Для любых рациональных числа a и b любого натурального числа n

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Алгоритм возведения произведения в степень

1. Возвести в степень каждый множитель.
2. Перемножить результаты.

Степень частного

Для любых рациональных числа a и b, где $b \neq 0$, и любого натурального числа n

$$(a : b)^n = a^n : b^n \text{ или } = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Алгоритм нахождения степени частного, дроби

1. Возвести в степень делимое (числитель) и делитель (знаменатель).
2. Первый результат разделить на второй результат.

Правило вычислений со степенями

1. Для того чтобы умножить степени с одинаковым основанием, нужно основание оставить без изменений, а показатели степеней сложить.
2. Для того чтобы разделить степени с одинаковым основанием, не равным нулю, нужно основание оставить без изменений, а из показателя делимого вычесть показатель делителя.
3. Для того чтобы возвести степень в степень, нужно основание оставить без изменений, а показатели перемножить.
4. Для того чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень каждый из множителей и результаты перемножить.
5. а) Для того чтобы возвести в степень частное, нужно возвести в эту степень отдельно делимое и делитель и первый результат разделить на второй.
   б) Для того чтобы возвести в степень дробь, нужно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби.

Урок. Свойства степеней (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение преобразовывать выражения, содержащие степени, применяя свойства степеней;
2) тренировать умение изображать на координатной прямой множество решений неравенств, решать задачи, решать уравнения.

Урок. Свойства степеней (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль усвоения понятия степени;
2) организовать самоконтроль умения упрощать выражения со степенями, используя свойства степеней.

Урок. Свойства степеней (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение преобразовывать выражения, содержащие степени, применяя свойства степеней;
2) подготовиться к контрольной работе.

Урок. Подготовка к контрольной работе по теме: «Свойства степеней» (РК)

Основные цели:

1) организовать контроль усвоения понятия степени рационального числа с натуральным и нулевым показателем, свойств степени и основанных на них правил вычислений со степенями;
2) организовать контроль умения упрощать выражения и сокращать дроби; решать уравнения, задачи на одновременное движение; использовать свойства делимости для решения задач.

Урок. Контрольная работа по теме: «Степень с натуральным показателем» (ОРК)

Основные цели:

1) формировать способность учащихся к осуществлению процедуры контроля;
2) формировать способность учащихся к выявлению причин затруднений собственной деятельности;
3) контроль знаний, умений, навыков по темам: «Степень с натуральным показателем».

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 37

а) $2^7 \cdot 2^8 = 2^{7+8} = 2^{15}$
б) $(-5)^{99} \cdot (-5) = (-5)^{100}$
г) $a^9 \cdot a^3 = a^9 + 3 = a^{12}$
д) $c \cdot c^{437} = c^{438}$
ж) $n^{14} \cdot n \cdot n^{30} = n^{14+1+30} = n^{35}$
з) $x^6 \cdot x^7 \cdot x^8 \cdot x^9 = x^{30}$
к) $(pq)^5 \cdot (pq) \cdot (pq)^6 \cdot (pq)^{12} = (pq)^{5+1+6+12} = (pq)^{24}$
л) $\left(\frac{a^2m}{c}\right)^{27} \cdot \left(\frac{a^2m}{c}\right) \cdot \left(\frac{a^2m}{c}\right)^4 = \left(\frac{a^2m}{c}\right)^{27+1+4} = \left(\frac{a^2m}{c}\right)^{32}$
м) $(2x+y)^4 \cdot (2x+y) \cdot (2x+y)^3 = (2x+y)^{4+1+3} = (2x+y)^8$

№ 38 (а, б, в)

а) $aa^m(-a)^2 = a^{m+3}$
б) $c^kc(-c^2)c^{k-1}c^3 = -c^{2k+5}$
в) $dd^n(-d^{n+1})d^nd^2 = -d^{3n+4}$

№ 40 (б, в).

б) $3 \cdot 27 \cdot 9 = 3 \cdot 3^3 \cdot 3^2 = 3^6$
в) $16 \cdot 2 \cdot 32 = 2^4 \cdot 2 \cdot 2^5 = 2^{10}$

№ 42

а) $3^9 : 3^7 = 3^{9-7} = 3^2$
б) $(-2)^{100} : (-2)^{99} = (-2)^1$
г) $x^8 : x^3 = x^{8-3} = x^5$
д) $y^{32} : y^{32} = y^0$
ж) $b^{21} : b : b^{16} = b^{21-1-16} = b^4$
з) $c^7 : c^6 : c \cdot c^9 = c^9$
к) $(mn)^5 : (mn) \cdot (mn)^6 : (mn)^4 = (mn)^{5-1+6-4} = (mn)^6$

л) $\left(\frac{bc}{n^2}\right)^{10} : \left(\frac{bc}{n^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{bc}{n^2}\right) = \left(\frac{bc}{n^2}\right)^{10-3+1} = \left(\frac{bc}{n^2}\right)$

м) $(3x-4)^8 : (3x-4)^6 : (3x-4)^2 = (3x-4)^{8-6-2} = (3x-4)^0$.

№ 43 (ж, з, и)

ж) $\frac{68x^4y^2z^3}{17x^2y^3z^4} = \frac{4x^2}{yz}$;

з) $\frac{15a^{32}b^{15}c^{56}}{10a^{35}b^{14}c^{56}} = \frac{3b}{2a^3}$;

и) $\frac{80m^{48}n^{22}k^{50}}{16k^{48}m^{45}n^{21}} = 5m^3nk^2$.

№ 46

а) $(a^2)^5 = a^{2\cdot 5} = a^{10}$

в) $(a^9)^4 = a^{9\cdot 4} = a^{36}$

д) $(a^m)^3 = a^{3m}$

ж) $(a^k)^n = a^{nk}$

л) $(a^m)^2 : a^5 = a^{2m} : a^5 = a^{2m-5}$

м) $a^p : (a^4)^q = a^p : a^{4q} = a^{p-4q}$

№ 48

а) $a^{24} = (a^2)^{12}$;

б) $a^{24} = (a^3)^8$;

в) $a^{24} = (a^4)^6$;

г) $a^{24} = (a^6)^4$;

д) $a^{24} = (a^8)^3$;

е) $a^{24} = (\mathrm{a}^{12})^2$

№ 51 (а, б)

а) $\frac{5^3\cdot a^2\cdot (b^4)^2\cdot c^5}{(25)^2\cdot a^3\cdot (b^3)^3\cdot (c^3)^1} = \frac{5^3\cdot a^2\cdot b^8\cdot c^5}{(5^2)^4\cdot a^3\cdot b^9\cdot c^3} = \frac{5^3\cdot a^2\cdot b^8\cdot c^5}{5^4\cdot a^3\cdot b^9\cdot c^3} = \frac{c^2}{5\cdot a\cdot b} = \frac{c^2}{5ab}$;

б) $\frac{9^2\cdot (x^2)^3\cdot y^5\cdot z^4}{3^3\cdot x^2\cdot x^3\cdot (y^3)^2\cdot (z^2)^2} = \frac{(3^2)^2\cdot x^6\cdot y^5\cdot z^4}{3^3\cdot x^5\cdot y^6\cdot z^4} = \frac{3^4\cdot x^6\cdot y^5\cdot z^4}{3^3\cdot x^5\cdot y^6\cdot z^4} = \frac{3x}{y}$

№ 53 (а, б)

а) $\frac{3^{10}\cdot (3^2)^4}{(3^5)^3\cdot 3} = \frac{3^{10}\cdot 3^8}{3^{15}\cdot 3} = \frac{3^{18}}{3^{16}} = 3^2 = 9$

б) $\frac{(5^2)^6\cdot (5^7 : 5^4)}{(-125)^5} = \frac{5^{12}\cdot 5^3}{-5^{15}} = -1$

№ 54

а) $(-2ab)^3 = (-2)^3\cdot a^3\cdot b^3 = -8a^3b^3$

б) $\left(\frac{5}{7}cdk\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot c^2\cdot d^2\cdot k^2 = -\frac{25}{49}c^2d^2k^2$

д) $(6a^2b^3c)^2 = 36a^4b^6c^2$

е) $\left(-\frac{2}{3}km^2n^4\right)^3 = -\frac{8}{27}k^3m^6n^{12}$

и) $(5r^5s^8t^4)^7 = 5^7\cdot r^{35}\cdot s^{56}\cdot t^2$

к) $(-u^3v^6w^9)^8 = u^{24}v^{48}w^{72}$

№ 55

а) $-m^5n^5 = (-mn)^5$

б) $25c^2a^2 = 5^2c^2a^2 = (5ca)^2$

д) $-27q^6r^3 = (-3q^2r)^3$

е) $9a^4b^2c^6 = (3a^2bc^3)^2$
ж) $-a^6b^3ab^4 = -a^7b^7 = (-ab)^7$
з) $16c^3k^2k^2c = 16c^4k^4 = (2ck)^4$
и) $125p^6q^{10}r^{12}q^5 = (5)^3 \cdot (p^2)^3 \cdot (q^5)^3 \cdot (r^4)^3 = (5p^2q^5r^4)^3$
к) $-32m^{10}n^8k^{75}n^7 = (-2)^5 \cdot (m^2)^5 \cdot (n^3)^5 \cdot (k^{15})^5 = (-2m^2n^3k^{15})^5$

№ 56 (а, б)

а) $8a^{17}b^4c^{36}d^8a^{16}b^{20}d^{13} = 8a^{33}b^{24}c^{36}d^{21} = (2)^3 \cdot (a^{11})^3 \cdot (b^8)^3 \cdot (c^{12})^3 \cdot (d^7)^3 = (2a^{11}b^8c^{12}d^7)^3$
б) $xzr^{90}y^8z^{14}x^{50}y^{60}r^{63}z^{70} = x^{51}y^{68}z^{85}r^{153} = (x^3)^{17} \cdot (y^4)^{17} \cdot (z^5)^{17} \cdot (r^9)^{17} = (x^3y^4z^5r^9)^{17}$

№ 58 (в, г)

в) $(-0{,}125)^9 \cdot 8^{10} = \left(-\frac{1}{8}\right)^9 \cdot 8^{10} = -\left(\frac{1}{8} \cdot 8\right)^9 \cdot 8 = -1^9 \cdot 8 = -8$

г) $\left(\frac{7}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{12}{7}\right)^5 = \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{12}{7}\right)^5 = 2^5 = 32$

№ 59

а) $(5 : 3)^{12} = 5^{12} : 3^{12}$

б) $\left(\frac{2}{15}\right)^n = \frac{2^n}{15^n}$

в) $(-a : b)^m = (-a)^m : b^m$

г) $\left(\frac{c}{-d}\right)^{24} = \frac{c^{24}}{-d^{24}}$.

д) $((-4p) : 7)^8 = (-4p)^8 : 7^8$

е) $\left(\frac{3x}{2yz}\right)^k = \frac{(3x)^k}{(2yz)^k} = \frac{3^kx^k}{2^ky^kz^k}$

№ 60

а) $121 : 9 = 11^2 : 3^2 = (11 : 3)^2 = \left(\frac{11}{3}\right)^2$

б) $27 : 64 = 3^3 : 4^3 = (3 : 4)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

в) $\frac{36}{p^2} = \left(\frac{6}{p}\right)^2$

г) $\frac{q^3}{125} = \left(\frac{q}{5}\right)^2$

д) $(49)^2 : r^4 = 7^4 : r^4 = \left(\frac{7}{r}\right)^4$

№ 61

а) $(-27a^{27}) : (b^{33}c^{39}) = ((-3)^3 \cdot (a^9)^3) : ((b^{11})^3 \cdot (c^{13})^3) = (-3a^9)^3 : (b^{11}c^{13})^3 = -\left(\frac{3a^9}{b^{11}c^{13}}\right)^3$

б) $\frac{81x^{16}y^{48}}{z^{52}} = \frac{(3)^4 \cdot (x^4)^4 \cdot (y^{12})^4}{(z^{13})^4} = \frac{(3\,x^4\,y^{12})^4}{(z^{13})^4} = \left(\frac{3\,x^4\,y^{12}}{z^{13}}\right)^4$

в) $a^{253} : (-b^{299}) = \frac{(a^{11})^{23}}{(-b^{13})^{23}} = \left(-\frac{a^{11}}{b^{13}}\right)^{23}$;

г) $p^{1083} : q^{1197} = \frac{(p^{19})^{57}}{(q^{21})^{57}} = \left(\frac{p^{19}}{q^{21}}\right)^{57}$.

№ 62 (в, г)

в) $0{,}18^3 : (-0{,}9)^3 = (0{,}18 : (-0{,}9))^3 = (-0{,}2)^3 = -0{,}008$;

г) $\left(\frac{12}{19}\right)^4 : \left(\frac{4}{19}\right)^4 = \left(\frac{12}{19} : \frac{4}{19}\right)^4 = \left(\frac{12}{19} \cdot \frac{19}{4}\right)^4 = 3^4 = 81$.

№ 63 (в)

в) $\dfrac{-3x^2\cdot(-xy)^3\cdot x^0\cdot y^0}{(x^2)^3\cdot(-3y)^2} = \dfrac{-3\cdot x^2\cdot(-x)^3\cdot y^3\cdot 1\cdot 1}{x^6\cdot(-3)^2\cdot y^2} = \dfrac{x^5\cdot y^3}{3\cdot x^6\cdot y^2} = \dfrac{y}{3x}$

№ 65 (б)

$\dfrac{3^{49}\cdot(c^{96}:c^{75})\cdot d^{36}\cdot d^{45}\cdot(cd)^{39}}{c^8\cdot d^{35}(d^{18}:d^{13})\cdot(d^6)^8\cdot d^{31}\cdot(3c)^{48}\cdot c^3} - 2(cd)^0 = \dfrac{3^{49}\cdot c^{21}\cdot d^{81}\cdot c^{39}\cdot d^{39}}{c^{11}\cdot d^{66}\cdot d^5\cdot d^{48}\cdot 3^{48}\cdot c^{48}} - 2 =$

$= \dfrac{3^{49}\cdot c^{60}\cdot d^{120}}{3^{48}\cdot c^{59}\cdot d^{119}} - 2 = 3\cdot c\cdot d - 2$

Если $c = -\frac{1}{6}$, $d = -2$, то $3\cdot(-\frac{1}{6})\cdot -2 - 2 = \frac{1}{2}\cdot 2 - 2 = 1 - 2 = -1$

№66

а) $6^x = 216$;
$6^x = 6^3$;
$x = 3$
Ответ: {3}.

б) $5^{x+2} = 125$;
$5^{x+2} = 5^3$;
$x + 2 = 3$;
$x = 1$
Ответ: {2}.

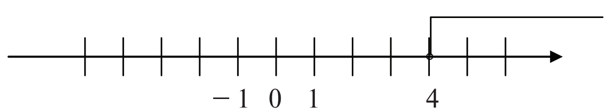
в) $2^{4y} = 256$;
$2^{4y} = 2^8$;
$4y = 8$;
$y = 2$
Ответ: {2}.

г) $3^{x-2} = 243$;
$3^{x-2} = 3^5$;
$x - 2 = 5$;
$x = 7$
Ответ: {7}.

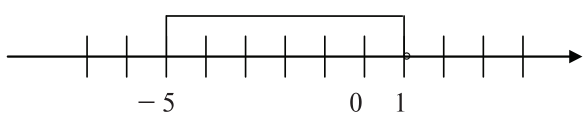
№ 70 (а, в, д)

Задание выполняется у доски с комментарием.

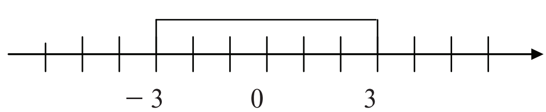
а) $x > 4$



в) $-5 \leqslant x < 1$



д) $|x| < 3$



№ 71

а) x км/ч — собственная скорость пловчих, v км/ч — скорость реки.
$(x + v)$ км/ч — скорость по течению, $(x - v)$ км/ч — скорость против течения.
$(x + v) + (x - v)$ км/ч — скорость удаления.
$((x + v) + (x - v))\cdot 0{,}25$ (км) — расстояние, которое проплыли пловчихи.
$((x + v) + (x - v))\cdot 0{,}25 = 2x\cdot 0{,}25 = 0{,}5x$
$(x + v) + (x - v)$ км/ч — скорость сближения ($2x$ км/ч)
$0{,}5x : 2x = 0{,}25$ (ч) — время на обратный путь
$0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ (ч)
Ответ: пловчихи встретятся через 30 минут.

б) Пусть x км — расстояние, которое проплыл теплоход туда, столько же он проплыл обратно. Скорость теплохода по течению реки $21 + 2 = 23$ (км/ч), скорость теплохода против течения реки 21 – 2 = 19 (км/ч). Тогда $\frac{x}{23}$ ч время, которое был в пути теплоход, когда он плыл по течению реки, а на обратный путь он потратил $\frac{x}{19}$ ч. По условию известно, что всего он потратил 7 часов.

$\frac{x}{23} + \frac{x}{19} = 7;$
$19x + 23x = 7 \cdot 23 \cdot 19$
$42x = 7 \cdot 23 \cdot 19$
$x = \frac{7 \cdot 23 \cdot 19}{6}$

$x = 72\frac{5}{6}$

$72\frac{5}{6} \cdot = 144\frac{5}{3} = 145\frac{2}{3}$ (км)

Ответ: все расстояние, которое проплыл теплоход, равно $145\frac{2}{3}$ км.

№ 72

а) $x + (2x - 4y) - [3x + 2y - (x + (6y - 5x)) - 2x] =$
$= x + 2x - 4y - [3x + 2y - (x + 6y - 5x) - 2x] =$
$= 3x - 4y - [3x + 2y - x - 6y + 5x - 2x] =$
$= 3x - 4y - [5x - 4y] = 3x - 4y - 5x + 4y = -2x.$

б) $a - (a - (a - ((a - 2b) - a))) - (a - (a - b + 2(a - b))) =$
$= a - (a - (a - (a - 2b - a)) - (a - (a - b + 2a - 2b)) =$
$= a - (a - (a - (- 2b)) - (a - (3a - 3b)) = a - (a - (a + 2b) - (a - 3a + 3b) =$
$= a - (a - a - 2b) - (a - 3a + 3b) = a + 2b - (-2a + 3b) = a + 2b + 2a - 3b =$
$= 3a - b$

г) $$\frac{3xy \cdot \frac{2}{5}xz - 2x \cdot xyz - \frac{1}{3}x^2yz + x - (5 + 2x - 7) + x - 2}{2xy - 2yz \cdot z - xy + 2yz \cdot y + \frac{13}{15}z^2y - 4zy^2 + 2zy \cdot y - xy} =$$

$$= \frac{\frac{6}{5}3x^2yz - 2x^2yz - \frac{1}{3}x^2yz + x - 5 - 2x + 7 + x - 2}{2xy - 2yz^2 - xy + 2y^2z + \frac{13}{15}z^2y - 4zy^2 + 2zy^2 - xy} = \frac{-\frac{17}{15}x^2yz}{-\frac{17}{15}z^2y} = \frac{x^2}{z}$$

№ 75

б) $(7x + 4{,}2) - (1{,}2 + 5x) = 3\frac{2}{7};$

$7x + 4{,}2 - 1{,}2 - 5x = 3\frac{2}{7};$

$2x + 3 = 3\frac{2}{7};$

$2x = 3 - 3\frac{2}{7};$

$2x = \frac{2}{7};$

$x = \frac{2}{7} : 2;$

$x = \frac{1}{7}$

Ответ: $\{\frac{1}{7}\}$.

г) $5\frac{1}{3} - 3{,}2(c - 3) + 1{,}5(c - 2) = 0{,}7c - \frac{1}{15}$;

$5\frac{1}{3} - 3{,}2c + 9{,}6 + 1{,}5c - 3 = 0{,}7c - \frac{1}{15}$;

$5\frac{1}{3} - 1{,}7c + 6{,}6 = 0{,}7c - \frac{1}{15}$;

$-1{,}7c + 0{,}7c = -\frac{1}{15} - 5\frac{1}{3} - 6{,}6$;

$-2{,}4\,c = -12$;

$c = 5$

Ответ: {5}.

№ 77

а) $xx^3xx^7 = x^{12}$

б) $(-2a)^2(-2a)(-2a)^5 = (-2a)^8$

в) $c^m cc^2 c^{m+1} c = c2^{m+5}$

г) $5 \cdot 125 \cdot 25 = 5^6$

д) $8 \cdot 32 \cdot 16 = 2^{12}$

е) $3^n \cdot 27 \cdot 3^n - 4 \cdot 9 = 34^n + 1$;

ж) $b^8 : b^3 = b^5$

з) $n^9 : n^6 \cdot n = n^4$

и) $y^{2k} : y^4 \cdot y^7 : y^k = y^{k+3}$

к) $(a^n)^8 = a^{8n}$

л) $(d^5)^3 \cdot d^6 = d^{14}$

м) $a^{24} : (a^2)^m = a^{24+2m}$

№ 81

а) $(4bc)^2 = 4^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 16b^2c^2$

б) $\left(-\frac{3}{2}mnk\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \cdot m^3 \cdot n^3 \cdot k^3 = -\frac{27}{8}m^3n^3k^3$

в) $(-a^2b)^3 = (-1)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -a^6b^3$

г) $(0{,}2x^2yz^3)^4 = 0{,}2^4 \cdot (x^2)^4 \cdot y^4 \cdot (z^3)^4 = 0{,}0016x^8y^4z^{12}$

д) $\left(\frac{5}{7}\right)^m = \frac{5^m}{7^m}$

е) $\left(\frac{p^2}{3qr^3}\right)^2 = \frac{(p^2)^2}{(3qr^3)^2} = \frac{p^4}{9q^2r^6}$

№ 83

а) $m^8n^8 = (mn)^8$

б) $-0{,}125x^3y^3z^6 = (-0{,}5xyz^2)^3$

в) $16a^2ba^4b = 16a^6b^2 = (4a^3b)^2$

г) $\frac{27^2}{y^6} = \frac{(3^3)^2}{y^6} = \frac{3^6}{y^6} = \left(\frac{3}{y}\right)^6$

д) $\frac{100c^4d^2}{m^6} = \frac{(10cd)^2}{(m^3)^2} = \left(\frac{10cd}{m^3}\right)^2$

е) $-\frac{x^3y^2x^2y^8}{32z^5} = -\frac{x^5y^{10}}{(2z)^5} = -\frac{(xy^2)^5}{(2z)^5} = \left(-\frac{xy^2}{2z}\right)^5$

№ 85

а) $25^6 \cdot 0{,}04^6 = (25 \cdot 0{,}04)^6 = 1^6 = 1$;

б) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{14} \cdot 0{,}8^{15} = \left(-\frac{5}{4}\right)^{14} \cdot 0{,}8^{14} \cdot 0{,}8 = \left(\frac{5}{4} \cdot 0{,}8\right)^{14} \cdot 0{,}8 = 1^{14} \cdot 0{,}8 = 0{,}8$

в) $(-24)^9 : 2{,}4^8 = (-24)^8 \cdot (-24) : 2{,}4^8 = (24 : 2{,}4)^8 \cdot (-24) = 10^8 \cdot (-24) =$
$= -2\,400\,000\,000$;

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} : \left(\frac{3}{8}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4} : \frac{3}{8}\right)^{10} = 2^{10} = 1024.$

№ 86

а) $\frac{4x \cdot (-3y)^2 \cdot x^3}{(6x^2y)^2} = \frac{4x^4 \cdot 9y^2}{36x^4y^2} = \frac{36x^4y^2}{36x^4y^2} = 1$

б) $\dfrac{((-m)^2)^3 \cdot ((-m)^3)^2}{(-(-m)^4)^3} = \dfrac{m^6 \cdot m^6}{-m^{12}} = \dfrac{m^{12}}{-m^{12}} = -1$

в) $\dfrac{(0{,}5a^2b^4)^2 \cdot (-2a^3b)^3}{(ab)^{11} \cdot ((-b^2)^1)^0} = \dfrac{0{,}25a^4b^8 \cdot (-8a^9b^3)}{a^{11}b^{11} \cdot 1} = \dfrac{-2a^{13}b^{11}}{a^{11}b^{11}} = 2a^2$

№ 87

а) $x^8 \cdot x^m = x^{24}$;
$x^{8+m} = x^{24}$;
$8 + m = 24$;
$m = 16$

б) $(x^8)^m = x^{24}$;
$x^{8m} = x^{24}$;
$8m = 24$;
$m = 3$

в) $(y^m)^5 = y^{40}$;
$y^{5m} = y^{40}$;
$5m = 40$;
$m = 8$

г) $y^m \cdot y^5 = y^{40}$;
$y^{m+5} = y^{40}$;
$m + 5 = 40$;
$m = 35$

№ 88

а) $\dfrac{7^6 \cdot 22^3 \cdot (2^5)^2 \cdot (11^{10} : 11^8) \cdot 28^4}{14^3 \cdot \left(\dfrac{8}{11}\right)^4 \cdot 44^3 \cdot 77^6} = \dfrac{7^6 \cdot 2^3 \cdot 11^3 \cdot 2^{10} \cdot 11^2 \cdot 7^4 \cdot 2^8}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^{12} \cdot 11^4 \cdot 11^3 \cdot 2^6 \cdot 7^6 \cdot 11^6} =$

$= \dfrac{7^{10} \cdot 2^{21} \cdot 11^5}{2^{21} \cdot 7^9 \cdot 11^5} = 7;$

б) $\dfrac{(9^7 : 3^4) \cdot 15^8 \cdot (7^7)^2 \cdot \left(\dfrac{5^{11}}{5^4}\right) \cdot 7^4}{21^{10} \cdot 25^6 \cdot 45^4 \cdot 7^8} + 2{,}315^0 = \dfrac{3^{14} \cdot 3^4 \cdot 3^8 \cdot 5^8 \cdot 7^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4}{3^{10} \cdot 7^{10} \cdot 5^{12} \cdot 5^4 \cdot 3^8 \cdot 7^8} =$

$\dfrac{3^{18} \cdot 5^{15} \cdot 7^{18}}{3^{18} \cdot 7^{18} \cdot 5^{16}} + 1 = \dfrac{1}{5} + 1 = 1{,}2$

№ 91*

а) $2^{10} > 10^3$
$2^3 \cdot 2^7 > (2 \cdot 5)^3$
$2^3 \cdot 128 > 2^3 \cdot 125$;

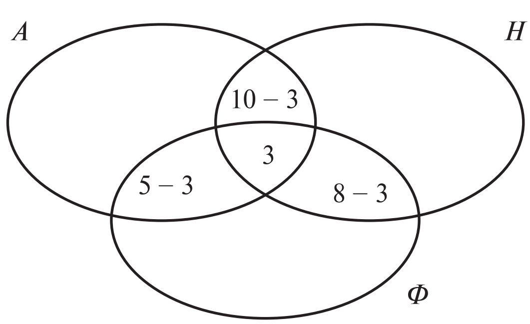
б) $10^{100} > 100^{10}$
$(10^{10})^{10} > (10^2)^{10}$
$10^{10} > 10^2$;

в) $2^{300} < 3^{200}$
$(2^3)^{100} < (3^2)^{100}$
$8^{100} < 9^{100}$;

г) $31^{16} < 17^{20}$
$31^{16} < 32^{16} = 2^{80}$
$17^{20} > 16^{20} = 2^{80}$
$31^{16} < 17^{20}$

д) $4^{53} < 15^{45}$
$15^{45} > 8^{45} = (2^3)^{45} = 2^{135}$ и $4^{53} = 2^{106}$, $2^{106} < 2^{135}$, отсюда $4^{53} < 2^{135} < 15^{45}$.

№ 92*



А — множество школьников, которые учат английский язык;
Н — множество школьников, которые учат немецкий язык;
Ф — множество школьников, которые учат французский язык.
42 – (7 + 3 +2) = 30 — изучают только английский язык;
28 – (5 + 3 + 7) = 13 — изучают только немецкий язык;
30 – (5 + 3 + 2) = 20 — изучают только французский язык;
13 + 30 + 20 + 5 + 7 + 2 + 3 = 80 — изучают хотя бы один язык;
85 – 80 = 5 — не изучают ни одного языка.
Ответ: 5 учеников.

№ 93*

Пусть высказывание на первой комнате «Комната 3 пуста» — истинное, тогда истинно и высказывание на третьей комнате «Эта комната пуста». Значит, высказывание на второй комнате «Дракон в 1 комнате» ложно, т.к. должно быть хотя бы одно ложное высказывание. И значит, дракон во второй комнате, т.к. это единственное ложное высказывание, а дракон находится в комнате с ложной надписью. Комната 3 пуста, значит принцесса в первой (на ней тоже истинное высказывание).

Номер комнаты	Высказывание, написанное на комнате	Истинность	Кто находится в комнате
1.	Комната 3 пуста	И	Принцесса
2.	Дракон в комнате 1	Л	Дракон
3.	Эта комната пуста	И	-

Пусть теперь высказывание на первой комнате ложно, тогда ложно и высказывание на третьей комнате:

Номер комнаты	Высказывание, написанное на комнате	Истинность	Кто находится в комнате
1.	Комната 3 пуста	Л	
2.	Дракон в комнате 1	И	
3.	Эта комната пуста	Л	

Значит, высказывание на комнате 2 истинно (должно быть хотя бы одно истинное высказывание) и дракон в первой комнате, а принцесса во второй комнате, т.к. на ней единственное истинное высказывание. Но тогда высказывание на комнате 3 истинно, а не ложно.

Номер комнаты	Высказывание, написанное на комнате	Истинность	Кто находится в комнате
1.	Комната 3 пуста	Л	Дракон
2.	Дракон в комнате 1	И	Принцесса
3.	Эта комната пуста	Л/И	-

Таким образом, получили, что высказывание на третьей комнате одновременно и истинно и ложно, т.е. противоречие. А, значит, наше предположение неверно, значит, высказывание на первой комнате не может быть ложным.

Ответ: принцесса находится в первой комнате.

§ 2. Многочлены и действия с ними

Содержание данного параграфа является традиционным для курса алгебры седьмого класса. В данном курсе алгебраическая линия начинает развиваться с первого класса, что обеспечивает мощную подготовку учащихся к изучению данного пункта. Фактически содержание данного пункта, кроме новой теоретической базы, ничего нового не прибавляет к знаниям учащихся. Единственное новое умение, которое приобретают семиклассники — это умножение многочлена на многочлен, изучение которого начнется в январе. Поэтому по части формирования умений преобразовывать алгебраические выражения первые четыре пункта можно рассматривать как возможность тренировать и закреплять имеющиеся у учащихся умения. Однако с точки зрения овладения принятой в алгебре терминологии этот параграф является для наших учеников новым материалом.

П. 4.2.1. ОДНОЧЛЕНЫ

Основные содержательные цели:

1) сформировать понятия одночлена, нулевого одночлена, коэффициента одночлена, стандартного вида одночлена, степени ненулевого одночлена;

2) сформировать представление об арифметических операциях с одночленами, имеющими результатом одночлен;

3) установить алгоритм записи одночлена в стандартном виде;

4) повторить общие высказывания и высказывания о существовании, способы построения их отрицания; арифметику остатков; способы решения задач на пропорциональное деление и способы рациональных вычислений;

5) тренировать умение читать и записывать высказывания на языке кванторов, доказывать и опровергать их, осуществлять равносильные преобразования выражений, решать задачи на пропорциональное деление; использовать сравнения для доказательства высказываний о делимости; выполнять арифметические действия по некоторому модулю; проводить вычисления с многоэтажными дробями.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении пункта учащиеся знакомятся с определениями *одночлена, коэффициента* одночлена, *стандартного вида* одночлена, *степени* одночлена.

В данном пункте учащиеся учатся находить среди разных алгебраических записей одночлены и составлять их, находить коэффициент одночлена, приводить одночлены к стандартному виду. Учащиеся выполняют различные действия с одночленами (причем наряду со сложением, вычитанием и умножением рассматривается и деление одночленов).

Урок. Одночлены

Новое знание

Одночлен стандартного вида.

Актуализация

Повторить: понятие буквенного выражения, коэффициента, подобных слагаемых, произведение степеней.

Задание на пробное действие

Записать одночлен в стандартном виде.

Фиксация затруднения

Не запишем одночлен в стандартном виде.

Не обоснуем, что записанный одночлен является одночленом стандартного вида.

Фиксация причины затруднения

Нет определения стандартного вида одночлена и способа записи одночлена в стандартном виде.

Цель деятельности

Узнать, какие одночлены называются одночленами стандартного вида, и построить способ записи одночленов в стандартном виде.

Эталон

Определение одночлена

Выражение, в котором используется только действие умножение, называется одночленом.

Определение коэффициента одночлена

Произведение всех множителей одночлена, записанных цифрами, называется коэффициентом одночлена.

Понятие стандартного вида одночлена

Стандартным видом ненулевого одночлена называется его запись, при которой:

1) коэффициент стоит на первом месте;

2) каждая переменная участвует в записи одночлена лишь один раз в виде соответствующей степени;

3) буквы в записи одночлена (если они есть) следуют в алфавитном порядке.

Стандартным видом нулевого одночлена называется число 0.

Алгоритм записи одночлена в стандартном виде

1. Вычислить произведение всех числовых множителей (коэффициент) одночлена и записать его на первом месте.
2. Определить, какие переменные входят в одночлен, и записать их в алфавитном порядке.
3. Найти и записать степени переменных.

Определение степени одночлена

Степенью ненулевого одночлена называется сумма показателей степеней входящих в одночлен переменных.

Определение подобных одночленов

Одночлены стандартного вида, имеющие одинаковую буквенную часть, называются подобными.

Определение приведения подобных слагаемых

Равносильное преобразование всех подобных между собой одночленов в один одночлен называется приведением подобных слагаемых.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 94 (1)

а) $2a^3$. Удвоенный куб числа a.

б) $x^2 - y : z$. Разность квадрата числа x и частного чисел y и z.

в) $m^3 + n^3 + r^3$. Сумма кубов чисел m, n и k.

г) $3(b^2 \cdot (c^5)^3)$. Утроенное произведение квадрата числа b и куба пятой степени числа c.

№ 95

а) удвоенное произведение числа a и квадрата числа b (использовано только умножение);

б) произведение $\frac{1}{12}$ и седьмой степени числа d (использовано только умножение);

г) произведение -1 и числа k;

д) $\frac{1}{9}$ (произведение $\frac{1}{9}$ и 1);

е) произведение куба числа m и шестой степени квадрата числа n;

ж) 0 (произведение 0 и 1) нулевой одночлен;

и) произведение числа обратного x, 5 и числа y;

к) произведение $-\frac{4}{7}$ и нулевых степеней чисел c и k.

№ 96

а) 12; б) $-0{,}36$; в) $-0{,}7$; г) $1\frac{2}{3}$; д) 1; е) -1; ж) -24; з) 1

№ 97

а) $3mmddm \cdot 8md^2 = (3 \cdot 8) \cdot (ddd^2) \cdot (mmmm) = 24d^4m^4$

Коэффициент одночлена: 24.

Степень одночлена 8.

б) $14yx^2yx \cdot (-\frac{5}{7}xy) = (-\frac{5}{7} \cdot 14) \cdot (x^2xx) \cdot (yyy) = -10x^4y^3$

Коэффициент одночлена: -10.

Степень одночлена 7.

в) $-\frac{3}{4}\,cb^2c^3 \cdot (-0{,}4)b^3c^2 = (-\frac{3}{4} \cdot (-0{,}4)) \cdot (b^2b^3) \cdot (cc^3c^2) = 0{,}3b^5c^6$

Коэффициент одночлена: 0,3.

Степень одночлена 11.

г) $(-0{,}1ky^4)2 \cdot 40y^2k^3 = 0{,}4k^5y^{10}$; коэффициент: 0,4; степень: 15;

д) $(5ab)^3 \cdot (-0{,}2a^2b)^2 = 5a^7b^5$; коэффициент: 5; степень: 12;

е) $12{,}5(-n)^4d \cdot (0{,}2dn^2)^3 = 0{,}1d^4n^{10}$; коэффициент: 0,1; степень: 14;

ж) $-1{,}8bac^2 \cdot (\frac{1}{3}c^2ab^4)^2 = -0{,}2a^3b^9c^6$; коэффициент: $-0{,}2$; степень: 18.

з) $\frac{5}{24}\,k^2 \cdot (-2kcn^2)^3 \cdot (-0{,}6n^2c) = c^4k^5n^6$

Коэффициент одночлена: 1; степень одночлена равна 15.

и) $(\frac{2}{3}\,a^2y)^2 \cdot 4{,}5n^2ay^2 \cdot (-yn)^3 = -2a^5n^5y^7$

Коэффициент одночлена: -2; степень одночлена равна 17.

№ 106

а) произведение пятых степеней любого рационального числа есть двадцать пятая степень этого числа, высказывание ложное, т.к. чтобы найти произведение степеней с одинаковым основанием надо показатели степеней складывать (эталон 4);

отрицание высказывания: $\exists\, x \in Q : x^5 \cdot x^5 \neq x^{25}$, например если $x = 2$, то $2^5 \cdot 2^5 =$ 210 (правило нахождения произведения степеней с одинаковыми основаниями);

б) существует рациональное число, произведение пятых степеней которого равно двадцать пятой степени этого числа, высказывание истинно; например, если $x = 1$, то $1^5 \cdot 1^5 = 1^{25}$.

№ 107.

а) k — коэффициент пропорциональности

Мужчин в секции $3k$ человек; женщин: $5k$ человек; детей: $9k$ человек.

По условию всего в секции 34 человека:

$3k + 5k + 9k = 34$;

$17k = 34$;

$k = 2$

$9 \cdot 2 = 18$ (д.)

Ответ: в секции 18 детей.

б) k — коэффициент пропорциональности

однокомнатных квартир: $5{,}7k$; двухкомнатных квартир: $5{,}6k$; трехкомнатных квартир: $2{,}2k$; четырехкомнатных квартир: $1{,}5k$.

По условию всего 150 квартир:

$5{,}7k + 5{,}6k + 2{,}2k + 1{,}5k = 150$;

$15k = 150$;

$k = 10$

$2{,}2 \cdot 10 = 22$ (кв.)

Ответ: 22 трехкомнатные квартиры.

в) k — коэффициент пропорциональности

муки: $2k$ кг; молока: $4k$ кг; яичного порошка: $0{,}75k$ кг; компоненты: $0{,}25k$ кг.

По условию всего нужно приготовить 3,5 кг блинов:

$2k + 4k + 0{,}75k + 0{,}25k = 3{,}5$;

$7k = 3{,}5$;

$k = 0{,}5$;

$2 \cdot 0{,}5 = 1$ (кг)

Ответ: нужно 1 кг муки.

№ 110

а) $15ab3ab \cdot (-\frac{3}{5}a^2b) = -9a^4b^5$ коэффициент — 9; степень — 9

б) $24x^3 \cdot (-\frac{1}{2}\ yzx)^3 \cdot (-0{,}2x^3z) = 0{,}6x^9y^3z^4$ коэффициент — 0,6; степень — 16

№ 111

а) $11a^3b^4 - (5ab^4a^2 + 4b^4a^3) = 11a^3b^4 - 5ab^4a^2 - 4b^4a^3 = 11a^3b^4 - 5b^4a^3 - 4b^4a^3 = 2a^3b^4$;

б) $-0{,}2cd^3 \cdot (5dc)^2 + 7c^2d^5c = -0{,}2cd^3 \cdot 25d^2c^2 + 7c^3d^5 = -5c^3d^5 + 7c^3d^5 = 2c^3d^5$;

в) $(9x : y) \cdot (x^2y : 3)^3 \cdot \frac{6}{x^2} - 8x^4y^2 : (2yx^2) = 2x^2y - 4x^2y = -2x^2y$;

г) $(7pq^2)^2 \cdot (2q^3p) : (-14q^5p^2) - (3qp)^3 : (-9qp^2) =$

$= (49p^2q^4) \cdot (2q^3p) : (-14q^5p^2) - (27q^3p^3) : (-9qp^2) = -7pq^2 + 3pq^2 = -4pq^2$.

№ 119*

Пусть x — количество людей, которые могут выйти на митинг. Рассмотрим общее число недовольных. Каждой реформой по условию недовольны 48 человек, а таких реформ пять, значит, возможное «общее число» недовольных 5 реформами $5 \cdot 48 = 240$. С другой стороны, каждый, кто выступит на митинге, недоволен более чем половиной реформ, т. е. по крайней мере, тремя. Значит, максимальное число недовольных не менее $3x$, т. е. 240 не меньше $3x$. Отсюда, максимальное число людей, которые могут выйти на митинг равно 240 : 3 Правительство может ожидать на митинге максимум 80 человек.

П. 4.2.2. МНОГОЧЛЕНЫ

Основные содержательные цели:

1) сформировать понятия многочлена, стандартного вида многочлена, степени многочлена, старшего и свободного члена многочлена;

2) сформировать навык нахождения значения многочлена при известных значениях переменных;

3) установить алгоритм записи многочлена в стандартном виде;

4) повторить запись высказываний с помощью кванторов, построение отрицаний высказываний; способы сравнения выражений, содержащих дроби;

5) тренировать умение осуществлять равносильные преобразования выражений, проводить вычисления рационально; решать уравнения; решать задачи на части; использовать свойства степеней и делимости при решении задач; находить логические ошибки в рассуждениях.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении пункта вводятся определения *многочлена*, его членов, *двучлена*, *трехчлена* и т. д.; кроме того, учащиеся знакомятся со *стандартным видом* многочлена.

В данном пункте учащиеся учатся записывать выражения в виде многочлена, приводить многочлен к стандартному виду.

Урок. Многочлены

Новое знание

Понятия: «многочлен», «стандартный вид» многочлена, «степень» многочлена, «старший» и «свободный» члены многочлена, алгоритм записи многочлена в стандартном виде.

Актуализация

Повторить: определение одночлена, определение степени одночлена, понятие стандартного вида одночлена, понятие подобных одночленов.

Задание на пробное действие

Записать многочлен $5a - 3ab - 4a$ в стандартном виде.

Фиксация затруднения

Не записали многочлен в стандартном виде.

Не смогли обосновать, что записанный многочлен является многочленом стандартного вида.

Фиксация причины затруднения

Нет способа записи многочлена в стандартном виде.

Цель деятельности

Построить способ записи многочленов в стандартном виде.
Эталон

Понятие многочлена

Выражение, которое может быть записано в виде суммы одночленов, называют многочленом.

Понятие стандартного вида многочлена

Стандартным видом многочлена называется запись, при которой все его члены:
1) являются одночленами стандартного вида;
2) не являются подобными одночленами;
3) записаны в порядке убывания их степеней (одночлены, имеющие одинаковую степень, записываются в произвольном порядке).

Понятие степени многочлена

Степенью многочлена, записанного в стандартном виде, называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов.

Понятие старшего и свободного членов

Член многочлена, имеющий наибольшую степень, называется старшим членом.

Член многочлена нулевой степени называется свободным членом.

Алгоритм записи многочлена в стандартном виде
1) Записать все члены многочлена в стандартном виде.
2) Привести подобные слагаемые.
3) Определить степень каждого одночлена и записать их алгебраическую сумму в порядке убывания степеней.

Рассмотрим примеры решений некоторых заданий.

№ 125

в) $-4p \cdot 2q^2 - q^4 + 6q^2p = \underline{-8pq^2} - q^4 + \underline{6pq^2} = -2pq^2 - q^4 = \overset{\text{4 ст.}}{-q^4} \overset{\text{3 ст.}}{- 2pq^2}$

Степень многочлена: 4

г) $c^2d^3 - (2cd)^2 + 3cd^2c = c^2d^3 - 4c^2d^2 + 3c^2d^2 = \overset{\text{5 ст.}}{c^2d^3} \overset{\text{4 ст.}}{- c^2d^2}$

Записано в порядке убывания степеней. Степень многочлена 5.

ж) $5m^3 - 2m^2 \cdot 3n^3 - 6m^3 + 7n^3m^2 + 2m^3 - 4m^3 = m^2n^3 - 3m^3$, степень многочлена: 5;

з) $7u^3v + (3u)^2 - 4v^3 - 8vu^3 - 10u^2 + 5v^3 = 7u^3v + 9u^2 + v^3 - 10u^2 - 8u^3v = -u^3v + v^3 - u^2$, степень многочлена: 4.

№ 127

а) $a^3 + a^2 - a + b^3 - b^2 - b$

Члены многочлена записаны не в порядке убывания степеней.

б) $3x^2y - yx^2 + 4xy + 3x$

Второй член многочлена записан не в стандартном виде.

в) $mn^3 - 4m^2n^2 + n^2m^2 - 2mn + 7$

Не приведены подобные слагаемые

г) $2p^3q^2 + q^3p^2 - 5p^2q + q^2p + 2p - 3q - 1$

Второй и четвертый одночлены записаны не в стандартном виде

№ 128 (б, в)

б) Если $y = 1$, то $- 5 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 18 = -5 - 3 + 18 = 10$.

в) Если $n = 0$, то $4 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 2 = -2$

№ 138 (г)

$\frac{3}{7} \cdot (3x - 1) - \frac{4}{21} \cdot (6x + 5) = \frac{5}{21} \cdot (4x + 1);$

$9(3x - 1) - 4(6x + 5) = 5(4x + 1)$

$27x - 9 - 24x - 20 = 20x + 5$

$27x - 24x - 20x = 5 + 9 + 20$

$-17x = 34$

$x = -2$

Ответ: $\{-2\}$.

№ 139 (а)

Пусть надо собрать x кг грибов, тогда потери при сушке составляют $\frac{11}{15}x$ кг. По условию получится 4 кг грибов. Составим уравнение.

$x - \frac{11}{15}x = 4;$

$\frac{4}{15}x = 4;$

$x = 4 : \frac{4}{15};$

$x = 15$

Ответ: надо собрать 15 кг грибов.

№ 143

а) $2(x - 3y) - 3(z - 2y) + 2(4z - 3x) = \underline{2x} - \underline{\underline{6y}} - \underline{\underline{3z}} + \underline{\underline{6y}} + \underline{\underline{8z}} - \underline{6x} = -4x + 5z$; степень -1

б) $(6m^2nmn - 2m^2 \cdot 2mn \cdot m) - (-5m^4n + (2mn)^2 \cdot m) = \underline{6m^3n^2} - 4m^4n + 5mn - \underline{4m^3n^2} =$
$= 2m^3n^2 - 4m^4n + 5mn$; степень — 5

№ 146

а) Если $p = -1$, то $-1 - 1 - 8 + 12 = -10 + 12 = 2;$

б) Если $m = 0$, то $0 - 0 - 0 + 0 + 5 = 5.$

№ 153*

Пусть x чел. — число голосовавших. Тогда мандарины любят — $0{,}46x$. Пусть за другие партии голосовало y чел., тогда за «Мандарин» проголосовало $x - y$ чел. Из условия следует, что мандарины любят 10 % голосовавших за другие партии — $0{,}1y$ и все, кто голосовал за «Мандарин», то есть $0{,}1y + x - y$. Тогда,

$0{,}46x = 0{,}1y + x - y$

$y = 0{,}6x.$

Значит, за другие партии голосовало 60 % избирателей.

Таким образом, партия «Мандарин» набрала 40 % голосов.

П. 4.2.3. СЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление о сумме и разности многочленов как многочлене; о противоположных многочленах;

2) установить алгоритм сложения и вычитания многочленов;

3) повторить понятие равносильных утверждений; понятия среднего арифметического, средней скорости движения; формулу деления с остатком, алгоритмы преобразования именованных чисел;

4) тренировать умение записывать утверждения на математическом языке, осуществлять равносильные преобразования выражений; проводить вычисления рационально; проводить вычисления с именованными числами; применять свойства делимости и деления с остатком при решении задач.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении пункта вводятся определение суммы многочленов, определение многочлена, противоположного исходному многочлену, определение разности многочленов.

В данном пункте учащиеся учатся складывать и вычитать многочлены. При этом они знакомятся с алгоритмом почленного сложения (вычитания) многочленов и могут выполнять сложение (вычитание) «в столбик». Чтобы подготовить учащихся к усвоению сложения и вычитания многочленов в столбик следует повторить с ними сложение и вычитание многозначных чисел в столбик. При этом внимание учащихся обращается на то, по какому принципу они располагают числа — «разряд под разрядом». Для «открытия» способа сложения (вычитания) многочленов «в столбик» семиклассникам нужно будет догадаться, что располагать друг под другом теперь следует не цифры соответствующих разрядов, а подобные слагаемые.

Умение складывать многочлены «в столбик» пригодится учащимся в восьмом классе при решении систем линейных уравнений методом алгебраического сложения.

Урок. Сложение и вычитание многочленов

Новое знание

Сумма и разность многочленов — многочлен, противоположные многочлены, алгоритм сложения и вычитания многочленов в столбик.

Актуализация

Повторить: противоположные числа, разность рациональных чисел, подобные одночлены, сложение и вычитание чисел в столбик.

Задание на пробное действие

Найти сумму многочленов, используя идею сложения многозначных чисел «в столбик».

Фиксация затруднения

Не можем записать многочлены в столбик.

Не можем обосновать верность записи многочленов в столбик.

Фиксация причины затруднения

Нет правила записи многочленов в столбик.

Цель деятельности

Построить способ сложения и вычитания многочленов в столбик.

Эталон

Определение суммы многочленов

Суммой многочленов называется многочлен, членами которого являются все члены многочленов слагаемых, взятых с их знаками.

Определение многочлена, противоположного данному многочлену

Многочлен называется противоположным исходному, если его сумма с исходным многочленом равна нулю.

Определение разности многочленов

Разностью многочленов называется многочлен, равный сумме уменьшаемого и многочлена, противоположного вычитаемого.

Алгоритм сложения многочленов «в столбик»

1. Записать многочлены в стандартном виде.
2. Записать многочлены «в столбик» так, чтобы подобные члены стояли под подобными (если они есть).
3. Сложить по «столбцам» подобные слагаемые и записать полученные результаты.
4. Записать итоговый многочлен.

Алгоритм вычитания многочленов «в столбик»

1. Записать многочлены в стандартном виде.
2. Заменить многочлен-вычитаемое противоположным ему.
3. Записать многочлены «в столбик» так, чтобы подобные члены стояли под подобными (если они есть).
4. Сложить по «столбцам» подобные слагаемые и записать полученные результаты.
5. Записать итоговый многочлен.

Урок. Сложение и вычитание многочленов (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль усвоения понятий одночлена, многочлена, стандартного вида, степени, свободного и старшего членов многочлена;
2) организовать самоконтроль умения вычислять сумму и разность многочленов; сравнивать выражения без вычислений; решать задачи на части; использовать свойства делимости при решении задач.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 155 (1)
$\text{A} + \text{B} = (a^2 + a - 3) + (-a^2 + 6) = a^2 + a - 3 - a^2 + 6 = a + 3.$

№ 156 (1)
$P + (-Q) = (2x^2 - 4x + 1) + (-x^2 + 6x) = 2x^2 - 4x + 1 - x^2 + 6x = x^2 + 2x + 1$
$P - Q = (2x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 6x) = 2x^2 - 4x + 1 - x^2 + 6x = x^2 + 2x + 1$

№ 157 (е)
$A + B = (3z^3 - 4z^2 + 5z - 6) + (3 - 4z + 5z^2 - 6z^3) =$
$= 3z^3 - 4z^2 + 5z - 6 + 3 - 4z + 5z^2 - 6z^3 =$
$= -3z^3 + z^2 + z - 3;$
$A - B = (3z^3 - 4z^2 + 5z - 6) - (3 - 4z + 5z^2 - 6z^3) =$
$= 3z^3 - 4z^2 + 5z - 6 - 3 + 4z - 5z^2 + 6z^3 =$
$= 9z^3 - 9z^2 + 9z - 9$

№ 159

б) $A + B = (5 - 7ab + 3b^2 + 2a^2) + (7ab - 2 + a^2) =$

$= (2a^2 + 3b^2 - 7ab + 5) + (a^2 + 7ab - 2) =$

$$+\begin{array}{rrrr} 2a^2 & + 3b^2 & - \cancel{7ab} & + 5 \\ a^2 & & + \cancel{7ab} & - 2 \\ \hline 3a^2 & + 3b^2 & & + 3 \end{array}$$

в) $A + B = 3a^2 + 3b^2 + 3$

$A + B = (6p^2 + 6pq - (7 + 4q^2)) + (8 + 3q^2 - (5p^2 + 6pq)) =$

$= (6p^2 + 6pq - 7 - 4q^2) + (8 + 3q^2 - 5p^2 - 6pq) =$

$= (6p^2 - 4q^2 + 6pq - 7) + (-5p^2 + 3q^2 - 6pq + 8)$

$$+\begin{array}{rrrr} 6p^2 & - 4q^2 & + \cancel{6pq} & - 7 \\ -5p^2 & + 3q^2 & - \cancel{6pq} & + 8 \\ \hline p^2 & - \quad q^2 & & + 1 \end{array} = p^2 - q^2 + 1$$

г) $A + B = (3m^2 + 7m^2n - 9n^2m - (5m^2n - 2m^2)) + (6n^2m - (5m^2 - n^2m))$

$A + B = (3m^2 + 7m^2n - 9n^2m - 5m^2n + 2m^2) + (6n^2m - 5m^2 + n^2m) =$

$= (2m^2n - 9mn^2 + 5m^2) + (7mn^2 - 5m^2)$

$$+\begin{array}{rrr} 2m^2n & - 9mn^2 & + 5m^2 \\ & 7mn^2 & - 5m^2 \\ \hline 2m^2n & - 2mn^2 & \end{array}$$

№ 161

б) $P - Q = (9p^2 - 7pq - 6q^2 - 4p^2) - (7p^2 - 5pq - 4q^2 - 2p^2)$

$= (5p^2 - 6q^2 - 7pq) - (5p^2 - 4q^2 - 5pq) = (5p^2 - 6q^2 - 7pq) + (-5p^2 + 4q^2 + 5pq)$

$$+\begin{array}{rrr} \cancel{5p^2} & - 6q^2 & - 7pq \\ \cancel{-5p^2} & + 4q^2 & + 5pq \\ \hline & -2q^2 & - 2pq \end{array}$$

в) $P - Q = -2q^2 - 2pq$

$P - Q = (-(2n^2 + 4) + 6m^2 - 3mn) - (5m^2 - 3mn - 3 - n^2) =$

$= (-2n^2 - 4 + 6m^2 - 3mn) - (5m^2 - 3mn - 3 - n^2) =$

$= (6m^2 - 2n^2 - 3mn - 4) - (5m^2 - n^2 - 3mn - 3) =$

$= (6m^2 - 2n^2 - 3mn - 4) + (-5m^2 + n^2 + 3mn + 3)$

$$+\begin{array}{rrrr} 6m^2 & - 2n^2 & - 3mn & - 4 \\ -5m^2 & + n^2 & + 3mn & + 3 \\ \hline m^2 & - n^2 & & -1 \end{array} = m^2 - n^2 - 1$$

г) $P - Q = (2a^4 + 5a^2b - 3a^2b^2 - (ab^2 + b^4)) - (4a^2b - (2a^2b^2 - 2a^4) - b^2(a + b^2))$

$P - Q = (2a^4 + 5a^2b - 3a^2b^2 - (ab^2 + b^4)) - (4a^2b - (2a^2b^2 - 2a^4) - b^2(a + b^2)) =$

$= (2a^4 + 5a^2b - 3a^2b^2 - ab^2 - b^4) - (4a^2b - 2a^2b^2 + 2a^4 - ab^2 - b^4) =$

$= (2a^4 - b^4 - 3a^2b^2 + 5a^2b - ab^2) - (2a^4 - b^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b - ab^2)$

$(2a^4 - b^4 - 3a^2b^2 + 5a^2b - ab^2) + (-2a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 4a^2b + ab^2)$

$$+\begin{array}{rrrrr} \cancel{2a^4} & \cancel{- b^4} & -3a^2b^2 & + 5a^2b & \cancel{- ab^2} \\ \cancel{-2a^4} & \cancel{+ b^4} & + 2a^2b^2 & - 4a^2b & \cancel{+ ab^2} \\ \hline & & -a^2b^2 & + a^2b & \end{array}$$

№ 162 (а)

а) $(x + 2y + z) - (x - 2y - z) - (2y + z - x) + (x - 2y + z) - (x + 2y - z) =$

$= (x + 2y + z) + (-x + 2y + z) + (x - 2y - z) + (x - 2y + z) + (-x - 2y + z)$

$$+\begin{array}{rrr} \cancel{x} & + \cancel{2y} & + \cancel{z} \\ \cancel{-x} & + \cancel{2y} & + z \\ \cancel{x} & - \cancel{2y} & - \cancel{z} \\ x & - \cancel{2y} & + z \\ \cancel{-x} & - 2y & + z \\ \hline x & - 2y & + 3z \end{array}$$

№ 169

а) Число 9 больше или равно 5 $9 \geqslant 5$;

б) Число 48 кратно 6. Число 6 делитель числа 48 $48 \vdots 6$;

в) Число b на 12 меньше числа a $a = b + 12$; $b = a - 12$

г) Число y в 3 раза больше числа x $y = 3x$

д) Модуль чисел 7 и –7 равны 7 $|7| = |-7| = 7$

е) Отношение чисел m и n равно $\frac{2}{3}$ $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

ж) $\frac{5}{6}$ числа d равно числу с $d = c$

з) 35% числа t равно числу k $0{,}35t = k$

№ 170

а) $\frac{a}{(a-b)(a+b)} : \frac{7(a+b)}{(a-b)} \cdot \frac{7}{a} = \frac{7a(a-b)}{(a-b)(a+b)\cdot 7a(a+b)a} = \frac{1}{(a+b)^2}$;

б) $\frac{(c+d)}{(c-d)^2} \cdot \frac{3(2c+d)}{(c+d)} : \frac{3(2c+d)}{(c+d)(c-d)} = \frac{(c+d)\cdot 3(2c+d)\cdot(c+d)(c-d)}{(c-d)(c-d)(c+d)\cdot 3(2c+d)} = \frac{c+d}{c-d}$;

в) $\frac{(4mn+4n)}{(3m-2n)} : \frac{5n(8m+8)}{(6m-4n)(m-n)} \cdot \frac{5(7m-7n)}{14n} =$

$= \frac{(4mn+4n)\cdot(6m-4n)(m-n)\cdot 5(7m-7n)}{(3m-2n)\cdot 5n(8m+8)\cdot 14n}$

$= \frac{4n(m+1)\cdot 2(3m-2n)(m-n)\cdot 5\cdot 7(m-n)}{(3m-2n)\cdot 5n\cdot 8(m+1)\cdot 14n} = \frac{5(m-n)(m-n)}{2n}$;

г) $\frac{(p-2q)}{(2p+q)} \cdot \frac{14p(10p+5q)}{(14q-7p)(2p^2-pq)} : \frac{7(6q-12p)}{3} =$

$= \frac{(p-2q)\cdot 70p(2p+q)\cdot 3}{(2p+q)\cdot 7p(2q-p)(2p-q)\cdot 42(q-2p)} = \frac{5}{7(2p-q)^2}$.

№ 172 (а, г, е)

а) 3 км 256 м 9 см + 5 км 4215 м 97 см = 3 км 256 м 9 см + 9 км 215 м 97 см =
= 12 км 471 м 106 см = 12 км 472 м 6 см;

г) 15 кг 7158 г – 1356 г + 7 ц 368 г = 22 кг 158 г – 1 кг 356 г + 700 кг 368 г =
= 721 кг 170 г = 7 ц 21 кг 170 г;

е) 7 дм^2 127 см^2 + 4 а 329 дм^2 91 см^2 = 4 а 336 дм^2 218 см^2 = 4 а 3м^{2}38 дм^2 18 см^2

№ 173

а) Предположим такое число есть, а значит: $12n + 11 = 18m + 1$

Преобразуем равенство:

$18m - 12n = 11 - 1$;

$18m - 12n = 10$.

Левая часть равенства делится на3, правая на 3 не делится, т.е. наше предположение неверно, такого числа не существует.

б) Предположим такое число есть, а значит: $9n + 7 = 27m + 13$

Преобразуем равенство:

$9n - 27m = 13 - 7$;

$9n - 27m = 6$.

Левая часть равенства делится на 9, правая на 9 не делится, т. е. наше предположение неверно, такого числа не существует.

№ 174

а) $A + B = (4 - 2xy + 5x^2 - 3y^2) + (4x^2 - 3xy + 2y^2 - 2)$;

$A - B = (4 - 2xy + 5x^2 - 3y^2) - (4x^2 - 3xy + 2y^2 - 2)$;

$$
\begin{array}{rl} & 5x^2-3y^2-2xy+4\\ + & \underline{4x^2+2y^2-3xy-2}\\ & 9x^2-y^2-5xy+2\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl} + & 5x^2-3y^2-2xy+4\\ & \underline{-4x^2-2y^2+3xy+2}\\ & x^2-5y^2+xy+6\end{array}
$$

$B-A=-x^2+5y^2-xy-6$

б) $A+B=(3a^2-5ab-(b^2-2))+(5a^2+7ab+1-3b^2)$;
 $\mathrm{A}-\mathrm{B}=(3a^2-5ab-b^2+2)-(5a^2+7ab+1-3b^2)$;

$$
\begin{array}{rl} & 3a^2-b^2-5ab+2\\ + & \\ & \underline{5a^2-3b^2+7ab+1}\\ & 8a^2-4b^2+2ab+3\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl} & 3a^2-b^2-5ab+2\\ + & \\ & \underline{-5a^2+3b^2-7ab-1}\\ & -2a^2+2b^2-12ab+1\end{array}
$$

$B-A=2a^2-2b^2+12ab-1$

№ 175

а) $P+Q+R=(3p^3-p^2q+4pq^2-5q^3+1)+(-2p^3+6p^2q-3pq^2+2q^3+3)+$
$+(-p^3+2p^2q+pq^2-4q^3-5)$

$$
\begin{array}{rl} & 3p^3-5q^3-p^2q+4pq^2+1\\ + & -2p^3+2q^3+6p^2q-3pq^2+3\\ & \underline{-p^3-4q^3+2p^2q+pq^2-5}\\ & -7q^3+7p^2q+2pq^2-1\end{array}
$$

б) $P-Q-R=(3p^3-p^2q+4pq^2-5q^3+1)-(-2p^3+6p^2q-3pq^2+2q^3+3)-$
$-(-p^3+2p^2q+pq^2-4q^3-5)$

$$
\begin{array}{rl} & 3p^3-5q^3-p^2q+4pq^2+1\\ + & 2p^3-2q^3-6p^2q+3pq^2-3\\ & \underline{p^3+4q^3-2p^2q-pq^2+5}\\ & 6p^3-3q^3-9p^2q+6pq^2+3\end{array}
$$

№ 176

$K-M+2N=$
$=(6a-3c-(2a+3c))-(3a-4c+(2a-c))+2(3a+4c-3-(2a+3c-3))=$
$=(6a-3c-2a-3c)-(3a-4c+2a-c)+2(3a+4c-3-2a-3c+3)=$
$=(4a-6c)-(5a-5c)+2(a+c)=(4a-6c)+(-5a+5c)+(2a+2c)$

$$
\begin{array}{rl} & 4a-6c\\ + & -5a+5c\\ & \underline{2a+2c}\\ & a+c\end{array}
$$

П. 4.2.4. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление о произведении одночлена на многочлен;
2) сформулировать правила умножения одночлена на многочлен;
3) тренировать умение записывать утверждения на математическом языке, решать неравенства, используя координатную прямую, решать задачи на проценты и движение.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении пункта вводится определение произведения одночлена на многочлен, непосредственно из которого следует правило умножения одночлена на многочлен. Чтобы подготовить учащихся к формулировке данного правила с ними следует повторить распределительный закон умножения.

В данном пункте учащиеся учатся умножать многочлен на одночлен (или одночлен на многочлен). При этом они знакомятся с записью умножения одночлена на многочлен «в столбик».

Учащиеся применяют правило умножения одночлена на многочлен для упрощения выражений, доказательства тождеств, решения уравнений (**№№ 190, 192**), упрощения математических моделей, полученных при решении задач (**№189, 193**).

При выполнении **№ 191** учащиеся знакомятся с методом замены для рационализации преобразований выражения.

Урок. Умножение одночлена на одночлен

Новое знание

Алгоритм умножения одночлена на многочлен в столбик.

Актуализация

Повторить: распределительное свойство умножения.

Задание на пробное действие

Найти произведение одночлена на многочлен, записав произведение в столбик.

Фиксация затруднения

Не смогли записать произведение одночлена на многочлен в столбик.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма записи произведения одночлена на многочлен в столбик.

Цель деятельности

Построить алгоритм записи произведения одночлена на многочлен в столбик.

Эталон

Способ нахождения произведения одночлена на многочлен в столбик.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 186

д) $m \cdot (m + n) - 2m \cdot (m - n) = m \cdot m + m \cdot n - 2m \cdot m - 2m \cdot (-n) =$
$= \underline{m}^2 + \underline{mn} - \underline{2m}^2 + \underline{\underline{2mn}} = -m^2 + 3mn$

е) $3x \cdot (3c - d) - 2c \cdot (5x - d) = 3x \cdot 3c - 3x \cdot d - 2c \cdot 5x - 2c \cdot (-d) =$
$= 9\underline{cx} - 3dx - 10\underline{cx} + 2cd = -cx - 3dx + 2cd$

ж) $3p \cdot (p + 4q) - 4q \cdot (3p - q) = 3p \cdot p + 3p \cdot 4q - 4q \cdot 3p - 4q \cdot (-q) =$
$= 3p^2 + \cancel{12pq} - \cancel{12pq} + 4q^2 = 3p^2 + 4q^2$

з) $-2a \cdot (5b - a) + 5b \cdot (b + 2a) = -2a \cdot 5b + 2a \cdot a + 5b \cdot b + 5b \cdot 2a =$
$= -10ab + 2a^2 + 5b^2 + 10ab = 2a^2 + 5b^2$

№ 187

а) $(2x - 6y + 6) \cdot (-x) + 2y \cdot (-3x + 4y - 8) - 8y(y - 2) =$
$= -2x^2 + \cancel{6xy} - 6x - \cancel{6xy} + \underline{8y}^2 - 16y - \underline{8y}^2 + 16y = -2x^2 - 6x$

в) $(3p^2 - (5p + 3)) \cdot (-p) + (-p^2 + (p + 1)) \cdot (-2p) + p^2(p - 3) =$
$= (3p^2 - 5p - 3) \cdot (-p) + (-p^2 + p + 1) \cdot (-2p) + p^2(p - 3) =$
$= \underline{-3p}^3 + \underline{5p}^2 + 3p + \underline{2p}^3 - \underline{2p}^2 - 2p + \underline{p}^3 - \underline{3p}^2 = p;$

г) $(-4a^2 - 6a - 8) \cdot (-\frac{1}{2}a) + (\frac{1}{4}a) \cdot (-8a^2 - 16a - 32) + a(a + 5) =$
$= \cancel{2a^3} + \underline{3a}^2 + \underline{4a} - \cancel{2a^3} - \underline{4a}^2 - \underline{8a} + \underline{a}^2 + \underline{5a} = a$

№ 189

а) $(m + n) \cdot 2k = 2km + 2kn$ (м^2);

б) $5a \cdot 3b \cdot (a + b) = 15a^2b + 5ab^2$ (дм^3);

в) $(m + n) \cdot p = mp + np$ (км);

г) $3x \cdot (x + y) = 3x^2 + 3xy$ (д.).

№ 190 (а, б)

а) $5x(3x - 2) + 2(x - 3) - 3x(4x + 4) = 3x^2 + 14;$

$15x^2 - 10x + 2x - 6 - 12x^2 - 12x = 3x^2 + 14;$

$3x^2 - 20x - 6 = 3x^2 + 14;$

$3x^2 - 3x^2 - 20x = 14 + 6;$

$-20x = 20;$

$x = -1$

Ответ: $\{-1\}$.

б) $4a(1 - 3a + a^2) - 2a(5 - 4a + 2a^2) + 2a(2a - 5) = -8;$

$4a - 12a^2 + 4a^3 - 10a + 8a^2 - 4a^3 + 4a^2 - 10a = -8;$

$-16a = -8$

$a = 0{,}5$

Ответ: $\{0{,}5\}$.

№ 191 (б)

$4x(6x^2 + 9x - 27) - 24x(6x^2 + 9x - 29) + 20x(9x - 25 + 6x^2)$

$t = 9x - 25 + 6x^2$

$4x(t - 2) - 24x(t - 4) + 20xt = 4xt - 8x - 24xt + 96x + 20xt = 88x$

Если $x = 2$, то $88 \cdot 2 = 176$

№ 192 (а)

$\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7};$

$7(5x - 4) = 2(16x + 1);$

$35x - 28 = 32x + 2;$

$35x - 32x = 2 + 28;$

$3x = 30;$

$x = 10$

Ответ: $\{10\}$.

№ 193 (а)

	Было сахара, т	**Ежедневно завозили, т**	**Количество дней привоза**	**Ежедневно отгружали, т**	**Количество дней отгрузки**
I	21	9	x	5	$\frac{21 + 9x}{5}$
II	18	12	x	10	$\frac{18 + 12x}{10}$

По условию задачи сахар с первого склада отгружали клиентам на 6 дней дольше, чем со второго:

$\frac{21 + 9x}{5} = \frac{18 + 12x}{10} + 6;$

$2(21 + 9x) = 18 + 12x + 60;$

$42 + 18x = 78 + 12x;$

$18x - 12x = 78 - 42;$

$6x = 36;$

$x = 6,\ 6 \in N.$

Ответ: 6 дней завозили сахар.

№ 202

а) $-2m \cdot (m^4 + 6m^3 - 3m^2) - (-4m^2) \cdot (2m^3 + 3m^2 - 4m) =$

$= (-2m^5 - 12m^4 + 6m^3) - (-8m^5 - 12m^4 + 16m^3)$

Первый способ:

$\underline{-2m}^5 - 12m^4 + \underline{6m}^3 + \underline{8m}^5 + 12m^4 - \underline{16m}^3 = 6m^5 - 10m^3$

Второй способ:

$$
\begin{array}{r}
-2m^5 - 12m^4 + 6m^3 \\
+\quad 8m^5 + 12m^4 - 16m^3 \\
\hline
6m^5 \qquad\qquad - 10m^3
\end{array}
$$

б) $(-4b^2 + 2b - 3) \cdot (-2b^2) + (-2b^2 + 3b^3 + 2b) \cdot (-3b) =$
$= (8b^4 - 4b^3 + 6b^2) + (6b^3 - 9b^4 - 6b^2)$

Первый способ:

$8b^4 - 4b^3 + 6b^2 + 6b^3 - 9b^4 - 6b^2 = -b^4 + 2b^3$

Второй способ:

$$
\begin{array}{r}
8b^4 - 4b^3 + 6b^2 \\
+\quad -9b^4 + 6b^3 - 6b^2 \\
\hline
-b^4 + 2b^3 \qquad
\end{array}
$$

№ 203

а) $(2a + 3c) \cdot 5b = 10ab + 15bc$;

б) $(2x + y) \cdot 3z = 6xz + 3yz$

П. 4. 2. 5. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Основные содержательные цели:

1) сформировать представление о произведении многочленов;

2) сформулировать правила умножения многочленов.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении пункта вводится определение произведения двух многочленов, непосредственно из которого следует правило умножения многочлена на многочлен.

Для открытия правила умножения многочлена на многочлен учащиеся могут предложить различные способы:

- свести неизвестный способ к известному, обозначив многочлен буквой и воспользоваться известным правилом умножения одночлена на многочлен
- использовать геометрическую модель (площадь прямоугольника со сторонами, составленными из двух частей).

Учитель может предложить реализовать в классе оба варианта: различные группы реализуют разные проекты и приходят к одному и тому же выводу. В менее подготовленном классе можно воспользоваться только одним из вариантов проекта открытия.

Чтобы подготовить учащихся к открытию данного правила с ними следует повторить правило умножения одночлена на многочлен, установленное в предыдущем пункте. Для возникновения «идеи» использования геометрической модели нужно актуализировать формулу нахождения площади прямоугольника, для этого можно предложить учащимся решить задачу: «Запишите выражение для нахождения площади прямоугольника со сторонами с и а + b».

При изучении данного пункта у учащихся формируется умение перемножать многочлены. При этом они знакомятся с записью умножения многочлена на многочлен «в столбик» (**№ 219**).

При выполнении заданий **№№ 219 (а—г) — 220 (а—г, л, м)** учащиеся готовятся к изучению следующего параграфа «Формулы сокращенного умножения». При выполнении №№ 219 (а—г) следует попросить учащихся прочитать полученные в результате преобразований выражения, найти общий признак полученных после преобразования выражений (двучлены, члены которых являются одинаковыми степенями), найти лишнее среди них (сумма кубов). Перед выполнением № 220 (а – г) будет полезным обратить внимание учащихся на то, как записаны произведения, предложить их правильно прочитать («Квадрат суммы...», «Квадрат разности...»). После того как произведения будут вычислены, можно предложить проанализировать полученные в результате преобразований выражения и ответить на вопрос: «Что интересного вы заметили?» Если учащиеся затрудняются с выявлением закономерности, можно предложить следующее задание: выяснить, чем похожи полученные выражения. На данном этапе достаточно, чтобы учащиеся заметили, что, в каждом из этих случаев полученный многочлен состоит из трех одночленов, два из которых квадраты, а третий нет. Сильные учащиеся могут уже частично сформулировать правила возведения двучлена в квадрат. Аналогичную работу можно провести, выполняя задание № 220 (л, м).

Учащиеся применяют правило умножения многочленов для решения уравнений, упрощения выражений, доказательства тождеств (**№№ 222—227**), при работе с математическими моделями задач (**№ 221**).

При решении уравнений в **№ 226** учащиеся продолжают осваивать метод замены для рационализации преобразований выражения.

После изучения данного пункта учащиеся пишут контрольную работу по содержанию второго параграфа главы 4. Готовность к контрольной работе можно проверить, используя раздел «Задачи для самоконтроля к главе 4».

Урок. Умножение многочленов

Новое знание

Алгоритм умножение многочленов.

Актуализация

Повторить: алгоритм умножение одночлена на многочлен.

Задание на пробное действие

Найти произведение многочленов.

Фиксация затруднения

Мы не сможем найти произведение многочленов, или не сможем обосновать получившейся результат.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма произведения многочленов.

Цель деятельности

Построить алгоритм произведения многочленов.

Эталон

Способ нахождения произведения многочленов.

Урок. Умножение одночлена на многочлен, умножение многочленов (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение находить произведение одночлена на многочлен и произведение многочленов;
2) тренировать умение использовать правила умножения одночлена на многочлен при решении уравнений, нахождении значений многочленов, решении задач;
3) тренировать умение выполнять действия со степенями, решать неравенства, используя координатную прямую, решать задачи на проценты и движение.

Урок. Умножение одночлена на многочлен, умножение многочленов (РК). Подготовка к контрольной работе

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения записывать многочлены в стандартном виде, умножать одночлен на многочлен и многочлен на многочлен, решать уравнения;
2) тренировать умение решать задачи на части и находить целые решения неравенств.

Урок. Контрольная работа (ОРК)

Основные цели:

1) формировать способность учащихся к осуществлению процедуры контроля;
2) формировать способность учащихся к выявлению причин затруднений собственной деятельности;
3) контроль знаний, умений, навыков по темам: «Многочлены и действия с ними».

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 218

д) $(2m - 3n)(m - n) = 2m \cdot m + 2m \cdot (-n) - 3n \cdot m - 3n \cdot (-n)$
$= 2m^2 \underline{- 2mn} \underline{- 3mn} + 3n^2 = 2m^2 - 5mn + 3n^2$

е) $(5p - 2q)(p + q) = 5p \cdot p - 2q \cdot p + 5p \cdot q - 2q \cdot q = 5p^2 \underline{- 2pq} + \underline{5pq} - 2q^2 =$
$= 5p^2 + 3pq - 2q^2$;

ж) $(7a + 8b)(3a - 4b) = 7a \cdot 3a + 8b \cdot 3a + 7a \cdot (-4b) + 8b \cdot (-4b) =$
$= 21a^2 + \underline{24ab} \underline{- 28ab} - 32b^2 = 21a^2 - 4ab - 32b^2$

к) $(a^2 + b^2)(3a^2 - b^2) = a^2 \cdot 3a^2 - a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot 3a^2 - b^2 \cdot b^2 = 3a^4 \underline{- a^2b^2} + \underline{3a^2b^2} - b^4 =$
$= 3a^4 + 2a^2b^2 - b^4$

№ 219

в) $(a - b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3)$

Первый способ:

$= a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4 = a^4 - b^4$

Второй способ:

$$\begin{array}{r l}
\times & a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 \\
& \underline{\qquad\qquad a - b} \\
& a^4 + a^2b^2 + a^3b + ab^3 \\
& \underline{\qquad -a^3b - ab^3 - a^2b^2 - b^4} \\
& a^4 + a^2b^2 \qquad -a^2b^2 - b^4 = a^4 - b^4
\end{array}$$

ж) $(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$

Первый способ:

$= a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 \;\; 2a^3b - 4a^2b^2 \;\; 4ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + 2b^4 = a^4 + 2ab^3 - a^2b^2 + 2b^4$

Второй способ:

$$\begin{array}{r}
a^2 + 2ab + 2b^2 \\
\underline{a^2 - 2ab + b^2} \\
a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \qquad\qquad \\
2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \qquad \\
\underline{2a^2b^2 - 4ab^3 + 2b^4} \\
a^4 - a^2b^2 - 2ab^3 + 2b^4
\end{array}$$

з) $(x^2 - 2xy + 5y^2)(x^2 + 2xy - y^2)$.

Первый способ.

$x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2 + 2x^3y - 4x^2y^2 + 10xy^3 - x^2y^2 + 2xy^3 - 5y^4 = x^4 - 5y^4 + 12xy^3$

Второй способ.

$$\begin{array}{r l}
\times & x^2 - 2xy + 5y^2 \\
& \underline{x^2 + 2xy - y^2} \\
& x^4 + 2x^3y - x^2y^2 \\
& \quad -2x^3y - 4x^2y^2 + 2xy^3 \\
\times & \underline{\qquad\qquad 5x^2y^2 + 10xy^3 - 5y^4} \\
& x^4 \qquad\qquad + 12xy^3 - 5y^4
\end{array}$$

№ 220

д) $p^2(p - 3)(p + 2) = (p^3 - 3p^2)(p + 2) = p^4 \underline{- 3p^3} + \underline{2p^3} - 6p^2 = p^4 - p^3 - 6p^2$;

е) $4q^3(1 - q)(q + 6) = (4q^3 - 4q^4)(q + 6) = 4q^4 - 4q^5 + 24q^3 - 24q^4 = -4q^5 - 20q^4 + 24q^3$;

ж) $2cd(2c - d)(d + 2c) = (4c^2d - 2cd^2)(d + 2c) = 4c^2d^2 - 2cd^3 + 8c^3d - 4c^2d^2 = -2cd^3 + 8c^3d$

и) $(c - 2)(c - 3)(c - 4) = (c^2 - 2c - 3c + 6)(c - 4) = (c^2 - 5c + 6)(c - 4) =$
$= c^3 \underline{- 5c^2} + 6c \underline{- 4c^2} + 20c - 24 = c^3 - 9c^2 + 26c - 24$

№ 221 (а)

$at + (a + 7) \cdot (2t + 3 - t) = at + (a + 7)(t + 3) = at + at + 7t + 3a + 21 =$
$= 2at + 7t + 3a + 21$ (км)

№ 222 (в)

$(4p - 2)(3p - 1) - 3(3 - p) - 12p^2 = 21;$
$\cancel{12p^2} - 6p - 4p + 2 - 9 + 3p - \cancel{12p^2} = 21;$
$-7p - 7 = 21;$
$-7p = 21 + 7;$
$-7p = 28;$
$p = -4$
Ответ: $\{-4\}$.

№ 223 (а)

$(x - 3)(x + 4) - (x + 6)(x - 5) = \cancel{x^2} - \underline{3x} + \underline{4x} - 12 - \cancel{x^2} - \underline{6x} + \underline{5x} + 30 = 18$

№ 226

а) $(a^2 + 3a + 4)(a^2 + 3a + 5) - (a^2 + 3a + 6)(a^2 + 3a + 7) = -22;$
$w = a^2 + 3a + 4$
$w(w + 1) - (w + 2)(w + 3) = -22;$
$\cancel{w^2} + \underline{w} - \cancel{w^2} - \underline{2w} - \underline{3w} - 6 = -22;$
$-4w - 6 = -22;$
$-4w = -22 + 6;$
$-4w = -16;$
$w = 4$

$a^2 + 3a + 4 = 4;$
$a^2 + 3a = 0;$
$a(a + 3) = 0;$
$a = 0$ или $a = -3$

Ответ: $\{-3; 0\}$.

б) $(x^2 + 5x - 3)(x^2 + 5x + 3) - (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x - 4) = 7;$
$w = x^2 + 5x + 3$
$(w - 6)w - (w + 1)(w - 7) = 7;$
$\cancel{w^2} - 6w - \cancel{w^2} - w + 7w + 7 = 7;$
$0 \cdot w + 7 = 7;$
w – любое число

Ответ: Q.

№ 227

а) $P = 4x^2 + 3x + 2; \quad Q = 4x^2 - 3x + 2; \quad R = x^2 - 1$

$PQ = (4x^2 + 3x + 2)(4x^2 - 3x + 2) =$
$= 16x^4 + 12x^3 + \underline{8x^2} - 12x^3 - \underline{9x^2} - 6x + \underline{8x^2} + 6x + 4 =$
$= 16x^4 + 7x^2 + 4;$
$PQR = (16x^4 + 7x^2 + 4)(x^2 - 1) = 16x^6 + \underline{7x^4} + \underline{\underline{4x^2}} - \underline{16x^4} - \underline{\underline{7x^2}} - 4 =$
$=16x^2 - 9x^4 - 3x^2 - 4$

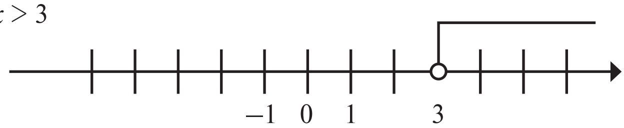
б) $P = a^4 + a^2 + 1; \quad Q = a^4 + 1; \quad R = a^4 - a^2$

$PQ = (a^4 + a^2 + 1)(a^4 + 1) = a^8 + a^6 + a^4 + a^4 + a^2 + 1 = a^8 + a^6 + 2a^4 + a^2 + 1$
$PQR = (a^8 + a^6 + 2a^4 + a^2 + 1)(a^4 - a^2) =$
$= a^{12} + a^{10} + \underline{2a^8} + \underline{\underline{a^6}} + a^4 - a^{10} - \underline{a^8} - 2\underline{\underline{a^6}} - a^4 - a^2 =$
$= a^{12} + a^8 - a^6 - a^2$

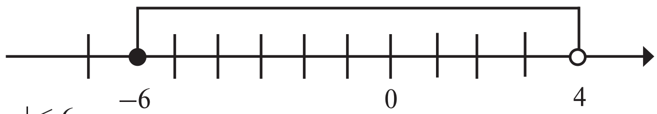
№ 229 (а, в, е).

Задание выполняется у доски с комментарием.

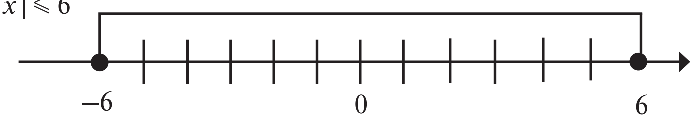
а) $x > 3$



в) $-6 \leqslant x < 4$

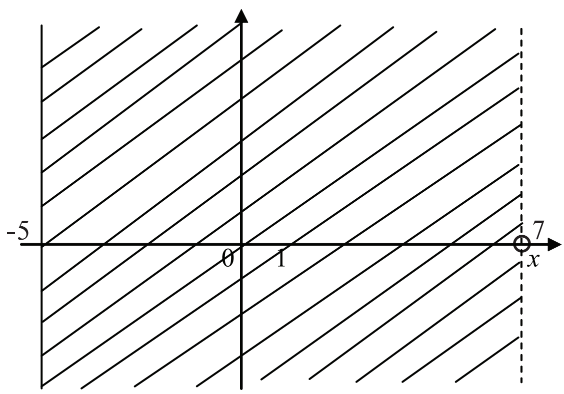


е) $|x| \leqslant 6$

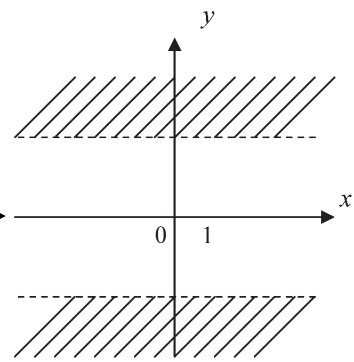


№ 230 (в, ж).

в) $-5 \leqslant x < 7$



ж) $|y| > 4$



№ 231 (одну задачу на выбор учителя)

а) Пусть x км расстояние из Санкт-Петербурга до Москвы, тогда $\frac{x}{80}$ ч время, которое был в пути первый автомобилист, а второй был в пути $\frac{x}{90}$ ч. По условию известно, что второй автомобилист был на 1 час меньше:

$\frac{x}{80} - \frac{x}{90} = 1;$

$9x - 8x = 720;$

$x = 720$

Ответ: расстояние от Санкт-Петербурга до Москвы равно 720 км.

№ 234

а) $(a + b + c)(a + b - c) = a^2 + \underline{ab} + ac + \underline{ab} + b^2 + bc - ac - bc - c^2 =$
$= a^2 + b^2 - c^2 + 2ab;$

б) $(x + y - c)(x - y + c) = x^2 + \cancel{xy} - \cancel{cx} - xy - y^2 + \underline{cy} + \cancel{cx} + \underline{cy} - c^2 =$
$= x^2 - y^2 - c^2 + 2cy;$

в) $(p + 2q - 3r)(p - 2q - 3r) = p^2 - 2\cancel{pq} - \underline{3pr} + 2\cancel{pq} - 4q^2 - 6\cancel{qr} - \underline{3pr} + 6\cancel{qr} + 9r^2 =$
$= p^2 - 4q^2 + 9r^2 - 6pr;$

г) $(m + 4n + 2k)(m - 4n - 2k) =$
$= m^2 - 4\cancel{mn} - 2k\cancel{m} + 4\cancel{mn} - 16n^2 - \underline{8kn} + 2k\cancel{m} - \underline{8kn} - 4k^2 =$
$= m^2 - 16n^2 - 4k^2 - 16kn$

№ 235

$ab + (a + 5)(b - 50) = \underline{ab} + \underline{ab} + 5b - 50a - 250 = 2ab + 5b - 50a - 250$ (р.)

№ 236

а) $(7x + 1)(1 + x) - 8 - 3x^2 = (2x + 5)(2x - 5) + 4x - 3;$

$7x + 1 + 7x^2 - 8 - 3x^2 = 4x^2 + 10x - 10x - 25 + 4x - 3;$

$7x + \underline{7x^2} - \underline{3x^2} - \underline{4x^2} - \cancel{10x} + \cancel{10x} - 4x = -25 - 3 - 1 + 8;$

$3x = -21;$

$x = -7$

Ответ: $\{-7\}$.

б) $3(y + 1)(y - 2) + 6 = 3y(1 + y) + 3(2 - y);$

$3(y^2 + y - 2y - 2) + 6 = 3y + 3y^2 + 6 - 3y;$

$3y^2 - 3y - 6 + 6 = 3y^2 + 6;$

$3y^2 - 3y - 3y^2 = 6;$

$-3y = 6;$

$y = -2$

Ответ: $\{-2\}$.

№ 237

а) $(x - 5)(x + 7) - (x - 3)(x + 5) = x^2 - \underline{5x} + \underline{7x} - 35 - x^2 + \underline{3x} - \underline{5x} + 15 = -20$

б) $(2y + 1)(2y - 5) + (3 + 2y)(7 - 2y) = 4y^2 + \underline{2y} - \underline{10y} - 5 + 21 + \underline{14y} - \underline{6y} - 4y^2 = 16$

№ 244*

Количество черных и белых шаров составит $70 - 20 - 20 - 20 = 10$. Ясно, что 10 шаров одного цвета могут быть только красными, синими или желтыми.

Рассмотрим самый неблагоприятный случай: сначала вынули все черные и белые шары и по 9 шаров остальных цветов. Тогда вынув следующий шар (он будет синий, желтый или красный), мы обязательно в сумме получим 10 шаров одного цвета.

Таким образом, вынув из мешка $10 + 9 \cdot 3 + 1 = 38$ шаров, мы гарантированно получим не менее 10 шаров одного цвета.

№ 245*

При описанных условиях срывание любого типа не меняет четность бананов. Поэтому, если изначальное число бананов было четным, то на чудо-дереве остался один ананас, а если число бананов было нечетным, то остался один банан.

§ 3. Формулы сокращенного умножения

При изучении параграфа формируется:

• умение представлять квадрат суммы и разности в виде многочлена; разность квадратов, сумму и разность кубов в виде произведения и наоборот; преобразовывать произведения многочленов определенного вида в разность квадратов, сумму и разность кубов с помощью соответствующих формул сокращенного умножения;

• умение представлять куб суммы и разности в виде многочлена стандартного вида и наоборот; преобразовывать многочлен определенного вида в куб суммы или разности с помощью соответствующей формулы сокращенного умножения;

• умение применять формулы сокращенного умножения для алгебраических преобразований, связанных с умножением, и для рационализации вычислений;

• умение раскладывать многочлены на множители следующими способами: вынесением за скобки общего множителя, способом группировки, с помощью формул сокращенного умножения;

• умение применять при разложении многочленов на множители различные вспомогательные приемы, такие как, перестановка слагаемых; представление члена многочлена в виде суммы или разности подобных ему членов, прибавление и вычитание одного и того же слагаемого, выделение полного квадрата;

• умение применять разложение на множители для алгебраических преобразований, решений уравнений и рационализации вычислений.

П. 4. 3. 1. КВАДРАТ СУММЫ И РАЗНОСТИ (2 ЧАСА)

Основные содержательные цели:

1) формировать способность строить формулы на примере построения формул квадрата суммы и квадрата разности;

2) тренировать умение представлять квадрат суммы (разности) в виде многочлена стандартного вида и наоборот;

3) тренировать умение использовать формулы квадрата суммы и квадрата разности для решения уравнений, нахождения значения буквенных выражений, сокращения дробей;

4) повторить: запись высказываний на математическом языке; действия со степенями, решение текстовых задач на работу.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с первыми из формул сокращенного умножения – формулой квадрата суммы и формулой квадрата разности.

Для открытия данных формул учащимся предлагается выявить закономерности, которые существуют при возведении в квадрат двучлена. После этого учащиеся формулируют гипотезу (**№ 248**). Сформулированную гипотезу они могут проверить в группах.

Чтобы подготовить учащихся к открытию следует актуализировать с ними правило умножения многочленов и понятие степени. Средством открытия может послужить и геометрическая модель квадрата, предложенная в учебнике.

Важно показать учащимся применение формул для рационализации вычислений (**№№ 253—254**). При 4-часовом планировании можно познакомить учащихся с правилом возведения в квадрат натурального числа, оканчивающегося на 5.

В более подготовленных классах рекомендуется разобрать формулу сокращенного умножения для возведения в квадрат трехчлена (**№ 272**), по аналогии учащимся можно предложить вывести формулу квадрата четырехчлена (**№ 273**).

Кроме возведения в квадрат двучлена, с учащимися разбирается, как работает открытая ими формула «в обратную сторону» - они учатся сворачивать трехчлен в квадрат двучлена (**№ 256**), учатся применять новые формулы для сокращения алгебраических дробей (**№ 264**).

Выполнение **№ 257** готовит учащихся к выделению полного квадрата. Перед выполнением **№ 266** следует вспомнить, как учащиеся выполняли **№ 257 (а)**.

После того как учащиеся научатся применять новые формулы в простейших случаях, они применяют их наряду с уже известными способами преобразований (**№ 258, 260**).

Для формирования умения применять формулы сокращенного умножения в учебнике предлагается целый перечень заданий, которые предполагают доказательство тождеств, нахождение значений выражений, составление и решение уравнений. Учитель выбирает из них те задания, которые считает целесообразным выполнить с учащимися.

Урок. Квадрат суммы и разности

Новое знание

Формулы квадрата суммы и разности.

Актуализация

Повторить: понятие степени, правило умножения многочлена на многочлен.

Задание на пробное действие

Возведите двучлены в квадрат, не используя правила умножения многочленов:

а) $(a + b)^2$; б) $(a - b)^2$.

Фиксация затруднения

Мы не смогли возвести двучлены в квадрат, не используя правила умножения многочленов.

Фиксация причины затруднения

Нет нового правила возведения в квадрат суммы (разности) выражений.

Цель деятельности

Построить новое правило возведения в квадрат суммы и разности двух выражений.

Эталон

Формула квадрата суммы

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения и второго выражения плюс квадрат второго выражения.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Формула квадрата разности

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого выражения и второго выражения плюс квадрат второго выражения.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Урок. Квадрат суммы и разности (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение находить квадрат суммы и разности выражений, записывать трехчлен в виде квадрата суммы и разности выражений;

2) тренировать умение использовать формулы для нахождения квадратов чисел, решения уравнений, нахождения значений выражений;

3) тренировать умение сокращать дроби, строить математические модели и работать с ними.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 246

Записать выражения:

а) квадрат суммы a и b: $(a + b)^2$

б) сумма квадратов a и b: $a^2 + b^2$

в) квадрат разности c и d: $(c - d)^2$

г) разность квадратов c и d: $c^2 - d^2$

д) квадрат суммы x, y и z: $(x + y + z)^2$

е) сумма квадратов x, y и z: $x^2 + y^2 + z^2$

№ 250

а) $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$;

б) $(-m - n)^2 = (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

в) $(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$

г) $(-x + y)^2 = (y - x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$

д) $(-b + 5)^2 = (5 - b)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot b + b^2 = 25 - 10b + b^2$;
е) $(3 + k)^2 = 9 + 6k + k^2$
ж) $(-a - 8)^2 = (a + 8)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 8 + 8^2 = a^2 + 16a + 64$
з) $(r - 4)^2 = r^2 - 8r + 16$
и) $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 10x + 25 = 4x^2 - 20x + 25$;
к) $(3 - 7z)^2 = 9 - 42z = 49z^2$
л) $(2 + 3z)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3z + (3z)^2 = 4 + 12z + 9z^2$

м) $(-4t - 1)^2 = (4t + 1)^2 = (4t)^2 + 2 \cdot 4t \cdot 1 + 1^2 = 16t^2 + 8t + 1$

н) $(-3b - \frac{1}{3})^2 = (3b + \frac{1}{3})^2 = (3b)^2 + 2 \cdot bc + \frac{1}{9}c^{\,2} = 9b^2 + 2bc + \frac{1}{9}c^2$

о) $(\frac{1}{2}x - 5y)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 5xy + 25y^2$

п) $(-2a + \frac{1}{2a})^2 = (\frac{1}{2a} - 2a)^2 = (\frac{1}{2a})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot 2a + (2a)^2 = \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a^2$

р) $(3c + \frac{1}{3c})^2 = (3c)^2 + 2 \cdot (3c) \cdot (\frac{1}{3c}) + (\frac{1}{3c})^2 = 9c^2 + 2 + \frac{1}{9c^2}$

№ 252
г) $(-q^5 - 1)^2 = (q^5 + 1)^2 = (q^5)^2 + 2 \cdot q^5 \cdot 1 + 1^2 = q^{10} + 2q^5 + 1$;
д) $(2a^4 + c)^2 = (2a^4)^2 + 2 \cdot (2a^4) \cdot c + c^2 = 4a^8 + 4a^4c + c^2$;
е) $(b^3 - 4d)^2 = (b^3)^2 - 2 \cdot b^3 \cdot (4d) + (4d)^2 = b^6 - 8b^3d + 16d^2$;
ж) $(-5m - n^5)^2 = (5m + n)^2 = (5m)^2 + 2 \cdot (5m\ ) \cdot n^5 + (n^5)^2 = 25m^2 + 10mn^5 + n^{10}$;
з) $(-7k + r^2)^2 = (r^2 - 7k)^2 = (r^2)^2 - 2 \cdot 7k \cdot r^2 + (7k)^2 = r^4 - 14kr^2 + 49k^2$
к) $(-3a^2 - 5b^4)^2 = (3a^2 + 5b^4)^2 = (3a^2)^2 + 2 \cdot (3a^2) \cdot (5b^4) + (5b^4)^2 = 9a^4 + 30a^2b^4 + 25b^8$;
р) $(0{,}2mn^4 + 1{,}5mn^2)^2 = (0{,}2mn^4)^2 + 2 \cdot (1{,}5mn^2) \cdot (0{,}2mn^4) + (1{,}5mn^2)^2 =$
$= 0{,}04m^2n^8 + 0{,}6m^2n^6 + 2{,}25m^2n^4$.

№ 253 (а, г, е)
а) $89^2 = (90 - 1)^2 = 90^2 - 2 \cdot 90 \cdot 1 + 1 = 8100 - 180 + 1 = 7921$;
г) $501^2 = (500 + 1)^2 = 500^2 + 2 \cdot 500 \cdot 1 + 1 = 250\,000 + 1000 + 1 = 251\,001$;
е) $11{,}1^2 = (11 + 0{,}1)^2 = 11^2 + 2 \cdot 11 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 = 121 + 2{,}2 + 0{,}01 = 123{,}21$.

№ 256
в) $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$;
г) $y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y - 3)^2$;
д) $25p^2 + 20pq + 4q^2 = (5p)^2 + 2 \cdot 5p \cdot 2q + (2q)^2 = (5p - 2q)^2$
е) $9s^2 - 12st + 4t^2 = (3s)^2 - 2 \cdot 3s \cdot 4t + (2t)^2 = (3s - 2t)^2$;
и) $-8ab + 4a^2 + 4b^2 = -2 \cdot 2a \cdot 2b + (2a)^2 + (2b)^2 = (2a - 2b)^2$;
л) $16x^4 - 8x^3 + x^2 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot x + x^2 = (4x^2 - x)^2$
м) $4a^2b^2 + 12a^3b + 9a^4 = (2ab)^2 + 2 \cdot 2ab \cdot 3a^2 + (3a^2)^2 = (2ab + 3a^2)^2$

№ 260
д) $y(7 - 2y) - (3 - y)^2 = 7y - 2y^2 - (9 - 6y + y^2) = 7y - 2y^2 - 9 + 6y - y^2 =$
$= -3y^2 + 13y - 9$;
е) $3(z + 2)^2 - z(z - 3) = 3(z^2 + 4z + 4) - z^2 + 3z = 3z^2 + 12z + 12 - z^2 + 3z =$
$= 2z^2 + 15z + 12$;
з) $k(5k + 4)^2 - 3k^2(k + 7) = k(25k^2 + 40k + 16) - 3k^3 - 21k^2 =$
$= 25k^3 + 40k^2 + 16k - 3k^3 - 21k^2 = 22k^3 + 19k^2 + 16k$;
и) $(5 - 7a)^2 - (5a - 3)(4 - 3a) = 25 - 70a + 49a^2 - (20a - 12 - 15a^2 + 9a) =$
$= 25 - 70a + 49a^2 - 20a + 12 + 15a^2 - 9a = 64a^2 - 99a + 37$;
к) $2(3 - 2x)(4x - 5) - 3(x - 8)^2 = 2(12x - 8x^2 - 15 + 10x) - 3(x^2 - 16x + 64) =$
$= 24x - 16x^2 - 30 + 20x - 3x^2 + 48x - 192 = -19x^2 + 92x - 222$;

м) $2m(3m + 4n)^2 - 5n(3n + 4m)^2 =$
$= 2m(9m^2 + 24mn + 16n^2) - 5n(9n^2 + 24mn + 16m^2) =$
$=18m^3 + 48nm^2 + 32n^2m - 45n^3 - 120n^2m - 80nm^2 = 18m^3 - 32nm^2 - 88n^2m - 45n^3$

№ 262

а) $a^2 - (a - 2)^2 = 16$
$a^2 - a^2 + 4a - 4 = 16;$
$4a - 4 = 16;$
$4a = 16 + 4;$
$4a = 20;$
$a = 5$
Ответ: {5}.

б) $(y +4)^2 - (y + 8)(y - 8) = 96;$
$y^2 + 8y + 16 - (y^2 + 8y - 8y - 64) = 96;$
$y^2 + 8y + 16 - y^2 - 8y + 8y + 64 = 96;$
$8y + 80 = 96;$
$8y = 16;$
$y = 2$
Ответ: {2}.

в) $(3m + 5)(3m - 5) - (3m - 1)2 = 10;$
$9m^2 + 15m - 15m - 25 - (9m^2 - 6m + 1) = 10;$
$9m^2 + 15m - 15m - 25 - 9m^2 + 6m - 1 = 10;$
$6m - 26 = 10;$
$6m = 36;$
$m = 6$
Ответ: {6}.

г) $3(z + 2)^2 + (2z - 1)^2 - 7(z + 3)(z - 3) = 28;$
$3z^2 + 12z + 12 + 4z^2 - 4z + 1 - 7(z^2 - 9) = 28;$
$7z^2 + 8z + 13 - 7z^2 + 63 = 28;$
$8z + 76 = 28;$
$8z = 28 - 76;$
$8z = -48;$
$z = -6$
Ответ: {–6}.

№ 263

а) $-(3a + 2)(3a + 6) + (3a + 4)^2 = -(9a^2 + 6a + 18a + 12) + (9a^2 + 24a + 16) =$
$= -9a^2 - 6a - 18a - 12 + 9a^2 + 24a + 16 = 4;$

б) $(b + 4)(25b - 10) - (9 + 5b)^2 = 25b^2 + 100b - 10b - 40 - (81 + 90b + 25b^2) =$
$= 25b^2 + 100b - 10b - 40 - 81 - 90b - 25b^2 = -121$

№ 264

а) $\dfrac{m+n}{m^2 + 2mn + n^2} = \dfrac{m+n}{(m+n)^2} = \dfrac{1}{m+n}$

б) $\dfrac{7c + 7d}{c^2 + 2cd + d^2} = \dfrac{7(c-d)}{(c-d)^2} = \dfrac{7}{c-d}$

в) $\dfrac{4x^2 + 36xy + 81y^2}{2x + 9y} = \dfrac{(2x+9y)^2}{2x - 9y} = 2x + 9y$

г) $\dfrac{15pq - 9q^2}{-30pq + 25p^2 + 9q^2} = \dfrac{3q(5p - 3q)}{(5q - 3q)^2} = \dfrac{3q}{5p - 3q}$

№ 267 (а, в, д)

а) $p^2 + 10p = (p^2 + 2 \cdot p \cdot 5 + 5^2) - 5^2 = (p + 5)^2 - 5^2$;

в) $25n^2 - 9m^2 + 40n + 16 = (25n^2 + 40n + 16) - 9m^2 =$
$= ((5n)^2 + 2 \cdot 5n \cdot 4 + 4^2) - (3m)^2 = (5n + 4)^2 - (3m)^2$;

д) $4z^2 - 9y^2 - 12z - 18y = ((2z)^2 - 2 \cdot 2z \cdot 3 + 3^2) - 9 - ((3y)^2 + 2 \cdot 3y \cdot 3 + 3^2) + 9 =$
$= (2z - 3)^2 - (3y + 3)^2$.

№ 276

а) Одно число – x, $x \in Z$, другое – $x + 2$, $(x + 2) \in Z$

$x(x + 2)$ – произведение чисел;

$x(x + 2) + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ – точный квадрат

б) x, $x + 1$ – два последовательных числа

$x(x + 1) + (x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ – квадрат большего числа.

№ 281

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + (-2ac) + (-2bc) =$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b - c)^2 - 2ab + 2ac + 2bc = 5^2 - 2(ab - ac - bc) = 25 - 2 \cdot 3 = 19$

№ 286

а) $-a^7b^7 = (-ab)^7$;

б) $49m^2n^2 = (7mn)^2$;

в) $0{,}25x^2y^2z^2 = (0{,}5xyz)^2$;

г) $-\frac{1}{125}p^3q^3r^3 = \left(-\frac{1}{5}pqr\right)^3$;

д) $81p^8q^{16} = (3p^2q^4)^4$;

е) $16x^8y^4z^{12} = (2x^2yz^3)^4$;

ж) $a^6b^4a^2b^4 = (ab)^8$;

з) $32m^4d^3d^2m = (2mn)^5$;

и) $-27m^6q^8r^9q^4 = (-3m^2q^4r^3)^3$;

к) $-m^{12}n^8k^{18}n^7 = (-m^4n^5k^6)^3$.

№ 287

а) $\frac{7^5 \cdot x^3 \cdot (y^3)^4 \cdot z^6}{(49)^2 \cdot x^2 \cdot (y^4)^2 \cdot (z^2)^3} = \frac{7^5 \cdot x^3 \cdot y^{12} \cdot z^6}{7^4 \cdot x^2 \cdot y^8 \cdot z^6} = 7xy^4$

б) $\frac{4^5 \cdot (a^4)^5 \cdot b^8 \cdot c^{15}}{2^4 \cdot a^{12} \cdot a^8 \cdot (b^2)^3 \cdot (c^7)^2} = \frac{2^6 \cdot a^{20} \cdot b^8 \cdot c^{15}}{2^4 \cdot a^{20} \cdot b^8 \cdot c^{14}} = 4c$

в) $\frac{r^5 - r^{10} + r^{15}}{r^7 - r^{12} + r^{17}} = \frac{r^5(1 - r^5 + r^{10})}{r^7(1 - r^5 + r^{10})} = \frac{1}{r^2}$

№ 288 (а)

а) x – производительность стажера ($x > 0$), y — производительность мастера ($y > 0$)

Производительность 5 стажеров – $5x$, производительность двух мастеров – $2y$.

За 8 ч выполнена работа: $(5x + 2y) \cdot 8$.

Производительность семи стажеров — $7x$, производительность пяти мастеров – $5y$.

За 4 ч выполнена работа: $(7x + 5y) \cdot 4$.

$8(5x + 2y) = 4(7x + 5y)$;

$40x + 16y = 28x + 20y$;

$40x - 28x = 20y - 16y$;

$12x = 4y$;

$3x = y$

Ответ: производительность мастера в 3 раза больше производительности стажера.

№ 292

а) $(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab = b^2$;

б) $(7+m)^2 = 49 + 14m + m^2$;

в) $(5-4x)^2 = 25 - 40x + 16x^2$;

г) $\left(\frac{1}{4}y - 2z\right)^2 = \frac{1}{16}y^2 - yz + 4z^2$

№ 293

а) $(-x^3+2)^2 = (2-x^3)^2 = 4 - 4x^3 + x^6$;

б) $(y^4+3z)^2 = y^8 + 6y^4z + 9z^2$;

в) $(-4m^4 - 7n^2)^2 = (4m^4 + 7n^2)^2 = 16m^8 + 56m^4n^2 + 49n^4$;

г) $(0{,}3p^3q - 2{,}2pq^3)^2 = 0{,}09p^6q^2 - 1{,}32p^4q^4 + 4{,}84p^2q^6$

№ 294

а) $69^2 = (70-1)^2 = 70^2 - 2\cdot 70 + 1 = 4900 - 140 + 1 = 4761$;

б) $401^2 = (400+1)^2 = 400^2 + 800 + 1 = 160\,000 + 800 + 1 = 160\,801$;

в) $14{,}9^2 = (15-0{,}1)^2 = 15^2 - 2\cdot 15\cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 = 225 - 3 + 0{,}01 = 222{,}01$;

г) $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 3 + 3^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$;

д) $297^2 = (300-3)^2 = 300^2 - 2\cdot 300\cdot 3 + 3^2 = 90\,000 - 1800 + 9 = 88\,209$.

№ 296

а) $9x^2 - 18x + 9 = (3x-3)^2$;

б) $16y^2 + 32y + 16 = (4y+4)^2$;

в) $4m^2 - 24mn + 36n^2 = (2m-6n)^2$;

г) $49a^2 - 42ab + 9b^2 = (7a-3b)^2$;

д) $-10mn + 25n^2 + m^2 = (m-5n)^2$;

е) $81x^6 - 36x^4 + 4x^2 = (9x^3-2x)^2$

№ 301

а) $(x+1)^2 - (x-3)^2 = 8$;

$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 6x - 9 = 8$;

$8x - 8 = 8$;

$8x = 16$;

$x = 2$

Ответ: {2}.

б) $3(b-1)^2 - 3b(b-5) = 30$;

$3(b^2 - 2b + 1) - 3b^2 + 15b = 30$;

$3b^2 - 6b + 3 - 3b^2 + 15b = 30$;

$9b + 3 = 30$;

$9b = 27$;

$b = 3$

Ответ: {3}.

в) $2(2n+1)^2 - 8(n+1)(n-1) = 42$;

$2(4n^2 + 4n + 1) - 8(n^2 + n - n - 1) = 42$;

$8n^2 + 8n + 2 - 8n^2 + 8 = 42$;

$8n + 10 = 42$;

$8n = 32$;

$n = 4$

Ответ: {4}.

г) $5(t+3)^2 - 5(t-4)(t+8) + 12 = 87$;

$5(t^2 + 6t + 9) - 5(t^2 - 4t + 8t - 32) + 12 = 87$;

$5t^2 + 30t + 45 - 5t^2 + 20t - 40t + 160 + 12 = 87$;

$10t + 217 = 87$;

$10t = -130$

$t = -13$

Ответ: {–13}.

№ 305

а) $(3x+2)^2 - (3x-5)^2 = 21$;

$9x^2 + 12x + 4 - 9x^2 + 30x - 25 = 21$;

$42x - 21 = 21$;

$42x = 42$;

$x = 1$

Ответ: {1}.

б) $(2x-6)^2 \cdot 4 = (4x-8)^2$;

$4(4x^2 - 24x + 36) = 16x^2 - 64x + 64$;

$16x^2 - 96x + 144 = 16x^2 - 64x + 64$;

$-32x = -80$

$x = 2{,}5$

Ответ: {2,5}.

№ 311

x – производительность пекаря ($x > 0$), y – производительность ученика ($y > 0$)

Производительность 3 пекарей – $3x$, производительность 5 учеников – $5y$.

За 6 ч выполнена работа: $(3x + 5y)\cdot 6$.

Производительность 7 пекарей – $7x$, производительность 4 учеников – $4y$.

За 3 ч выполнена работа: $(7x + 4y) \cdot 3$.

По условию работа выполнена одинаковая:

$6(3x + 5y) = 3(7x + 4y)$;

$18x + 30y = 21x + 12y$;

$21x - 18x = 30y - 12y$;

$3x = 18$;

$x = 6y$

Ответ: производительность пекаря в 6 раза больше производительности ученика.

№ 314*

Докажем методом от противного.

1. Предположим, что утверждение «Хотя бы три ученика сделали одинаковое количество ошибок» — ложное, тогда одинаковое количество ошибок сделали не более 2 учеников.

2. Минимальное количество ошибок, которое мог сделать ученик – 0 , максимальное – 12. Тогда возможны 13 вариантов – 0, 1, 2, ...12 ошибок.

Рассмотрим крайний случай, когда каждые два ученика допустили одинаковое количество ошибок – по 0, по 1, по 2, по 3 и т.д.

Тогда количество учащихся $13 \cdot 2 = 26$, а по условию учащихся 29 (Петю мы не считаем).

3. Значит, наше предположение неверно. Тогда, хотя бы три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

Когда трое учеников сделали по одинаковому количеству ошибок, а остальные одинаковые ошибки допустили по двое учащихся, имеем: $13 \cdot 2 + 3 = 29$.

№ 315*

Для рационализации вычислений необходимо представить 11^2 как $(10 + 1)^2$, 12^2 как $(10 + 2)^2$ и т.д., после чего применить формулу квадрата суммы.

Ответ: 2.

П. 4.3.2. РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ

Основные содержательные цели:

1) формировать способность строить формулы на примере построения формулы разности квадратов;

2) тренировать умение использовать формулу сокращенного умножения (разность квадратов) при выполнении разных заданий;

3) повторить: упрощение и нахождение буквенных выражений, решение уравнений, построение математических моделей и работу с ними.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с двумя формулами сокращенного умножения – формулой произведения суммы и разности двух выражений и формулой разности квадратов, которые, по сути, являются одинаковыми равенствами (в которых поменяли местами правую и левую части). Традиционно эта формула рассматривалась как одна – формула разности квадратов, что приводило к трудностям, возникающим у учащихся при умножении разности двух выражений на их сумму. Поэтому, чаще всего учителю приходилось регулярно использовать на уроках такой прием, как чтение данной формулы «в обратную сторону». Чтобы раз и навсегда показать учащимся, что любая из формул сокращенного умножения «работает» как справа налево, так и слева направо можно использовать материал данного пункта и специально обратить внимание учащихся на это. Можно пояснить учащимся, что для других «обратных» формул не используют отдельного названия, т.к. звучат их названия менее благозвучно, чем у формулы произведения разности и суммы двух выражений.

В качестве мотивации к выводу новых формул можно предложить учащимся вычислить разность $11\,112^2 - 11\,111^2$ за 30 секунд. После того как они не справятся с этим заданием за указанное время, пояснить, что с помощью формулы сокращенного умножения, открытой сегодня, им это легко удастся.

Для открытия данных формул учащимся предлагается записать произведение суммы и разности a и b как многочлен стандартного вида. После этого учащимся предлагается обобщить полученное равенство для всех произведений подобного вида и сформулировать правило умножения суммы двух выражений на их разность. Опираясь на полученную формулу, учащиеся формулируют, как можно найти разность квадратов двух выражений (**№ 318**). Эту работу они могут выполнять самостоятельно в группах или в парах.

Чтобы подготовить учащихся к открытию следует актуализировать с ними правило умножения многочленов и понятие степени с показателем 2, а также понятия «сумма» и «разность». Для этого можно использовать задания **№№ 316–317**.

Чтобы показать геометрический смысл данной формулы можно использовать предметные геометрические модели прямоугольника и квадрата, предложенные в учебнике. Необходимо вырезать, прикладывать и перемещать предметные модели либо использовать возможности анимации современной техники. Это поможет учащимся с образным мышлением запомнить данные формулы.

Важно показать учащимся применение формул для рационализации вычислений (**№№ 322, 337**).

При 4-часовом планировании рекомендуется отвести больше времени на выполнение заданий более высокого уровня сложности (**№№ 340–347**).

Учащиеся применяют новые формулы для сокращения алгебраических дробей (**№ 333**), решения уравнений (**№ 327, № 336**), доказательства утверждений и тождеств (**№№ 329, 334, 335**). Для формирования умения применять формулы сокращенного умножения в учебнике есть и другие задания, которые предполагают решение задач с помощью уравнения (**№ 339**), сравнение значений выражений (**№№ 342–343**) и пр. Учитель выбирает из этих заданий те, которые считает целесообразным выполнить с учащимися.

При выполнении заданий на нахождение наибольшего и наименьшего значения выражений (**№№ 345–346**) следует вспомнить с учащимися необходимые свойства. Рекомендуется после применения формулы произведения суммы выражений на их разность актуализировать, как изменяется разность при изменении ее компонентов. Свойство разности «Если значение уменьшаемого увеличить, то значение разности увеличится» и подобные ему свойства известны учащимся с начальной школы. Кроме того, рекомендуется спросить, какое наименьшее значение может принимать квадрат любого выражения (нуля).

Урок. Разность квадратов

Новое знание

Формулы разности квадратов.

Актуализация

Повторить: правило умножения многочлена на многочлен.

Задание на пробное действие

Запишите произведение $(a - b)(a + b)$ как многочлен стандартного вида, не используя правило умножения многочленов.

Фиксация затруднения

Мы не можем записать произведение разности и суммы выражений как многочлен стандартного вида, не используя правило умножения многочленов.

Фиксация причины затруднения

Нет нового правила нахождения произведения разности и суммы одинаковых выражений.

Цель деятельности

Построить новое правило нахождения произведения разности и суммы двух одинаковых выражений.

Эталон

Формула произведения разности и суммы

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Формула разности квадратов

Разность квадратов двух выражений равна произведению их разности и их суммы.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Алгоритм нахождения произведения разности и суммы

1. Найти квадрат первого выражения в разности.
2. Найти квадрат второго выражения в разности.
3. Записать разность квадратов.

Алгоритм записи разности квадратов

1. Первое выражение представить в виде квадрата выражения.
2. Второе выражение представить в виде квадрата выражения.
3. Записать произведение разности и суммы оснований.

Урок. Разность квадратов (РК)

Основные цели:

1) тренировать умение применять формулу разности квадратов и находить произведение суммы выражений и их разности при выполнении заданий разного типа;

2) тренировать умение сравнивать дроби, строить математические модели и работать с ними.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 316

а) $4m^4n^6 = (2m^2n^3)^2$

б) $25x^4y^8z^{12} = (5x^2y^4z^6)^2$

в) $16a^3ba^5b = (4a^4b)^2$

г) $\dfrac{19^2}{z^{10}} = \left(\dfrac{19}{z^5}\right)^2$

д) $\dfrac{100p^{12}q^{16}}{r^4} = \left(\dfrac{10p^6q^8}{r^2}\right)^2$

е) $\dfrac{x^3y^5x^9y^9}{64z^6} = \dfrac{x^{12}y^{14}}{64z^6} = \left(\dfrac{x^6y^7}{8z^3}\right)^2$

№ 317

$(A + B)^2$ – квадрат суммы двух выражений:

а) $A = 5x$, $B = 3$; е) $A = 7t$, $B = 4$; з) $A = 36x^2$, $B = y^4$; л) $A = -2z$, $B = -8$.

$(A - B)^2$ – квадрат разности двух выражений:

г) $A = 81p^2$, $B = 4q^2$; м) $A = 9a$, $B = 7b$.

$A^2 + B^2$ – сумма квадратов двух выражений:

б) $A = 8c^2$, $B = 5d^3$; д) $A = m^{12}$, $B = 5n^{16}$; и) $A = r^8$, $B = 3t^2$.

$A^2 - B^2$ – разность квадратов двух выражений:
в) $A = 2y$, $B = 4z^2$; ж) $A = 7a^8$, $B = a^4$; к) $A = t^4$, $B = 6s^3$

№ 319.
а) $(-a - b)(a - b) = b^2 - a^2$
$(-a - b)(a - b) = (-b + (-a))(-b - (-a)) = (-b)^2 - (-a)^2 = b^2 - a^2$;
б) $(a + b)(b - a) = b^2 - a^2$
$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = (b - a)(a + b)$;
в) $(-a - b)(b - a) = a^2 - b^2$
$(-a - b)(b - a) = ((-a) + (-b))((-a) - (-b)) = (-a)^2 - (-b)^2 = a^2 - b^2$

№ 320
в) $(5 - z)(5 + z) = 5^2 - z^2 = 25 - z^2$
д) $(2a + b)(2a - b) = (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2$;
е) $(x - 3y)(x + 3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$
ж) $(7z + 3t)(7z - 3t) = (7z)^2 - (3t)^2 = 49z^2 - 9t^2$
и) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2$
л) $(0{,}2a + 0{,}3)(0{,}2a - 0{,}3) = (0{,}2a)^2 - (0{,}3)^2 = 0{,}04a^2 - 0{,}09$.

№ 321
а) $(a^2 + 9)(a^2 - 9) = (a^2)^2 - 9^2 = a^4 - 81$
ж) $(-4m^2 - 6n)(6n - 4m^2) = -(4m^2 + 6n)(6n - 4m^2) =$
$= -((6n)^2 - (4m^2)^2) = -(36n^2 - 16m^4) = 16m^4 - 36n^2$;
з) $(7p^2 + 3y^3)(3y^3 - 7p^2) = (3y^3)^2 - (7p^2)^2 = 9y^6 - 49p^4$;
и) $(0{,}2t^3 - 0{,}5s^4)(0{,}5s^4 + 0{,}2t^3) = (0{,}2t^3)^2 - (0{,}5s^4)^2 = 0{,}04t^6 - 0{,}25s^8$;
к) $(1{,}1mn + 2{,}1k^2)(1{,}1mn - 2{,}1k^2) = (1{,}1mn)^2 - (2{,}1k^2)^2 = 1{,}21m^2n^2 - 4{,}41k^4$.

№ 322
а) $31 \cdot 29 = (30 + 1)(30 - 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$;
б) $199 \cdot 201 = (200 - 1)(200 + 1) = 200^2 - 1^2 = 40\,000 - 1 = 39\,999$;
в) $72 \cdot 68 = (70 + 2)(70 - 2) = 70^2 - 2^2 = 4900 - 4 = 4896$
д) $5{,}01 \cdot 4{,}99 = (5 + 0{,}01)(5 - 0{,}01) = 5^2 - 0{,}01^2 = 25 - 0{,}0001 = 24{,}9999$;
е) $15{,}2 \cdot 14{,}8 = (15 + 0{,}2)(15 - 0{,}2) = 15^2 - 0{,}2^2 = 225 - 0{,}04 = 224{,}96$;
ж) $5\frac{1}{7} \cdot 4\frac{6}{7} = \left(5 + \frac{1}{7}\right)\left(5 - \frac{1}{7}\right) = 5^2 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 25 - \frac{1}{49} = 24\frac{48}{49}$
з) $10\frac{1}{20} \cdot 9\frac{19}{20} = \left(10 + \frac{1}{20}\right)\left(10 - \frac{1}{20}\right) = 10^2 - \left(\frac{1}{20}\right)^2 = 100 - \frac{1}{400} = 99\frac{399}{400}$
и) $86^2 - 14^2 = (86 - 14)(86 + 14) = 72 \cdot 100 = 7200$
к) $328^2 - 172^2 = (328 - 172)(328 + 172) = 156 \cdot 500 = 78\,000$.

№ 326
д) $4a^2 - 0{,}01 = (2a)^2 - (0{,}1)^2 = (2a - 0{,}1)(2a + 0{,}1)$
е) $\frac{4}{25} - 25q^2 = ()^2 - (5q)^2 = (- 5q)(+ 5q)$
ж) $16 - 64b^2 = 4^2 - (8b)^2 = (4 - 8b)(4 + 8b)$
и) $9m^2 - 4n^2 = (3m)^2 - (2n)^2 = (3m - 2n)(3m + 2n)$
к) $100k^2 - 0{,}04r^2 = (10k)^2 - (0{,}2r)^2 = (10k - 0{,}2r)(10k + 0{,}2r)$
л) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{25}y^2 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y\right)$

№ 328

б) $(x-6)^2-16=(x-6)^2-4^2=(x-6-4)(x-6+4)=(x-10)(x-2)$

г) $(4b-3)^2-9=(4b-3)^2-3^2=(4b-3-3)(4b-3+3)=(4b-6)\cdot 4b=4b(4b-6)$;

д) $(7y+9)^2-81=(7y+9)^2-9^2=(7y+9-9)(7y+9+9)=7y(7y+18)$;

е) $2{,}25-(n+0{,}4)^2=1{,}5^2-(n+0{,}4)^2=(1{,}5-n-0{,}4)(1{,}5+n+0{,}4)=$
$=(1{,}1-n)(1{,}9+n)$;

ж) $25(c+7)^2-c^2=(5(c+7))^2-c^2=(5c+35-c)(5c+35+c)=(4c+35)(6c+35)$.

№ 330

а) $(n+2)(n-2)^2=(n+2)(n-2)(n-2)=(n^2-4)(n-2)=n^3-4n-2n^2+8=$
$=n^3-2n^2-4n+8$

д) $(x-3)^2(x+3)^2=(x^2-9)^2=x^4-18x^2+81$;

е) $(2-y)^2(y+2)^2=(4-y^2)^2=16-8y^2+y^4$;

ж) $(a-b)^2(a+b)^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$;

з) $(-r-s)^2(s-r)^2=(r+s)^2(s-r)^2=(s^2-r^2)^2=s^4-2s^2r^2+r^4$.

№ 336

а) $x(x+2)-(x-3)(x+3)=15$;
$x^2+2x-(x^2-9)=15$;
$x^2+2x-x^2+9=15$;
$2x=6$;
$x=3$
Ответ: $\{3\}$.

в) $3z-5(z+1)(z-1)+5(z+2)(z-2)=6$;
$3z-5(z^2-1)+5(z^2-4)=6$;
$3z-5z^2+5+5z^2-20=6$;
$3z=21$;
$z=7$
Ответ: $\{7\}$.

г) $3(2r+1)(2r-1)-4(3r-2)(3r+2)+6r(4r+1)=25$;
$3(4r^2-1)-4(9r^2-4)+24r^2+6r=25$;
$12r^2-3-36r^2+16+24r^2+6r=25$;
$6r=12$;
$r=2$
Ответ: $\{2\}$.

№ 337

а) $1004\cdot 996-1005\cdot 995=(1000+4)(1000-4)-(1000+5)(1000-5)=$
$(1000^2-4^2)-(1000^2-5^2)=(1000\,000-16)-(1\,000\,000-25)=$
$=999\,984-999\,975=9$

в) $302^2-68^2+370\cdot 66=(302-68)(302+68)+370\cdot 66=234\cdot 370+370\cdot 66=$
$=370(234+66)=370\cdot 300=111\,000$;

г) $415^2-85^2-500\cdot 30=(415-85)(415+85)-500\cdot 30=330\cdot 500-500\cdot 30=$
$=500(330-30)=500\cdot 300=150\,000$.

№ 338

а) Если $a+b=12$, $a-b=5$, то $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=5\cdot 12=60$.

№ 339 (а)

n, $n+1$ – два последовательных числа
$(n+1)^2-n^2=11$;
$(n+1-n)(n+1+n)=11$;

$2n + 1 = 11;$

$2n = 10;$

$n = 5$

Ответ: искомые числа 5 и 6.

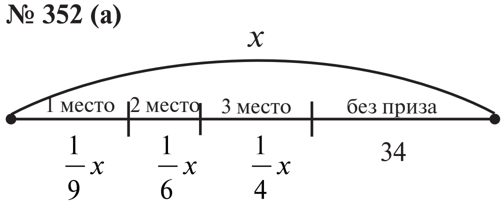
№ 349 (а)

а) $13 + ((3(a - 2) + 4a) - 7a) - (7a - (3a - 5)) + 6a - 7 =$

$= 13 + (3a - 6 + 4a - 7a) - (7a - 3a + 5) + 6a - 7 = 13 - 6 - 4a - 5 + 6a - 7 =$

$= 2a - 5.$

№ 352 (а)



$$x - \left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x\right) = 34$$

$$x - \frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{4}x = 34$$

$$\left(x - \frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{4}x\right) \cdot 36 = 34 \cdot 36$$

$36x - 4x - 6x - 9x = 1224;$

$17x = 1224;$

$x = 72$

Ответ: в соревнованиях участвовало 72 человека.

№ 354 (первая строка)

а) $(5a + 3)(5a - 3) = (5a)^2 - 3^2 = 25a^2 - 9;$

в) $(0{,}8 + y^2)(y^2 - 0{,}8) = (y^2)^2 - 0{,}8^2 = y^4 - 0{,}64;$

д) $(2p^3 + 9y^2)(9y^2 - 2p^3) = (9y^2)^2 - (2p^3)^2 = 81y^4 - 4p^6.$

№ 355 (а, в, г)

а) $21 \cdot 19 = (20 + 1)(20 - 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399;$

в) $11{,}1 \cdot 10{,}9 = (11 + 0{,}1)(11 - 0{,}1) = 11^2 - 0{,}1^2 = 121 - 0{,}01 = 120{,}99;$

г) $115^2 - 85^2 = (115 - 85)(115 + 85) = 30 \cdot 200 = 6000.$

№ 358 (первая строка)

а) $a^2 - 25 = a - 5^2 = (a - 5)(a + 5);$

в) $25x^2 - 0{,}04 = (5x)^2 - 0{,}2^2 = (5x - 0{,}2)(5x + 0{,}2);$

д) $16d^2 - 81z^2 = (4d)^2 - (9z)^2 = (4d - 9z)(4d + 9z);$

ж) $4p^2q^2 - 9q^4 = (2pq)^2 - (3q^2)^2 = (2pq - 3q^2)(2pq + 3q^2).$

П. 4.3.3. КУБ СУММЫ И РАЗНОСТИ

Основные содержательные цели:
1) формировать способность строить формулы на примере построения формул куба суммы и разности;
2) тренировать умение использовать формулу сокращенного умножения (куб суммы и разности) при выполнении разных заданий;
3) повторить: нахождение значений числовых выражений рациональным способом; решение уравнений; упрощение выражений, содержащих степени; решение текстовых задач.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с двумя формулами сокращенного умножения – формулой куба суммы и куба разности.

Для проблематизации можно предложить учащимся записать выражение $(x + y)^3$ как многочлен стандартного вида, не используя правило умножения многочленов.

Для открытия формулы куба суммы (разности) учащимся предлагается использовать задание **№ 377**, в котором предложены шаги по построению новой формулы. Рекомендуется сначала дать возможность учащимся составить план открытия нового знания самостоятельно. Имея опыт построения формул квадрата суммы и разности данная задача является для семиклассников посильной.

Чтобы подготовить учащихся к открытию следует актуализировать с ними правило умножения многочленов и понятие степени с показателем 3, а также понятия «куб суммы» и «куб разности». Для этого можно использовать задания **№№ 374–376**.

Важно показать учащимся применение формул для рационализации вычислений (**№№ 381—382**).

Для формирования умения применять формулы куба суммы и разности в учебнике предлагается целый перечень заданий, которые предполагают доказательство тождеств, нахождение значений выражений, составление и решение уравнений. Учитель выбирает из них те задания, которые считает целесообразным выполнить со своими учениками.

После знакомства с формулами куба суммы и куба разности следует с учащимися обобщить то, что теперь им известно как возводить двучлен во 2-ю и 3-ю степени и сообщить, что существуют формулы, позволяющие возводить двучлен в более высокую степень. Можно попросить одного из «сильных» учащихся сформулировать идею вывода подобных формул. При 4-часовом планировании (либо в более подготовленных классах) рекомендуется познакомить учащихся с алгоритмом возведения двучлена в n-ю степень (**№№ 399—400**).

Урок. Куб суммы и разности

Новое знание

Формулы куба суммы и разности.

Актуализация

Повторить: правило умножения многочлена на многочлен, формулы квадрата суммы и разности выражений.

Задание на пробное действие

Записать выражение $(x + y)^3$ как многочлен стандартного вида, не используя правило умножения многочленов.

Фиксация затруднения

Мы не можем записать куб суммы выражений как многочлен стандартного вида, не используя правило умножения многочленов.

Фиксация причины затруднения

Нет нового правила нахождения куба суммы двух выражений.

Цель деятельности

Построить формулу нахождения куба суммы двух выражений.

Эталон

Формула куба суммы

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения, плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе, плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго, плюс куб второго выражения.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Формула куба разности

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения, минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе, плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго, минус куб второго выражения.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Урок. Куб суммы и разности (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение применять формулы куба суммы и куба разности при выполнении заданий разного типа;

2) познакомиться с алгоритмом возведения двучлена в n-ю степень;

3) тренировать умение находить значение многочленов; значение выражений, содержащих степени; решать задачи.

Рассмотрим **примеры решений** некоторых заданий.

№ 376

а) $(a - 1)^2(a - 1) = (a^2 - 2a + 1)(a - 1) = a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1 =$
$= a^3 - 3a^2 + 3a - 1$;

б) $(5b - 2)^2(5b - 2) = (25b^2 - 20b + 4)(5b - 2) =$
$= 125b^3 - 100b^2 + 20b - 50b^2 + 40b - 8 = 125b^3 - 150b^2 + 60b - 8$;

в) $(1 + 2a)^2(1 + 2a) = (1 + 4a + 4a^2)(1 + 2a) = 1 + 4a + 4a^2 + 2a + 8a^2 + 8a^3 =$
$= 1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$;

г) $(b + 3)^2(b + 3) = (b^2 + 6b + 9)(b + 3) =$
$= b^3 + 6b^2 + 9b + 3b^2 + 18b + 27 = b^3 + 9b^2 + 27b + 27$.

№ 378

а) $(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$;

б) $(-p - q)^3 = -(p + q)^3 = -(p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3) = -p^3 - 3p^2q - 3pq^2 - q^3$;

в) $(c - d)^3 = c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^2$

д) $(-a - 3)^3 = -(a + 3)^3 = -(a^3 + 3a^2 \cdot 3 + 3a \cdot 3^2 + 3^3) = -(a^3 + 9a^2 + 27a + 27) =$
$= -a^3 - 9a^2 - 27a - 27$;

е) $(1 + s)^3 = 1 + 3s + 3s^2 + s^3$;

ж) $(4 - b)^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot b + 3 \cdot 4 \cdot b^2 - b^3 = 64 - 48b + 12b^2 - b^3$;

и) $(2m - 1)^3 = (2m)^3 - 3 \cdot (2m)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2m \cdot 1^2 - 1^3 = 8m^3 - 12m^2 + 6m - 1$;

к) $(5 - 2n)^3 = 5^3 - 3 \cdot 25 \cdot 2n + 3 \cdot 5 \cdot (2n)^2 - (2n)^3 = 125 - 150n + 60n^2 - 8n^3$;

л) $(-3p - 1)^3 = -(3p + 1)^3 = -((3p)^3 + 3 \cdot (3p)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3p) \cdot 1^2 + 1^3) =$
$= -(27p^3 + 27p^2 + 9p + 1) = -27p^3 - 27p^2 - 9p - 1$;

н) $(-3y - \frac{2}{3}x)^3 = -(3y + \frac{2}{3}x)^3 = -((3y)^3 + 3 \cdot (3y)^2 \cdot \frac{2}{3}x + 3 \cdot 3y \cdot \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^3) =$

$= -(27y^3 + 18xy^2 + 4x^2y + \frac{8}{27}x^3) = -27y^3 - 18xy^2 - 4x^2y - \frac{8}{27}x^3.$

о) $(c - 3d)^3 = c^3 - 3c^2 \cdot 3d + 3c(3d)^2 - (3d)^3 = c^3 - 9c^2d + 27cd^2 - 27d^3$

п) $(4m + \frac{n}{3})^3 = (4m)^3 + 3 \cdot (4m)^2 \cdot \frac{n}{3} + 3 \cdot 4m \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^3 =$

$= 64m^3 + 16m^2n + \frac{4mn^2}{3} + \frac{n}{27}$

№ 379

д) $(p^3 + 2q)^3 = (p^3)^3 + 3 \cdot (p^3)^2 \cdot 2q + 3 \cdot p^3 \cdot (2q)^2 + (2q)^3 = p^9 + 6p^6q + 12p^3q^2 + 8q^3;$

е) $(r^4 - 5s)^3 = (r^4)^3 - 3 \cdot (r^4)^2 \cdot 5s + 3 \cdot r^4 \cdot (5s)^2 - (5s)^3 = r^{12} - 15r^8s + 75r^4s^2 - 125s^3;$

ж) $(3a - b^2)^3 = (3a)^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot b^2 + 3 \cdot 3a \cdot (b^2)^2 - (b^2)^3 = 27a^3 - 27a^2b^2 + 9ab^4 - b^6;$

з) $(-4c - d^5)^3 = -(4c + d^5)^3 = -((4c)^3 + 3 \cdot (4c)^2 \cdot d^5 + 3 \cdot 4c \cdot (d^5)^2 + (d^5)^3) =$
$= -(64c^3 + 48c^2d^5 + 12cq^{10} + d^{15}) = -64c^3 - 48c^2d^5 - 12cq^{10} - d^{15}$

и) $(m^2 - n^2)^3 = (m^2)^3 - 3 \cdot (m^2)^2 \cdot n^2 + 3 \cdot m^2 \cdot (n^2)^2 - (n^2)^3 = m^6 - 3m^4n^2 + 3m^2n^4 - n^6;$

к) $(-2x^2 - 3y^3)^3 = -(2x^2 + 3y^3)^3 = -((2x^2)^3 + 3 \cdot (2x^2)^2 \cdot 3y^3 + 3 \cdot 2x^2 \cdot (3y^3)^2 + (3y^3)^3) =$
$= -(8x^6 + 36x^4y^3 + 54x^2y^6 + 27y^9) = -8x^6 - 36x^4y^3 - 54x^2y^6 - 27y^9;$

л) $(-6m^2 + 10n^4)^3 = -(6m^2 - 10n^4)^3 =$
$= -((6m^2)^3 - 3 \cdot (6m^2)^2 \cdot 10n^4 + 3 \cdot 6m^2 \cdot (10n^4)^2 - (10n^4)^3) =$
$= -(216m^6 - 1080m^4n^4 + 1800m^2n^8 - 1000n^{12}) =$
$= -216m^6 + 1080m^4n^4 - 1800m^2n^8 + 1000n^{12};$

м) $(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}t^3)^3 = (\frac{1}{2}k^2)^3 + 3 \cdot (\frac{1}{2}k^2)^2 \cdot \frac{1}{3}t^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}k^2 \cdot (\frac{1}{3}t^3)^2 + (\frac{1}{3}t^3)^3 =$
$= \frac{1}{8}k^6 + \frac{1}{4}k^4t^3 + \frac{1}{6}k^2t^9 + \frac{1}{27}t^9.$

№ 381 (а, г, д)

а) $19^3 = (20 - 1)^3 = 20^3 - 3 \cdot 20^2 \cdot 1 + 3\ 20 \cdot 1^2 - 1^3 = 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6859;$

г) $101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 + 1^3 =$
$= 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1 = 1\,030\,301;$

д) $4{,}9^3 = (5 - 0{,}1)^3 = 5^3 - 3 \cdot 5^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 5 \cdot 0{,}1^2 - 0{,}1^3 =$
$= 125 - 7{,}5 + 0{,}15 - 0{,}001 = 117{,}649;$

№ 382 (а)

$$\left(2\frac{3}{11}\right)^3 + 3 \cdot \left(2\frac{3}{11}\right)^2 \cdot 4\frac{8}{11} + 3 \cdot 2\frac{3}{11} \cdot \left(4\frac{8}{11}\right)^2 + \left(4\frac{8}{11}\right)^3 = \left(2\frac{3}{11} + 4\frac{8}{11}\right)^3 = 7^3 = 343$$

№ 384

а) $(a + 3)(-a - 3)^2 = -(a + 3)(a + 3)^2 = -(a + 3)^3 = -(a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 3 + 3 \cdot a \cdot 3^2 + 3^3) =$
$= -(a^3 + 9a^2 + 27a + 27) = -a^3 - 9a^2 - 27a - 27.$

б) $(2b - 7)^2(7 - 2b) = -(2b - 7)^2(2b - 7) = -(2b - 7)^3 =$
$= -((2b)^3 - 3 \cdot (2b)^2 \cdot 7 + 3 \cdot 2b \cdot 7^2 - 7^3) = -(8b^3 - 84b^2 + 294b - 343) =$
$= -8b^3 + 84b^2 - 294b + 343.$

в) $(-2p^2 - 3q)(2p^2 + 3q)^2 = -(2p^2 + 3q)(2p^2 + 3q)^2 = -(2p^2 + 3q)^3 =$
$= -((2p^2)^3 + 3 \cdot (2p^2)^2 \cdot 3q + 3 \cdot 2p^2 \cdot (3q)^2 + (3q)^3) = -(8p^6 + 36p^4q + 54p^2q^2 + 27q^3) =$
$= -8p^6 - 36p^4q - 54p^2q^2 - 27q^3;$

г) $(x + 4y)^3 - 12x^2y - 48xy^2 = x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3 - 12x^2y - 48xy^2 = x^3 + 64y^3;$

д) $-(2 + p)^2 - 2(1 - p)^3 = -(4 + 4p + p^2) - 2(1 - 3p + 3p^2 - p^3) =$
$= -4 - 4p - p^2 - 2 + 6p - 6p^2 + 2p^3 = 2p^3 - 7p^2 + 2p - 6;$

е) $8(1 - c)^3 + (c - 5)^3 = 8(1 - 3c + 3c^2 - c^3) + (c^3 - 15c^2 + 75c - 125) =$
$= 8 - 24c + 24c^2 - 8c^3 + c^3 - 15c^2 + 75c - 125 = -7c^3 + 9c^2 + 51c - 117.$

№ 388 (д)

$z^2(9 - z) - (3 - z)^3 = 9z^2 - z^3 - (27 - 27z + 9z^2 - z^3) =$
$= 9z^2 - z^3 - 27 + 27z - 9z^2 + z^3 = 27z - 27.$

№ 389

а) $a^3 - (a - 3)^3 = 54 + 9a^2;$
$a^3 - (a^3 - 9a^2 + 27a - 27) = 54 + 9a^2;$
$a^3 - a^3 + 9a^2 - 27a + 27 = 54 + 9a^2;$
$9a^2 - 27a + 27 = 54 + 9a^2;$
$9a^2 - 27a - 9a^2 = 54 - 27;$
$-27a = 27;$
$a = -1$
Ответ: $\{1\}$.
г) $3(d + 2)^3 + (2d - 1)^3 - d^2(11d + 6) = 2;$
$3(d^3 + 6d^2 + 12d + 8) + (8d^3 - 12d^2 + 6d - 1) - 11d^3 - 6d^2 = 2;$
$3d^3 + 18d^2 + 36d + 24 + 8d^3 - 12d^2 + 6d - 1 - 11d^3 - 6d^2 = 2;$
$42d = 2 - 23;$
$42d = -21;$
$d = -0{,}5$
Ответ: $\{-0{,}5\}$.

№ 391 (в)

$$\frac{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1}{4a^2 + 4a + 1} = \frac{(2a+1)^3}{(2a+1)^2} = 2a + 1$$

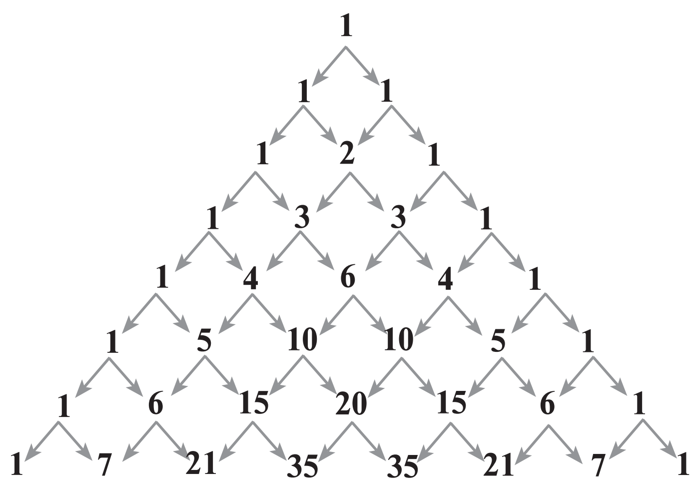
№ 397 (а)

$(3a^4 + A)^3 = B + 8b^3$
$\underline{27a^{12} + 27a^4 \cdot A + 9a^4 \cdot A^2 + A^3} = \underline{B} + \underline{8b^3}$
$A = 2b$
$B = 27a^{12} + 27a^4 \cdot 2b + 9a^4 \cdot (2b)^2 = 27a^{12} + 54a^4b + 36a^4b^2$

№ 399

а) $(a + b)^7$

$(a + b)^0$
$(a + b)^1$
$(a + b)^2$
$(a + b)^3$
$(a + b)^4$
$(a + b)^5$
$(a + b)^6$
$(a + b)^7$



$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

б) $(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

№ 402

а) $(93 + 45) - (-7 + 155) = \underline{93} + \underline{\underline{45}} + \underline{7} - \underline{\underline{155}} = 100 - 110 = -10$;

б) $-(5{,}2 + 7{,}9) - (4{,}8 + 2{,}1) = -\underline{5{,}2}\ \underline{\underline{-\ 7{,}9}}\ \underline{-\ 4{,}8}\ \underline{\underline{-\ 2{,}1}} = -10 - 10 = -20$;

в) $39 - (13 + 4) - (17 + 6) = 39 - 13 - 4 - 17 - 6 = 39 - 40 = -1$;

г) $5{,}8 + 7{,}3 - (24{,}7 - 4{,}2) - (-2{,}7 + 6{,}3) = 5{,}8 + 7{,}3 - 24{,}7 + 4{,}2 + 2{,}7 - 6{,}3 =$
$= 10 + 10 - 31 = -11$;

д) $(28 : 9) \cdot (36 : 7) = (28 : 7) \cdot (36 : 9) = 4 \cdot 4 = 16$;

е) $(-4 : 9) : (20 : 18) = -(4 \cdot 18) : (9 \cdot 20) = -72 : 180 = -0{,}4$;

ж) $-(72 : 17) \cdot (51 : 9) : (8 : 5) = -(72 \cdot 51 \cdot 5) : (17 \cdot 9 \cdot 8) = -15$;

з) $(-9 : 11) \cdot (35 : 24) : (7 : 4) : (5 : 11) \cdot 3 = -(9 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 3) : (11 \cdot 24 \cdot 7 \cdot 5) = -4{,}5$

№ 404

а) Если $x = 5$, $y = 8$, то

$$= \frac{(5^{53} : 5^{28}) \cdot (x^{75} : x^{67}) \cdot x^{23} \cdot (y^2)^{11} \cdot y^{46}}{(5xy)^{10} \cdot x^6 \cdot y^3 \cdot (y^{99} : y^{45}) \cdot ((5x)^7)^2} + 7 : (xy)^0 = 5xy + 7 = 5 \cdot 5 \cdot 8 + 7 = 207$$

б) Если $p = 4$, $q = 3$, $r = 6$, то $\dfrac{p^{37}(q^{71} : q^{39}) \cdot r^{49} \cdot (p^5)^9 \cdot q^{26}}{(pr)^{47} \cdot q^{36} \cdot (p^9 : p^5) \cdot (p^{10})^8 \cdot q^{21} \cdot r} - 3(pr)^0 - 6(\mathrm{qr})^0 =$

$= pqr - 3 - 6 = pqr - 9 = 4 \cdot 3 \cdot 6 - 9 = 72 - 9 = 63$

№ 405 (в)

Пусть расстояние от станции до места туристической стоянки – x км.

Турист должен был пройти это расстояние за $\frac{x}{4}$ ч.

Половину пути турист прошел за $(\frac{x}{4} : 4)$ ч.

Вторую половину пути турист проехал на машине за $(\frac{x}{2} : 20)$ ч

По условию турист прибыл на 2 ч раньше назначенного срока, составим уравнение:

$\frac{x}{4} - \left(\frac{x}{8} - \frac{x}{40}\right) = 2$;

Умножим обе части уравнения на 40 и раскроем скобки:

$10x - 5x - x = 80$;

$4x = 80$;

$x = 20$

Ответ: расстояние от станции до места туристической стоянки 20 км.

№ 408

а) $(-x - y)^3 = -(x + y)^3 = -(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = -x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$;

б) $(3 + z)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot z + 3 \cdot 3 \cdot z^2 + z^3 = 27 + 27z + 9z^2 = z^3$;

в) $(4 - 2a)^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot 2a + 3 \cdot 4 \cdot (2a)^2 - (2a)^3 = 64 - 96a + 48a^2 - 8a^3$;

г) $(\frac{1}{3}v - 2c)^3 = (\frac{1}{3}v)^3 - 3 \cdot (\frac{1}{3}v)^2 \cdot 2c + 3 \cdot \frac{1}{3}v \cdot (2c)^2 - (2c)^3 = \frac{1}{27}v^3 - \frac{2}{3}cv^2 + 4c^2v - 8c^3$.

№ 410 (а, г)

а) $49^3 = (50 - 1)^3 = 50^3 - 3 \cdot 50^2 \cdot 1 + 3 \cdot 50 \cdot 1^2 - 1^3 = 125\,000 - 7500 + 150 - 1 = 117\,649$;

г) $2{,}1^3 = (2 + 0{,}1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3 = 8 + 1{,}2 + 0{,}06 + 0{,}001 = 9{,}261$.

П. 4.3.4. СУММА И РАЗНОСТЬ КУБОВ

Основные содержательные цели:
1) формировать способность строить формулы на примере построения формул суммы кубов и разности кубов;
2) тренировать умение использовать формулу сокращенного умножения (сумма и разность кубов) при выполнении разных заданий;
3) повторить: решение текстовых задач.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с формулами суммы и разности кубов.

Для проблематизации можно предложить учащимся записать многочлены: $(2y)^3 - (3z^2)^3$ и $(4c)^3 + (d^2)^3$ в виде произведения двух многочленов.

В связи с особенностями этих формул учащимся вряд ли удастся самостоятельно составить план открытия нового знания, поэтому учащимся предлагается использовать задание **№ 434**, в котором даны шаги по построению новых формул.

Чтобы подготовить учащихся к открытию следует актуализировать с ними правило умножения многочленов и понятие степени с показателем 3, а также понятия «сумма кубов» и «разность кубов». Для этого можно использовать задания **№№ 432–433**.

Важно показать учащимся применение формул для рационализации вычислений (**№№ 439**).

Также как и в других пунктах третьего параграфа, для формирования умения применять формулы суммы и разности кубов в учебнике, предлагается перечень заданий, которые предполагают доказательство тождеств, нахождение значений выражений, составление и решение уравнений с использованием данных формул. Учитель выбирает из них те задания, которые считает целесообразным выполнить со своими учениками.

При 4-часовом планировании рекомендуется уделить больше времени на выполнение заданий более высокого уровня сложности (**№№ 453–46**0).

При выполнении задания **№ 459** рекомендуется сначала проанализировать данные равенства, задать, например, следующие вопросы:

Что записано в левой части равенства? (Произведение многочленов.)

Что записано в правой части равенства? (Многочлены.)

Как перейти от произведения многочленов к многочлену? (Перемножить данные многочлены.)

Как можно рационализировать умножение алгебраических выражений? (Формулы сокращенного умножения помогают выполнять такие преобразования.)

Какие формулы вы здесь сразу видите, подчеркните соответствующие выражения.

После устного разбора учащиеся самостоятельно выполняют данные преобразования и проверяют себя по образцу (естественно образец должен демонстрировать не только самый рациональный способ, но и все возможные способы, которые могли использовать семиклассники). Можно подготовить образец заранее либо вызвать на закрытую доску сильного ученика.

Полезным будет показать рациональные способы выполнения данных преобразований, для этого можно воспользоваться заранее заготовленными образцами. Если по какой-либо причине подготовить образцы не удастся, можно вызывать к доске не одного, а нескольких учащихся, которые бы параллельно доказывали тождество. После выполнения задания разобрать другие способы, которыми пользовались ученики. Кроме того, можно, после того как основная часть класса закончит доказательство, поинтересоваться, кто нашел другой, более рациональный способ доказательства. Эти способы демонстрируются с помощью специального технического оборудования либо идея преобразования проговаривается вслух.

Целесообразно на примере а) сравнить два способа доказательства тождеств:

1) приведение левой части к правой, при котором придется применить формулу произведения суммы выражений на их разность и в полученном произведении «увидеть» формулу разности кубов;

2) приведение правой части к левой, при котором в разности шестых степеней можно «увидеть» разность кубов и разложить эту разность на произведение двучлена на трехчлен, а полученный двучлен разложить на сумму и разность по формуле разности квадратов.

Второй способ рекомендуется показать после применения первого. На данном этапе он рассматривается с целью опережающей подготовки учащихся к изучению темы «Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения».

Урок. Сумма и разность кубов

Новое знание

Формулы суммы и разности кубов.

Актуализация

Повторить: правило умножения многочлена на многочлен, формула квадрата суммы и разности выражений.

Задание на пробное действие

Записать многочлен в виде произведения двух многочленов:

а) $(2y)^3 - (3z^2)^3$; б) $(4c)^3 + (d^2)^3$.

Фиксация затруднения

Не можем записать сумму и разность кубов в виде произведения двух многочленов.

Не можем доказать, что правильно записали сумму и разность кубов в виде произведения двух многочленов.

Фиксация причины затруднения

Нет правила записи суммы и разности кубов в виде произведения двух многочленов.

Цель деятельности

Построить формулы представления разности и суммы кубов двух выражений в виде произведения двух многочленов.

Эталон

Формула разности кубов

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Формула суммы кубов

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Правило записи произведения в виде суммы или разности кубов

1. По двучлену определить формулу (сумма или разность кубов).
2. Представить каждый одночлен двучлена в виде степени третьей степени.
3. Найти третьи степени одночленов.
4. Записать результат в виде суммы или разности кубов.

Правило представления суммы или разности кубов в виде произведения многочленов

1. Представить каждый одночлен суммы (разности) в виде одночлена третьей степени.
2. Записать первый множитель: сумму (разность) оснований.
3. Записать второй множитель: неполный квадрат разности (суммы) оснований.

Урок. Сумма и разность кубов (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение применять формулы суммы и разности кубов при выполнении заданий разного типа;
2) тренировать умение находить значение числовых выражений, решать задачи.

Урок. Формулы сокращенного умножения (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения применять формулы сокращенного умножения при выполнении заданий различного характера;
2) тренировать умение решать задачи на движение.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 435

а) $-(a^3 + b^3) = -(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$-a^3 - b^3 = (-a)^3 + (-b)^3 = ((-a) + (-b))(a^2 - ab + b^2) = -(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

б) $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$

$-(a^3 - b^3) = -(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$

№ 437

а) $(a + 1)(a^2 - a + 1) = a^3 + 1^3 = a^3 + 1$;

б) $(b - 1)(b^2 + b + 1) = b^3 - 1^3 = b^3 - 1$;

в) $(-c - 2)(c^2 - 2c + 4) = -(c + 2)(c^2 - 2c + 4) = -(c^3 + 2^3) = -c^3 - 8$;

г) $(3 - d)(d^2 + 3d + 9) = 3^3 - d^3 = 27 - d^3$

д) $(2p + 3)(4p^2 - 6p + 9) = (2p^2)^3 + 3^3 = 8p^6 + 27$;

е) $(3q - 4)(9q^2 + 12q + 16) = (3q)^3 - 4^3 = 27q^3 - 64$;

ж) $(-5r + 2)(25r^2 + 10r + 4) = 2^3 - (5r)^3 = 8 - 125r^3$;

з) $(-1 - 4s)(1 - 3s + 16s^2) = -(1^3 + (4s)^3) = -1 - 64s^3$

и) $(2n + m^2)(4n^2 - nm^2 + m^4) = (2n)^3 + (m^2)^3 = 8n^3 + m^6$;

к) $(-v - 4w)(v^2 - 4vw + 16w^2) = -(v + 4w)(v^2 - 4vw + 16w^2) = -(v^3 + (4w)^3) =$
$= -v^3 - 64w^3$

л) $(5t - 3r)(25t^2 + 15tr + 9r^2) = (5t)^3 - (3r)^3 = 125t^3 - 27r^3$

м) $(-4z + 2s)(16z^2 + 8zs + 4s^2) = (2s - 4z)(16z^2 + 8zs + 4s^2) = (2s)^3 - (4z)^3 = 8s^3 - 64z^3$

№ 438

а) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = (x^2)^3 + 1^3 = x^6 + 1$;

б) $(1 - z^3)(z^6 + z^3 + 1) = (1 - z^3)(1 + z^3 + z^6) = 1^3 - (z^3)^3 = 1 - z^9$;

в) $(-y^8 - 5y^4 - 25)(5 - y^4) = -(y^8 + 5y^4 + 25)(5 - y^4) = -(5^3 - (y^4)^3) = -(125 - y^{12}) =$
$= -125 + y^{12} = y^{12} - 125$

ж) $(3d^2 + 2c)(9d^4 - 6d^2c + 4c^2) = (3d^2)^3 + (2c)^3 = 27d^6 + 8c^3$;

з) $(4p^3 - 5q^2)(16p^6 + 20p^3q^2 + 25q^4) = (4p^3)^3 - (5q^2)^3 = 64p^9 - 125q^6$.

№ 439

а) $\frac{31^3 - 19^3}{12} + 31 \cdot 19 = \frac{(31 - 19)(31^2 + 31 \cdot 19 + 19^2)}{12} + 31 \cdot 19 =$

$= \frac{12(31^2 + 31 \cdot 19 + 19^2)}{12} + 31 \cdot 19 = 31^2 + 31 \cdot 19 + 19^2 + 31 \cdot 19 =$

$= 31^2 + 2 \cdot 31 \cdot 19 + 19^2 = (31 + 19)^2 = 50^2 = 2500;$

б) $\frac{127^3 + 67^3}{194} - 127 \cdot 67 = \frac{(127 + 67)(127^2 - 127 \cdot 67 + 67^2)}{194} - 127 \cdot 67 =$

$= \frac{194(127^2 - 127 \cdot 67 + 67^2)}{194} - 127 \cdot 64 = 127^2 - 127 \cdot 67 + 67^2 - 127 \cdot 64 =$

$= 127^2 - 2 \cdot 127 \cdot 67 + 67^2 = (127 - 67)^2 = 60^2 = 3600;$

в) $\frac{39^3 + 41^3}{80} - (39^2 + 41^2) = \frac{(39 + 41)(39^2 - 39 \cdot 41 + 41^2)}{80} - 39^2 - 41^2 =$

$= \frac{80(39^2 - 39 \cdot 41 + 41^2)}{80} - 39^2 - 41^2 = 39^2 - 39 \cdot 41 + 41^2 - 39^2 - 41^2$

$= -39 \cdot 41 = -(40 - 1)(40 + 1) = -(1600 - 1) = -1599;$

г) $\frac{48^3 - 52^3}{-4} - (48^2 + 52^2) = \frac{(48 - 52)(48^2 + 48 \cdot 52 + 52^2)}{-4} - 48^2 - 52^2 =$

$= \frac{100(48^2 + 48 \cdot 52 + 52^2)}{-4} - 48^2 - 52^2 = 48^2 - 48 \cdot 52 + 52^2 - 48^2 - 52^2 =$

$= -48 \cdot 52 = (50 + 2)(50 - 2) = 2500 - 4 = 2496$

№ 440 (а)

а) $(2x + A)(4x^2 - 2xA + A^2) = 8x^3 + 27y^3$

$8x^3 - \cancel{4x^2A} + \cancel{2xA}^2 + \cancel{4x^2A} - \cancel{2xA}^2 + A^3 = 8x^3 + 27y^3$

$A^3 = 27y^3$

$A = 3y$

№ 442

а) $5(a^2 + 2)(a^4 - 2a^2 + 4) = 5((a^2)^3 + 2^3) = 5(a^6 + 8) = 5a^6 + 40;$

б) $b(b - 3)(b^2 + 3b + 9) = b(b^3 - 3^3) = b^4 - 27b;$

в) $3c(-c - 1)(c^2 - c - 1) = -3c(c + 1)(c^2 - c - 1) = -3c(c^3 + 1^3) = -3c(c^3 + 1) =$
$= -3c^4 - 3c$

д) $(x + 3)^2(x^2 - 3x + 9) = (x + 3)(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = (x + 3)(x^3 + 3^3) =$
$=(x + 3)(x^3 + 27) = x^4 + 3x^3 + 27x + 81;$

е) $(-y^2 + 5)^2(y^4 + 5y + 25) = (-y^2 + 5)(-y^2 + 5)(y^4 + 5y + 25) = (-y^2 + 5)(5^3 - (y^2)^3) =$
$= (-y^2 + 5)(125 - y^6) = -125y^2 + 625 + y^8 - 5y^6 = y^8 - 5y^6 - 125y^2 + 625.$

№ 443

а) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9);$

б) $64 + y^3 = 4^3 + y^3 = (4 + y)(16 - 4y + y^2);$

в) $-a^3 - b^3 = -(a^3 + b^3) = -(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (-a - b)(a^2 - ab + b^2);$

г) $-b^3 + c^3 = c^3 - b^3 = (c - b)(c^2 + bc + b^2)$

д) $8p^3 - 0{,}001 = (2p - 0{,}1)(4p^2 + 0{,}2p + 0{,}01);$

е) $125 + 27q^3 = (5 + 3q)(25 - 15q + 9q^2);$

ж) $-0{,}027 - 64r^3 = -(0{,}3 + 4r)(0{,}09 - 1{,}2r + 16r^2) = (-0{,}3 - 4r)(0{,}09 - 1{,}2r + 16r^2);$

з) $-0{,}125s^3 + 8 = 8 - 0{,}125s^3 = (2 - 0{,}5s)(4 + s + 025s^2)$

и) $64m^3 - 27n^3 = (4m)^3 - (3n)^3 = (4m - 3n)(16m^2 + 12mn = 9n^2);$

к) $-k^6 - 0{,}008r^3 = -((k^2)^3 + (0{,}2r)^3) = -(k^2 + 0{,}2r)(k^4 - 0{,}2k^2r - 0{,}04r^2);$

л) $\frac{1}{27}x^3 - \frac{64}{125}y^2 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{15}xy + \frac{16}{25}y^2\right)$

м) $64p^9 + 216q^3 = (4p^3)^3 + (6q)^3 = (4p^3 + 6q)(16p^6 - 24p^3q + 36q^2)$.
н) $-a^3b^3 - b^6 = -(a^3b^3 + b^3) = -((ab)^3 + b^3) = -(ab + b)(a^2b^2 - ab^2 + b^2) =$
$= (-ab - b)(a^2b^2 - ab^2 + b^2)$;
о) $-27x^3z^6 + z^9 = z^9 - 27x^3z^6 = (z^3)^3 - (3xz^2)^3 = (z^3 - 3xz^2)(z^6 + 3xz^5 + 9x^2z^4)$;
п) $p^3q^3r^3 - 125p^9 = (pqr)^3 - (5p^3)^3 = (pqr - 5p^3)(p^2q^2r^2 + 5p^4qr + 25p^6)$;
р) $343 + r^{12} = 7^3 + (r^4)^3 = (7 + r^4)(49 - 7r^4 + r^8)$

№ 444
а) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26$;
$x^3 + 2^3 - x(x^2 - 9) = 26$;
$x^3 + 8 - x^3 + 9x = 26$;
$9x + 8 = 26$;
$9x = 18$;
$x = 2$
Ответ: {2}.
б) $6(y + 1)^2 + 2(y - 1)(y^2 + y + 1) - 2(y + 1)^3 = 32$; разделить все уравнение на 2
$3(y + 1)^2 + (y - 1)(y^2 + y + 1) - (y + 1)^3 = 16$;
$3(y^2 + 2y + 1) + y^3 - 1 - (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 16$;
$3y^2 + 6y + 3 + y^3 - 1 - y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = 16$;
$3y + 1 = 16$;
$3y = 15$;
$y = 5$
Ответ: {5}.
в) $(s + 2)^3 - s(3s + 1)^2 + (2s + 1)(4s^2 - 2s + 1) = 53$;
$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 - s(9s^2 + 6s + 1) + 8s^3 + 1 = 53$;
$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 - 9s^3 - 6s^2 - s + 8s^3 + 1 = 53$;
$11s = 53 - 9$;
$11s = 44$;
$s = 4$
Ответ: {4}.
г) $5z(z - 3)^2 - 5(z - 3)(z^2 + 3z + 9) + 30(z + 2)(z - 2) = 42$;
$5z(z^2 - 6z + 9) - 5(z^3 - 27) + 30(z^2 - 4) = 42$;
$5z^3 - 30z^2 + 45z - 5z^3 + 135 + 30z^2 - 120 = 42$;
$45z + 15 = 42$;
$45z = 27$;
$z = 0{,}6$
Ответ: {0,6}.

№ 445
а) $(x - 7)^3 - 1 = ((x - 7) - 1)((x - 7)^2 + (x - 7) + 1) =$
$= (x - 7 - 1)(x^2 - 14x + 49 + x - 7 + 1) = (x - 8)(x^2 - 13x + 43)$
г) $(5a - 4)^3 - 8 = (5a - 4)^3 - 2^3 = ((5a - 4) - 2)((5a - 4)^2 + 2(5a - 4) + 2^2) =$
$= (5a - 4 - 2)(25a^2 - 40a + 16 + 10a - 8 + 4) = (5a - 6)(25a^2 + 10a + 12)$;
д) $(7b + 3)^3 + 125 = ((7b + 3) + 5^3) = ((7b + 3) + 5)((7b + 3)^2 - 5(7b + 3) + 25) =$
$= (7b + 3 + 5)(49b^2 + 42b + 9 - 35b - 15 + 25) = (7b + 8)(49b^2 + 7b + 52)$;
е) $0{,}216 + (c + 0{,}2)^3 = (0{,}6)^3 + (c + 0{,}2)^3 =$
$= (0{,}6 + (c + 0{,}2))((0{,}6)^2 - 0{,}6(c + 0{,}2) + (c + 0{,}2)^2) =$
$= (0{,}6 + c + 0{,}2)\ (0{,}36 - 0{,}6c - 0{,}12 + c^2 + 0{,}4c + 0{,}04) =$
$= (0{,}8 + c)(c^2 - 0{,}2c + 0{,}28)$;
ж) $64(m + 5)^3 - m^3 = (4(m + 5))^3 - m^3 =$
$= (4(m + 5) - m)((4(m + 5))^2 + 4m(m + 5) + m^2) =$

$= (4m + 20 - m)(16(m^2 + 10m + 25) + 4m^2 + 20m + m^2) =$
$= (3m + 20)(16m^2 + 160m + 400 + 4m^2 + 20m + m^2) =$
$= (3m + 20)(21m^2 + 180m + 400).$

№ 448 (г)

$(d - 1)^3 - 4d(d + 1)(d - 1) + 3(d - 1)(d^2 + d + 1) =$
$= d^3 - 3d^2 + 3d - 1 - 4d(d^2 - 1) + 3(d^3 - 1) =$
$= d^3 - 3d^2 + 3d - 1 - 4d^3 + 4d + 3d^3 - 3 = -3d^2 + 7d - 4$

Если $d = -2$, то $-3 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot (-2) - 4 = -3 \cdot 4 - 14 - 4 = -30$

№ 465

а) Первый множитель: x, второй множитель: y, третий множитель: z, данное произведение: xyz.

После изменений: первый множитель: $1{,}5x$, второй множитель: $\frac{4}{3}y$, третий множитель: $z + a$, данное произведение: $1{,}5x \cdot \frac{4}{3}y \cdot (z + a)$.

По условию произведение не меняется:

$xyz = 1{,}5x \cdot \frac{4}{3}y \cdot (z + a)$

$z = 2(z + a);$
$z = 2z + 2a;$
$2a = -z;$
$a = -0{,}5z$

Ответ: третий множитель надо уменьшить на 50%.

б) Пусть большее число x, тогда второе число $- x - 58$.

<u>Первый случай.</u>

7% большего числа равны 35% второго числа:

$0{,}07x = 0{,}35(x - 58);$
$0{,}07x = 0{,}35x - 0{,}35 \cdot 58;$
$0{,}35x - 0{,}07x = 0{,}35 \cdot 58;$
$0{,}28x = 0{,}35 \cdot 58;$

$x = \frac{0{,}35 \cdot 58}{0{,}28};$ $\qquad \frac{0{,}35 \cdot 58}{0{,}28} = \frac{5 \cdot 29}{2} = 72{,}5$

$x = 72{,}5$
$72{,}5 - 58 = 14{,}5$

<u>Второй случай.</u>

35% большего числа равны 7% второго числа:

$0{,}35x = 0{,}07(x - 58);$
$0{,}35x = 0{,}07x - 0{,}07 \cdot 58;$
$0{,}35x - 0{,}07x = -0{,}07 \cdot 58;$
$0{,}28x = -0{,}07 \cdot 58;$

$x = -\frac{0{,}07 \cdot 58}{0{,}28};$ $\qquad \frac{7 \cdot 58}{28} = \frac{29}{2} = 14{,}5$

$x = -14{,}5$
$-14{,}5 - 58 = -72{,}5$

Ответ: 14,5 и 72,5 или $-72{,}5$; $-14{,}5$.

№ 468

а) $(-x - 3)(x^2 - 3x + 9) = -(x^3 + 3^3) = -x^3 - 27;$
б) $(4 - y)(y^2 + 4y + 16) = 4^3 - y^3 = 64 - y^3;$
в) $(p - 3q)(p^2 + 3pq + 9q^2) = p^3 - (3q)^3 = p^3 - 27q^3;$
д) $(-6z + 5)(36z^2 + 30z + 25) = -(6z - 5)(36z^2 + 30z + 25) =$
$= -((6z)^3 - 5^3) = -216z^3 + 125;$
г) $(-2 - 3t)(4 - 6t + 9t^2) = -(2 + 3t)(4 - 6t + 9t^2) = -(2^3 + (3t)^3) = -8 - 27t^3;$

е) $(-7m + n)(49m^2 + 7mn + n^2) = (n - 7m)(49m^2 + 7mn + n^2) = n^3 - (7m)^3 =$
$= n^3 - 343m^3$.

№ 470

а) $\frac{93^3 \cdot 57^3}{36} + 93 \cdot 57 = \frac{(93 \cdot 57)(93^3+93 \cdot 57+57^2)}{36} = 93 \cdot 57 = \frac{36(93^2+93 \cdot 57+57^2)}{36} = 93 \cdot 57 =$

$= 93^2 + 93 \cdot 57 + 57^2 + 93 \cdot 57 = 93^2 + 2 \cdot 93 \cdot 57 + 57^2 = (93 + 57)^2 = 150^2 = 22500;$

б) $\frac{79^3 + 81^3}{160} - (79^2 + 81^2) = \frac{(79+81)(79^2-78 \cdot 81+81^2)}{160} - 79^2 - 81^2 =$

$= \frac{160(79^2 - 79 \cdot 81 + 81^2)}{160} - 79^2 - 81^2 = 79^2 - 79 \cdot 81 + 81^2 - 79^2 - 81^2 = -79 \cdot 81 = -6399.$

№ 473 (а, б, в, г)

а) $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a - 4)(a^2 + 4a + 16);$
б) $8 + b^3 = 2^3 + b^3 = (2 + b)(4 - 2b + b^2);$
в) $27c^3 - 1000 = (3c)^3 - 10^3 = (3c - 10)(9c^2 + 30c + 100);$
г) $216 + 0{,}001q^3 = 6^3 + (0{,}1q)^3 = (6 + 0{,}1q)(36 - 0{,}6q + 0.01q^2)$.

№ 480 (а)

В компании x ($x \in N$, $x > 0$) сотрудников, мужчин – $0{,}6x$ ($0{,}6x \in N$, $0{,}6x > 0$), женщин – $0{,}4x$ ($0{,}4x \in N$, $0{,}4x > 0$).
В течение года мужчин стало: $0{,}6x - 10$ ($(0{,}6x - 10) \in N$, $(0{,}6x - 10) > 0$), а женщин – $0{,}4x + 6$ ($(0{,}4x + 6) \in N$, $(0{,}4x + 6) > 0$).
По условию мужчин стало столько же, сколько и женщин:
$0{,}6x - 10 = 0{,}4x + 6;$
$0{,}6x - 0{,}4x = 6 + 10;$
$0{,}2x = 16;$
$x = 80.$
Ответ: в компании работало 80 человек.

§ 4. Разложение многочлена на множители

П. 4.4.1. ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

Основные содержательные цели:

1) формировать способность строить определения понятий на примере определения понятия «разложение многочлена на множители»;
2) тренировать умение использовать построенное определение для решения задач;
3) повторить: способы выполнения действий с именованными числами, сокращение дробей, решение текстовых задач.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся учатся выносить общий множитель за скобки, они уже имеют опыт простейших преобразований такого рода. Так, для первичного формирования умения приводить подобные слагаемые учащиеся выносили общий множитель за скобки на основании распределительного закона умножения.

В данном пункте у учащихся формируется понятие разложения многочлена на множители. Нужно отметить, что под разложением на множители понимается разложение на буквенные множители. Так, вынесение за скобки числового множителя не является операцией разложения на множители. Например, представление многочлена $2a + 2ac$ в виде произведения $2(a + ac)$ не является разложением на множители, а в виде $2a\ (1 + c)$ является. Этот «нюанс» можно обговорить с учащимися при выполнении № 489.

Здесь же формируется умение раскладывать на множители путем вынесения общего множителя за скобки. Теперь учащиеся выполняют это преобразование на основании четко сформулированного правила: чтобы вынести за скобки общий множитель c можно в скобках записать многочлен, каждый член которого получен в результате его деления на c. Можно использовать предложенный в учебнике алгоритм вынесения за скобки общего множителя (в более подготовленном классе учащиеся могут построить его самостоятельно – **№ 493**).

В связи с тем, что учащиеся уже знакомы с вынесением за скобки общего множителя, для проблематизации можно предложить учащимся сформулировать, что такое «разложение многочлена на буквенные множители».

Для построения логики открытия при подготовке к уроку учитель может воспользоваться заданием **№ 488**.

Чтобы подготовить учащихся к открытию следует актуализировать с ними распределительное свойство умножения, использование этого свойства для рационализации вычислений. Для этой целей рекомендуется использовать задания **№№ 485–488**.

Задание № 497 готовит учащихся к следующему пункту. Часто у учащихся возникает сложность с вынесением за скобки общего множителя, который является многочленом. Чтобы преодолеть это возможное затруднение рекомендуется выполнить это задание с подчеркиванием общего множителя.

Задание **№ 498** показывает применение нового преобразования для решения уравнений. Особо следует подчеркнуть, что без разложения на множители уравнения данного вида учащиеся пока решить не могут.

Важно показать учащимся применение правила вынесения общего множителя для рационализации вычислений (**№№ 496, 502**).

Урок. Вынесение общего множителя за скобки

Новое знание

Определение понятия «разложение многочлена на множители», правило вынесение общего множителя за скобку, алгоритм разложения многочлена на буквенные множители.

Актуализация

Повторить: распределительное свойство умножения, правило умножения одночлена на многочлен.

Задание на пробное действие

Сформулировать определение понятия «разложение многочлена на буквенные множители».

Фиксация затруднения

Я не могу дать определение понятию «разложение многочлена на буквенные множители».

Я не могу доказать, что правильно дал определение «разложение многочлена на буквенные множители».

Фиксация причины затруднения

Нет определения «разложение многочлена на буквенные множители».

Цель деятельности

Построить определение понятия «разложение многочлена на буквенные множители».

Эталон

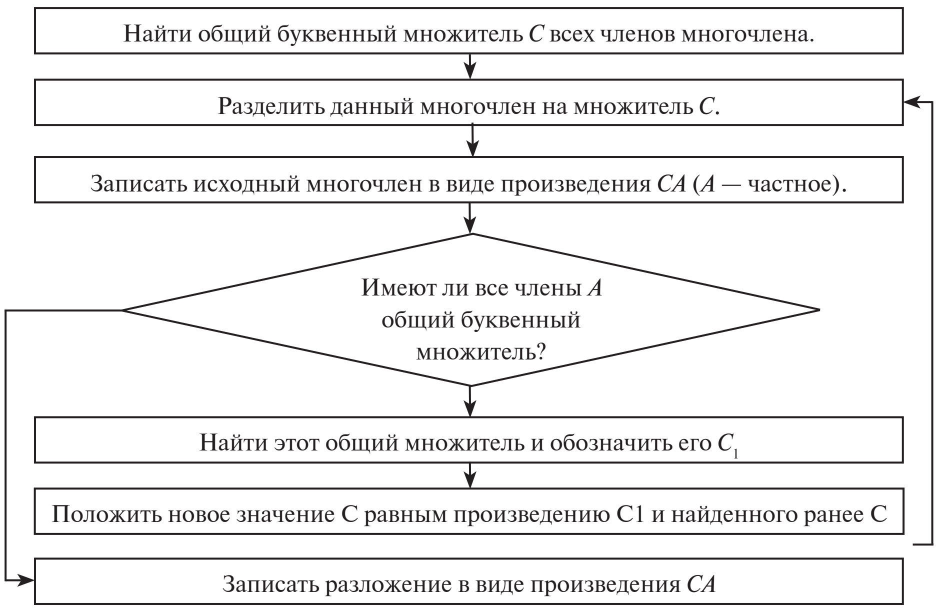
Определение понятия «разложения многочлена на множители»

Разложить многочлен на буквенные множители – это значит представить его в виде произведения двух или более многочленов, степень которых больше или равна 1

Правило вынесение общего множителя за скобку

Вынести за скобки общий множитель c – это значит записать в скобках многочлен, каждый член которого получен в результате его деления на c.

Алгоритм разложения многочлена на буквенные множители



Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 485

а) $\frac{2a+2b}{2} = \frac{2(a+b)}{2} = a + b$ можно применить свойство делимости суммы на число, можно применить распределительное свойство умножения, сокращаем дробь на 2, используя основное свойство дроби.

б) $\frac{-24}{3x-3y} = \frac{-24}{3(x-y)} = \frac{-8}{x-y}$ применяем распределительное свойство умножения, сокращаем дробь на 3.

в) $\frac{4}{12c-16b} = \frac{4}{4(3c-4b)} = \frac{1}{3c-4b}$ применяем распределительное свойство умножения, сокращаем дробь на 4.

г) $\frac{25p+45q}{-10} = \frac{5(5p+9q)}{-2} = \frac{5p+9q}{-2}$ применяем распределительное свойство умножения, сокращаем дробь на 5.

д) $\frac{27r+18s}{6t-21v} = \frac{3(9r+6s)}{3(2t-7v)} = \frac{9r+6s}{2t-7v}$

№ 486

а) $36x^2y = A \cdot 4xy$;
$A = 36x^2y : 4xy$;
$\underline{A = 9x}$

б) $54z^4t^2 = 27A \cdot z^3$;
$A = 54z^4t^2 : 27z^3$;
$\underline{A = 2zt^2}$

в) $18p^{10} = p^8 \cdot A$;
$A = 18p^{10} : p^8$;
$\underline{A = 18p^2}$

г) $15q^3r^2 = 5A \cdot rq$;
$A = 15q^3r^2 : 5rq$;
$\underline{A = 3q^2r}$

д) $12abc = A \cdot 3c$;
$A = 12abc : 3c$;
$\underline{A = 4ab}$

е) $9d^2s^3 = 3A \cdot 3d^2$;
$A = 9d^2s^3 : 9d^2$;
$\underline{A = s^3}$

№ 487

а) $6 \cdot 19 + 6 = 6(19 + 1) = 6 \cdot 20 = 120$;

б) $27 \cdot 5 + 13 \cdot 5 = 5(27 + 13) = 5 \cdot 40 = 200$;

в) $34 \cdot 3 + 17 \cdot 4 = 17(2 \cdot 3 + 4) = 17 \cdot 10 = 170$;

г) $40 \cdot 4 + 32 \cdot 15 = 8 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 8 \cdot 5 \cdot 4(1 + 3) = 160 \cdot 4 = 640$;

д) $58 + 29 \cdot 3 = 29(2 + 3) = 29 \cdot 5 = 145$;

е) $72 + 36 \cdot 8 = 36(2 + 8) = 36 \cdot 10 = 360$.

№ 491

а) $3a^3 - 6a^4 = (\underline{3a^3}) \cdot 1 - 2a \cdot (\underline{3a^3}) = 3a^3(1 - 2a)$;

б) $16b^4 - 8b^3 = 2b \cdot (\underline{8b^3}) - 1 \cdot (\underline{8b^3}) = 8b^3(2b - 1)$;

в) $6c^4 - 12c^6 = 1 \cdot (\underline{6c^4}) - 2c^2(\underline{6c^4}) = 6c^4(1 - 2c^2)$;

г) $10d^7 + 30d^5 = (\underline{10d^5}) \cdot d^2 + (\underline{10d^5}) \cdot 3 = 10d^5(d^2 + 3)$

д) $9x^3 - 6x^2y = 3x^2(3x - 2y)$;

е) $7r^4s + 21r^4 = 7r^4(s + 3)$;

ж) $18pq^3 - 9q^4 = 9q^3(2p - q)$;

з) $2a^5 + 4a^4b = 2a^4(a + 2b)$

и) $16m^2n + 8m^2n^3 = (8m^2n) \cdot 2 + (8m^2n) \cdot n^2 = 8m^2n(2 + n^2)$;

к) $-5u^3v^4 - 10uv^2 = (-5uv^2) \cdot u^2v^2 + (-5uv^2) \cdot 2 = -5uv^2(u^2v^2 + 2)$;

л) $-27a^3b + 18a^2b^2 = (-9a^2b) \cdot 3a + (-9a^2b) \cdot (-2b) = -9a^2b(3a - 2b)$;

м) $51c^2d^3 - 34c^3d^2 = (17c^2d^2) \cdot 3d - (17c^2d^2) \cdot 2c = 17c^2d^2(3d - 2c)$.

№ 492

а) $a\underline{b} - \underline{b}c + d\underline{b} = b(a - c + d)$

б) $-x\underline{y} - z\underline{y} + \underline{y}t = -y(x + z - t)$

в) $-2\underline{a} + \underline{a}b - \underline{a}c = -a(2 - b + c)$

г) $3\underline{p} - 2\underline{p}q + 4\underline{p}r = p(3 - 2q + 4r)$

д) $3mn - 9m^2n^2 + 12m^3n^2 = 3mn(1 - 3mn + 4m^2n)$;

е) $-8a^4b + 16a^2b^2 - 20a^5b^3 = -4a^2b(2a^2 - 4b + 5a^3b^2)$;

ж) $2p^3q^3 + 4p^2q^2 - 6pq = 2pq(p^2q^2 + 2pq - 3)$

з) $9x^5y^2 - 6x^3y^3 + 15x^2y^5 = 3x^2y^2(3x^3 - 2y + 5y^3)$

и) $8c^4d^3 - 6c^4d^2 + 16c^3d^4 = \underline{(2c^3d^2)} \cdot 4cd - \underline{(2c^3d^2)} \cdot 3c + \underline{(2c^3d^2)} \cdot 8d^2 =$
$= 2c^3d^2(4cd - 3c + 8d^2)$

к) $-20m^4n^3 - 12m^2n^4 + 16m^8n^2 =$
$= (-\underline{4m^2n^2}) \cdot 5m^2n + (\underline{-4m^2n^2}) \cdot 3n^2 + (\underline{-4m^2n^2}) \cdot (-4m^6) =$
$= -4m^2n^2(5m^2n + 3n^2 - 4m^6)$

л) $15a^7b^4 + 5a^6b^3 - 10a^5b^9 = (\underline{5a^5b^3}) \cdot 3a^2b + (\underline{5a^5b^3}) \cdot a - (\underline{5a^5b^3}) \cdot 2b^6 =$
$= 5a^5b^3(3a^2b + a - 2b^6)$

м) $24r^5s^6 - 16r^9s^7 - 40r^{10}s^5 = (8r^5s^5) \cdot 3s \cdot (8r^5s^5) \cdot 2r^4s^2 \cdot (8r^5s^5) \cdot 5r^5 =$
$= 8r^5s^5(3s - 2r^4s^2 - 5r^5)$

№ 494 (г, з)

г) $8m^3 - 18mn^2$ при $m = 4{,}5$; $n = -\frac{1}{3}$

$8m^3 - 18mn^2 = 2m(4m^2 - 9n^2) = 2m(2m - 3n)(2m + 3n)$

Если $m = 4{,}5$; $n = -\frac{1}{3}$, то $2 \cdot 4{,}5 \cdot (2 \cdot 4{,}5 - 3 \cdot (-\frac{1}{3}))(2 \cdot 4{,}5 + 3 \cdot (-\frac{1}{3})) =$
$= 9 \cdot (9 + 1)(9 - 1) = 9 \cdot 10 \cdot 8 = 720$;

з) $\frac{3cd - 12c^3d^3}{1 + 4cd + 4c^2d^2}$ при $c = 1,4$; $d = 5$

$$\frac{3cd - 12c^3d^3}{1 + 4cd + 4c^2d^2} = \frac{3cd(1 - 4c^2d^2)}{(1 + 2cd)^3} = \frac{3cd(1 - 2cd)(1 + 2cd)}{(1 + 2cd)^2} = \frac{3cd(1 - cd)}{1 + 2cd}$$

Если $c = 1,4$; $d = 5$, то $\frac{3 \cdot 1,4 \cdot 5 \cdot (1 - 2 \cdot 1,4 \cdot 5)}{1 + 2 \cdot 1,4 \cdot 5} = \frac{21 \cdot (1 - 14)}{1 + 14} = \frac{21 \cdot (-13)}{15} = -18,2$

№ 497 (первый столбик).

а) $a\underline{(b + c)} + d\underline{(b + c)} = (b + c)(a + d)$;

б) $5x\underline{(y + z)} - 3t\underline{(y + z)} = (y + z)(5x - 3t)$;

в) $6m(p - q) + 7n(q - p) = 6m\underline{(p - q)} - 7n\underline{(p - q)} = (p - q)(6m - 7n)$;

г) $9r(s - t) - 2k(t - s) = 9r\underline{(s - t)} + 2k\underline{(s - t)} = (s - t)(9r + 2k)$.

№ 507 (г)

а) 780 кг – 595 кг + 0,615 кг + 320 кг = 505,615 кг

б) 1590 см – 21,5 см – 15,9 см – 214 см = 1338,6 см;

в) 0,75 ч + 48 ч – 12,25 ч – 1 ч = 35,5 ч;

г) 6700 р. – 12 р. + 245,3 р. – 0,9 р. = 6932,4 р.

№ 511 (в)

1) 120 : 60 = 2 (ч) время на первом участке пути

2) 240 : 80 = 3 (ч) время на втором участке пути

3) 350 : 70 = 5 (ч) время на третьем участке пути

4) 120 + 240 + 350 = 710 (км) весь путь

5) 2 + 3 + 5 = 10 (ч) все время

6) 710 : 10 = 71 (км/ч).

Ответ: средняя скорость 71 км/ч.

№ 513 (а, б)

а) $17x + 51y = \underline{17}x + \underline{17} \cdot 3y = 17(x + 3y)$;

б) $a^4 + 7a = \underline{a} \cdot a^3 + 7\underline{a} = a(a^3 + 7)$.

№ 514 (а, б)

а) $16a^2 - 7a^4 = 16 \cdot a^2 - 7a^2 \cdot a^2 = a^2(16 - 7a^2)$;

б) $7b^5 - 11b^3 = 7b^2 \cdot b^3 - 11 \cdot b^3 = b^3(7b^2 - 11)$.

№ 516 (а, в)

а) $a^4b^2 - a^2b^4$ при $a = 3$; $b = -2$

$a^4b^2 - a^2b^4 = (a^2b^2) \cdot a^2 - (a^2b^2) \cdot b^2 = a^2b^2(a^2 - b^2) = a^2b^2(a - b)(a + b)$

Если $a = 3$; $b = -2$, то $3^2 \cdot (-2)^2 \cdot (3 - (-2))(3 + (-2)) = 9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 = 180$;

в) $\frac{9z - 12}{9z^2 - 24z + 16}$ при $z = 3$

$$\frac{9z - 12}{9z^2 - 24z + 16} = \frac{3 \cdot 3z - 3 \cdot 4}{(3z)^2 - 2 \cdot 3z \cdot 4 + 4^2} = \frac{3(3z - 4)}{(3z - 4)^2} = \frac{3}{3z - 4}$$

Если $z = 3$, то $\frac{3}{3 \cdot 3 - 4} = \frac{3}{5} = 0,6$

№ 528 (б)

12,8 км = 12 800 м; 11 км = 11 000 м; 20 км = 20 000 км

1) 12 800 : 16 = 800 (с) время, затраченное на первом участке пути;

2) 11 000 : 22 = 500 (с) время, затраченное на втором участке пути;

3) 20 000 : 10 = 2 000 (с) время, затраченное на третьем участке пути;

4) 12 800 + 11 000 + 20 000 = 43 800 (м) весь путь;

5) 800 + 500 + 2 000 = 3 300 (с) все время;

6) 43 800 : 3 300 ≈ 13,3 (м/с)

Ответ: средняя скорость 13,3 м/с.

№ 531*

а) 99 999 785 960; б) 10 000 012 340.

№ 532*

Пусть мяч сшит из x белых лоскутов. По условию каждый белый лоскут граничит с 3 черными, значит, границ между черными и белыми лоскутами – $3x$.

Черных лоскутов – $32 - x$. Черный лоскут граничит только с белыми лоскутами и так как он пятиугольник, то границ между черными и белыми лоскутами – $5(32 - x)$. Количество границ не зависит от способа их подсчета, значит, первое количество равно второму

$3x = 5(32 - x) \Leftrightarrow x = 20$.

Ответ: в таком мяче 20 лоскутов белого цвета.

П. 4.4.2. СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

Основные содержательные цели:

1) формировать способность строить способы разложения многочленов на множители на примере способа группировки;

2) тренировать умение использовать построенный способ для разложения многочленов на множители;

3) повторить: способ сравнения числовых выражений, содержащих степени; решение текстовых задач.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся учатся применять еще один способ разложения на множители – способ группировки.

Для проблематизации можно предложить учащимся разложить на множители многочлен: $2x^2 + 9y + 2xy + 9x$

Причиной возникшего затруднения будет то, что данные одночлены не имеют общего множителя. Чтобы преодолеть свое затруднение учащиеся должны будут открыть новый способ разложения на множители.

Чтобы подготовить учащихся к открытию рекомендуется выполнить задание № 533, в котором учащимся придется переставлять слагаемые местами и группировать произведения, имеющие одинаковые множители, а также **№ 535**. Позже эти идеи помогут семиклассникам построить новый способ самостоятельно.

Алгоритм способа группировки, построенный учащимися, может иметь следующий вид.

1) Объединить члены многочлена в группы таким образом, чтобы в каждой группе были общие множители.

2) Найти общий множитель в каждой группе и вынести его.

3) Найти общий множитель в новом многочлене и вынести его.

Подготовка, проведенная в предыдущем пункте, дает возможность наряду с простейшими ситуациями использования способа группировки рассмотреть и случаи, которые требуют специальных приемов:

- перестановка слагаемых;
- представление члена многочлена в виде суммы или разности подобных ему членов;
- прибавление и вычитание одного и того же слагаемого.

Последним двум приемам рекомендуется посвятить отдельный урок открытия нового знания. Эти приемы будут использоваться учащимися в дальнейшем и для других способов разложения на множители.

Для проблематизации можно предложить учащимся разложить на множители с использованием способа группировки многочлены: а) $a^2 + 5a + 6$; б) $x^5 - 32$.

Для организации открытия можно воспользоваться учебником. Учащиеся самостоятельно отбирают и рассматривают примеры 2, 3 и 4 из текста. После работы с текстом учащимся предлагается выполнить задания на пробное действие.

Задания **№№ 546, 554** показывают применение нового преобразования для решения уравнений. Причем, если раньше указание разложить на множители давалось в задании, то теперь такого указания в тексте задания нет. Анализируя вид уравнения, учащиеся должны понимать, что нужно преобразовать левую часть уравнения в произведение многочленов. Особо следует подчеркнуть, что без разложения на множители уравнения данного вида учащиеся пока решить не могут.

Урок. Способ группировки

Новое знание

Способ группировки, алгоритм разложения многочлена на множители методом группировки.

Актуализация

Повторить: определение понятия «разложение многочлена на множители», правило вынесения общего множителя за скобку, алгоритм разложения многочлена на буквенные множители.

Задание на пробное действие

Разложить многочлен на множители: $2x^2 + 9y + 2xy + 9x$

Фиксация затруднения

Я не могу разложить многочлен, одночлены которого не имеют общих множителей на множители.

Я не могу назвать эталон, которым воспользовался при разложении многочлена, одночлены которого не имеют общих множителей на множители.

Фиксация причины затруднения

Нет способа разложения многочлена, одночлены которого не имеют общих множителей, на множители.

Цель деятельности

Построить способ разложения многочлена, одночлены которого не имеют общих множителей, на множители.

Эталон

Способ группировки

<u>Способ группировки:</u> объединение членов многочлена в группы таким образом, чтобы после проведения некоторого числа равносильных преобразований у слагаемых нового выражения появились общие множители.

Способы преобразования многочленов, используемые при группировке

Перестановка слагаемых.

Алгоритм разложения многочлена на множители методом группировки

1) Объединить члены многочлена в группы таким образом, чтобы в каждой группе появились общие множители.
2) Найти общий буквенный множитель в каждой группе и вынести его.
3) Найти общий множитель в новом многочлене и вынести его.

Урок. Способ группировки

Новое знание

Новые способы группировки.

Актуализация

Повторить: способ группировки, способы преобразования многочленов, используемые при группировке, алгоритм разложения многочлена на множители методом группировки.

Задание на пробное действие

Разложить многочлены на множители: а) $a^2 + 5a + 6$; б) $x^5 - 32$.

Фиксация затруднения

Я не могу разложить многочлены на множители.

Я не могу назвать эталон, которым воспользовался при разложении многочленов.

Фиксация причины затруднения

Нет способа разложения такого многочлена на множители.

Цель деятельности

Построить новые способы разложения многочленов на множители.

Эталон

Способы преобразования многочленов, используемые при группировке

Представление некоторого члена многочлена в виде суммы или разности подобных ему членов.

Прибавление и вычитание одного и того же слагаемого.

Урок. Способ группировки (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение применять способ группировки для разложения многочлена на множители;
2) тренировать умение находить значение числовых выражений, содержащих степени, решать задачи.

Приведем решение некоторых заданий.

№ 533

а) $7 \cdot 43 + 12 \cdot 5 - 23 \cdot 7 + 5 \cdot 68 = 7 \cdot (43 - 23) + 5 \cdot (12 + 68) =$
$= 7 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 140 + 400 = 540$;

б) $9{,}6 \cdot 46 - 14{,}3 \cdot 59 + 54 \cdot 9{,}6 - 141 \cdot 14{,}3 = 9{,}6(46 + 54) - 14{,}3(59 + 141) =$
$= 9{,}6 \cdot 100 - 14{,}3 \cdot 200 = 960 - 2860 = -1900$

№ 538

а) $3x(a + b) + a + b = 3x(a + b) + (a + b) = (a + b)(3x + 1)$

г) $11d(m - n) - m + n = 11d(m - n) - (m - n) = (m - n)(11d - 1)$

д) $2a(x + y) - 3y - 3x = 2a(\underline{x + y}) - 3(\underline{y + x}) = (x + y)(2a - 3)$;

е) $5b(z - t) + 5t - 5z = 5b(z - t) + 5(t - z) = 5b(\underline{z - t}) - 5(\underline{z - t}) =$
$= (z - t)(5b - 5) = 5(z - t)(b - 1)$;

ж) $8c(2v - w) - 4w + 8v = 8c(2v - w) - 4(w - 2v) = 8c(\underline{2v - w}) + 4(\underline{2v - w})$
$= (2v - w)(8c + 4) = 4(2v - w)(2c + 1)$;

з) $6d(3p + 2q) - 9p - 6q = 6d(3p + 2q) - 3(3p + 2q) = (3p + 2q)(6d - 3) =$
$= 3(3p + 2q)(2d - 1)$
к) $3a - 4b - (4b - 3a)^2 = (3a - 4b) - (4b - 3a)^2 =$
Способ 1:
$-(4b - 3a) - (4b - 3a)^2 = -(4b - 3a)(1 + 4b - 3a) = (3a - 4b)(1 + 4b - 3a)$
Способ 2:
$(3a - 4b) - (3a - 4b)^2 = (3a - 4b)(1 - 3a + 4b)$
л) $(p - q)^2 - 9p + 9q = (p - q)^2 - (9p - 9q) = (p - q)^2 - 9(p - q) = (p - q)(p - q - 9);$

№ 539
е) $5 - 4bx - 5x + 4b = (5 - 5x) - (4bx - 4b) = 5(1 - x) - 4b(x - 1) =$
$= 5(1 - x) + 4b(1 - x) = (1 - x)(5 + 4b);$
л) $p^2 + pq + pr + qr = (p^2 + pq) + (pr + qr) = p\underline{(p + q)} + r\underline{(p + q)} = (p + q)(p + r);$
м) $m^2 - mn + kn - km = (m^2 - mn) + (kn - km) = m(m - n) + k(n - m) =$
$= m(m - n) - k(m - n) = (m - n)(m - k)$с) $a^3 + a^2b + a + b = (a^3 + a^2b) + (a + b) =$
$= a^2\underline{(a + b)} + \underline{(a + b)} = (a + b)(a^2 + 1);$
т) $x^2 + xy - x - y = (x^2 + xy) - (x + y) = x\underline{(x + y)} - \underline{(x + y)} = (x + y)(x - 1);$
у) $b^3 - b^2 - b + 1 = (b^3 - b^2) - (b - 1) = b^2(b - 1) - (b - 1) = (b - 1)(b^2 - 1);$
ф) $12y^2 + 3ay - 4y - a = (12y^2 + 3ay) - (4y + a) = 3y(4y + a) - (4y + a) =$
$= (4y + a)(3y - 1)$
ц) $7x^4z - 2y + 7yz - 2x^4 = (7x^4z + 7yz) - (2y + 2x^4) =$
$= 7z(x^4 + y) - 2(y + x^4) = (x^4 + y)(7z - 2);$
ч) $3m^3 - 12nk - 3nmk + 12m^2 = (3m^3 - 3nmk) - (12nk - 12m^2) =$
$= 3m(m^2 - nk) - 12(nk - m^2) = 3m(m^2 - nk) + 12(m^2 - nk) = (m^2 - nk)(3m + 12) =$
$= 3(m^2 - nk)(m + 4);$
ш) $5z^3a + 8y - 10z^2 - 4ayz = (5z^3a - 10z^2) + (8y - 4ayz) = 5z^2(za - 2) + 4y(2 - za) =$
$= 5z^2(za - 2) - 4y(za - 2) = (za - 2)(5z^2 - 4y)$

№ 540 (а, г).
а) $x^2 - 7x + xy - 7y$ при $x = 6{,}6$; $y = 0{,}4$
$x^2 - 7x + xy - 7y = (x^2 - 7x) + (xy - 7y) = x(x - 7) + y(x - 7) = (x - 7)(x + y)$
Если $x = 9{,}6$; $y = 0{,}4$, то $(9{,}6 - 7)(9{,}6 + 0{,}4) = 2{,}6 \cdot 10 = 26$.
г) $9ab - 2cd + 2ad - 9cb$ при $a = 0{,}5$; $b = \frac{1}{3}$; $c = 3$; $d = -4$
$9ab - 2cd + 2ad - 9cb = (9ab - 9cb) - (2cd - 2ad) = 9b(a - c) - 2d(c - a) =$
$= 9b(a - c) + 2d(a - c) = (a - c)(9b + 2d)$
Если $a = 5{,}7$; $b = \frac{1}{3}$; $c = -0{,}3$; $d = -4$, то $5{,}7 - (-0{,}3)(9 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot (-4)) =$
$= 6 \cdot (3 - 8) = 6 \cdot (-5) = -30$.

№ 541 (а, б)
а) $15ab - 5bc + 3ad - cd$
Способ 1. $(15ab - 5bc) + (3ad - cd) = 5b(3a - c) + d(3a - c) = (3a - c)(5b + d)$
Способ 2. $(15ab + 3ad) - (5bc + cd) = 3a(5b + d) - c(5b + d) = (5b + d)(3a - c)$
б) $8zy - 20zx - 6ry + 15rx$
Способ 1. $(8zy - 20zx) - (6ry - 15rx) = 4z(2y - 5x) - 3r(2y - 5x) = (2y - 5x)(4z - 3r)$
Способ 2. $(8zy - 6ry) - (20zx - 15rx) = 2y(4z - 3r) - 5x(4z - 3r) = (4z - 3r)(2y - 5x)$

№ 542

а) $2abc + 4ac + 10ab + 20a$

Способ 1. $(2abc + 4ac) + (10ab + 20a) = 2ac(b + 2) + 10a(b + 2) =$
$=(b + 2)(2ac + 10a) = 2a(b + 2)(c + 5)$

Способ 2. $(2abc + 10ab) + (4ac + 20a) = 2ab(c + 5) + 4a(c + 5) =$
$= (c + 5)(2ab + 4a) = 2a(c + 5)(b + 2)$

б) $21x + 35x^3 + 3x^2 + 5x^4$

Способ 1. $(21x + 35x^3) + (3x^2 + 5x^4) = 7x(3 + 5x^2) + x^2(3x + 5x^2) =$
$= (3 + 5x^2)(7x + x^2) = x(3 + 5x^2)(7 + x)$

Способ 2. $(21x + 3x^2) + (35x^3 + 5x^4) = 3x(7 + x) + 5x^3 (7 + x) =$
$= (7 + x)(3x + 5x^3) = x(7 + x)(3 + 5x^2)$

в) $4c^4 - 6c^2r - 6crd + 4c^3d$

Способ 1. $(4c^4 - 6c^2r) - (6crd - 4c^3d) = 2c^2(2c^2 - 3r) - 2cd(3r - 2c^2) =$
$= 2c^2(2c^2 - 3r) + 2cd(2c^2 - 3r) = (2c^2 - 3r)(2c^2 + cd) = c(2c^2 - 3r)(2c + d)$

Способ 2. $(4c^4 + 4c^3d) - (6c^2r + 6crd) = 4c^3(c + d) - 6cr(c + d) =$
$= (c + d)(4c^3 - 6cr) = 2c(c + d)(2c^2 - 3r)$

г) $2z^4 + 3z^2 - 9z - 6z^3$

Способ 1. $(2z^4 + 3z^2) - (9z + 6z^3) = z^2(2z^2 + 3) - 3z(3 + 2z^2) = (2z^2 + 3)(z^2 - 3z) =$
$= z(2z^2 + 3)(z - 3)$

Способ 2. $(2z^4 - 6z^3) + (3z^2 - 9z) = 2z^3(z - 3) + 3z(z - 3) = (z - 3)(2z^3 + 3z) =$
$= z(z - 3)(2z^2 + 3)$

№ 544

а) $3x^2 - x + 3xy - y - 3xz + z = (3x^2 - x) + (3xy - y) - (3xz - z) =$
$= x(3x - 1) + y(3x - 1) - z(3x - 1) = (3x - 1)(x + y - z)$

б) $ac^2 - bc^2 - bc + ac - a + b = (ac^2 - bc^2) - (bc - ac) - (a - b) =$
$= c^2(a - b) - c(b - a) - (a - b) = c^2(a - b) + c(a - b) - (a - b) = (a - b)(c^2 + c - 1)$

е) $a^2b + a + ab^2 + b + 2ab + 2 = (a^2b + a) + (ab^2 + b) + (2ab + 2) =$
$= a(ab + 1) + b(ab + 1) + 2(ab + 1) = (ab + 1)(a + b + 2);$

ж) $z^2x - xy - tz^2 - zy + ty + z^3 = (z^2x - tz^2) - (xy - ty) - (zy - z^3) =$
$= z^2(x - t) - y(x - t) - z(y - z^2) = (x - t)(z^2 - y) + z(z^2 - y) = (z^2 - y)(x - t + z);$

з) $x^2a + bx + yb^2 + abxy + a^2bx + ab^2 = (x^2a + bx) + (yb^2 + abxy) + (a^2bx + ab^2) =$
$= x(xa + b) + yb(b + ax) + ab(ax + b) = (xa + b)(x + ab + yb);$

и) $c^4d - c^5 - c^3d^2 + c^2d^3 - cd^4 + d^5 = (c^4d - c^5) - (c^3d^2 - c^2d^3) - (cd^4 - d^5) =$
$= c^4(d - c) - c^2d^2(c - d) - d^4(c - d) = c^4(d - c) + c^2d^2(d - c) + d^4(d - c) =$
$= (d - c)(c^4 + c^2d^2 + d^4).$

№ 545

б) $b^2 - 6b + 8 = b^2 - 4b - 2b + 8 = (b^2 - 4b) - (2b - 8) = b(b - 4) - 2(b - 4) =$
$= (b - 4)(b - 2)$

в) $c^2 + 8c + 7 = c^2 + 7c + c + 7 = (c^2 + 7c) + (c + 7) = c(c + 7) + (c + 7) =$
$= (c + 7)(c + 1)$

г) $d^2 + 4d + 3 = d^2 + 3d + d + 3 = (d^2 + 3d) + (d + 3) = d(d + 3) + (d + 3) =$
$= (d + 3)(d + 1)$

д) $k^2 + 9k - 10 = k^2 + 10k - k - 10 = (k^2 + 10k) - (k + 10) =$
$= k(k + 10) - (k + 10) = (k + 10)(k - 1)$

е) $x^2 + 5xy + 4y^2 = x^2 + 4xy + xy + 4y^2 = (x^2 + 4xy) + (xy + 4y^2) =$
$= x(x + 4y) + y(x + 4y) = (x + 4y)(x + y)$

ж) $z^2 + 6zt + 5t^2 = z^2 + 5zt + zt + 5t^2 = (z^2 + zt) + (5zt + 5t^2) =$
$= z(z + t) + 5t(z + t) = (z + t)(z + 5t);$

з) $u^2 - 4uw + 3w^2 = u^2 - 3uw - uw + 3w^2 = (u^2 - uw) - (3uw - 3w^2) =$
$= u(u - w) - 3w(u - w) = (u - w)(u - 3w);$

и) $m^2 - 9mn + 20n^2 = m^2 - 5mn - 4mn + 20n^2 = (m^2 - 5mn) - (4mn - 20n^2) =$
$= m(m - 5n) - 4n(m - 5n) = (m - 5n)(m - 4n);$

к) $2p^2 - pq - q^2 = 2p^2 - 2pq + pq - q^2 = (2p^2 - 2pq) + (pq - q^2) =$
$= 2p(p - q) + q(p - q) = (p - q)(2p + q)$

л) $p^3 - 8p^2 + 45 = p^3 - 5p^2 - 3p^2 + 45 = (p^3 - 3p^2) - (5p^2 - 45) =$
$= p^2(p - 3) - 5(p^2 - 9) = p^2(p - 3) - 5(p - 3)(p + 3) = (p - 3)(p^2 - 5p - 15).$

м) $q^4 - q^2 - 6 = q^4 - 3q^2 + 2q^2 - 6 = (q^4 - 3q^2) + (2q^2 - 6) =$
$= q^2(q^2 - 3) + 2(q^2 - 3) = (q^2 - 3)(q^2 + 2);$

н) $r^4 - 7r^2 + 12 = r^4 - 3r^2 - 4r^2 + 12 = (r^4 - 3r^2) - (4r^2 - 12) =$
$= r^2(r^2 - 3) - 4(r^2 - 3) = (r^2 - 3)(r^2 - 4);$

о) $s^4 + 7s^2 + 12 = (s^4 + 3s^2) + (4s^2 + 12) = s^2(s^2 + 3) + 4(s^2 + 3) =$
$= (s^2 + 3)(s^2 + 4);$

п) $2t^4 - t^2 - 3 = 2t^4 - 3t^2 + 2t^2 - 3 = (2t^4 + 2t^2) - (3t^2 + 3) =$
$= 2t^2(t^2 + 1) - 3(t^2 + 1) = (t^2 + 1)(2t^2 - 3)$

№ 546

б) $(y^2 + 3y) - 4y - 12 = 0;$
$(y^2 + 3y) - (4y + 12) = 0;$
$y(y + 3) - 4(y + 3) = 0;$
$(y + 3)(y - 4) = 0;$
$y + 3 = 0$ или $y - 4 = 0$
$y = -3;$ $y = 4$
Ответ: $\{-3; 4\}$

в) $z^2 - 2z - 15 = 0;$
$z^2 - 5z + 3z - 15 = 0;$
$(z^2 - 5z) + (3z - 15) = 0;$
$z(z - 5) + 3(z - 5) = 0;$
$(z - 5)(z + 3) = 0;$
$z - 5 = 0$ или $z + 3 = 0$
$z = 5$ $z = -3$
Ответ: $\{5; -3\}$.

№ 548

а) $\dfrac{3x + 3y - bx - by}{5x^2 + 5xy} = \dfrac{(3x + 3y) - (bx + by)}{5x^2 + 5xy} = \dfrac{3(x + y) - b(x + y)}{5x(5x + y)} =$

$\dfrac{(x + y)(3 - b)}{5x(x + y)} = \dfrac{3 - b}{5x}$

б) $\dfrac{ax - x^2}{a^2 - ax + 7x - 7a} = \dfrac{ax - x^2}{(a^2 - ax) + (7x - 7a)} = \dfrac{x(a - x)}{a(a - x) + 7(x - a)} =$

$\dfrac{x(a - x)}{a(a - x) - 7(a - x)} = \dfrac{x(a - x)}{(a - x)(a - 7)} = \dfrac{x}{a - 7}$

д) $\frac{4m^2 - mn + 6n - 24m}{4mn^2 - n^2 + 24m - 6n} = \frac{(4m^2 - mn) + (6n - 24m)}{(4m - n) + (24m - 6n)} = \frac{m(4m - n) + 6(n - 4m)}{m(4m - n) + 6(4m - n)} =$

$\frac{m(4m - n) - 6(4m - n)}{n(4m - n) + 6(4m - n)} = \frac{(4m - n)(m - 6)}{(4m - n)(n + 6)} = \frac{m - 6}{n + 6}$;

е) $\frac{9rs - r^2 - 9s + r}{9s^2 - rs + 9s - r} = \frac{(9rs - r^2) - (9s - r)}{(9s^2 - rs) + (9s - r)} = \frac{r(9s - r) - (9s - r)}{s(9s - r) + (9s - r)} = \frac{(9s - r)(r - 1)}{(9s - r)(s + 1)} =$

$= \frac{r - 1}{s + 1}$

№ 554 (а)

а) $y^3 - 7y^2 + y - 7 = 0$;
$(y^3 - 7y^2) + (y - 7) = 0$;
$y^2(y - 7) + (y - 7) = 0$;
$(y - 7)(y^2 + 1) = 0$;
$y - 7 = 0$ или $y^2 + 1 = 0$
$y = 7$ $\varnothing$, т. к. $y^2 + 1 \geqslant 1$
Ответ: $\{7\}$.

№ 555

б) $z^5 + z + 1 = z^5 + z^4 - z^4 + z^3 - z^3 + z^2 - z^2 + z + 1 =$
$= (z^5 + z^4 + z^3) - (z^4 + z^3 + z^2) + (z^2 + z + 1) =$
$= z^3(z^2 + z + 1) - z^2(z^2 + z + 1) + (z^2 + z + 1) = (z^2 + z + 1)(z^3 - z^2 + 1)$;

в) $r^4 - 1 = r^4 + r^3 - r^3 + r^2 - r^2 + r - r - 1 = (r^4 + r^3 + r^2 + r) - (r^3 + r^2 + r + 1) =$
$= r(r^3 + r^2 + r + 1) - (r^3 + r^2 + r + 1) = (r^3 + r^2 + r + 1)(r - 1)$

г) $s^8 - 1 = s^8 + s^6 - s^6 + s^4 - s^4 + s^2 - s^2 - 1 = (s^8 + s^6 + s^4 + s^2) - (s^6 + s^4 + s^2 + 1) =$
$= s^2(s^6 + s^4 + s^2 + 1) - (s^6 + s^4 + s^2 + 1) = (s^6 + s^4 + s^2 + 1)(s^2 - 1) =$
$= (s^6 + s^4 + s^2 + 1)(s - 1)(s + 1)$

д) $y^7 - 1 = y^7 + y^6 - y^6 + y^5 - y^5 + y^4 - y^4 + y^3 - y^3 + y^2 - y^2 + y - y - 1 =$
$= (y^7 - y^6) + (y^6 - y^5) + (y^5 - y^4) + (y^4 - y^3) + (y^3 - y^2) + (y^2 - y) + (y - 1) =$
$= y^6(y - 1) + y^5(y - 1) + y^4(y - 1) + y^3(y - 1) + y^2(y - 1) + y(y - 1) + (y - 1) =$
$= (y - 1)(y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$

№ 556

а) $\forall\ a, b \in Q$: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (И);
б) $\exists\ a, b \in Q$: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ (И)
в) $\exists\ a, b \in Q$: $(a + b)^2 = (a - b)^2$ (И)
г) $\exists\ a, b \in Q$: $(a - b)^3 \neq a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (Л)
$\forall\ a, b \in Q$: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

№ 558 (а, г)

а) $5^{17} + 5^{15}$ и $5^{17} \cdot 5^{15}$
$5^{17} + 5^{15} = 5^{15}(5^2 + 1) = 5^{15} \cdot 26$
$5^{17} + 5^{15} < 5^{17} \cdot 5^{15}$
г) $(178 + 595)^2$ и $178^2 + 595^2$
$(178 + 595)^2 = 178^2 + 2 \cdot 178 \cdot 595 + 595^2$
$(178 + 595)^2 > 178^2 + 595^2$

№ 560

а) $\dfrac{x^{16}\cdot x^{27}\cdot x^{36}\cdot (x^4)^3\cdot (3x)^{23}}{3^{21}\cdot x^{11}\cdot (x^{51}:x^{34})\cdot x^{66}\cdot x^{19}}+16x^0$, при $x=3$

$\dfrac{x^{16}\cdot x^{27}\cdot x^{36}\cdot (x^4)^3\cdot (3x)^{23}}{3^{21}\cdot x^{11}\cdot (x^{51}:x^{34})\cdot x^{66}\cdot x^{19}}=\dfrac{3^{23}x^{114}}{3^{21}\,x^{103}}=3^2x$

$9x+16$

Если $x=3$, то $9\cdot 3+16=27+16=43$

б) $\dfrac{a^{43}\cdot (b^{60}:b^{47})\cdot c^{85}\cdot (a^6)^3\cdot b^{30}}{(abc)^{37}\cdot b^{23}\cdot (a^{34}:a^{17})\cdot (a^{12})^3\cdot c^{47}}-7(ab)^0$

$=\dfrac{a^{43}\cdot (b^{60}:b^{47})\cdot c^{85}\cdot (a^6)^3\cdot b^{30}}{(abc)^{37}\cdot b^{23}\cdot (a^{34}:a^{17})\cdot (a^{12})^3\cdot c^{47}}-7(ab)^0=\dfrac{a^{91}\cdot c^{85}\cdot b^{61}}{b^{60}\cdot a^{90}\cdot c^{34}}=7=abc-7$

$=abc-7$

Если $a=4$, $b=3$, $c=6$, то $4\cdot 3\cdot 6-7=72-7=65$

№ 562

б) Используем формулу сложного процентного роста: $S_n=S_0(1+0{,}01p)^n$

$69\,212=S_0(1+0{,}1)^3$;

$69\,212=S_0(1{,}1)^3$;

$S_0=69\,212:1{,}331$;

$S_0=52\,000$

Ответ: в городе 3 года назад жило 52 000 человек.

в) Используем формулу сложного процентного роста: $S_n=S_0(1+0{,}01p)^n$

$28\,800=20\,000(1+0{,}01p)^2$;

$(1+0{,}01p)^2=1{,}44$;

$1+0{,}01p=1{,}2$;

$0{,}01p=0{,}2$;

$p=20\%$

$20\,000(1+0{,}2)=20\,000\cdot 1{,}2=24\,000$;

Доход за год составил 4 000 рублей

$4\,000:20\,000=0{,}2$

Ответ: годовая рентабельность вложения 20%.

№ 565 (а, б, в , г)

а) $7m(m-n)+m-n=7m(m-n)+(m-n)=(m-n)(7m+1)$;

б) $6p(p-q)+q-p=6p(p-q)+(q-p)=6p(p-q)-(p-q)=(p-q)(6p-1)$;

в) $11a(a+b)-a-b=11a(a+b)-(a+b)=(a+b)(11a-1)$;

г) $4c(r-s)-s+r=4c(r-s)-(s-r)=4c(r-s)+(r-s)=(r-s)(4c+1)$

№ 566 (а, б, в , г)

а) $4x^2+4xy+9x+9y=(4x^2+4xy)+(9x+9y)=4x(x+y)+9(x+y)=$
$=(x+y)(4x+9)$;

б) $8-3bx-8x+3b=(8-8x)+(3b-3bx)=8(1-x)+3b(1-x)=(1-x)(8+3b)$;

в) $ab+bc-a-c=(ab+bc)-(a+c)=b(a+c)-(a+c)=(a+c)(b-1)$;

г) $rs-rt-s+t=(rs-rt)-(s-t)=r(s-t)-(s-t)=(s-t)(r-1)$.

№ 569 (а, б, в)

а) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 = (x^2 + 4x) + (2x + 8) = x(x + 4) + 2(x + 4) =$
$= (x + 4)(x + 2)$;

б) $y^2 - 10y + 21 = y^2 - 7y - 3y + 21 = (y^2 - 7y) - (3y - 21) =$
$= y(y - 7) - 3(y - 7) = (y - 7)(y - 3)$;

в) $z^2 + 12z + 32 = z^2 + 8z + 4z + 32 = (z^2 + 8z) + (4z + 32) =$
$= z(z + 8) + 4(z + 8) = (z + 8)(z + 4)$.

№ 570 (б, в)

б) $b^2 + 2b - 15 = 0$;
$b^2 + 5b - 3b - 15 = 0$;
$(b^2 + 5b) - (3b + 15) = 0$;
$b(b + 5) - 3(b + 5) = 0$;
$(b + 5)(b - 3) = 0$;
$b + 5 = 0$ или $b - 3 = 0$
$b = -5$ $\quad$ $b = 3$
Ответ: $\{-5; 3\}$.

в) $c^2 - 11c + 28 = 0$;
$c^2 - 4c - 7c + 28 = 0$;
$(c^2 - 4c) - (7c - 28) = 0$;
$c(c - 4) - 7(c - 4) = 0$;
$(c - 4)(c - 7) = 0$;
$c - 4 = 0$ или $c - 7 = 0$
$c = 4$ $\quad$ $c = 7$
Ответ: $\{4; 7\}$.

№ 581*

Обозначим количество задач, решенных Мишей, через x, Гошей – y, Антоном – z. По условию Миша решил $1{,}25z$ задач и $0{,}5y$ задач. Запишем математическую модель:

$$1{,}25z = 0{,}5y \Leftrightarrow \frac{y}{z} = \frac{1{,}25}{0{,}5} \Leftrightarrow \frac{y}{z} = 2{,}5 \Leftrightarrow y = 2{,}5z.$$

Ответ: Гоша решил на 150 % задач больше, чем Антон.

№ 582*

Обозначим часть, которую проехал пассажир, смотря в окно – x, а весь его путь – S. Тогда $x + \frac{x}{3} = \frac{2S}{3} \Leftrightarrow x = \frac{S}{2}$.

Ответ: пассажир смотрел в окно половину своего пути.

П. 4.4.3. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Основные содержательные цели:

1) формировать умение применять при разложении многочленов на множители формулы сокращенного умножения;
2) повторить: нахождение значений числовых выражений, содержащих степени; построение точек на координатной плоскости; решение задач.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся учатся раскладывать на множители многочлены с использованием формул сокращенного умножения. Умение использовать формулы в случае, когда они в задании представлены в явном виде, должно быть уже сформировано в предыдущем параграфе. Теперь с учащимися разбираются случаи, когда для применения формул сокращенного умножения необходимо выполнить предварительное преобразование исходного многочлена.

Учащиеся учатся видеть в степенях «квадраты» и «кубы», группировать слагаемые для получения нужной формулы, пользуются уже известными приемами: перестановка слагаемых, прибавление и вычитание одного и того же слагаемого.

Для этапа актуализации рекомендуется использовать задания **№№ 583—58**5, при выполнении которых учащиеся повторят те понятия и способы действий, которые понадобятся им на уроке.

№ 586 можно использовать для проблематизации. Затруднение, возникшее при выполнении этого задания, потребует новых приемов для применения разложения на множители (либо отбора уже известных приемов для применения в новой ситуации).

При изучении данного пункта учащиеся знакомятся с таким приемом, как выделение полного квадрата, который дает возможность применить формулы сокращенного умножения (**№ 588 (л–н), № 595(д), № 600** готовят учащихся к этому способу, **№ 601** требует применения способа). Естественно, требовать от каждого ученика умения применять данный способ не нужно. Однако более способные учащиеся должны получить возможность познакомиться с приемом выделения полного квадрата. В восьмом классе этот прием даст возможность вывести формулу для решения квадратных уравнений.

Урок. Формулы сокращенного умножения и разложение многочленов на множители

Новое знание

Использование формул сокращенного умножения для разложения многочленов на множители.

Актуализация

Повторить: формула квадрата суммы и разности выражений, формула произведения разности и суммы, формула разности квадратов, формула куба суммы, формула куба разности, формула разности кубов, формула суммы кубов.

Задание на пробное действие

Разложить многочлен на множители, используя одну из формул сокращенного умножения: $-54x^2y + 9x^4 + 81y^2$.

Фиксация затруднения

Я не могу разложить многочлены на множители, используя формулы сокращенного умножения.

Я не смог выполнить задание при данном условии.

Фиксация причины затруднения

Нет способа разложения многочлена на множители, используя формулы сокращенного умножения.

Цель деятельности

Построить способы разложения многочленов на множители, используя формулы сокращенного умножения.

Эталон

Примеры разложения многочленов, используя формулы сокращенного умножения.

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 583

а) разностью квадратов:

$4y^2 - 9$;

$p^4r^4 - 1$;

$4x^{10} - 49$;

$a^2b^4c^6 - 81$;

б) суммой кубов:

$a^3 + 27$;

$b^3 + 8$;

$r^{12} + 216$;

$125y^3 + 64$;

в) разностью кубов:

$64 - x^3$;

$1 - z^3$;

$m^6 - 27$

№ 584

а) $4x^2 + 6xy + 9y^2$;

$4x^2 - 6xy + 9y^2$;

б) $16p^2 - 28pc + 49c^2$;

$16p^2 + 28pc + 49c^2$;

в) $9m^2 - 24mn + 64n^2$;

$9m^2 + 24mn + 64n^2$;

г) $25z^2 + 10zr + 4r^2$;

$25z^2 - 10zr + 4r^2$.

№ 585

а) $\frac{11^2 - 12^2}{23} = -1$;

б) $\frac{22^2 - 18^2}{22^2 + 22 \cdot 18 + 18^2} = 4$;

в) $\frac{32^2}{15^2 + 2 \cdot 15 \cdot 17 + 17^2} = 1$;

г) $\frac{(-74)^3}{38^2 + 3 \cdot 38^2 \cdot 36 + 3 \cdot 38 \cdot 36^2 + 36^3} = -1$.

№ 588

д) $81c^2 - 49 = (9c)^2 - 7^2 = (9c - 7)(9c + 7)$

ж) $1 - 144n^2 = 1^2 - (12n)^2 = (1 - 12n)(1 + 12n)$

з) $r^2s^2 - 64 = (rs)^2 - 8^2 = (rs - 8)(rs + 8)$

к) $x^4y^2 - z^6 = (x^2y)^2 - (z^3)^2 = (x^2y - z^3)(x^2y + z^3)$

у) $(11 + 9x^2)^2 - (2y^3 + 7z)^2 = (11+9x^2 - 2y^3 - 7z)(11+9x^2 + 2y^3 + 7z)$

ф) $(4w^5+ 3v)^2 - (8x^4 - 9d)^2 = (4w^5+ 3v - 8x^4 + 9d)(4w^5+ 3v + 8x^4 - 9d)$

№ 589

г) $4a^2 + 4a + 1 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 1 + 1^2 = (2a + 1)^2 = (2a + 1)(2a + 1)$

д) $9m^2 - 6m + 1 = (3m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 1 + 1^2 = (3m - 1)^2 = (3m - 1)(3m - 1)$

ж) $a^4 + 2a^2b + b^2 = (a^2)^2 + 2a^2b + b^2 = (a^2 + b)^2 = (a^2 + b)(a^2 + b)$

л) $49x^4 - 14x^2y^2 + y^4 = (7x^2)^2 - 2 \cdot 7x^2 \cdot y^2 + (y^2)^2 = (7x^2 - y^2)^2 = (7x^2 - y^2)(7x^2 - y^2)$

н) $m^8 - 6m^4k^3 + 9k^6 = (m^4)^2 - 2 \cdot m^4 \cdot (3k^3) + (3k^3)^2 = (m^4 - 3k^3)^2 = (m^4 - 3k^3)(m^4 - 3k^3)$

о) $4p^{10} + 20p^5z^6 + 25z^{12} = (2p^5)^2 + 2 \cdot 2p^5 \cdot 5z^6 + (5z^6)^2 = (2p^5 + 5z^6)^2 =$
$= (2p^5 + 5z^6)(2p^5 + 5z^6)$

№ 590

г) $n^3 + 27 = n^3 + 3^3 = (n + 3)(n^2 - 3n + 9)$

д) $8a^3 - 1 = (2a)^3 - 1^3 = (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$

е) $27 + 8y^3 = 3^3 + (2y)^3 = (3 + 2y)(9 - 6y + 4y^2)$

и) $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

к) $m^9 - n^3 = (m^3)^3 - n^3 = (m^3 - n)(m^6 + m^3n + n^2)$

н) $(7b + 3)^3 - 64 = ((7b + 3) - 4)((7b + 3)^2 + 4(7b + 3) + 14) =$
$= (7b - 1)(49b^2 + 42b + 9 + 28b + 12 + 14) = (7b - 1)(49b^2 + 70b + 35)$

№ 591

б) $3pq^2 - q^3 - 3p^2q + p^3 = p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3 = (p - q)^3 = (p - q)(p - q)(p - q)$

в) $6m^2n + 8n^3 + 12mn^2 + m^3 = 8n^3 + 12mn^2 + 6m^2n + m^3 =$
$= (2n)^3 + 3 \cdot (2n)^2 \cdot m + 3 \cdot 2n \cdot m^2 + m^3 = (2n + m)^3 = (2n + m)(2n + m)(2n + m)$

г) $64 - 96z + 48z^2 - 8z^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot 2z + 3 \cdot 4 \cdot (2z)^2 - (2z)^3 = (4 - 2z)^3 =$
$= (4 - 2z)(4 - 2z)(4 - 2z)$

д) $27a^3b^6 + 54a^2b^4c^2 + 36ab^2c^4 + 8c^6 =$
$= (3ab^2)^3 + 3 \cdot (3ab^2)^2 \cdot (2c^2) + 3 \cdot (3ab^2) \cdot (2c^2)^2 + (2c^2)^3 = (3ab^2 + 2c^2)^3;$

е) $d^3 + 27p^2c^6d + 9pc^3d^2 + 27p^3c^9 = d^3 + 9pc^3d^2 + 27p^2c^6d + 27p^3c^9 =$
$= d^3 + 3 \cdot d^2 \cdot (3pc^3) + 3 \cdot (3pc^3)^2 \cdot d + (3pc^3)^3 = (d + 3pc^3)^3 =$
$= (d + 3pc^3)(d + 3pc^3)(d + 3pc^3)$

ж) $8x^3y^3 - 125z^3 + 150xyz^2 - 60x^2y^2z = 8x^3y^3 - 60x^2y^2z + 150xyz^2 - 125z^3 =$
$= (2xy)^3 - 3 \cdot (2xy)^2 \cdot 5z + 3 \cdot 2xy \cdot (5z)^2 - (5z)^3 = (2xy - 5z)^3.$

№ 596 (л, м)

л) $p^3 + q^3 + 2p^2 - 2pq + 2q^2 = (p^3 + q^3) + (2p^2 - 2pq + 2q^2) =$
$= (p + q)(p^2 - pq + q^2) + 2(p^2 - pq + q^2) = (p^2 - pq + q^2)(p + q + 2);$
м) $m^4 + mn^3 - m^2n + n^3 = (m^4 + mn^3) - (m^2n - n^3) = m(m^3 + n^3) - n(m^2 - n^2) =$
$= m(m + n)(m^2 - mn + n^2) - n(m - n)(m + n) =$
$= (m + n)(m(m^2 - mn + n^2) - n(m - n)) = (m + n)(m^3 - m^2n + mn^2 - nm + n^2)$

№ 606 (а)

а) $$\frac{7^{27} \cdot 22^{41} \cdot 7^{55} \cdot (2^4)^8 \cdot (11^{96} : 11^{63})}{11^{45} \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^{26} \cdot 77^{55} \cdot 2^{70}} = \frac{7^{82} \cdot 22^{41} \cdot (2^{32}) \cdot (11^{33})}{11^{45} \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^{26} \cdot 77^{55} \cdot 2^{70}} =$$

$$= \frac{7^{32} \cdot 2^{73} \cdot 11^{74}}{11^{74} \cdot 7^{81} \cdot 2^{70}} = 7 \cdot 2^3 = 7 \cdot 8 = 56$$

№ 610 (а)

Общая производительность Михаила и Василия $\frac{1}{24}$.
Пусть x дней потребуется Михаилу, тогда Василию потребуется $1{,}5x$ дней.
$\frac{1}{x} + \frac{1}{1{,}5x} = \frac{1}{24};$
$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{24};$
$24 + 16 = x;$
$x = 40$
40 дней потребуется Михаилу.
$40 \cdot 1{,}5 = 60$ (д.)
Ответ: Василию потребуется 60 дней.

№ 614

а) $9a^2 - 25 = (3а)^2 - 5^2 = (3a - 5)(4a + 5);$
б) $64 - 49b^2 = 8^2 - (7b)^2 = (8 - 7b)(8 + 7b);$
в) $c^4 - d^2s^2 = (c^2)^2 - (ds)^2 = (c^2 - ds)(c^2 + ds);$
г) $p^8q^4 - r^6 = (p^4q^2)^2 - (r^3)^2 = (p^4q^2 - r^3)(p^4q^2 + r^3);$
д) $36m^2 - (m - n)^2 = (6m)^2 - (m - n)^2 = (6m - (m - n))(6m + (m - n)) =$
$= (6m - m + n)(6m + m - n)\ (5m + n)(7m - n);$
е) $x^6y^4 - (x^3 - y^2)^2 = (x^3y^2)^2 - (x^3 - y^2)^2 = (x^3y^2 - (x^3 - y^2))(x^3y^2 + (x^3 - y^2)) =$
$= (x^3y^2 - x^3 + y^2)(x^3y^2 + x^3 - y^2);$

ж) $(12 + 5z^4)^2 - (3z^2 + 7z)^2 = ((12 + 5z^4) - (3z^2 + 7z))((12 + 5z^4) + (3z^2 + 7z)) =$
$= (12 + 5z^4 - 3z^2 - 7z)(12 + 5z^4 + 3z^2 + 7z));$

з) $(3v^3 + 5v)^2 - (8v^4 - 7v)^2 = ((3v^3 + 5v) - (8v^4 - 7v))((3v^3 + 5v) + (8v^4 - 7v)) =$
$= (3v^3 + 5v - 8v^4 + 7v)(3v^3 + 5v + 8v^4 - 7v) = (3v^3 + 8v^4 + 12v)(3v^3 + 8v^4 - 2v) =$
$= v^2(-8v^3 + 3v^2 + 12)\ (8v^3 + 3v^2 - 2)$

№ 615

а) $-2xy + x^2 + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y);$
б) $9z^2 + 6z + 1 = (3z)^2 + 2 \cdot z \cdot 1 + 1 = (3z + 1)^2 = (3z + 1)(3z + 1);$
в) $36a^4 - 12a^2b + b^2 = (6a^2)^2 - 2 \cdot 6a^2 \cdot b + b^2 = (6a^2 - b)^2 = (6a - b)(6a - b);$
г) $49c^4 + 14c^2d + d^2 = (7c^2)^2 + 2 \cdot 7c^2 \cdot d + d^2 = (7c^2 + d)^2 = (7c^2 + d)(7c^2 + d);$
д) $25p^6 + 40p^3q^2 + 16q^4 = (5p^3)^2 + 2 \cdot 5p^3 \cdot 4q^2 + (4q^2)^2 = (5p^3 + 4q^2)^2 =$
$= (5p^3 + 4q^2)(5p^3 + 4q^2);$
е) $81m^8 - 36m^4n^3 + 4n^6 = (9m^4)^2 - 2 \cdot 9m^4 \cdot 2n^3 + (2n^3)^2 = (9m^4 - 2n^3)^2 =$
$= (9m^4 - 2n^3)(9m^4 - 2n^3).$

№ 616

а) $m^3 - 64 = m^3 - 4^3 = (m - 4)(m^2 + 4m + 16);$
б) $n^3 + 125 = n^3 + 5^3 = (n + 5)(n^2 - 5n + 25);$
в) $8p^3 - q^3 = (2p)^3 - q^3 = (2p - q)(4p^2 + 2pq + q^2);$
г) $27r^3 + 216s^3 = (3r)^3 + (6s)^3 = (3r + 6s)(9r^2 - 18rs + 36s^2);$
д) $x^6y^9 + z^{12}t^3 = (x^2y^3)^3 + (z^4t)^3 = (x^2y^3 + z^4t)(x^4y^6 - x^2y^3z^4t + z^8t^2);$
е) $a^9b^{15} - c^9d^6 = (a^3b^5)^3 - (c^3d^2)^3 = (a^3b^5 - c^3d^2)(a^6b^{10} + a^3b^5c^3d^2 + c^6d^4);$
ж) $343 + (11 - r^4)^3 = 7^3 + (11 - r^4)^3 = (7 + 11 - r^4)(49 - 7(11 - r^4) + (11 - r^4)^2) =$
$= (18 - r^4)(49 - 77 + 7r^4 + 121 - 22r^4 + r^8) = (18 - r^4)(93 - 15r^4 + r^8);$
з) $(7s + 3t)^3 - 216t^3 = (7s + 3t)^3 - (6t)^3 =$
$= (7s + 3t - 6t)((7s + 3t)^2 + (7s + 3t)6t + (6t)^2) =$
$= (7s - 3t)(49s^2 + 42st + 9t^2 + 42st + 18t^2 + 36t^2) = (7s - 3t)(49s^2 + 84zt + 63t^2).$

№ 617

а) $27a^2b + 27a^3 + 9ab^2 + b^3 = (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3 = (3a + b)^3 =$
$= (3a + b)(3a + b)(3a + b);$
б) $64c^3 - 96c^2d + 48cd^2 - 8d^3 = (4c)^3 - 3 \cdot (4c)^2 \cdot 2d + 3 \cdot (4c) \cdot (2d)^2 - (2d)^3 =$
$= (4c - 2d)^3 = (4c - 2d)(4c - 2d)(4c - 2d);$
в) $x^6y^3 - 64z^3 + 48x^2yz^2 - 12x^4y^2z = (x^2y)^3 - 3 \cdot (x^2y)^2 \cdot 4z + 3 \cdot (x^2y) \cdot (4z)^2 - (4z)^3 =$
$= (x^2y - 4z)^3 = (x^2y - 4z)(x^2y - 4z)(x^2y - 4z);$
г) $m^{15}n^{12} - 3m^{10}n^8k^2 + 3m^5n^4k^4 - k^6 =$
$= (m^5n^4)^3 - 3 \cdot (m^5n^4)^2 \cdot k^2 + 3 \cdot (m^5n^4) \cdot (k^2)^2 - (k^2)^3 =$
$= (m^5n^4 - k^2)^3 = (m^5n^4 - k^2)(m^5n^4 - k^2)(m^5n^4 - k^2).$

№ 621

а) $2a + 2b - a^2 + b^2 = (2a + 2b) - (a^2 - b^2) = 2(a + b) - (a - b)(a + b) =$
$= (a + b)(2 - a + b);$
б) $4c^2 - d^2 - d - 2c = (4c^2 - d^2) - (d + 2c) = (2c - d)(2c + d) - (d + 2c) =$
$= (2c + d)(2c - d - 1);$
в) $16 - p^2 - 28q + 7pq = (16 - p^2) - (28q - 7pq) = (4 - p)(4 + p) - 7q(4 - p) =$
$= (4 - p)(4 + p - 7q);$

г) $9r^4 - 49 - 3r^2t^2 - 7t^2 = (9r^4 - 49) - (3r^2t^2 + 7t^2) = (3r^2 - 7)(3r^2 + 7) - t^2(3r^2 + 7) =$
$= (3r^2 + 7)(3r^2 - 7 - t^2)$;
д) $m^3 - n^3 + 3m^2 + 3mn + 3n^2 = (m^3 - n^3) + (3m^2 + 3mn + 3n^2) =$
$= (m - n)(m^2 + mn + n^2) + 3(m^2 + mn + n^2) = (m^2 + mn + n^2)(m - n + 3)$;
е) $p^4 + pq^3 - p^3q - q^4 = (p^4 + pq^3) - (p^3q + q^4) = p(p^3 + q^3) - q(p^3 + q^3) =$
$= (p^3 + q^3)(p - q) = (p + q)(p^2 - pq + q^2)(p - q)$.

№ 633*

Обозначим x – количество детей у Гиви, его детей, его внуков и правнуков. Тогда количество внуков – x^2, количество правнуков – x^3, количество праправнуков – x^4. Всего их вместе с Гиви $1 + x^2 + x^3 + x^4$, что по условию равно 2801.

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 2801 \Leftrightarrow x + x^2 + x^3 + x^4 = 2800 \Leftrightarrow x(1 + x + x^2 + x^3) = 2800 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(1 + x)(1 + x^2) = 2800$

Методом проб и ошибок подбираем $x = 7$. Если $x = 7$, то $7(1 + 7)(1 + 7^2) = 56 \cdot 50 = 2800$. При $x < 7$, $x(1 + x)(1 + x^2) < 2800$, при $x > 7$, $x(1 + x)(1 + x^2) > 2800$.

Ответ: у Гиви 7 детей.

П. 4.4.4. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ СПОСОБОВ

Основные содержательные цели:
1) формировать умение применять несколько способов для разложения многочленов на множители;
2) повторить: запись выражений на математическом языке, решение задач.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении данного пункта у учащихся формируется умение комбинировать несколько различных способов разложения на множители. Они уже имеют опыт простейших преобразований такого рода. Теперь рассматриваются более сложные многочлены, требующие предварительного анализа предложенного задания и выработки стратегии его решения. В этих заданиях учащиеся отрабатывают умение применять все известные способы разложения на множители.

К моменту изучения данного пункта учащиеся владеют следующими способами разложения на множители:

- вынесение за скобки общего множителя,
- способ группировки,
- использование формул сокращенного умножения (одной или нескольких).

Они имеют опыт применения вспомогательных приемов для разложения на множители, таких как:

- перестановка слагаемых;
- представление члена многочлена в виде суммы или разности подобных ему членов;
- прибавление и вычитание одного и того же слагаемого,
- выделение полного квадрата.

Для проблематизации можно предложить учащимся выполнить задание. Если в предыдущем пункте учитель не познакомил учащихся со способом выделения полного квадрата, можно использовать задание, аналогичное примеру 5 из учебника.

Для построения плана открытия можно воспользоваться заданием **№ 636 (2 – 3).**

Чтобы подготовить учащихся к открытию следует актуализировать с ними уже известные им способы разложения на множители (**№ 635**).

Учащиеся используют разложение на множители для решения уравнений (**№ 641, 65**3). Это умение поможет им подготовиться к изучению следующего пункта.

В данном пункте предлагается множество разнообразных заданий на применение нового умения: для доказательства тождеств, для сокращения алгебраических дробей и др. Учитель выбирает те из них, которые соответствуют уровню подготовки учащихся.

Важно прочитать и обсудить с учащимися советы в выборе стратегии для разложения на множители, предложенные в учебнике. При необходимости учащиеся могут дополнить их. Перед разложением на множители учащимся рекомендуется использовать эти советы, чтобы учить их действовать не «наобум», а планировать свои действия. Содержание данного пункта поможет учителю формировать у учащихся метапредметные результаты освоения ООП с помощью средств учебного предмета «математика» (в частности, умение планировать). Кроме того, разложение на множители потребует от семиклассника терпения и настойчивости в достижении требуемого результата, творческого подхода к заданию, что способствует достижению личностных результатов, поставленных ФГОС перед школой.

Урок. Разложение многочленов на множители с применением нескольких способов

Новое знание

Использование разных способов для разложения многочленов на множители.

Актуализация

Повторить: формула квадрата суммы и разности выражений, формула произведения разности и суммы, формула разности квадратов, формула куба суммы, формула куба разности, формула разности кубов, формула суммы кубов, правило вынесения общего множителя за скобку, алгоритм разложения многочлена на буквенные множители, способ группировки, алгоритм разложения многочлена на множители методом группировки.

Задание на пробное действие

Разложить на множители многочлен, используя уже известные способы: $x^2 + 0{,}5x - 3$.

Фиксация затруднения

Я не могу разложить многочлен на множители, используя известные способы и не нашел нового способа.

Я не смог выполнить задание при данном условии.

Фиксация причины затруднения

Нет нового способа разложения многочлена на множители.

Цель деятельности

Построить новый способ разложения многочленов на множители, используя уже известные способы.

Эталон

Советы при разложении многочленов, используя разные способы

1. Если все члены многочлена имеют общий множитель, вынесите его за скобки.
2. Ищите в исходном многочлене признаки формул сокращенного умножения – удвоенные и утроенные произведения, сумму и разность кубов, разность квадратов.
3. Ищите общие множители групп слагаемых, пробуйте их сгруппировать и вынести общий множитель за скобки.

4. Там, где не помогла одна группировка, может помочь другая. Поэтому попробуйте сгруппировать члены многочлена иначе.
5. Если для применения формулы или группировки не хватает какого-либо слагаемого, добавьте и вычтите его, или разбейте на несколько слагаемых один из членов многочлена.
6. Если требуется разложить на множители трехчлен вида $ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in Q$, и вы не видите удобного способа разложения, попробуйте выделить полный квадрат.

Урок. Разложение многочленов на множители с применением нескольких способов (РТ)

Основные содержательные цели:

1) тренировать умение применять несколько способов для разложения многочленов на множители;
2) тренировать умение использовать разложение на множители для решения различных задач;
3) тренировать умение записывать многочлены в стандартном виде, решать задачи.

Рассмотрим **примеры решения** некоторых заданий.

№ 637 (м, н, о, п).

м) Способ 1:

$3mn^6 - 192m = 3m(n^6 - 64) = 3m((n^2)^3 - 4^3) = 3m(n^2 - 4)(n^4 + 4n^2 + 16) =$
$= 3m(n - 2)(n + 2)(n^4 + 4n^2 + 16) = 3m(n - 2)(n + 2)((n^4 + 4n^2 + 16 + 4n^2) - 4n^2) =$
$= 3m(n - 2)(n + 2)((n^4 + 8n^2 + 16 - 4n^2) = 3m(n - 2)(n + 2)((n^2 + 4)^2 - 4n^2) =$
$3m(n - 2)(n + 2)((n^2 + 4 - 2n)(n^2 + 4 + 2n)$

Способ 2:

$3mn^6 - 192m = 3m(n^6 - 64) = 3m((n^3)^2 - 8^2) = 3m(n^3 - 8)(n^3 + 8) =$
$= 3m(n - 2)(n^2 + 2n + 4)(n + 2)(n^2 - 2n + 4)$

н) $7p^6q - 7q^7 = 7q(p^6 - q^6) = 7q((p^2)^3 - (q^2)^3) = 7q(p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4) =$
$= 7q(p - q)(p + q)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = 7p^6q - 7q^7 = 7q(p^6 - q^6) = 7q((p^2)^3 - (q^2)^3) =$
$= 7q(p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = = 7q(p - q)(p + q)((p^4 + p^2q^2 + q^4 + p^2q^2) \quad p^2q^2) =$
$= 7q(p - q)(p + q)((p^4 + 2p^2q^2 + q^4) - p^2q^2) = 7q(p - q)(p + q)((p^2 + q^2)^2 \quad p^2q^2) =$
$= 7q(p - q)(p + q)(p^2 + q^2 - pq)(p^2 + q^2 + pq)$

о) $t - 125r^6s^6t = t(1 - 125r^6s^6) = t(1^3 - (5r^2s^2)^3) = t(1 - 5r^2s^2)(1 + 5r^2s^2 + 25r^4s^4)$

п) $x^8y^9 - z^{10}t^2y^3 = y^3(x^8y^6 - z^{10}t^2) = y^3((x^4y^3)^2 - (z^5t)^2) = y^3(x^4y^3 - z^5t)(x^4y^3 + z^5t)$

№ 638 (п, р, с ,т).

п) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x^3 - x^2y) - (xy^2 - y^3) = x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)(x^2 - y^2) =$
$= (x - y)(x - y)(x + y)$

р) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3 = (m^3 + m^2n) - (mn^2 + n^3) = m^2(m + n) - n^2(m + n) =$
$= (m + n)(m^2 - n^2) = (m + n)(m - n)(m + n)$

с) $pr - qr - p^2 + 2pq - q^2 = (pr - qr) - (p^2 - 2pq + q^2) = r(p - q) - (p - q)^2 =$
$= (p - q)(r - p + q)$

т) $s^2 + 4st + 4t^2 - k^2 - 6kt - 9t^2 = (s^2 + 4st + 4t^2) - (k^2 + 6kt + 9t^2) = (s + 2t)^2 - (k + 3t)^2 =$
$= (s + 2t - k - 3t)(s + 2t + k + 3t) = (s - t - k)(s + 5t + k)$

№ 639

а) $a^2 + 6a + 8 = 0;$

$a^2 + 4a + 2a + 8 = 0;$

$(a^2 + 4a) + (2a + 8) = 0;$

$a(a + 4) + 2(a + 4) = 0;$

$(a + 4)(a + 2) = 0;$

$a + 4 = 0$ или $a + 2 = 0$

$a = -4 \qquad a = -2$

Ответ: $\{-4; -2\}$

м) $2r^6 + 14r^3 - 16 = 0;$

$2(r^6 + 7r^3 - 8) = 0;$

$r^6 + 8r^3 - r^3 - 8 = 0;$

$(r^6 + 8r^3) - (r^3 + 8) = 0;$

$r^3(r^3 + 8) - (r^3 + 8) = 0;$

$(r^3 + 8)(r^3 - 1) = 0$

$r^3 + 8 = 0$ или $r^3 - 1 = 0$

$r^3 = -8 \qquad r^3 = 1$

$r = -2 \qquad r = 1$

Ответ: $\{-2; 1\}$.

о) $5t^3 - 9t^2 - 2t = 0;$

$t(5t^2 - 9t - 2) = 0;$

$t(5t^2 - 10t + t - 2) = 0;$

$t((5t^2 - 10t) + (t - 2)) = 0;$

$t(5t(t - 2) + (t - 2)) = 0;$

$t(t - 2)(5t + 1) = 0;$

$t = 0$ или $t - 2 = 0$ или $5t + 1 = 0$

$t = 2 \qquad t = -0{,}2$

Ответ: $\{-0{,}2; 0; 2\}$.

н) $s^8 - 9s^6 + 4s^2 - 36 = 0;$

$(s^8 - 9s^6) + (4s^2 - 36) = 0;$

$s^6(s^2 - 9) + 4(s^2 - 9) = 0;$

$(s^2 - 9)(s^6 + 4) = 0;$

$s^2 - 9 = 0$ или $s^6 + 4 = 0$

$s^2 = 9 \qquad s \in \varnothing$

$s = \pm 3$

Ответ: $\{-3; 3\}$

п) $3k^3 - 7k^2 - 6k = 0;$

$k(3k^2 - 7k - 6) = 0;$

$k(3k^2 - 9k + 2k - 6) = 0;$

$k((3k^2 - 9k) + (2k - 6)) = 0;$

$k(3k(k - 3) + 2(k - 3)) = 0;$

$k(k - 3)(3k + 2) = 0;$

$k = 0$ или $k - 3 = 0$ или $3k + 2 = 0$

$k = 3 \qquad k = -\frac{2}{3}$

Ответ: $\{-\frac{2}{3}; 0; 3\}$.

№ 640

а) $x^5 - x^3 + x^2 - 1 = (x^5 - x^3) + (x^2 - 1) = x^3(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^3 + 1) =$
$= (x - 1)(x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

п) $(a - b)(a^2 - c^2) - (a - c)(a^2 - b^2) = (a - b)(a - c)(a + c) - (a - c)(a - b)(a + b) =$
$= (a - b)(a - c)(a + c - a - b) = (a - b)(a - c)(c - b);$

р) $(p^2 - q^2)(p + q) + (p + q)^3 = (p^2 - q^2)(p + q) + (p + q)(p^2 - pq + q^2) =$
$= (p + q)(p^2 - q^2 + p^2 - pq + q^2) = (p + q)(2p^2 - pq) = (p + q)p(2 - q);$

с) $(c - 3)^2 - 6(c - 3) + 9 = (c - 3)^2 - 2 \cdot (c - 3) \cdot 3 + 3^2 = ((c - 3) - 3)^2 = (c - 3 - 3)^2 =$
$= (c - 6)^2;$

т) $(x + y)^2 - 10(x^2 - y^2) + 25(x - y)^2 = (x + y)^2 - 2 \cdot (x - y) \cdot 5(x + y) + (5(x - y))^2 =$
$= ((x + y) - 5(x - y))^2 = (x + y - 5x + 5y)^2 = (6y - 4x)^2 = (6y - 4x)(6y - 4x) =$
$= 4(3y - 2x)(3y - 2x)$

№ 641 (и, к, л, м)

и) $m^4 - m^3 - m^2 + m = 0;$

$(m^4 - m^3) - (m^2 - m) = 0;$

л) $n^3 - 12 + 3n^2 - 4n = 0;$

$(n^3 + 3n^2) - (12 + 4n) = 0;$

$m^3(m-1)-m(m-1)=0;$
$(m-1)(m^3-m)=0;$
$m(m-1)(m^2-1)=0;$
$m=0$ или $m-1=0$ или $m^2-1=0$
$m=1$ $m^2=1$
$m=\pm 1$
Ответ: $\{-1; 0; 1\}$

$n^2(n+3)-4(3+n)=0;$
$(n+3)(n^2-4)=0;$
$n+3=0$ или $n^2-4=0$
$n=-3$ $n^2=4$
$n=\pm 2$
Ответ: $\{-3; -2; 2\}$

к) $p^3-5p^2-9p+45=0;$
$(p^3-5p^2)-(9p-45)=0;$
$p^2(p-5)-9(p-5)=0;$
$(p-5)(p^2-9)=0;$
$p-5=0$ или $p^2-9=0$
$p=5$ $p^2=9$
$p=\pm 3$
Ответ: $\{-3; 3; 5\}$

м) $8q^5-q^2-200q^3+25=0;$
$(8q^5-q^2)-(200q^3-25)=0;$
$q^2(8q^3-1)-25(8q^3-1)=0;$
$(8q^3-1)(q^2-25)=0;$
$8q^3-1=0$ или $q^2-25=0$
$8q^3=1$ $q^2=25$
$q^3=0{,}125$ $q=\pm 5$
$q=0{,}5$
Ответ: $\{-5; 0{,}5; 5\}$

№ 642
д) $r^3s^2+r^2s^3=r^2s^2(r+s)$
Если $rs=2$, $r+s=-3$, то $2^2\cdot(-3)=4\cdot(-3)=-12$
е) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)((x^2-2xy+y^2)+3xy)=(x-y)((x-y)^2+3xy)$
Если $x-y=2$, $xy=4$, то $2\cdot(2^2+3\cdot 4)=2(4+12)=2\cdot 16=32$

№ 643
а) $\frac{8-12p+6p^2-p^3}{2q-pq+2r-rp}=\frac{(8-p^3)-(12p-6p^2)}{(2q-pq)+(2r-rp)}=\frac{(2-p)(4+2p+p^2)-6p(2-p)}{q(2-p)+r(2-p)}=$
$=\frac{(2-p)(4+2p+p^2-6p)}{(2-p)(q+r)}=\frac{4-4p+p^2}{q+r}=\frac{(2-p)^2}{q+r}$

д) $\frac{c^2-2c-d^2+1}{c^2-2cd+d^2-1}=\frac{(c^2-2c+1)-d^2}{(c^2-2cd+d^2)-1}=\frac{(c-1)^2-d^2}{(c-d)^2-1}=\frac{(c-1-d)(c-1+d)}{(c-d-1)(c-d+1)}=$
$=\frac{c-1+d}{c-d+1};$

е) $\frac{r^2-rs-st-t^2}{s^2+r^2-2sr-t^2}=\frac{(r^2-t^2)-(rs+st)}{(s^2+r^2-2sr)-t^2}=\frac{(r-t)(r+t)-s(r+t)}{(r-s)^2-t^2}=$
$=\frac{(r+t)(r-t-s)}{(r-s-t)(r-s+t)}=\frac{r+t}{r-s+t}$

№ 644
а) $7a^2b+5ab^2=ab(7a+5b)$
Если $a=\frac{2}{7}$; $b=-\frac{7}{5}$, то $\frac{2}{7}\cdot(-\frac{7}{5})\cdot(7\cdot\frac{2}{7}-5\cdot\frac{7}{5})=-\frac{2}{5}\cdot(2-7)=-0{,}4\cdot(-5)=2$
д) $y^3-2y^2z-4yz+8z^2=(y^3-2y^2z)-(4yz-8z^2)=y^2(y-2z)-4z(y-2z)=$
$=(y-2z)(y^2-4z)$
Если $y=5{,}5$; $z=0{,}25$,
то $(5{,}5-2\cdot 0{,}25)(5{,}5^2-4\cdot 0{,}25)=(5{,}5-0{,}5)\cdot(30{,}25-1)=5\cdot 29{,}25=146{,}25$
е) $p^3+p^2q-pq^2-q^3=(p^3+p^2q)-(pq^2+q^3)=p^2(p+q)-q^2(p+q)=$
$=(p+q)(p^2-q^2)=(p+q)(p-q)(p+q)$
Если $p=1{,}3$; $q=0{,}8$, то $(1{,}3+0{,}8)(1{,}3-0{,}8)(1{,}3+0{,}8)=2{,}1\cdot 0{,}5\cdot 2{,}1=2{,}205$

№ 645

д) $\frac{9^6+9^7}{3^{12}+3^{14}+3^{15}} = \frac{9^6(1+9)}{3^{12}(1+3^2+3^3)} = \frac{9^6\cdot 10}{3^{12}\cdot(1+9+27)} = \frac{3^{12}\cdot 10}{3^{12}\cdot 37} = \frac{10}{37}$

ж) $\frac{5^{12}-5^{13}-5^{14}-5^{15}}{25^8-25^6} = \frac{5^{12}(1-5^1-5^2-5^3)}{25^6(25^2-1)} = \frac{5^{12}(1-5-25-125)}{5^{12}(625-1)} =$

$= -\frac{154}{624} = -\frac{77}{312}$

з) $\frac{36^2+36^3}{6^4-6^5+6^6-6^7} = \frac{36^2(1+36)}{6^4(1-6)+6^6(1-6)} = \frac{6^4\cdot 37}{6^4\cdot(-5)+6^6\cdot(-5)} = \frac{6^4\cdot 37}{-5\cdot 6^4(1+6^2)} =$

$= \frac{6^4\cdot 37}{-5\cdot 6^4\cdot 37} = -0{,}2$

№ 648

а) $a^2+4a-5 = a^2+2\cdot a\cdot 2-5 = (a^2+2\cdot a\cdot 2+2^2)-2^2-5 = (a+2)^2-9 =$
$= (a+2)^2-3^2 = (a+2-3)(a+2+3) = (a-1)(a+5)$

б) $b^2-10b-11 = b^2-2\cdot b\cdot 5-11 = (b^2-2\cdot b\cdot 5+5^2)-5^2-11 =$
$= (b-5)^2-36 = (b-5)^2-6^2 = (b-5-6)(b-5+6) = (b-11)(b+1)$

в) $3c^2+6c-9 = 3(c^2+2c-3) = 3((c^2+2c+1)-1-3) = 3((c+1)^2-4) =$
$= 3((c+1)^2-2^2) = 3(c+1-2)(c+1+2) = 3(c-1)(c+3)$

г) $2d^2+16d-40 = 2(d^2+8d-20) = 2((d^2+2\cdot d\cdot 4+(4)^2)-16-20) =$
$2((d+4)^2-36) = 2((d+4)^2-6^2) = 2(d+4-6)(d+4+6) = 2(d-2)(d+10)$

№ 658

а) квадрат произведения чисел 5, квадрата числа a, куба числа b: $(5a^2b^3)^2$;
б) произведение кубов чисел 3, x, y, 2, z: $3^3\cdot 2^3x^3y^3z^3$;
в) сумма произведения чисел 5 и x и произведения чисел 4 и c: $5x+4c$;

д) $x^2+1{,}5x-1 = x^2+\frac{3}{2}x-1 = (x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2)-\frac{9}{16}-1 = (x+\frac{3}{4})^2-\frac{25}{16} =$

$= (x+\frac{3}{4})^2-(\frac{5}{4})^2 = (x+\frac{3}{4}-\frac{5}{4})(x+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}) = (x-\frac{2}{4})(x+\frac{8}{4}) = (x-\frac{1}{2})(x+2)$

е) $y^2-2{,}5y-6 = y^2-\frac{5}{2}y-6 = (y^2-2\cdot y\cdot\frac{5}{4}+(\frac{5}{4})^2)-\frac{25}{16}-6 = (y-\frac{5}{4})^2-\frac{121}{16} =$

$= (y-\frac{5}{4})^2-(\frac{11}{4})^2 = (y-\frac{5}{4}-\frac{11}{4})(y-\frac{5}{4}+\frac{11}{4}) = (y-\frac{16}{4})(y+\frac{6}{4}) = (y-4)(y+1{,}5)$

ж) $3z^2-3{,}5z-1{,}5 = 3z^2-\frac{7}{2}z-\frac{3}{2} = 3(z^2-\frac{7}{6}z-\frac{1}{2}) =$

$= 3((z^2-2\cdot z\cdot\frac{7}{12}+\frac{49}{144})-\frac{49}{144}-\frac{1}{2}) = 3((z-\frac{7}{12})^2-\frac{121}{144}) = 3((z-\frac{7}{12})^2-(\frac{11}{12})^2) =$

$= 3(z-\frac{7}{12}-\frac{11}{12})(z-\frac{7}{12}+\frac{11}{12}) = 3(z-\frac{18}{12})(z+\frac{4}{12}) = 3(z-\frac{3}{2})(z+\frac{1}{3})$;

з) $2n^2-5{,}5n-10 = 2n^2-\frac{11}{2}n-10 = 2(n^2-\frac{11}{4}n-5) =$

$= 2((n^2-2\cdot n\cdot\frac{11}{8}+(\frac{11}{8})^2)-\frac{121}{64}-5) = 2((n-\frac{11}{8})^2-\frac{441}{64}) = 2((n-\frac{11}{8})^2-(\frac{21}{8})^2) =$

$= 2\left(n-\frac{32}{8}\right)\left(n+\frac{10}{8}\right) = (n-4)(2n+2{,}5)$

г) разность частного чисел 9 и q и разности между числом 7 и a: $9 : q - (7 - a)$;
д) квадрат суммы чисел 6, r, s, t: $(6 + r + s + t)^2$;
е) сумма квадратов чисел 8, m, n, k, l: $8^2 + m^2 + n^2 + k^2 + l^2$;
ж) четвертая степень суммы чисел a, b и c: $(a + b + c)^4$;
з) сумма пятых степеней чисел 2, 5, и y: $2^5 + 5^5 + y^5$

№ 664 (д, е).

д) $-2(2a + 0,5(9c - (2d + 6a) + 2d - 5c)) - (-2a + 3d - c) =$
$= -2(2a + 0,5(9c - 2d - 6a + 2d - 5c)) + 2a - 3d + c =$
$= -2(2a + 4,5c - d - 3a + d - 2,5c) + 2a - 3d + c = -2(-a + 2c) + 2a - 3d + c =$
$= 2a - 4c + 2a - 3d + c = 4a - 3c - 3d$, степень 1;
е) $x - (y - (z - x - y)) - (y + (x - (z - x - y))) =$
$= x - (y - z + x + y) - (y + (x - z + x + y)) =$
$= x - 2y + z - x - (y + 2x - z + y) = x - 2y + z - x - y - 2x + z - y =$
$= -2x - 4y + 2z$, степень 1.

№ 665

а) Пусть все расстояние x км ($x > 0$).

$\frac{x}{6}$ км/ч скорость по течению, $\frac{x}{8}$ км/ч скорость против течения.

$\frac{x}{6} - 2$ (км/ч) ($\frac{x}{6} - 2 > 0$) собственная скорость катера, $\frac{x}{8} + 2$ (км/ч) ($\frac{x}{8} + 2 > 0$) собственная скорость катера.

$\frac{x}{6} - 2 = \frac{x}{8} + 2$;

Умножим обе части уравнения на 24:

$(\frac{x}{6} - 2) \cdot 24 = (\frac{x}{8} + 2) \cdot 24$;
$4x - 48 = 3x + 48$;
$4x - 3x = 48 + 48$;
$x = 96$

Ответ: расстояние между пристанями 96 км.

б) Пусть расстояние, на которое могут отъехать x км

	s, км	**v, км/ч**	**t, ч**
Туда	x	8+ 3	$\frac{x}{11}$
Обратно	x	8 – 3	$\frac{x}{5}$

По условию на путь туда и обратно ушло 4 ч:

$\frac{x}{11} + \frac{x}{5} = 4$;

Умножим обе части уравнения на 55

$(\frac{x}{11} + \frac{x}{5}) \cdot 55 = 4 \cdot 55$;
$5x + 11x = 220$;
$16x = 220$;
$x = \frac{220}{16}$;
$x = 13,75$

Ответ: расстояние, на которое могут отплыть по реке от пункта проката, равно 13,75 км.

№ 666 (а, б)

а) $16a^3b - 4ab^3 = 4ab(4a^2 - b^2) = 4ab(2a - b)(2a + b)$;

б) $3c^2d^2 - 27c^2t^2 = 3c^2(d^2 - 9t^2) = 3c^2(d - 3t)(d + 3t)$

№ 667 (а, б)

а) $6a^2 - 12ab + 6b^2 = 6(a^2 - 2ab + b^2) = 6(a - b)^2 = 6(a - b)(a - b)$;

б) $3cd^2 + 12cd + 12c = 3c(d^2 + 4d + 4) = 3c(d + 2)^2 = 3c(d + 2)(d + 2)$

№ 668 (а, б)

а) $a^2 + 2a - 15 = 0$;

$(a^2 + 2a + 1) - 1 - 15 = 0$;

$(a + 1)^2 - 16 = 0$;

$(a + 1 - 4)(a + 1 + 4) = 0$;

$(a - 3)(a + 5) = 0$;

$a - 3 = 0$ или $a + 5 = 0$

$a = 3$ $\quad a = -5$

Ответ: $\{-5; 3\}$

б) $2b^2 + 2b - 12 = 0$;

$2(b^2 + b - 6) = 0$;

$2((b^2 + 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} - 6) = 0$;

$2((b + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}) = 0$;

$2(b + \frac{1}{2} - \frac{5}{2})(b + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}) = 0$;

$2(b - 2)(b + 3) = 0$;

$b - 2 = 0$ или $b + 3 = 0$

$b = 2$ $\quad b = -3$

Ответ: $\{-3; 2\}$

№ 669 (а, б)

а) $x^3 + 27 + 7x^2 + 21x = (x^3 + 27) + (7x^2 + 21x) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 7x(x + 3) =$
$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9 + 7x) = (x + 3)(x^2 + 4x + 9)$;

б) $y^4 - y^3 - y + 1 = (y^4 - y^3) - (y - 1) = y^3(y - 1) - (y - 1) = (y - 1)(y^3 - 1) =$
$= (y - 1)(y - 1)(y^2 + y = 1)$

№ 671 (а, б)

а) $xy^2 + x^2y = xy(y + x)$

Если $xy = 5$, $x + y = 8$, то $5 \cdot 8 = 40$;

б) $9z^2 - 12zt + 4t^2 = (3z - 2t)^2 = (2t - 3z)^2$

Если $2t - 3z = 9$, то $9^2 = 81$

№ 672 (а, б)

а) $\frac{27 - 15a + 5a^2 - a^3}{3a + ab - 3b - a^2} = \frac{(27 - a^3) - (15a - 5a^2)}{(3a - 3b) + (ab - a^2)} = \frac{(3 - a)(9 + 3a + a^2) - 5a(3 - a)}{3(a - b) + a(b - a)} =$

$= \frac{(3 - a)(9 + 3a + a^2 - 5a)}{3(a - b) - a(a - b)} = \frac{(3 - a)(9 - 2a + a^2)}{(a - b)(3 - a)} = \frac{9 - 2a + a^2}{a - b}$;

б) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2 - 3x - 3y} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x^2 - y^2) - (3x + 3y)} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x - y)(x + y) - 3(x + y)} =$

$= \frac{(x - y)(x + y)}{(x + y)(x - y - 3)} = \frac{x - y}{x - y - 3}$;

№ 684 (б)

Пусть расстояние от Москвы до Костромы x км.

1) $17 + 3 = 20$ (км/ч) скорость по течению

2) $17 - 3 = 14$ (км/ч) скорость против течения

	s, км	v, км/ч	t, ч
Туда	x	20	$\frac{x}{20}$
Обратно	x	14	$\frac{x}{14}$

По условию известно, что на весь путь туда и обратно ушло 34 ч:

$\frac{x}{20} + \frac{x}{14} = 34;$

Умножим обе части уравнения на 140

$(\frac{x}{20} + \frac{x}{14}) \cdot 140 = 34 \cdot 140;$

$7x + 10x = 34 \cdot 140;$
$17x = 34 \cdot 140;$

$x = \frac{34 \cdot 140}{14};$

$x = 280$
Ответ: расстояние от Москвы до Костромы 280 км.

№ 686*
Оформим способ переливания таблицей:

12 л	12	4	4	9	9	1	1	6
8 л		8	3	3		8	6	6
5 л			5		3	3	5	

№ 687*
Пусть число присутствовавших — x чел.
Математическая модель задачи:

$$\begin{cases} \frac{x}{6} + 1 = \frac{x-1}{5} \\ x \in N \end{cases}$$

Ответ: 42 человека.

П. 4.4.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Основные содержательные цели:
1) тренировать умение раскладывать многочлены на множители и применять это умение при решении задач;
2) тренировать умение находить значения выражений, изображать на координатной плоскости решения неравенств.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте семиклассники решают задачи с помощью уравнения, которое они на данном этапе могут решить только разложением на множители.

Первый урок по теме «Решение задач с помощью разложения многочлена на множители» можно построить в форме урока открытия нового знания. В этом случае для проблематизации можно предложить учащимся выполнить задание **№691 (1)**.

Чтобы подготовить учащихся к открытию можно воспользоваться предложенными в учебнике заданиями **№№ 688 – 690**. С помощью этих заданий можно повторить, как строить математическую модель по тексту задачи (для решения составленного уравнения используется метод проб и ошибок), как найти решение уравнения, в правой части которого – произведение, а в левой – ноль. Можно актуализировать с учащимися способ решения уравнения, в правой части которого многочлен, а в левой – ноль. Рекомендуется часть необходимого для актуализации материала повторить при проверке домашнего задания (так, например, нужный способ решения уравнения можно актуализировать при проверке задания **№668**, которое предварительно задается учащимся на дом).

Алгоритм решения задач с помощью разложения на множители, построенный учащимися, может иметь следующий вид.

1) Составить математическую модель задачи.

2) Представить уравнение так, чтобы справа стоял ноль.

3) Разложить многочлен, стоящий слева, на множители.

4) Решить уравнение.

5) Выбрать корни, удовлетворяющие модели задачи.

6) Ответить на вопрос задачи.

В связи с тем, что фактически этот алгоритм является уточнением алгоритма решения задач с помощью математического моделирования, где на этапе работы с полученной математической моделью учащиеся работают, применяя известный им прием решения уравнения (разложение на множители), этот урок можно организовать и как урок рефлексии тренировочного типа.

Для закрепления умения решать задачи с помощью разложения на множители в учебнике предложен целый спектр разнообразных текстовых задач: задачи, содержащие геометрический материал, задачи на движение, на движение по реке, на работу, на сплавы и пр. Учитель выбирает из них те задачи, которые целесообразно выполнить в конкретном классе в соответствии с существующими затруднениями учащихся.

При 3 часах алгебры в неделю после изучения этого параграфа учащиеся пишут контрольную работу по содержанию §§ 3 и 4 главы 4. Готовность к контрольной работе можно проверить, используя раздел «Задачи для самоконтроля к главе 4».

Урок. Решение задач с помощью разложения многочленов на множители

Новое знание

Алгоритм решения задач, используя разложение многочлена на множители.

Актуализация

Повторить: все способы разложения на множители.

Задание на пробное действие

Выполнить № 691.

Фиксация затруднения

Я не могу выполнить задание до конца.

Фиксация причины затруднения

Нет уточненного алгоритма решения задач.

Цель деятельности

Уточнить алгоритм решения задач.

Эталон

Алгоритм решения задач, используя разложение многочлена на множители

1. Составить уравнение по тексту задачи.
2. Представить уравнение так, чтобы справа стоял ноль.
3. Разложить многочлен, стоящий слева, на множители.
4. Решить уравнение.
5. Выбрать корни, удовлетворяющие условию задачи.
6. Ответить на вопрос задачи.

Урок. Решение задач с помощью разложения многочлена на множители (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения применять разные способы разложения на множители при решении уравнений и решении задач;
2) тренировать умение находить значения выражений, сравнивать числовые выражения.

Урок. Подготовка к контрольной работе (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение раскладывать многочлены на множители и применять это умение при решении задач разного типа;
2) тренировать умение находить значения выражений.

Урок. Контрольная работа по темам: «Формулы сокращенного умножения» и «Разложение многочленов на множители (ОРК)

Основные цели:

1) тренировать умение учащихся осуществлять процедуру контроля;
2) тренировать умение учащихся выявлять причины затруднений собственной деятельности;
3) контроль знаний, умений, навыков по темам: «Формулы сокращенного умножения» и «Разложение многочленов на множители».

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 692

а) $7x(x + 1) = 21 - 7x;$
$7x^2 + 7x = 21 - 7x;$
$7x^2 + 7x - 21 + 7x = 0;$
$7x^2 + 14x - 21 = 0;$
$7(x^2 + 2x - 3) = 0;$
$7((x^2 + 2x + 1) - 1 - 3) = 0;$
$7((x + 1)^2 - 4) = 0;$
$7(x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = 0;$
$7(x - 1)(x + 3) = 0;$
$x - 1 = 0$ или $x + 3 = 0$
$x = 1 \qquad x = -3$
Ответ: $\{-3; 1\}$

б) $y(y - 1) = y + 15;$
$y^2 - y = y + 15;$
$y^2 - y - y - 15 = 0;$
$y^2 - 2y - 15 = 0;$
$(y^2 - 2y + 1) - 1 - 15 = 0;$
$(y - 1)^2 - 16 = 0;$
$(y - 1 - 4)(y - 1 + 4) = 0;$
$(y - 5)(y + 3) = 0;$
$y - 5 = 0$ или $y + 3 = 0$
$y = 5 \qquad y = -3$
Ответ: $\{-3; 5\}$

в) $4z(z + 2) = 32z + 13;$

$4z(z + 2) - 32z - 13 = 0;$

$4z^2 + 8z - 32z - 13 = 0;$

$4z^2 - 24z - 13 = 0$

$((2z)^2 - 2 \cdot 2z \cdot 6 + 6^2) - 36 - 13 = 0;$

$(2z - 6)^2 - 49 = 0;$

$(2z - 6 - 7)(2z - 6 + 7) = 0;$

$(2z - 13)(2z + 1) = 0;$

$2z - 13 = 0$ или $2z + 1 = 0$

$2z = 13 \qquad 2z = -1$

$z = 6{,}5 \qquad z = -0{,}5$

Ответ: $\{-0{,}5; 6{,}5\}$

г) $t^2(14 - t) = 6t(2t - 4);$

$14t^2 - t^3 = 12t^2 - 24t;$

$14t^2 - t^3 - 12t^2 + 24t = 0;$

$-t^3 + 2t^2 + 24t = 0;$

$-t(t^2 - 2t - 24) = 0;$

$-t((t^2 - 2t + 1) - 1 - 24) = 0;$

$-t((t - 1)^2 - 25) = 0;$

$-t(t - 1 - 5)(t - 1 + 5) = 0;$

$-t(t - 6)(t + 4) = 0;$

$t = 0$ или $t = 6$ или $t = -4$

Ответ: $\{-4; 0; 6\}$

д) $r^2(r - 7) = -3r(3r - 5);$

$r^2(r - 7) + 3r(3r - 5) = 0;$

$r^3 - 7r^2 + 9r^2 - 15r = 0;$

$r^3 + 2r^2 - 15r = 0;$

$r(r^2 + 2r - 15) = 0;$

$r((r^2 + 2r + 1) - 1 - 15) = 0;$

$r((r + 1)^2 - 16) = 0;$

$r(r + 1 - 4)(r + 1 + 4) = 0;$

$r = 0$ или $r - 3 = 0$ или $r + 5 = 0$

$r = 3 \qquad r = -5$

Ответ: $\{-5; 0; 3\}$

е) $p^2(3p - 7) = 2p(2 - 9p);$

$3p^3 - 7p^2 = 4p - 18p^2;$

$3p^3 - 7p^2 - 4p + 18p^2 = 0;$

$3p^3 + 11p^2 - 4p = 0;$

$3p(p^2 + \frac{11}{3}p - \frac{4}{3}) = 0;$

$3p((p^2 + 2 \cdot \frac{11}{6} \cdot p + \frac{121}{36}) - \frac{121}{36} - \,) = 0;$

$3p((p + \frac{11}{6})^2 - \frac{169}{36}) = 0;$

$3p(p + \frac{11}{6} - \frac{13}{6})(p + \frac{11}{6} + \frac{13}{6}) = 0;$

$3p(p - \frac{1}{3})(p + 4) = 0;$

$p = 0$ или $p = \frac{1}{3}$ или $p = -4$

Ответ: $\{-4; 0; \frac{1}{3}\}$

№ 693

а) На втором этапе время движения $(9 + x)$ ч, а скорость движения $(x + 9)$ км/ч, где $9 + x > 0$, $x + 9 > 0$.

Известно, что второй участок пути равен 900 км.

Составим математическую модель задачи.

$(9 + x)(x + 9) = 900;$

$9 + x > 0,\ x + 9 > 0$

$(9 + x)(x + 9) = 900;$

$(9 + x)^2 - 30^2 = 0;$

$(9 + x - 30)(9 + x + 30) = 0;$

$(x - 21)(x + 39) = 0;$

$x - 21 = 0$ или $x + 39 = 0$

$x = 21 \qquad x = -39$

Корень $x = 21$ удовлетворяет всем условиям, а корень $x = -39$ не удовлетворяет условию $9 + x > 0$.

Ответ: на первом этапе средняя скорость была равна 21 км/ч.

б) Пусть длина стороны первого куба x см, тогда длина стороны второго куба $(x + 3)$ см, где $x > 0$, $x + 3 > 0$.

По условию объем второго куба 343 см^3

$(x + 3)^3 = 343;$
$x > 0, x + 3 > 0$
$(x + 3)^3 = 343;$
$(x + 3)^3 - 343 = 0;$
$(x + 3 - 7)((x + 3)^2 + 7(x + 3) + 49) = 0;$
$(x - 4)(x^2 + 6x + 9 + 7x + 21 + 49) = 0;$
$(x - 4)(x^2 + 13x + 79) = 0;$
$x - 4 = 0$ или $x^2 + 13x + 79 = 0$
$x = 4$
Ответ: длина стороны первого куба 4 см

№ 694

а) Пусть x м ширина прямоугольного участка земли, тогда $(x + 10)$ м его длина, где $x > 0, x + 10 > 0$.
$164 + 100 = 264$ (м^2) площадь всего участка.
Составим математическую модель.
$x(x + 10) = 264;$
$x > 0, x + 10 > 0 \quad x + 10$ — ?
$x(x + 10) = 264;$
$x^2 + 10x - 264 = 0;$
$(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25) - 25 - 264 = 0;$
$(x + 5)^2 - 289 = 0;$
$(x + 5 - 17)(x + 5 + 17) = 0;$
$(x - 12)(x + 22) = 0;$
$x - 12 = 0$ или $x + 22 = 0$
$x = 12 \qquad x = -22$
Корень $x = 12$ удовлетворяет условиям, а корень $x = -22$ не удовлетворяет условию $x > 0$.
$x + 10$
$12 + 10 = 22$ (м)
Ответ: длина участка 22 м.
б) Пусть ширина участка x м, тогда его длина $(x + 8)$ м, где $x > 0, x + 8 > 0$.
$(x + 8 - 5)$ м новая длина, $(x + 5)$ м новая ширина, где $x + 3 > 0, x + 5 > 0$.
$(x + 3)(x + 5) \cdot 2 = x(x + 8) + 78$
$x + 3 > 0, x + 5 > 0, x + 8 > 0$
$2(x^2 + 3x + 5x + 15) = x^2 + 8x + 78;$
$2x^2 + 16x + 30 = x^2 + 8x + 78;$
$2x^2 + 16x + 30 - x^2 - 8x - 78 = 0$
$x^2 + 8x - 48 = 0;$
$(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 16) - 16 - 48 = 0;$
$(x + 4)^2 - 64 = 0;$
$(x + 4 - 8)(x + 4 + 8) = 0;$
$(x - 4)(x + 12) = 0;$
$x - 4 = 0$ или $x + 12 = 0$
$x = 4 \qquad x = -12$
Корень $x = 4$ удовлетворяет условиям, а корень $x = -12$ не удовлетворяет условиям.
$4 + 8 = 12$ (м)
Ответ: длина участка 12 м.

№ 695

а) Пусть x одно число, а второе $3{,}5 - x$. По условию их произведение равно 3.
Составим математическую модель.

$x(3{,}5 - x) = 3;$
$3{,}5x - x^2 - 3 = 0;$
$-x^2 + 3{,}5x - 3 = 0$; умножим обе части уравнения на -1:
$x^2 - 3{,}5x + 3 = 0;$

$x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = 0;$

$(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{4} + \frac{49}{16}) - \frac{49}{16} + 3 = 0;$

$(x - \frac{7}{4})^2 \frac{1}{16} = 0;$

$(x - \frac{7}{4} - \frac{1}{4})(x - \frac{7}{4} + \frac{1}{4}) = 0;$

$(x - 2)(x - \frac{3}{2}) = 0;$

$x - 2 = 0$ или $x - \frac{3}{2} = 0$

$x = 2$ $\qquad$ $x = 1{,}5$
Если одно из чисел равно 2, то второе число равно $3{,}5 - 2 = 1{,}5$.
Если одно из чисел равно 1,5, то второе число равно $3{,}5 - 1{,}5 = 2$
Ответ: загаданы числа 2 и 1,5.

б) Пусть большее число x, второе число $x - 2{,}2$, где $x > x + 2{,}2$.
По условию произведение чисел 8,4.
$x(x - 2{,}2) = 8{,}4;$
$x^2 - 2{,}2x = 8{,}4;$
$x^2 - 2{,}2x - 8{,}4 = 0;$

$x^2 - \frac{11}{25}x - \frac{42}{5} = 0;$

$(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{11}{10} + \frac{121}{100}) - \frac{121}{100} - \frac{42}{5} = 0;$

$(x - \frac{11}{10})^2 - \frac{961}{100} = 0;$

$(x - \frac{11}{10} - \frac{31}{10})(x \frac{11}{10} + \frac{31}{10}) = 0;$

$(x + 2)(x - 4{,}2) = 0$
$x + 2 = 0$ или $x - 4{,}2 = 0$
$x = -2$ $\qquad$ $x = 4{,}2$
Если большее число (-2), то второе число $(-4{,}2)$.
Если большее число 4,2, то второе число 2.
Ответ: могли быть задуманы числа: -2 и $-4{,}2$; 4,2 и 2.

№ 702

в) $\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right) - x - 2 + 2y + \left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{5}y\right) - (x + y) =$

$= \frac{1}{5}(x - y) - x - 2 + 2y + \frac{4}{5}(x - y) - x - y = (x - y)\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) - 2x - 2 + 2y - y =$

$= (x - y)\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) - 2(x - y) - 2 - y = (x - y)(1 - 2) - 2 - y = -x + y - 2 - y = -x - 2$

Если $x = 5$, $y = 11$, то $-5 - 2 = -7$

г) $4p^2 + 2pq + 7 - q^2 - (-p^2 - pq + q^2) - 3p^2 - (3pq + 2p^2) + q^2 =$
$= 4p^2 + 2pq + 7 - q^2 + p^2 + pq - q^2 - 3p^2 - 3pq - 2p^2 + q^2 = -q^2 + 7$
Если $q = 2$, то $-2^2 + 7 = -4 + 7 = 3$.

№ 703

а) $5{,}5^3 + 6{,}7^3$ и $12{,}2^3$;
$(5{,}5 + 6{,}7)(5{,}5^2 - 5{,}5 \cdot 6{,}7 + 6{,}7^2)$ и $12{,}2^3$;
$12{,}2 \cdot ((5{,}5 + 6{,}7)^2 - 3 \cdot 5{,}5 \cdot 6{,}7)$ и $12{,}2^3$;
$12{,}2 \cdot (12{,}2^2 - 3 \cdot 5{,}5 \cdot 6{,}7)$ и $12{,}2^3$;
$12{,}2^3 - 3 \cdot 5{,}5 \cdot 6{,}7 \cdot 12{,}2 < 12{,}2^3$;

б) $12{,}4^3 - 11{,}6^3$ и $12{,}4^2 + 12{,}4 \cdot 11{,}6 + 11{,}6^2$;
$(12{,}4 - 11{,}6)(12{,}4^2 + 12{,}4 \cdot 11{,}6 + 11{,}6^2)$ и $12{,}4^2 + 12{,}4 \cdot 11{,}6 + 11{,}6^2$;
$0{,}8(12{,}4^2 + 12{,}4 \cdot 11{,}6 + 11{,}6^2) < 12{,}4^2 + 12{,}4 \cdot 11{,}6 + 11{,}6^2$;

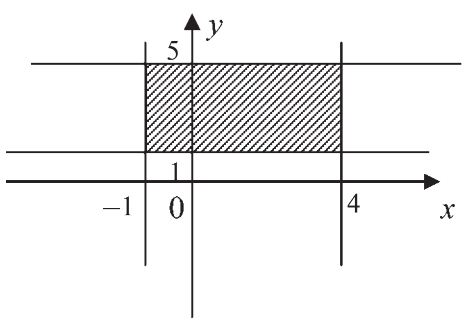
в) $7{,}9^3 - 6{,}3^3$ и $6{,}3^2 + 6{,}3 \cdot 7{,}9 + 7{,}9^2$;
$(7{,}9 - 6{,}3)(7{,}9^2 + 7{,}9 \cdot 6{,}3 + 6{,}3^2)$ и $6{,}3^2 + 6{,}3 \cdot 7{,}9 + 7{,}9^2$;
$1{,}6(6{,}3^2 + 6{,}3 \cdot 7{,}9 + 7{,}9^2) > 6{,}3^2 + 6{,}3 \cdot 7{,}9 + 7{,}9^2$;

г) $14{,}8^3 - 15{,}6^3$ и $0{,}8^3$;
$(14{,}8 - 15{,}6)(14{,}8^2 + 14{,}8 \cdot 15{,}6 + 15{,}6^2)$ и $0{,}8^3$;
$-0{,}8(14{,}8^2 + 14{,}8 \cdot 15{,}6 + 15{,}6^2) < 0{,}8^3$;

д) $21{,}7^3 + 13{,}4^3$ и $21{,}7^2 - 21{,}7 \cdot 13{,}4 + 13{,}4^2$;
$(21{,}7 + 13{,}4)(21{,}7^2 - 21{,}7 \cdot 13{,}4 + 13{,}4^2)$ и $21{,}7^2 - 21{,}7 \cdot 13{,}4 + 13{,}4^2$;
$35{,}1(21{,}7^2 - 21{,}7 \cdot 13{,}4 + 13{,}4^2) > 21{,}7^2 - 21{,}7 \cdot 13{,}4 + 13{,}4^2$.

№ 704 (е)

е) $-6 \leqslant x - 5 \leqslant -1$; $5 \leqslant y + 4 \leqslant 9$
$-1 \leqslant x \leqslant 4$; $1 \leqslant y \leqslant 5$



№ 708

а) $7x(x - 3) = 0$;
$7x = 0$ или $x - 3 = 0$;
$x = 0$ $x = 3$
Ответ: $\{0; 3\}$
б) $5y(y + 2) = 0$;
$5y = 0$ или $y + 2 = 0$;
$y = 0$ $y = -2$
Ответ: $\{-2; 0\}$.

г) $(4t + 8)(2t - 9) = 0$;
$4t + 8 = 0$ или $2t - 9 = 0$
$4t = -8$ $2t = 9$
$t = -2$ $t = 4{,}5$
Ответ: $\{-2; 4{,}5\}$
д) $4a^2(a - 2)(3a + 12) = 0$;
$4a^2 = 0$ или $a - 2 = 0$ или $3a + 12 = 0$
$a = 0$ $a = 2$ $3a = -12$
$a = -4$
Ответ: $\{-4; 0; 2\}$.

в) $(3z + 2)(z - 4) = 0$;
$3z + 2 = 0$ или $z - 4 = 0$;
$3z = -2$ $\quad z = 4$

$z = -\frac{2}{3}$

Ответ: $\{\frac{2}{3}; 4\}$.

е) $9b^3(6b + 5)(4b - 7) = 0$.
$9b^3 = 0$ или $6b + 5 = 0$ или $4b - 7 = 0$
$b = 0$ $\quad 6b = -5$ $\quad 4b = 7$

$b = -\frac{5}{6}$ $\quad b = 1,75$

Ответ: $\{-\frac{5}{6}; 0; 1,75\}$.

№ 709

а) $x(x + 6) = 352$;
$x > 0; x + 6 > 0 \longrightarrow x + 6$ — ?
$x(x + 6) = 352$;
$x^2 + 6x - 352 = 0$;
$(x^2 + 6x + 9) - 9 - 352 = 0$;
$(x + 3)^2 - 361 = 0$;
$(x + 3 - 19)(x + 3 + 19) = 0$;
$(x - 16)(x + 22) = 0$;
$x - 16 = 0$ или $x + 22 = 0$;
$x = 16$ $\quad x = -22$
$16 + 6 = 22$ (м)
Ответ: длина участка 22 м.

б) $x(x + 8) = 128$;
$x > 0; x + 8 > 0$ $\quad P$ — ?
$x(x + 8) = 128$;
$x^2 + 8x - 128 = 0$;
$(x^2 + 8x + 16) - 16 - 128 = 0$;
$(x + 4)^2 - 144 = 0$;
$(x + 4 - 12)(x + 4 + 12) = 0$;
$(x - 8)(x + 16) = 0$;
$x - 8 = 0$ или $x + 16 = 0$
$x = 8$ $\quad x = -16$
8 см ширина, $8 + 8 = 16$ (см) – длина
$P = (8 + 16) \cdot 2 = 48$ (см)
Ответ: периметр прямоугольника 48 см.

№ 710

а) $3x(x + 1) = 9 - 3x$;
$3x^2 + 3x = 9 - 3x$;
$3x^2 + 3x - 9 + 3x = 0$;
$3x^2 + 6x - 9 = 0$;
$3(x^2 + 2x - 3) = 0$;
$3(x^2 + 2x + 1 - 4) = 0$;
$3((x + 1)^2 - 2^2) = 0$;
$3(x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = 0$;
$3(x - 1)(x + 3) = 0$;
$x - 1 = 0$ или $x + 3 = 0$;
$x = 1$ $\quad x = -3$
Ответ: $\{-3; 1\}$

б) $2y(y - 5) = 6y + 18$;
$2y^2 - 10y = 6y + 18$;
$2y^2 - 10y - 6y - 18 = 0$;
$2y^2 - 16y - 18 = 0$;
$2(y^2 - 8y - 9) = 0$;
$2(y^2 - 8y + 16 - 25) = 0$;
$2((y - 4)^2 - 5^2) = 0$;
$2(y - 4 - 5)(y - 4 + 5) = 0$;
$2(y - 9)(y + 1) = 0$;
$y - 9 = 0$ или $y + 1 = 0$;
$y = 9$ $\quad y = -1$
Ответ: $\{-1; 9\}$

в) $a^2(12 - a) = 7a(2a - 5)$;
$12a^2 - a^3 = 14a^2 - 35a$;
$12a^2 - a^3 - 14a^2 + 35a = 0$;
$- a^3 - 2a^2 + 35a = 0$;
$-a(a^2 + 2a - 35) = 0$;
$-a((a^2 + 2a + 1) - 1 - 35) = 0$;
$-a((a + 1)^2 - 36) = 0$;
$-a(a + 1 - 6)(a + 1 + 6) = 0$;
$-a(a - 5)(a + 7) = 0$;
$a = 0$ или $a - 5 = 0$ или $a + 7 = 0$
$a = 5$ $\quad a = -7$
Ответ: $\{-7; 0; 5\}$

г) $2b^2(b - 5) = - 2b(18 - 4b)$;
$2b^3 - 10b^2 = -36b + 8b^2$;
$2b^3 - 10b^2 = -36b + 8b^2$;
$2b^3 - 10b^2 = -36b + 8b^2$;
$2b^3 - 10b^2 = -36b + 8b^2$;
$2b^3 - 10b^2 = -36b + 8b^2$;
$2b^3 - 10b^2 + 36b - 8b^2 = 0$;
$2b^3 - 18b^2 + 36b = 0$;
$2b(b^2 - 9b + 18) = 0$;
$2b(b^2 - 9b + 18) = 0$;
$2b((b^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot b + 20,25) - 20,25 + 18) = 0$;
$2b((b - 4,5)^2 - 2,25) = 0$;

$2b(b - 4{,}5 - 1{,}5)(b - 4{,}5 + 1{,}5) = 0;$

$2b(b - 6)(b - 3) = 0;$

$b = 0$ или $b - 6 = 0$ или $b - 3 = 0$

$b = 6 \qquad b = 3$

Ответ: {0; 3; 6}

№ 711 (а)

Пусть x – первое число, тогда второе число равно $(2{,}5 - x)$; $x \in Q$, $2{,}5 - x \in Q$. Их произведение $x(2{,}5 - x)$ по условию состовляет 1,5. Составим математическую модель задачи и найдем ее решение.

$$\begin{cases} x(2{,}5 - x) = 1{,}5 \\ x \in Q,\ 2{,}5 - x \in Q \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x - ? \\ 2{,}5 - x - ? \end{matrix}}$$

$2{,}5 - x^2 - 1{,}5 = 0$

$x^2 - 2{,}5x + 1{,}5 = 0$

$x^2 - x - 1{,}5x + 1{,}5 = 0$

$x(x - 1) - 1{,}5(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x - 1{,}5) = 0$

$x = 1$ или $x = 1{,}5$

Если $x = 1$, то $2{,}5 - 1 = 1{,}5$; $1 \in Q$, $1{,}5 \in Q$

Если $x = 1{,}5$, то $2{,}5 - 1 = 1$; $1{,}5 \in Q$, $1 \in Q$

Ответ: задуманы числа 1 и 1,5.

№ 715 (а)

а) $9xyz - (-12xyz^2) - (9xyz^2 + 6xyz - 7zyx^2 + 10x^2yz) =$

$= 9xyz + 12xyz^2 - 9xyz^2 - 6xyz + 7zyx^2 - 10x^2yz =$

$= 3xyz^2 - 3x^2yz + 3xyz = 3xyz(z - x + 1)$

Если $x = 2$; $y = 3$; $z = -1$, то $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1)(-1 - 2 + 1) = -18 \cdot (-2) = 36$

№ 716

а) $7{,}2^3 + 4{,}3^3 < 11{,}5^3$;

б) $19{,}3^3 - 18{,}4^3 < 19{,}3^2 + 19{,}3 \cdot 18{,}4 + 18{,}4^2$;

в) $21{,}5^3 - 15{,}6^3 > 21{,}5^2 + 21{,}5 \cdot 15{,}6 + 15{,}6^2$;

г) $13{,}6^3 - 14{,}9^3 < 1{,}3^3$;

д) $16{,}9^3 + 19{,}7^3 > 16{,}9^2 - 16{,}9 \cdot 19{,}7 + 19{,}7^2$.

Задачи для самоконтроля к главе 4

№ 725

а) $(-x)\cdot(-x)\cdot(-x)\cdot(-x) = (-x)^4$;
б) $-3y\cdot 3y\cdot 4z\cdot 4z\cdot 4z = -(3y)^2\cdot(4z)^3$;
в) $(mn)\cdot(mn)\cdot(mn)\cdot(mn)\cdot(mn) = (mn)^5$;
г) $(c-d)\cdot(c-d)\cdot(c-d) = (c-d)^3$.

№ 726

а) $(-11)^{101} < 0$;

б) $-\left(\frac{7}{9}\right)^{516} > 0$;

в) $(-3{,}7)^{113}\cdot(-0{,}21)^{516} < 0$

г) $-\left(\frac{5}{11}\right)^{99} : (39{,}7)^{101} > 0$.

№ 727

а) $((-3)^2 + (-1)^5\cdot 8) : (-2)^3 = (9 - 1\cdot 8) : (-8) = 1 : (-8) = -\frac{1}{48} = -0{,}125$

б) $-\frac{1}{0{,}1^3} - \frac{1}{0{,}1^2}\cdot(0{,}5 - 2^1) = -\frac{1}{0{,}001} - \frac{1}{0{,}01}\cdot(0{,}5 - 2) = -1000 - 100\cdot(-1{,}5) =$
$= -1000 + 150 = -850$

в) $-2\cdot(-4)^2 : 3\frac{1}{5} + \left(-5^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^2 = -2\cdot 2^4 : 3\frac{1}{5} + 2^4 = -2^5 : 3{,}2 + 2^4 =$
$= 2^4(1 - 2 : 3{,}2) = 2^4\cdot 0{,}375 = 16\cdot 0{,}375 = 6$

г) $-4^2\cdot(-1)^7 - \left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot\left(-3\frac{3}{5} - 3^2\right) + (-2)^5 = -16\cdot(-1) - \frac{25}{9}\cdot\left(-12\frac{3}{5}\right) - 32 =$

$= 16 + 35 - 32 = 19$

№ 728

а) $\dfrac{2^{16}\cdot 14^{23}\cdot 5^{35}\cdot(2^5)^3\cdot(7^{36} : 7^{13})}{10^{24}\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{18}\cdot 35^{28}\cdot 2^9} = \dfrac{2^{16}\cdot 7^{23}\cdot 2^{23}\cdot 5^{35}\cdot 2^{15}\cdot 7^{23}}{2^{24}\cdot 5^{24}\cdot 7^{18} : 5^{18}\cdot 5^{28}\cdot 7^{28}\cdot 2^{29}} = \dfrac{2^{54}\cdot 7^{46}\cdot 5^{35}}{2^{53}\cdot 5^{34}\cdot 7^{46}} = 2\cdot 5 = 10$

б) $\dfrac{(9^{15} : 3^{28})\cdot 24^3\cdot 17^{34}\cdot(17^3)^{10}\cdot\left(\frac{6^{48}}{6^{15}}\right)}{34^{35}\cdot(17^{63} : 17^{34})\cdot 2^{39}\cdot 3^{34}} - 1 = \dfrac{(3^{10} : 3^{28})\cdot 2^{43}\cdot 17^{34}\cdot 17^{30}\cdot 6^{33}}{17^{35}\cdot 2^{35}\cdot 17^{29}\cdot 2^{39}\cdot 3^{34}} - 1 =$

$= \dfrac{3^2\cdot 2^{43}\cdot 17^{64}\cdot 2^{33}\cdot 3^{33}}{17^{64}\cdot 2^{74}\cdot 3^{34}} - 1 = 3\cdot 2^2 - 1 = 12 - 1 = 11$

№729

а) $3^5\cdot 3^9\cdot 3 = 3^{15}$;
б) $(-bc)^3\cdot(-bc)\cdot(-bc)^{12}\cdot(-bc)^4\cdot(-bc) = (-bc)^{21}$;
в) $x^{15} : x^8 = x^7$;
г) $(3p-2q)^{24} : (3p-2q)^{18} : (3p-2q)^2 = (3p-2q)^4$
д) $(-k)^6\cdot(-k)^{12} : (-k)^3\cdot(-k)^4 : (-k)^7 = (-k)^{12} = k^{12}$;
е) $(-abc)^{20} : (-abc)^{10}\cdot(-abc) : (-abc)^3 = (-abc)^8$;
ж) $((-y)^3)^{11} = -y^{33}$;
з) $(-(-n)^2)^9 = -n^{18}$.

№ 757 (д, е, и)

д) $\frac{36p^2 - 9q^2}{216p^3 + 27q^3} = \frac{(6p - 3q)(6p + 3q)}{(6p + 3q)(36p^2 - 18pq + 9q^2)} =$

$= \frac{6p - 3q}{36p^2 - 18pq + 9q^2}$

е) $\frac{8a^3 - 64b^3}{4a^2 + 8ab + 16b^2} = \frac{(2a - 4b)(4a^2 + 8ab + 16b^2)}{4a^2 + 8ab + 16b^2} = 2a - 4b;$

и) $\frac{c^3 + 12c^2d + 48cd^2 + 64d^3}{c^2 - 16d^2} = \frac{(c + 4d)^3}{(c - 4d)(c + 4d)} = \frac{(c + 4d)^2}{c - 4d}.$

№ 758 (е, и, к, л, м)

е) $5pq^2 - q^3 - 5p^2q + p^3 = (5pq^2 - 5p^2q) - (q^3 - p^3) =$
$= 5pq(q - p) - (q - p)(q^2 + pq + q^2) =$
$= (q - p)(5pq - q^2 - pq - q^2) = (q - p)(4pq - q^2 - q^2)$

и) $64a^3b^6 + 48a^2b^4c^2 + 12ab^2c^4 + c^6 = (4ab^2)^3 + 3 \cdot (4ab^2)^2 \cdot c^2 + 3 \cdot 4ab^2 \cdot (c^2)^2 + (c^2)^3 =$
$= (4ab^2 + c^2)^3$

к) $d^3 + 12p^2c^6d + 6pc^3d^2 + 8p^3c^9 = (d + 2pc^3)^3;$

л) $m^2 - p^2 + 4n^2 - 9q^2 - 4mn - 6pq = (m^2 - 4mn + 4n^2) - (p^2 + 6pq + 9q^2) =$
$= (m - 2n)^2 - (p + 3q)^2 = (m - 2n - p - 3q)(m - 2n + p + 3q);$

м) $9x^2 + y^2 - z^2 - 25t^2 + 6xy + 10zt = (9x^2 + 6xy + y^2) - (z^2 - 10zt + 25t^2) =$
$= (3x + y)^2 - (z - 5t)^2 = (3x + y - z + 5z)(3x + y + z - 5z).$

№ 759 (д, е)

д) $p^6 + 12p^3 + 27 = ((p^3)^2 + 2 \cdot p^3 \cdot 6 + 6^2) - 36 + 27 = (p^3 + 6)^2 - 9 =$
$= (p^3 + 6 - 3)(p^3 + 6 + 3) = (p^3 + 3)(p^3 + 9);$

е) $q^4 - 12q^2 + 32 = ((q^2)^2 - 2 \cdot q^2 \cdot 6 + 6^2) - 36 + 32 = (q^2 - 6)^2 - 4 =$
$= (q^2 - 6 - 2)(+ 2) = (q^2 - 8)(q^2 - 4).$

№ 761

а) $c^2 - 6c - 27 = 0;$
$(c^2 - 2 \cdot c \cdot 3 + 9) - 9 - 27 = 0;$
$(c - 3)^2 - 36 = 0;$
$(c - 3 - 6)(c - 3 + 6) = 0;$
$(c - 9)(c + 3) = 0;$
$c - 9 = 0$ или $c + 3 = 0$
$c = 9$ $\quad c = -3$
Ответ: $\{-3; 9\}$

б) $z^2 + 3z - 28 = 0;$
$(z^2 + 2 \cdot z \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2) - 2{,}25 - 28 = 0;$
$(z + 1{,}5)^2 - 30{,}25 = 0;$
$(z + 1{,}5 - 5{,}5)(z + 1{,}5 + 5{,}5) = 0;$
$(z - 4)(z + 7) = 0;$

в) $d^2 + d - 42 = 0;$
$(d^2 + 2 \cdot d \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2) - 0{,}25 - 42 = 0;$
$(d + 0{,}5)^2 - 42{,}25 = 0;$
$(d + 0{,}5 - 6{,}5)(d + 0{,}5 + 6{,}5) = 0;$
$(d - 6)(d + 7) = 0;$

$z-4=0$ или $z+7=0$

$z=4$ $\quad z=-7$

Ответ: $\{-7; 4\}$

$d-6=0$ или $d+7=0$

$d=6$ $\quad d=-7$

Ответ: $\{-7; 6\}$

№ 763

а) $\dfrac{ab+6a-2b-12}{b^2+12b+36}=\dfrac{(ab-2b)+(6a-12)}{(b+6)^2}=\dfrac{b(a-2)+6(a-2)}{(b+6)^2}=\dfrac{(a-2)(b+6)}{(b+6)^2}=\dfrac{a-2}{b+6}$;

б) $\dfrac{16a+4b}{8ac+2bc-4ad-bd}=\dfrac{4(4a+b)}{(8ac+2bc)-(4ad+bd)}=\dfrac{4(4a+b)}{2c(4a+b)-d(4a+b)}=\dfrac{4(4a+b)}{(4a+b)(2c-d)}=$

$=\dfrac{4}{2c-d}$.

№ 764

б) Пусть ширина первоначального участка x м, тогда его длина $x+6$ (м), где $x>0$, $x+6>0$.

	Ширина, м	Длина, м	Площадь, м^2
Первоначальный	x	$x+6$	$x(x+6)$
Измененный	$x+7$	$(x+6)-7$	$(x+7)(x-1)$

$x+7>0$, $x-1>0$

По условию площадь нового участка в 2 раза меньше, чем площадь исходного, увеличенная на 2 м^2:

$2(x+7)(x-1)=x(x+6)+2$;

$x>0, x+6>0, x+7>0, x-1>0 \quad \longrightarrow \quad x+6$ — ?

$2(x+7)(x-1)=x(x+6)+2$;

$2(x^2+7x-x-7)=x^2+6x+2$;

$2(x^2+6x-7)=x^2+6x+2$;

$2x^2+12x-14=x^2+6x+2$;

$2x^2+12x-14-x^2-6x-2=0$;

$2x^2+12x-14-x^2-6x-2=0$;

$x^2+6x-16=0$;

$(x^2+2\cdot x\cdot 3+9)-9-16=0$;

$(x+3)^2-25=0$;

$(x+3-5)(x+3+5)=0$;

$(x-2)(x+8)=0$;

$x-2=0$ или $x+8=0$

$x=2$ $\quad x=-8$

Корень -8 не подходит по условию.

Ширина участка 2 м, длина $2+6=8$ (м)

Ответ: длина участка 8 м.

в) Пусть ширина прямоугольника x см, тогда $x+12$ (см) длина прямоугольника, где $x>0$, $x+12>0$. По условию площадь прямоугольника 133 см^2

$x(x+12)=133$;

$x>0, x+12>0 \quad \longrightarrow \quad P$ — ?

$x(x+12)=133$;

$x^2+12x-133=0$;

$(x^2+2\cdot x\cdot 6+36)-36-133=0$;

$(x+6)^2-169=0$;

$(x+6-13)(x+6+13)=0$;

$(x-7)(x+19)=0$;

$x-7=0$ или $x+19=0$

$x=7$ $\quad x=-19$

Корень -19 не подходит по условию.
Ширина прямоугольника 7 см.
Длина прямоугольника: $7 + 12 = 19$ (см)
$P = (a + b) \cdot 2$
$(7+ 19) \cdot 2 = 52$ (см)
Ответ: периметр прямоугольника 52 см.

№ 780 (а)
а) $(3a - 1)(3a + 1) + 2b(2b - 6a) = 9a^2 - 1 + 4b^2 - 12ab =$
$= (9a^2 - 12ab + 4b^2) - 1 = (3a - 2b)^2 - 1$
Возможное наименьшее значение равно -1.

№ 781 (а)
а) $4(5x - 7) - 25(x - 1)(x + 1) = 20x - 28 - 25(x^2 - 1) =$
$= 20x - 28 - 25x^2 + 25 =$
$= -25x^2 + 20x - 3 = -(25x^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2 + 4) + 4 - 3 = -(5x - 2)^2 + 1$
Возможное наибольшее значение равно 1.

№ 782 (а).
а) $2(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) - 3^{16} = (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) - 3^{16} =$
$= (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) - 3^{16} = (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) - 3^{16} =$
$= (3^8 - 1)(3^8 + 1) - 3^{16} = 3^{16} - 1 - 3^{16} = -1.$

Глава 5. Введение в теорию функций

Основные содержательные цели:

• сформировать понятия «функция», «область определения», «область значения», «линейная функция»;

• уточнить понятие прямой пропорциональности;

• сформировать умение задавать функции разными способами, строить и читать графики прямой пропорциональности и линейной функции;

• сформировать понятие «кусочно-линейная функция» и умение строить ее график.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания учащиеся:

• *повторяют и систематизируют* знания, полученные в 5 — 6 классах;

• *используют* математическую терминологию в устной и письменной речи;

• *распознают* функции из множества зависимостей;

• *определяют* область определения и область значения функции;

• *задают* функции разными способами;

• *строят и читают* графики прямой пропорциональности и линейной функции;

• *строят* кусочно-линейные функции;

• *используют* алгоритмы сложения и вычитания многочленов;

• *применяют* правило умножения одночлена на многочлен;

• *применяют* правило умножения многочлена на многочлен;

• *используют* формулы квадрата суммы и квадрата разности для рационализации вычислений;

• *используют* формулу квадрата трехчлена;

• *применяют* формулы произведения разности и суммы двух выражений для рационализации упрощения выражений;

• *применяют* формулу разности квадратов для рационализации упрощения выражений;

• *применяют* формулы куба разности и куба суммы для рационализации упрощения выражений;

• *используют* формулы суммы и разности кубов для рационализации упрощения выражений;

• *применяют* разные способы (вынесения общего множителя, группировка) для разложения многочлена на множители;

• *применяют* формулы сокращенного умножения для разложения многочлена на множители;

• *решают* задачи с помощью разложения многочленов на множители;

• *используют* схемы и таблицы;

• *строят и выполняют* алгоритмы чтения, записи и составления выражений;

• *работают* с различными математическими моделями;

• *решают* текстовые задачи;

• *решают* простейшие уравнения;

• *выполняют* действия с рациональными числами;

• *определяют* вид, истинность высказывания, *строят* отрицание ложных высказываний.

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

П. 5.1.1 ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНАМИ

Основные содержательные цели:

1) формировать понятия «функциональная зависимость», «область определения», «область значения»;

2) формировать способность строить алгоритмы на примере алгоритма определения является ли зависимость функцией;

3) повторить способы решения уравнений и текстовых задач.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с понятием «функция». Функциональная линия курса математики «Учусь учиться» начинает развиваться еще в начальной школе. Уже тогда учащиеся выполняют задания на поиск закономерностей и учатся выражать их в речи, устанавливают зависимость между компонентами и результатами арифметических действий, задают их с помощью таблиц, работают с величинами (длина, масса, площадь, объем, скорость, время и др.). В результате функциональной пропедевтики учащиеся знают понятие переменной, умеют работать с координатным углом, а в дальнейшем с координатной плоскостью, имеют опыт построения графиков по формулам и таблицам. Им известно, что с помощью переменных можно представлять зависимости между величинами, фиксировать их с помощью формул, таблиц и графиков. Имеют представление об обратной и прямой пропорциональности, их графиках. Кроме того, в шестом классе учащиеся получили первичное представление о функциональной зависимости, как о зависимости определенного вида.

В программе дается следующее определение функции.

Функцией $y = f(x)$ называется правило f, по которому **каждому** элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие **единственный** элемент y из множества Y.

Множество X при этом называется **областью определения**, а множество Y — **областью значений** данной функции.

Для отработки понятия «функция» в учебнике предложены наглядные схемы, которые помогают учащимся осознать это понятие и его суть. На схеме изображаются множество X, множество Y и их элементы, стрелками обозначается, как элемент первого множества поставлен в соответствие элементу второго множества. Учащиеся, проговаривая определение, на схемах могут отмечать, что именно не удовлетворяет определению. Например, обвести элемент множества X, который остался без пары, либо обвести стрелки, которые одному элементу множества X ставят в соответствие несколько элементов множества Y.

Учитель может попросить учащихся исправить схему так, чтобы она отражала функциональную зависимость.

Необходимо обсудить с учащимися вопросы практического применения зависимостей подобного вида (учитель может кратко рассказать о кодировании информации, используя материал пункта 3 данного параграфа и предложить тем учащимся, которые заинтересовались этим вопросом, познакомиться с этим материалом в учебнике).

Урок. Функциональная зависимость между величинами

Новое знание

Определение функциональной зависимости, алгоритм определения является ли зависимость функцией.

Актуализация

Повторить: нахождение значения буквенного выражения при заданных значениях переменной.

Задание на пробное действие

Дать определение понятия «функциональная зависимость».

Фиксация затруднения

Не можем дать определение понятия «функциональная зависимость».

Не можем обосновать, что правильно определили понятие «функциональная зависимость».

Фиксация причины затруднения

Нет определения понятия «функциональная зависимость».

Цель деятельности

Построить определение понятия «функциональная зависимость».

Эталон

Определение функциональной зависимости

Функцией $y = f(x)$ называется правило f, по которому **каждому** элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие **единственный** элемент y из множества Y. Множество X при этом называется **областью определения**, а множество Y — **областью значений** данной функции.

Алгоритм определения является ли зависимость функцией

1. Указать множество X, являющееся областью определения.
2. Указать множество Y, являющееся областью значений.
3. Убедиться в том, что каждому элементу из области определения X поставлен в соответствие некоторый элемент из области значений Y (существование).
4. Убедиться в том, что в области определения X нет элементов, которым поставлено в соответствие более одного элемента из области значений Y (единственность).

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 1

а) $p = 3q$

p	1	3	5	–3
q	3	9	15	–9

б) $p = \frac{1}{2} q$

p	1	4	0	–4
q		2	0	–2

в) $p = \frac{4}{q}$

p	1	–1	2	–2
q	4	–4	2	–2

г) $p = 5q^2$

p	1	–1	0	2
q	5	5	0	20

д) $p = 3 + q$

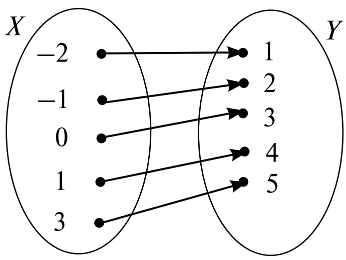
p	0	–3	1	4
q	3	0	4	7

е) $p = 7$

p	1	–5	7	–8
q	7	7	7	7

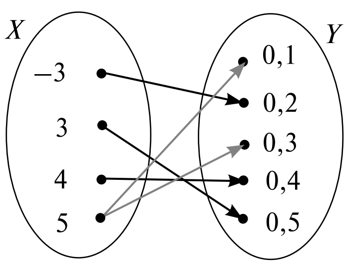
№ 3

$X = \{-2; -1; 0; 1; 3\}$ $Y = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ Зависимость является функцией.

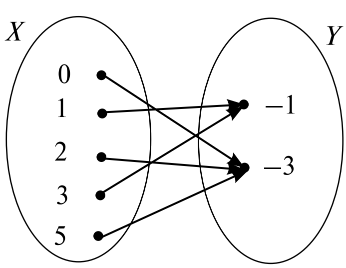


В области определения нет элементов, которым поставлено в соответствие более одного элемента из области значения.

б) $X = \{-3; 3; 4; 5\}$ $Y = \{0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5\}$. Не является функцией.



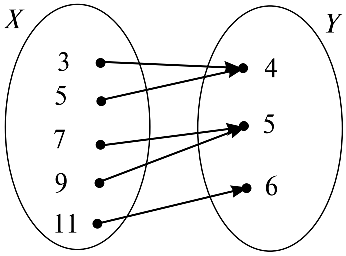
в) $X = \{0; 1; 2; 3; 5\}$ $Y = \{-3; -1\}$. Является функцией.



г) Область определения: $X = \{3; 5; 7; 9; 11\}$

Область значения: $Y = \{4; 5; 6\}$

Зависимость является функцией, т. к. каждому значению из области определения соответствует единственное значение из области значения.



№ 4

$V = a^3$

а) Если a = 3 см, то V = 33 = 27 (см^3);

б) Если a = 2 м, то $V = 2^3$ = 8 (м^3);

в) Если $a = \frac{1}{2}$ дм, то $V = (\frac{1}{2})^3 =$ (дм^3);

г) Если a = 10 мм, то $V = 10^3$ = 1000 (мм^3);

д) Если $a = \frac{1}{4}$ м, то $V = (\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$ (м^3)

№ 5

$s = 5t$

а) Если t = 3 ч, то 5 · 3 = 15 (км);

б) Если t = 15 мин = 0,25 ч, то 5 · 0,25 = 1,25 (км);

в) Если t = 1 ч 20 мин = 1 ч, то $5 \cdot 1\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$ (км);

г) Если t = 3 ч 30 мин = 3,5 ч, то 5 · 3,5 = 17,5 (км);

№ 10

а) $5 - (3{,}25x - 4{,}6) = 5x - (5 - 0{,}4x) + 0{,}75x - (2x - 9) + 0{,}6x$;

$5 - 3{,}25x + 4{,}6 = 5x - 5 + 0{,}4x + 0{,}75x - 2x + 9 + 0{,}6x$;

$-3{,}25x - 5x - 0{,}4x - 0{,}75x + 2x - 0{,}6x = -5 + 9 - 5 - 4{,}6$;

$-8x = -5{,}6$

$x = 0{,}7$

Ответ: {0,7}

б) $5{,}7y + (7{,}2 - 0{,}9y) = 34{,}15 + 3{,}45y - (18{,}2 - 6{,}3y) - 3{,}8$;

$5{,}7y + 7{,}2 - 0{,}9y = 34{,}15 + 3{,}45y - 18{,}2 + 6{,}3y - 3{,}8$;

$5{,}7y - 0{,}9y - 3{,}45y - 6{,}3y = 34{,}15 - 18{,}2 - 3{,}8 - 7{,}2$;

$-5{,}95y = 5{,}95$;

$y = -1$

Ответ: {–1}.

в) $1{,}2a - 5{,}3 = 0{,}5a - (0{,}75a - (5{,}4 - 1{,}85a)) - 8{,}7a + 7{,}3$;

$1{,}2a - 5{,}3 = 0{,}5a - 0{,}75a + 5{,}4 - 1{,}85a - 8{,}7a + 7{,}3$;

$1{,}2a - 0{,}5a + 0{,}75a + 1{,}85a + 8{,}7a = 5{,}4 + 7{,}3 + 5{,}3$;

$12a = 18$;

$a = 1{,}5$

Ответ: {1,5}.

г) $7{,}1 - (6{,}9b - 0{,}9) - 1{,}4 - (5{,}7b + 3{,}9) = 34{,}5 + 3{,}4b - 7{,}8$;

$7{,}1 - 6{,}9b + 0{,}9 - 1{,}4 - 5{,}7b - 3{,}9 = 34{,}5 + 3{,}4b - 7{,}8$;

$-6{,}9b - 5{,}7b - 3{,}4b = 34{,}5 - 7{,}8 - 7{,}1 - 0{,}9 + 1{,}4 + 3{,}9$;

$-16b = 24$;

$b = -1{,}5$

Ответ: {–1,5}.

№ 11 (а)

Задание выполняется у доски с комментарием.

Первое число $11a + 6$, второе число $11c + 8$, где $11a + 6 > 0$, натуральное; $11c + 8 > 0$, натуральное.

По условию их сумма 36:

$11a + 6 + 11c + 8 = 36$;

$11a + 11c + 14 = 36$;

$11a + 11c = 22$;

$a + с = 2$

a	c	Первое число	Второе число
0	2	6	30
1	1	17	19
2	0	28	8

Ответ: 6 и 30; 17 и 19; 28 и 8.

№16

а) Зависимость функциональная, т.к. каждому значению множества X существует единственное значение множества Y.

б) Не является функцией, т.к. значению 44 соответствует два значения 11 и 14.

в) Зависимость функциональная, т.к. каждому значению множества X существует единственное значение множества Y.

г) Не является функцией, т.к. значению 3 не соответствует ни одно значение множества Y.

№ 17

а) $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $Y = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ функция.

б) $X = \{1; 2\}$; $Y = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ не является функцией.

в) $X = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$; $Y = \{-1; 2; 100\}$ функция.

г) $X = \{1; ; 5; 7; 9\}$; $Y = \{-2\}$ функция.

№ 18

$A = 20t$

$T = \{t \in Q\colon t \geqslant 0\}$; $A = \{A \in Q\colon A \geqslant 0\}$, является функцией.

а) $t = 10$ мин, $A = 200$ (ед.)

б) $t = 2$ ч = 120 мин, $A = 2400$ (ед.)

в) $t = 90$ с = 1,5 мин, $A = 30$ (ед.)

г) $t = 2$ сут. = 2880 мин, $A = 57\,600$ (ед.)

д) $t = 1$ ч 20 мин = 80 мин, $A = 1600$ (ед.)

№ 19

$C = 30p$

$P = \{p \in Q\colon p \geqslant 0\}$; $C = \{C \in Q\colon C \geqslant 0\}$, является функцией.

а) $p = 5$ кг, $C = 150$ *р.*;

б) $p = 500$ г = 0,5 кг, $C = 150$р.;

в) $p = 1$ кг 300 г = 1,3 кг, $C = 39$ р.;

г) $p = 2$ кг 800 г = 2,8 кг, $C = 84$ р.

П. 5.1.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Основные содержательные цели:

1) формировать знания о способах задания функций;

2) формировать умение задавать функции разными способами;

3) повторить способы решения текстовых задач, упрощение выражений.

Особенности изучения учебного содержания

В этом пункте учащиеся систематизируют свои знания о способах задания функции (с помощью таблицы, графика, формулы) и знакомятся с новым способом (с помощью словесного описания).

Семиклассники учатся переходить от одного способа задания функции к другому.

Урок. Способы задания функции.

Новое знание:

Обозначения функции, условия задания функции, способы задания функции, алгоритм нахождения значения функции в некоторой точке.

Актуализация:

Повторить: определение функциональной зависимости.

Задание на пробное действие:

Перечислите способы задания функции.

Фиксация затруднения:

Я не могу точно сказать, что правильно назвал способы и есть ли еще способы задания функций.

Фиксация причины затруднения:

Нет эталона со способами задания функции.

Цель деятельности:

Выяснить, какие способы задания функций существуют.

Эталон:

Обозначения функции:

$$y = f(x)$$

x (независимая переменная, **аргумент**) $\in X$ (область определения)

у (зависимая переменная, **функция)** $\in Y$ (область значения)

Условия задания функции:

1. Указать область определения.
2. Указать правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляет единственное значение функции y.

Способы задания функции:

1. Словесное описание.
2. Таблица.
3. Формула (аналитический способ).
4. График.

Алгоритм нахождения значения функции в некоторой точке:

1. Найти абсциссу, равную x.
2. Провести через нее прямую, параллельную оси Oy.

3. Найти точку пересечения этой прямой с графиком функции.

4. Провести через найденную точку пересечения прямую, параллельную Ox.

5. Определить ординату этой точки пересечения.

Урок. Функции, способы задания функций (РТ).

Основные цели:

1) тренировать умение задавать функции разными способами, находить значения функций по данным значениям аргументов, находить значения аргументов по данным значениям функций;

2) тренировать умение переводить с русского языка на математический язык, решать уравнения, используя метод разложения на множители.

Урок. Функциональная зависимость между величинами. Способы задания функции (РК).

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения определять функциональную зависимость, задавать функции разными способами, находить значения функций по данным значений аргументов и значения аргумента по данному значению функции;

2) тренировать умение решать текстовые задачи доказывать общие утверждения.

Решение некоторых заданий.

№ 37 (а)

1) Область определения: $X = N_0$

Область значения: $Y = \{-3; 3\}$

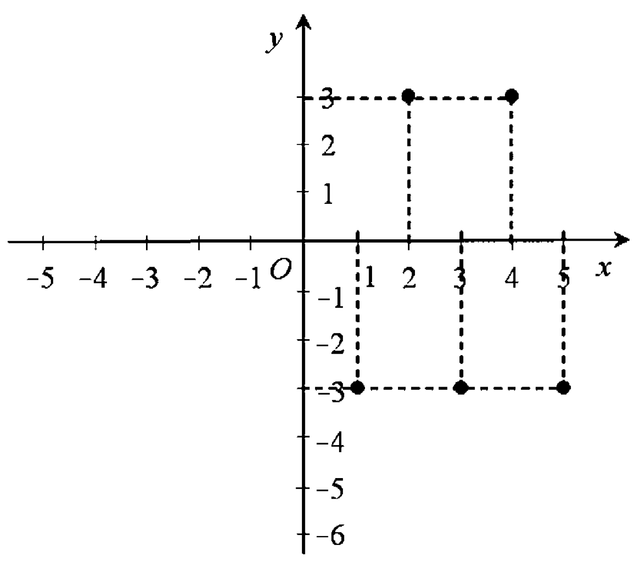
$f(24) = 3; f(17) = -3; f(128) = 3.$

2) с помощью формулы нельзя;

таблица:

x	2	3	4	5
y	3	–3	3	–3

график:



№ 38 (б, г, е, з).

б) $y = 2x + 3$

$X = Q$.

г) $y = \frac{7x + 5}{3}$

$X = Q$.

е) $y = \frac{2x}{3x - 8}$

X — множество рациональных чисел, кроме $2\frac{2}{3}$.

з) $y = \frac{11(x - 5)}{x^3 (2x + 6)}$

X — множество рациональных чисел, кроме чисел 0 и – 3.

№ 39 (б, г).

б) $y = \frac{4}{2x - 7}$

Если $x = 0$, то $y = -\frac{4}{7}$.

Если $x = -1$, то $y = -\frac{4}{9}$.

Если $x = 4$, то $y = 4$.

г) $y = \frac{4x - 3}{5}$

Если $x = 0$, то $y = -\frac{3}{5} = -0{,}6$.

Если $x = 0{,}75$, то $y = 0$.

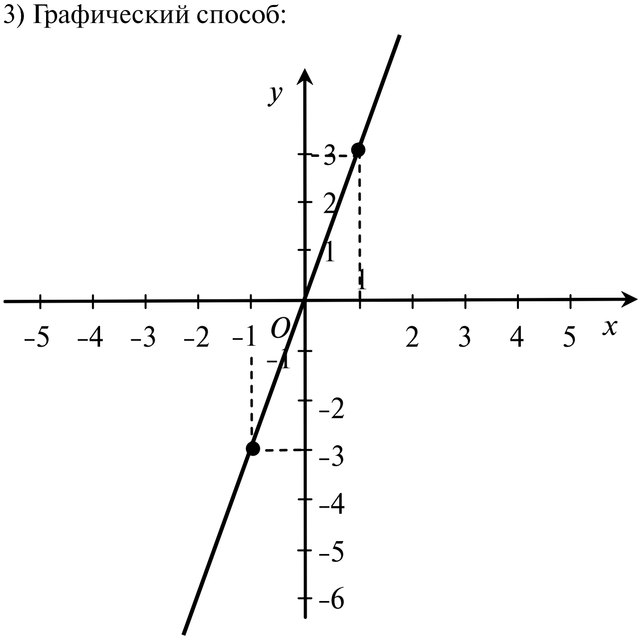
Если $x = -2$, то $y = -\frac{11}{5} = -2{,}2$.

№ 41

а) 1) Словесное описание: каждому числу ставится в соответствие число в три раза большее.

2) Аналитический способ: $y = 3x$.

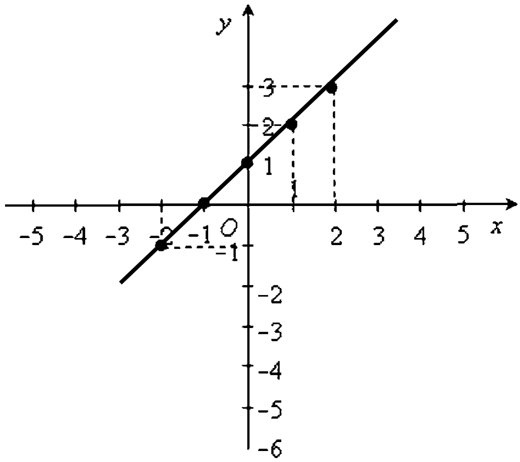
3) Графический способ:



б) 1) Словесное описание: каждому числу ставится в соответствие число на 1 большее.

2) Аналитический способ: $y = x + 1$.

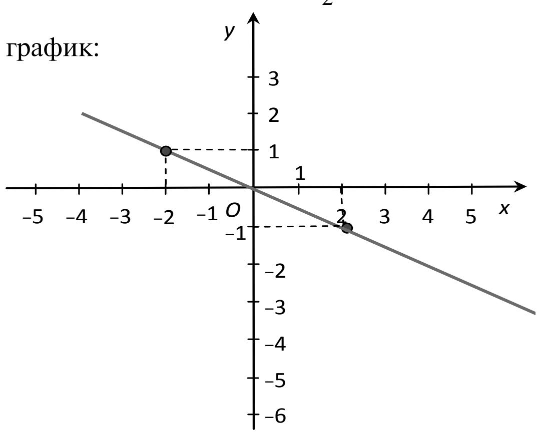
3) Графический способ:



в) словесное описание: каждое значение независимой переменной разделили на –2 (умножили на –0,5);

формула: $y = -0{,}5x$ ($y = -\frac{x}{2}$);

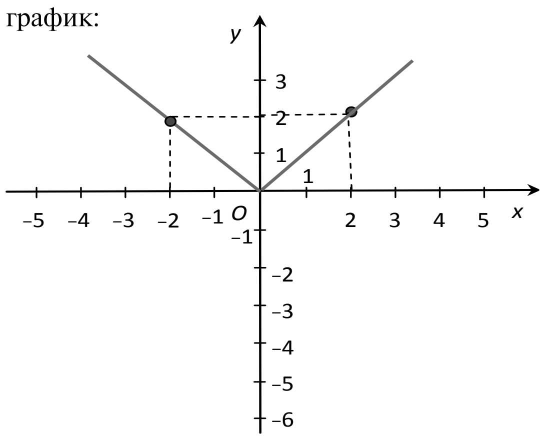
график:



г) словесное описание: каждое значение функции равно модулю соответствующего аргумента;

формула: $y = |x|$;

график:



№ 42

а)

а)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2

б) каждое значение аргумента уменьшено на 2 (каждое значение функции на 2 единицы меньше соответствующего значения аргумента).

в) $y = x - 2$.

б)

а) Табличный способ:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	2	1,5	1	0,5	0	–0,5	–1	–1,5	–2

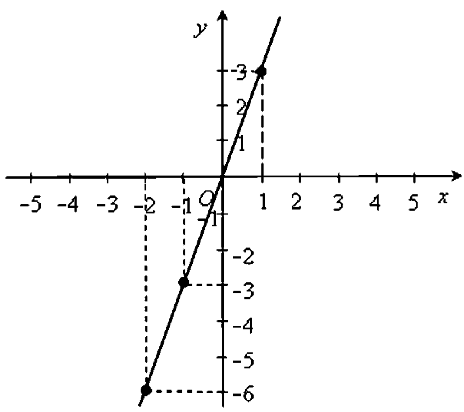
б) Словесный способ: каждое число уменьшено в 2 раза.

в) Аналитический способ: $y = 0{,}5x$

№ 43

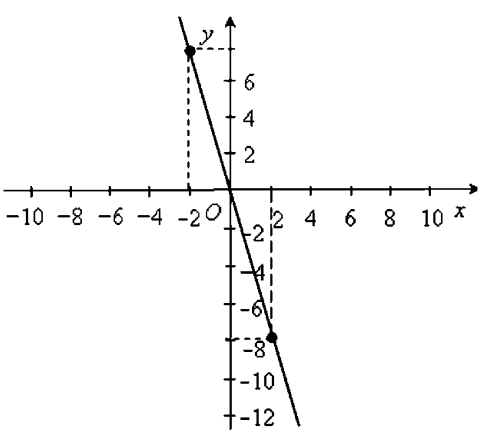
а) $y = 3x$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9	12



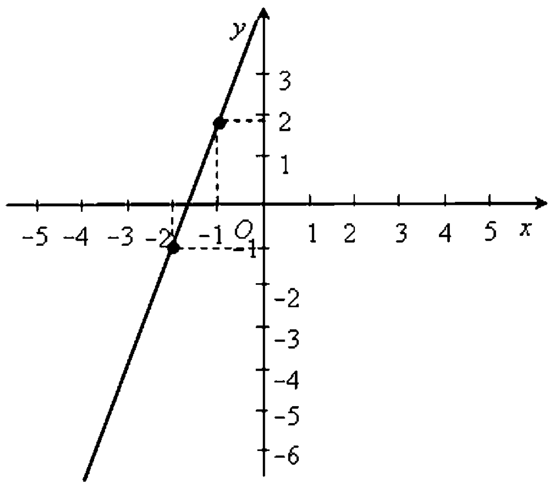
б) $y = -4x$

x	– 6	–4	–2	0	2	4	6	3	4
y	24	16	8	0	–8	–16	–24	9	12



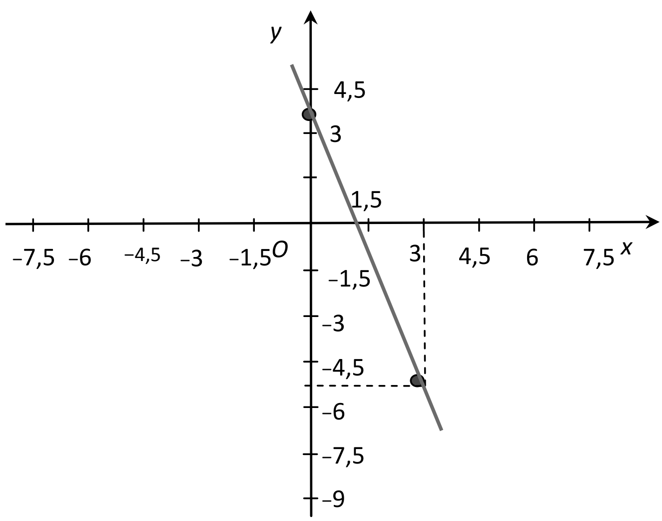
в) $y = 3x + 5$

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	–1	0,5	2	3,5	5	6,5	8	9,5	11



г) $y = 4 - 3x$

x	–4,5	–3	–1,5	0	1,5	3	4,5	1,5	2
y	17,5	13	8,5	4	–0,5	–5	–9,5	9,5	11

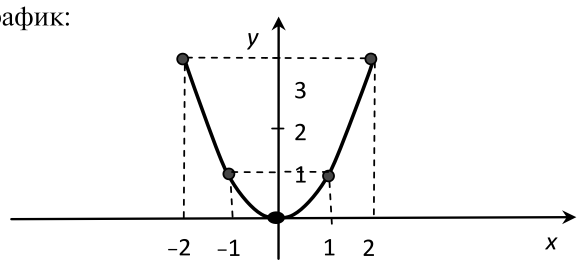


№ 44

а) Словесное описание: значение функции равно квадрату соответствующего аргумента.

Формула: $y = x^2$

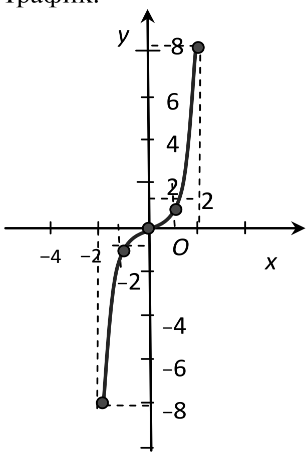
График:



б) Словесное описание: значение функции равно кубу соответствующего аргумента.

Формула: $y = x^3$

График:



№ 45

а) $y = 2x - 2$

б) $y = |x| - 1$

№ 46

а) $y = 5x - 6$, $y = -2$

$5x - 6 = -2;$

$5x = 4;$

$x = 0,8$

б) $y = \dfrac{11}{3x-8}$, $y = 3$

$\dfrac{11}{3x-8} = 3;$

$3x - 8 = \dfrac{11}{3};$

$3x = \dfrac{35}{3};$

$x = \dfrac{35}{9};$

$x = 3\dfrac{8}{9}$

в) $y = \dfrac{7}{x}$, $y = 2$

$\dfrac{7}{x} = 2;$

$x = 3,5$

г) $y = \dfrac{9x-5}{2}$, $y = 0$

$\dfrac{9x-5}{2} = 0;$

$9x - 5 = 0;$

$9x = 5;$

$x = \dfrac{5}{9}$

№ 47

а) $(7 + a)^2(b^2 - c^2);$

б) $(9 + x + y)^3 : (3^3 + z^3);$

в) $2(6^3 - p^3)(2 + q)^3;$

г) $(r - s)^2 : (t^3 - k^3);$

д) $(m^2 + mn + n^2)(a^2 - b^2);$

е) $(4 + m + n + k)^6;$

ж) $x^6 + y^6 + z^6.$

№ 49

а) $(a + 7)^2 - 4 = 0$;

$(a + 7 - 2)(a + 7 + 2) = 0$;

$(a + 5)(a + 9) = 0$;

$a + 5 = 0$ или $a + 9 = 0$

$a = -5$ $\qquad a = -9$

Ответ: $\{-9; -5\}$

б) $(7b - 5)^2 - 64 = 0$;

$(7b - 5 - 8)(7b - 5 + 8) = 0$;

$(7b - 13)(7b + 3) = 0$;

$7b - 13 = 0$ или $7b + 3 = 0$

$7b = 13$ $\qquad 7b = -3$

$b = 1\frac{6}{7}$ $\qquad b = -\frac{3}{7}$

Ответ: $\{-\frac{3}{7}; 1\frac{6}{7}\}$

в) $64(c + 5)^2 - 4c^2 = 0$;

$(8(c + 5) - 2c)(8(c + 5) + 2c) = 0$;

$(8c + 40 - 2c)(8c + 40 + 2c) = 0$;

$(6c + 40)(10c + 40) = 0$;

$6c + 40 = 0$ или $10c + 40 = 0$

$6c = -40$ $\qquad 10c = -40$

$c = -6\frac{2}{3}$ $\qquad c = -4$

Ответ: $\{-6\frac{2}{3}; -4\}$

№ 50 (г)

$3x^2 + 4y^2 - (x + y)^2 - 2x(x + y) - 3y^2 + 4xy =$

$=3x^2 + 4y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2 - 2xy - 3y^2 + 4xy =$

$= 3x^2 + 4y^2 - x^2 - 2xy - y^2 - 2x^2 - 2xy - 3y^2 + 4xy = 0.$

№ 52

а)

	t, ч	v, км/ч	s, км
Су-34	3 ч	$2x$	9000 – 1170
Ил-96	3 ч	x	9000 – 1170

По условию расстояние между самолетами через 3 ч стало 7830 км:

$(2x + x) \cdot 3 = 7830$;

$9x = 7830$;

$x = 870$

Скорость Ил-96 — 870 км/ч

$870 \cdot 2 = 1740$ (км/ч)

Ответ: скорости самолетов 870 км/ч и 1740 км/ч.

б) Пусть расстояние между Москвой и Самарой x км, тогда первый теплоход был в пути $\frac{x}{20}$ ч, а второй — $\frac{x}{24}$ ч. По условию первый теплоход был на 3 часа дольше в пути, чем второй теплоход:

$\frac{x}{20} - \frac{x}{24} = 3$;

$6x - 5x = 360$;

$x = 360$

Ответ: искомое расстояние 360 км.

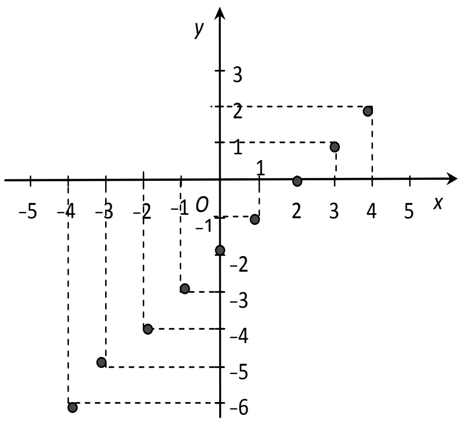
№ 53

а) $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a = (a^4 + 2a^3) - (a^2 + 2a) = a^3(a + 2) - a(a + 2) =$
$=(a + 2)(a^3 - a) = a(a + 2)(a^2 - 1) = a(a + 2)(a - 1)(a + 1)$

Получилось произведение четырех последовательных чисел, а среди них есть число, которое делится на 3.

б) $b^5 - 5b^3 + 4b = b(b^4 - 5b^2 + 4) = b(b^4 - 4b^2 + 4 - b^2) = b((b^2 - 2)^2 - b^2) =$
$= b(b^2 - 2 - b)(b^2 - 2 + b) = b(b - 1)(b + 1)(b - 2)(b + 2)$

№ 56



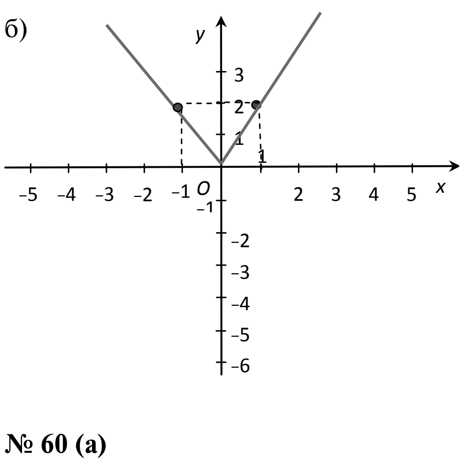
№ 57 (2)

$y = |2x|$

а)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	2	4	6

б)



№ 60 (а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

$y = -x$

№ 61

$\frac{17}{2x-3} = 1;$	$\frac{17}{2x-3} = 3;$	$\frac{17}{2x-3} = -2;$
$2x - 3 = 17;$	$2x - 3 = \frac{17}{3};$	$2x - 3 = -\frac{17}{2};$
$2x = 20;$	$2x = \frac{26}{3};$	$2x = -\frac{11}{2}$
$x = 10$	$x = \frac{13}{3}$	$x = -\frac{11}{4}$
	$x = 4\frac{1}{3}$	$x = -2{,}75$

№ 62 (а)
$y = 0{,}5x + 1$

П. 5.1.3. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И КОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ*

При 4-часовом планировании учащиеся получают возможность изучить пункт «Функциональная зависимость и кодирование информации». Содержание данного пункта является нетрадиционным и повышает интерес учащихся к изучению предмета, он может быть вынесен учителем на факультативный курс.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Особенности изучения учебного содержания

Содержание пунктов «Прямая пропорциональность и ее график» и «Линейная функция» является традиционным для курса алгебры 7 класса.

Особенностью изучения темы «Линейная функция и ее график» является то, что наряду со способом построения графика линейной функции по двум точкам учащиеся знакомятся и со способом построения графика линейной функции $y = kx + b$ путем сдвига графика $y = kx$. Этот способ дает возможность вывести правило определения взаимного расположения графиков линейных функций без выполнения чертежей.

Рекомендуется после выполнения задания № 167 разобрать с учащимися, каким же образом по формулам линейных функций можно судить о взаимном расположении их графиков и вывести правило:

Графики функций $y = k_1x + d_1$ и $y = k_2x + d_2$

1) совпадают, если $k_1 = k_2$, $d_1 = d_2$;
2) параллельны, если $k_1 = k_2$, $d_1 \neq d_2$;
3) пересекаются, если $k_1 \neq k_2$.

Это правило поможет в восьмом классе провести учащимся исследование о количестве решений системы линейных уравнений с двумя переменными самостоятельно.

П. 5.2.1. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Основные содержательные цели:

1) формировать знания о прямой пропорциональной зависимости, способах ее задания;

2) формировать способность строить алгоритмы на пример алгоритма построения графика прямой пропорциональной зависимости;

3) формировать умение проводить исследование, используя график;
4) повторить понятие отношение, тренировать умение использовать понятие отношения для решения различных задач.

Урок. Прямая пропорциональность.

Новое знание

Алгоритм построения графика прямой пропорциональной зависимости, свойства графика прямой пропорциональной зависимости.

Актуализация

Повторить: определение функциональной зависимости, способы задания функции, определение прямой пропорциональной зависимости, определение прямо пропорциональной функции.

Задание на пробное действие

Записать формулу зависимости стоимости покупки яблок по цене 1,5 тыс. р. за центнер от массы купленных яблок и постройте график данной зависимости.

Фиксация затруднения

Я не могу быстро построить график прямой пропорциональности.

Я не могу точно сказать, что правильно построил график.

Фиксация причины затруднения

Нет быстрого способа построения графика.

Цель деятельности

Построить быстрый способ построения графика прямой пропорциональности.

Эталон

Алгоритм построения графика прямой пропорциональной зависимости:

Алгоритм построения графика функции $y = kx$

1. Отметить на координатной плоскости Oxy точку O с координатами (0; 0).
2. Выбрать некоторое значение $x_1 \neq 0$.
3. Вычислить значение $y_1 = kx_1$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Через точки O и A провести прямую.

Свойства графика прямой пропорциональной зависимости:

1. График функции $y = kx$ всегда проходит через начало координат — точку O (0; 0).
2. Если $k \neq 0$, то областью значений прямой пропорциональности является множество всех известных нам чисел, а если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа 0.
3. График функции $y = x$ ($y = -x$) является биссектрисой I и III (II и IV) координатных углов.
4. С увеличением $|k|$ острый угол между графиком $y = kx$ и осью абсцисс Ox увеличивается (график становится «круче»), а с уменьшением $|k|$ — уменьшается (график более «пологий»).

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 100

а) $k = -2$; в) $k = 0{,}5$; г) $k = 0$; д) $k = \frac{1}{7}$; з) $k = 5$; к) $k = -3$.

№ 104

$y = kx$ $\quad$ $k = y : x$

а) $A\ (2;\ 10)$;	в) $A\ (0{,}5;\ -2)$;	д) $A\ (-4;\ 0{,}5)$;	ж) $A\ (1{,}2;\ 6)$;
$k = 5$	$k = -4$	$k = -0{,}125$	$k = 5$
I и III	II и IV	II и IV	I и III
б) $A\ (-3;\ 12)$;	г) $A\ (-0{,}4;\ -8)$;	е) $A\ (3;\ -1{,}5)$;	з) $A\ (-7;\ -1{,}4)$.
$k = -4$	$k = 20$	$k = -0{,}5$	$k = 0{,}2$
II и IV	I и III	II и IV	I и III

№ 107

а) $y = kx$

$A\ (p;\ q)$

$p = 2,\ q = 2$

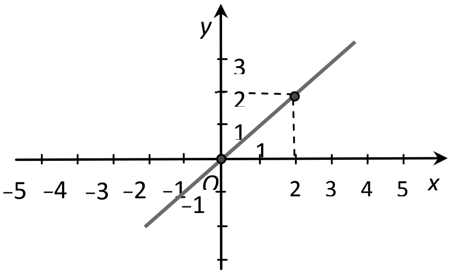
$x = 2,\ y = 2$

$k = y : x$

$k = 2 : 2 = 1$

$y = x$

График — прямая, проходящая через начала координат, расположена в I и III координатных четвертях.



б) $y = kx$

$A\ (p;\ q)$

$p = 3,\ q = 1{,}5$

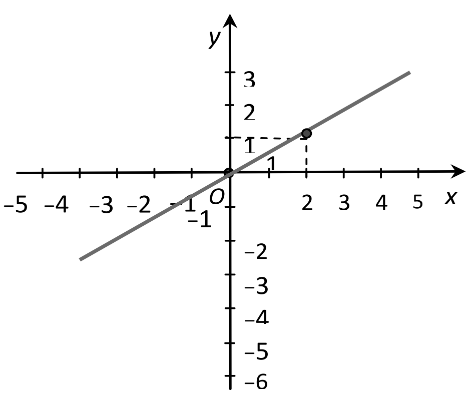
$x = 3,\ y = 1{,}5$

$k = y : x$

$k = 1{,}5 : 3 = 0{,}5$

$y = 0{,}5x$

График — прямая, проходящая через начала координат, расположена в I и III координатных четвертях.



в) $y = kx$

А $(p; q)$

$p = -5$, $q = 2{,}5$

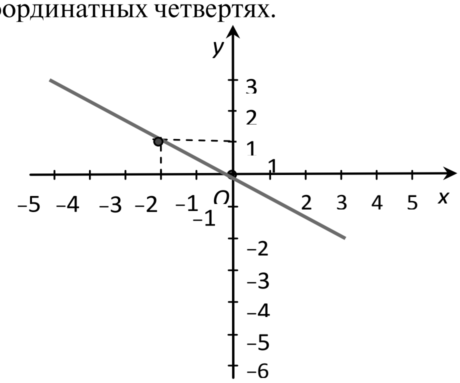
$x = -5$, $y = 2{,}5$

$k = y : x$

$k = 2{,}5 : (-5) = -0{,}5$

$y = -0{,}5x$

График — прямая, проходящая через начала координат, расположена во II и IV координатных четвертях.



г) $y = kx$

A $(p; q)$

$p = -8$, $q = -1{,}6$

$x = -8$, $y = -1{,}6$

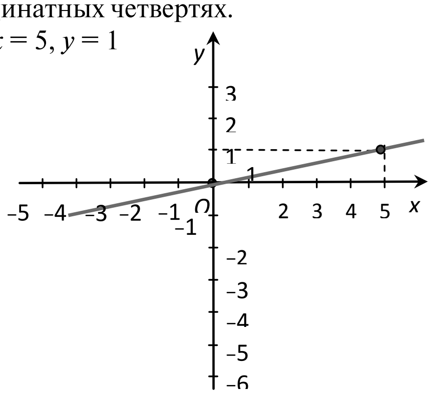
$k = y : x$

$k = -1{,}6 : (-8) = 0{,}2$

$y = 0{,}2x$

График — прямая, проходящая через начала координат, расположена в I и III координатных четвертях.

$x = 5$, $y = 1$



е) $y = kx$

A $(p; q)$

$p = 0{,}25$, $q = -2$

$x = 0{,}25$, $y = -2$

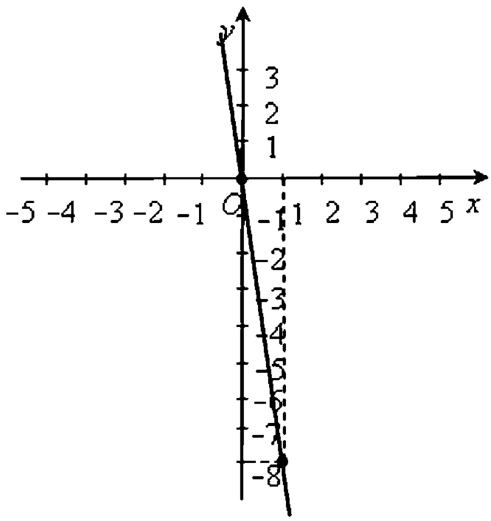
$k = y : x$

$k = -2 : 0{,}25 = -8$

$y = -8x$

График — прямая, проходящая через начала координат, расположена в II и IV координатных четвертях.

$x = 1$, $y = -8$



№ 108 (а, б)

а) $k = 0{,}5$; $a = 6{,}5$; $b = -1{,}5$

1) $y = 0{,}5 \cdot 6{,}5 = 3{,}2$; 2) $-1{,}5 = 0{,}5x$

$x = -3$

б) $k = -2$; $a = -2{,}5$; $b = 8$

1) $y = -2 \cdot (-2{,}5) = 5$; 2) $8 = -2x$

$x = -4$

№ 109 (а, г)

а) $k = 2$, $A\ (0;\ 2)$, $B\ (-3;\ -6)$

$2 = 2 \cdot 0$ (Л), A не принадлежит графику;

$-6 = 2 \cdot (-3)$ (И) B принадлежит графику.

г) $k = -3$, $A\ (-2;\ 6)$, $B\ (3;\ 9)$

$6 = -3 \cdot (-2)$ (И) A принадлежит графику;

$9 = -3 \cdot (3)$ (Л) B не принадлежит графику.

№ 110

I $y = x$; II $y = 0{,}5x$; III $y = 2x$; IV $y = -1{,}5x$; V $y = -\frac{1}{3}x$.

№ 113

а) $2{,}6 : 5{,}2 = 0{,}5$; б) $9 : 0{,}06 = 150$; в) $0{,}7 : 2\frac{1}{3} = 0{,}3$; г) $2{,}25 : 0{,}9 = 2{,}5$.

№ 118 (а, в)

а) $\frac{0{,}8}{x} = \frac{0{,}21}{\frac{7}{8}}$;

$x = \frac{0{,}8 \cdot \frac{7}{8}}{0{,}21}$;

$x = \frac{0{,}7}{0{,}21}$;

$x = 3\frac{1}{3}$

Ответ: $\{3\frac{1}{3}\}$.

в) $\frac{2}{2a + 1} = \frac{2a - 1}{40}$;

$(2a + 1)(2a - 1) = 80$;

$4a2 - 1 = 80$;

$4a2 - 81 = 0$;

$(2a - 9)(2a + 9) = 0$;

$2a - 9 = 0$ или $2a + 9 = 0$

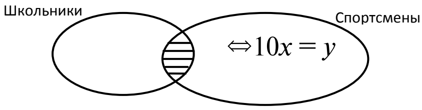
$2a = 9$ $\quad$ $2a = -9$

$a = 4{,}5$ $\quad$ $a = -4{,}5$

Ответ: $\{-4{,}5;\ 4{,}5\}$.

№ 139*

Пусть школьников — x чел., а спортсменов — y чел. Тогда $\frac{x}{10}$ — спортсменов среди школьников, и $\frac{y}{100}$ — школьников среди спортсменов.



Ответ: спортсменов в 10 раз больше, чем школьников.

№ 140*

А + Т = 40
Т + М = 50
М + В = 90
В + Д = 100
Д + А = 60
Тогда:
2А + 2Т + 2М + 2 В + 2Д = 40 + 50 + 90 + 100 + 60
Тогда:
А + Т + М + В + Д = 340 : 2.

А + Т + М + В + Д = 170. Учитывая, что Т + М = 50 и В + Д = 100, можно сделать вывод, что А = 20.

Ответ: Андрей весит 20 кг.

П. 5.2.2. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Основные содержательные цели:

1) формировать знания о линейной функции и ее графике;

2) формировать способность строить алгоритмы на пример алгоритма построения графика линейной функции;

3) формировать умение проводить исследование, используя график;

4) повторить решение уравнений и текстовых задач.

Урок. Линейная функция и ее график.

Новое знание

Определение линейной зависимости, определение линейной функции, частные случаи линейной функции, график линейной функции, алгоритм построения графика прямой пропорциональной зависимости.

Актуализация

Повторить: определение функциональной зависимости, способы задания функции, определение прямой пропорциональной зависимости, определение прямо пропорциональной функции.

Задание на пробное действие

Постройте график функции $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Фиксация затруднения:

Я не могу быстро построить график данной линейной функции.

Я не могу точно сказать, что правильно построил график.

Фиксация причины затруднения:

Нет нового способа построения графика.

Цель деятельности:

Построить другой способ построения графика линейной функции.

Эталон:

Определение линейной зависимости:

Зависимость между величинами x и y называется **линейной зависимостью**, если данные величины связаны формулой $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа.

Определение линейной функции:

Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется **линейной функцией.**

Частные случаи линейной функции:

Значения коэффициентов, равные нулю	Вид функции	Особенности функции
$b = 0$	$y = kx$	Прямая пропорциональность
$k = 0$	$y = b$	Графиком является прямая
$k = 0$, $b = 0$	$y = 0$	Графиком является ось Ox

График линейной функции:

График линейной функции $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, может быть получен из графика функции $y = kx$ путем его параллельного переноса вдоль оси Oy на b единиц вверх, если b – положительно, или на $|b|$ единиц вниз, если b – отрицательно.

Алгоритм построения графика прямой пропорциональной зависимости:

Алгоритм построения графика функции $y = kx + b$

1. Выбрать два различных значения x: x_1 и x_2.
2. Вычислить значение $y_1 = kx_1 + b$.
3. Вычислить значение $y_2 = kx_2 + b$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Отметить на координатной плоскости Oxy точку B с координатами $(x_2; y_2)$.
6. Через точки A и B провести прямую.

Урок. Линейная функция и ее график (РК).

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения строить графики линейной функции, находить значение функции и значения аргумента по формуле и графику;

2) тренировать умение находить сумму многочленов, решать уравнения.

Решение некоторых заданий.

№ 143

а) $k = -1$, $b = 5$; б) $k = -3$, $b = 4$; е) $k = 0{,}5$, $b = 1$; и) $k = -4$, $b = 2{,}5$; к) $k = \frac{1}{3}$, $b = 3$

№ 145

а) $y = x + 2$

x	0	–4
y	2	–2

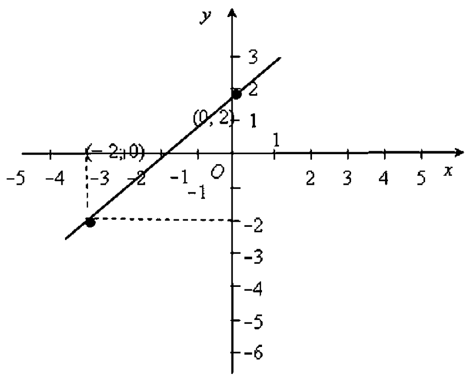


График проходит через I, II, III координатные углы.

б) $y = -x + 4$

x	0	4
y	4	0

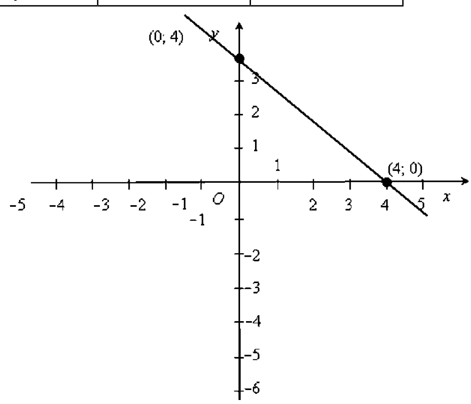


График расположен в I, II, IV координатных углах.

в) $y = -2x + 3$

x	0	–2
y	3	7

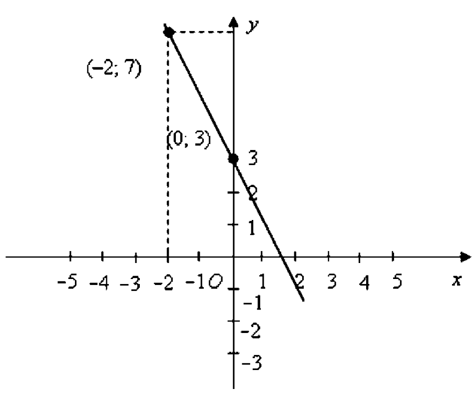


График проходит через I, II, IV координатные углы.

г) $y = 3x - 5$

x	0	2
y	–5	1

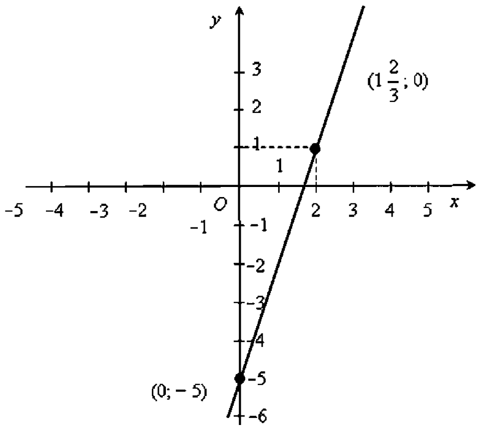


График расположен в III, I, IV координатных углах.

д) $y = 0{,}4x - 2$

x	0	5
y	–2	0

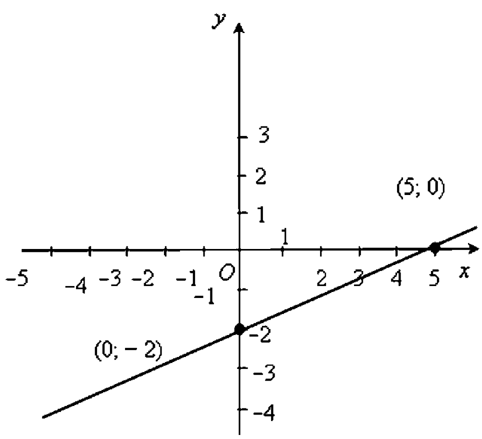


График проходит через I, III, IV координатные углы.

е) $y = -2\frac{1}{3}x - 4$

x	0	–3
y	–4	3

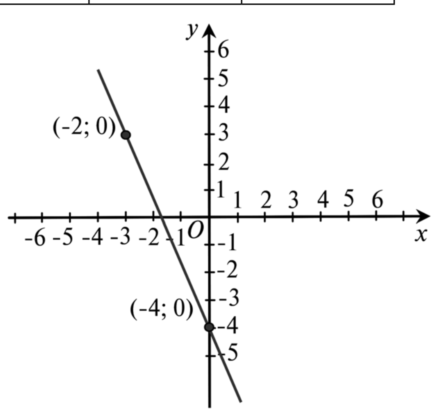


График проходит через II, III, IV координатные углы.

№ 147 (ж, з)

ж) $f(x) = 6x — 13$

x	0	2	–2
***f*(*x*)**	–13	–1	–25

x	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{3}$	2
***f*(*x*)**	0	1	–1

з) $f(x) = 15 – 9x$

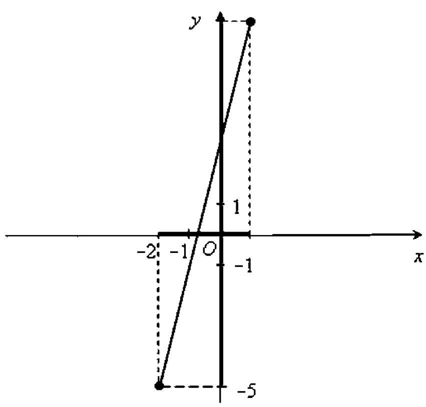
x	0	2	–2
***f*(*x*)**	15	–3	33

x	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{5}{9}$	$1\frac{7}{9}$
***f*(*x*)**	0	1	–1

№ 150 (а)

$f(x) = 4x + 3, –2 \leqslant x \leqslant 1$

x	–2	1
***f*(*x*)**	–5	7



№ 156 (а)

а) $f(x) = –6x – 11$, A (–2; 1)

$f(x) = 1$, $x = –2$

$–6 \cdot (–2) – 11 = 1;$

$12 – 11 = 1;$

$1 = 1$ (И)

A принадлежит графику.

№ 157 (а)

$y = 3x + b$, A (1; 4)

$y = 4$; $x = 1$

$3 \cdot 1 + b = 4;$

$3 + b = 4;$

$b = 1$

При $b = 1$ график функции проходит через точку A.

№ 158

а) $f(x) = 2x + 12$

Если $x = 0$, то $2 \cdot 0 + 12 = 12, f(x) = 12$, точка пересечения графика с осью Ox: (0; 12)

Если $f(x) = 0$, то $2x + 12 = 0$;

$2x = -12$;

$x = -6$, точка пересечения графика с осью Oy: (–6; 0).

б) $f(x) = -3x + 21$

Если $x = 0$, то $-3 \cdot 0 + 21 = 21, f(x) = 21$, точка пересечения графика с осью Ox: (0; 21)

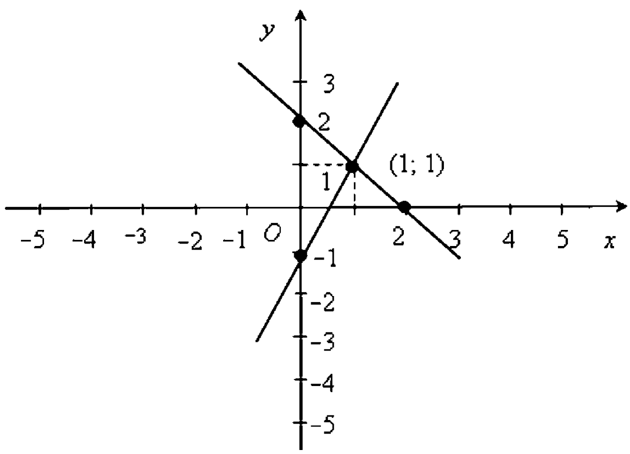
Если $f(x) = 0$, то $-3x + 21 = 0$;

$-3x = -21$;

$x = 7$, точка пересечения графика с осью Oy: (7; 0).

№ 159

а) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 2$

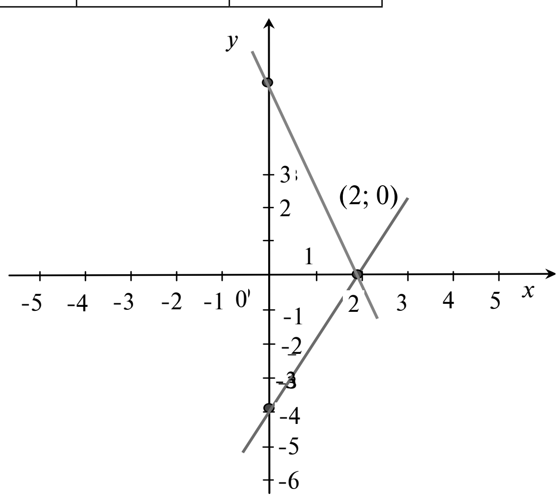


б) $f(x) = 6 - 3x$

x	0	2
***f*(x)**	6	0

$g(x) = 2x - 4$

x	0	2
***f*(x)**	–4	0



№ 171 (г)

г) $P = 3x^2y + 3y^2x - 3y^3 - (2x^2y + y^2x - 2y^3)$, $Q = 6x^2y + 7y^2x - 9y^3 - (5x^2y + 7y^2x - 6y^3)$

$3x^2y + 3y^2x - 3y^3 - 2x^2y - y^2x + 2y^3 = -y^3 + x^2y + 2y^2x$

$6x^2y + 7y^2x - 9y^3 - 5x^2y - 7y^2x + 6y^3 = -3y^3 + x^2y$

$$\begin{array}{r} -y^3 + x^2y + 2y^2x \\ \underline{-3y^3 + x^2y } \\ -4y^3 + 2x^2y + 2y^2x \end{array}$$

№ 172

в) $\frac{x-4}{5} + \frac{3x-2}{10} = \frac{2x+1}{3} - 7$

$6(x - 4) + 3(3x - 2) = 10(2x + 1) - 210;$

$6x - 24 + 9x - 6 = 20x + 10 - 210;$

$15x - 20x = -200 + 30;$

$-5x = -270;$

$x = 54$

Ответ: $\{54\}$.

г) $\frac{4y}{3} - 17 + \frac{3y-17}{4} = \frac{y+5}{2}$

$16y - 204 + 9y - 51 = 6y + 30;$

$27y - 6y = 30 + 255;$

$21y = 285;$

$y = 13\frac{4}{7}$

Ответ: $\{13\frac{4}{7}\}$.

№ 173 (а)

В раствор добавлено x г воды.

	Масса (г)	Процентное содержание (%)
Раствор	$360 + x$	100%
Соль	60	10%

$\frac{360+x}{60} = \frac{100}{10}$

$\frac{360+x}{60} = 10$

$360 + x = 600;$

$x = 240$

Ответ: надо добавить 240 г воды.

№ 179 (б)

$y = 2x - 5$

x	0	3
y	-5	1

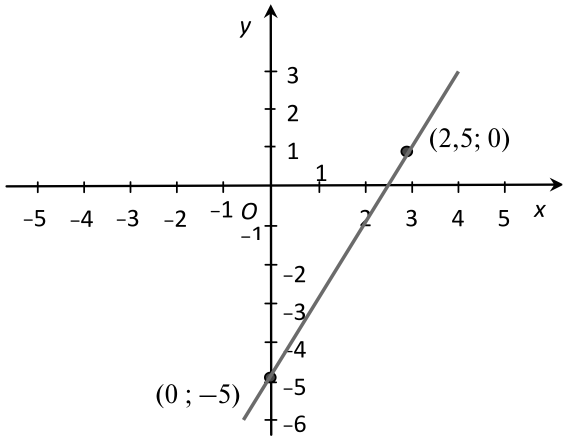


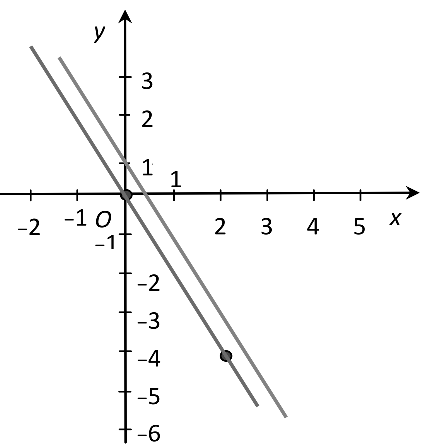
График расположен в I, III, IV координатной четверти.

№ 185 (а)

$k = -2$, $b = 1$

$y = -2x$

$y = -2x + 1$



П. 5.2.3. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Основные содержательные цели:

1) формировать знания о кусочно-линейных функциях, числовых промежутках;

2) формировать способность строить алгоритмы на пример алгоритма построения графика кусочно-линейной функции;

3) формировать умение строить графики кусочно-линейных функций;

3) повторить способы нахождения значений выражений, состоящих из именованных чисел.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с понятием кусочно-линейной функции. Учащиеся уже имеют опыт работы с такими функциями: с четвертого класса, они работали с графиками движения с переменной скоростью (анализировали и строили графики движения). Они имеют представление о том, что график движения позволяет определить положение движущихся объектов в заданный момент времени, скорость объекта, расстояние между объектами и т.д.

В этом же пункте с учащимися уточняется понятие числового промежутка (открытый луч, замкнутый луч, интервал, полуинтервал, отрезок). С ними составляется таблица по каждому типу числового промежутка, его обозначению и его геометрическому представлению с помощью числовой прямой. Новым для семиклассников в этой таблице является лишь название промежутков и их обозначение.

После систематизации информации о числовых промежутках учащиеся знакомятся с определением кусочно-линейной функции и составляют алгоритм построения кусочно-линейной функции.

Алгоритм построения графика кусочно-линейной функции $y = f(x)$.

1) Выделить непересекающиеся числовые промежутки, составляющие всю область определения функции, на каждом из которых функция является линейной;
2) Для каждого числового промежутка выбрать два значения x, принадлежащих ему;
3) Вычислить значения у, соответствующие выбранным значениям x;
4) Записать выбранные значения х и вычисленные значения у как упорядоченные пары – координаты точек, принадлежащих графику $y = f(x)$;
5) Построить на координатной плоскости Oxy полученные точки;
6) Для каждого числового промежутка провести через построенные точки, соответствующую часть прямой – график $y = f(x)$ на этом промежутке.

Для проблематизации можно предложить учащимся выполнить задание № 198 (1).

Для построения плана открытия можно воспользоваться заданием № 198 (2 – 4).

Чтобы подготовить учащихся к открытию следует актуализировать с ними уже известный им пример графика кусочно-линейной функции – график движения (№197). Кроме того рекомендуется повторить алгоритм построения линейной функции, который можно актуализировать при проверке домашнего задания.

Учащиеся строят формулы кусочно-линейной функции, описывающие процесс, для которого на каждом из промежутков его времени процесс является линейным: движение, работа и др. (№ 204).

Учащиеся используют построенный алгоритм для построения графика функции вида $y = |f(x)|$. Сначала, используя определение модуля, учащиеся переписывают функцию $y = |f(x)|$ в виде кусочно-линейной функции, а затем пользуются построенным алгоритмом. Рекомендуется начать эту работу с разбора способа построения графика простейшей функции такого типа $y = |x|$(см. стр. 49 – 50).

В данном пункте предлагается множество разнообразных заданий на применение новых знаний: определение принадлежности данной точки графику указанной кусочно-линейной функции, построение графика кусочно-линейной функции, область определения которой разбита на четыре, и более промежутков, и др. Учитель выбирает из них те, которые соответствуют уровню подготовки его учеников.

При 3 часах алгебры в неделю после изучения этого параграфа учащиеся пишут контрольную работу по содержанию главы 5. Готовность к контрольной работе можно проверить, используя раздел «Задачи для самоконтроля к главе 5».

Урок. Кусочно-линейные функции.

Новое знание

Числовые промежутки, определение кусочно-линейной функции, алгоритм построения графика кусочно-линейной функции.

Актуализация

Повторить: определение линейной функции, график линейной функции, алгоритм построения графика линейной функции.

Задание на пробное действие

Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x \geqslant -3; \\ -x - 4, \text{ если } x < -3. \end{cases}$$

Фиксация затруднения

Я не могу построить график данной кусочно-линейной функции.

Я не могу точно сказать, что правильно построил график.

Фиксация причины затруднения

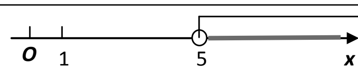
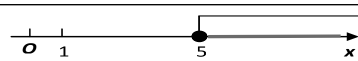
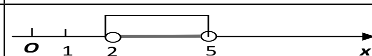
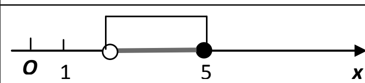
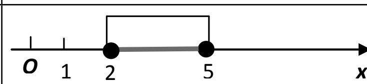
Нет способа построения графика, такой функции.

Цель деятельности

Построить алгоритм построения графика кусочно-линейной функции.

Эталон

Числовые промежутки

Название	Неравенство	Множество точек числовой прямой	Обозначение
Открытый луч	$x > 5$		$(5 ; +\infty)$
Замкнутый луч	$x \geqslant 5$		$[5 ; +\infty)$
Интервал	$2 < x < 5$		$(2; 5)$
Полуинтервал	$2 < x \leqslant 5$		$(2; 5]$
Отрезок	$2 \leqslant x \leqslant 5$		$[2; 5]$

Определение кусочно-линейной функции

Если область определения функции может быть разбита на конечное число непересекающихся числовых промежутков, объединение которых дает всю область определения, и на каждом из этих промежутков функция линейная, то функция называется **кусочно-линейной.**

Алгоритм построения графика кусочно-линейной функции:

Алгоритм построения графика кусочно-линейной функции $y = f(x)$.

1) Выделить непересекающиеся числовые промежутки, составляющие всю область определения функции, на каждом из которых функция является линейной;

2) Для каждого числового промежутка выбрать два значения x, принадлежащих ему;

3) Вычислить значения y, соответствующие выбранным значениям x;

4) Записать выбранные значения x и вычисленные значения y как упорядоченные пары – координаты точек, принадлежащих графику $y = f(x)$;

5) Построить на координатной плоскости Oxy полученные точки;

6) Для каждого числового промежутка провести через построенные точки, соответствующую часть прямой – график $y = f(x)$ на этом промежутке.

Урок. Линейные и кусочно-линейные функции (РТ).

Основные содержательные цели:

1) тренировать умение строить линейные и кусочно-линейные функции, находить значения функций по заданным значениям аргумента и наоборот, составлять функции по словесному описанию;

2) тренировать умение переводить с математического языка на русский язык, доказывать истинность, ложность утверждений, находить разность многочленов.

Урок. Линейные и кусочно-линейные функции (РК).

Основные содержательные цели:

1) организовать самоконтроль умения строить графики линейной и кусочно-линейной функции, находить значение функции и значения аргумента по формуле и графику;

2) тренировать умение находить значения числовых выражений со степенями, решения
уравнений методом разложения на множители.

Урок. Подготовка к контрольной работе (РТ).

Основные цели:

1) тренировать умение строить графики прямой, линейной и кусочно-линейных функций, находить значения функций по заданным значениям аргумента, находить точки пересечения графиков с осями координат;

2) тренировать умение решать уравнения, упрощать выражения, решать задачи.

Урок. Контрольная работа по темам: «Введение в теорию функций (ОРК).

Основные цели:

1) тренировать умение учащихся осуществлять процедуру контроля;

2) тренировать умение учащихся выявлять причины затруднений собственной деятельности;

3) контроль знаний, умений, навыков по темам: «Введение в теорию функций».

Решение некоторых заданий.

№ 197

а) расстояние от A до B равно 480 км, время преодоления этого расстояния – 7,5 ч;

б) в пути было 2 остановки, на расстоянии от пункта A 180 км и 270 км, первая остановка длилась 30 минут, вторая – 1 ч 30 мин;

в) первый участок пути – 90 км/ч; второй участок пути – 60 км/ч; третий участок пути – 105 км/ч; наибольшая на третьем участке, наименьшая – на втором участке;

г) 210 км;

д) 480 : 7,5 = 64 (км/ч)

е) является функциональной зависимостью, линейной не является.

№ 198 (1)

Задание выполняется в группах, результат работы озвучивает одна из групп, результат фиксируется на доске:

$$s(t) = \begin{cases} 3t, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 2; \\ 6, \text{ если } 2 < t \leqslant 3; \\ 4t - 6, \text{ если } 3 < t \leqslant 5{,}5. \end{cases}$$

№ 199

а) открытый луч: $(4; +\infty)$;

б) интервал: $(-2; 1)$;

в) отрезок: $[-7; -3]$;

г) открытый луч: $(-\infty; 3{,}5)$;

д) полуинтервал: $(5; 9]$;

е) полуинтервал: $[2; 10)$.

№ 202

б) $y = \begin{cases} 3 \text{ если } x \geqslant -1; \\ 1 - 2x, \text{ если } x < -1. \end{cases}$

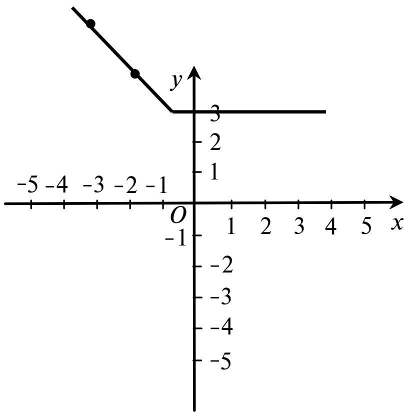
$(-\infty; -1)$, $y = 1 - 2x$

x	-3	-2
y	7	5

$A\,(-3; 7)$; $B\,(-2; 5)$

$[-1; +\infty)$, $y = 3$

$C\,(-1; 3)$; $D\,(0; 3)$



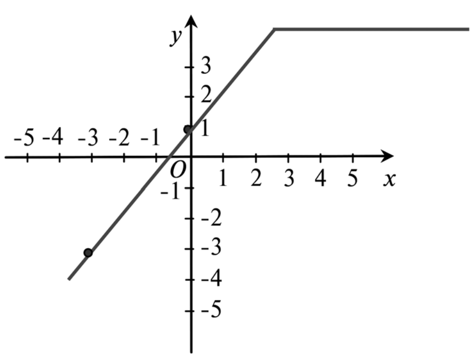
в) $y = \begin{cases} 5, \text{ если } x \leqslant 3; \\ \frac{4}{3}x + 1, \text{ если } x < 3 \end{cases}$

$X = (-\infty; +\infty)$ $X_1 = (-\infty; 3)$; $X_2 = [3; +\infty)$

$X_1 = (-\infty; 3)$ $y = \frac{4}{3}x + 1$

$X_2 = [3; +\infty)$ $y = 5$

x	0	-3
y	1	-3



г)

$y = \begin{cases} -x + 6, \text{ если } x \geqslant 4; \\ 2, \text{ если } 1 \leqslant x < 4; \\ 2x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

$X = (-\infty; +\infty)$ $X_1 = (-\infty; 1)$; $X_2 = [1; 4]$; $X_3 = (4; +\infty)$

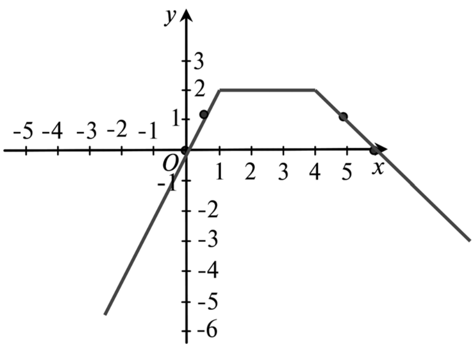
$X_1 = (-\infty; 1)$ $y = 2x$

x	0,5
y	1

$X_2 = [1; 4]$ $y = 2$

$X_3 = (4; +\infty)$ $y = -x + 6$

x	5	6
y	1	0



д)

$$y = \begin{cases} -2x, \text{ если } x \geqslant -1; \\ 2x + 4, \text{ если } -2 \leqslant x < -1. \\ -x - 2, \text{ если } x < -2 \end{cases}$$

$X = (-\infty; +\infty)$; $X_1 = (-\infty; -2)$; $X_2 = [-2; -1)$; $X_3 = [-1; +\infty)$;

$X_1 = (-\infty; -2)$; $y = -x - 2$

x	– 4	–3
y	2	1

$A(-4; 2)$; $B(-3; 1)$

$X2 = [-2; -1)$; $y = 2x + 4$

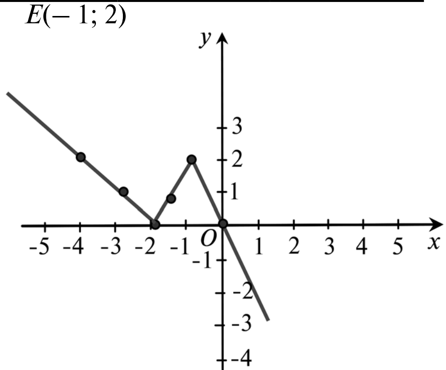
x	–2	–1,5
y	0	1

$C(-2; 0)$; $D(-1,5; 1)$

$X_3 = [-1; +\infty)$; $y = -2x$

x	–1	0
y	2	0

$E(-1; 2)$



№ 203

а) $y = \begin{cases} 2x - 1, \text{ если } x \geqslant 0,5; \\ 1 - 2x, \text{ если } x < 0,5. \end{cases}$ $A(1; 1)$, $B(-4; -9)$

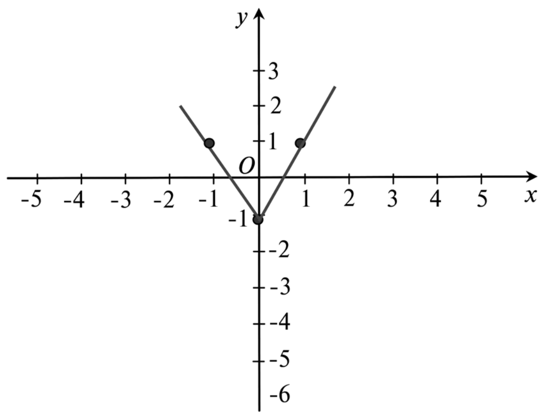
$A(1; 1)$ принадлежит графику; $B(-4; -9)$ не принадлежит графику.

б) $y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \geqslant 0; \\ 1 - x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$ $A(2; 3)$, $B(-5; -4)$

$A(2; 3)$ принадлежит графику; $B(-5; -4)$ не принадлежит графику.

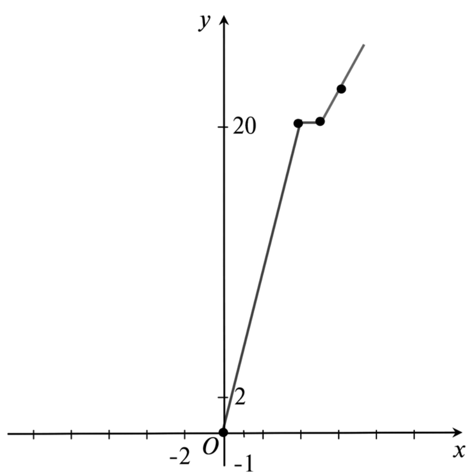
е) Точки не принадлежат графику.

$$y = \begin{cases} 2x - 1, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -2x - 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$



№ 204 (а)

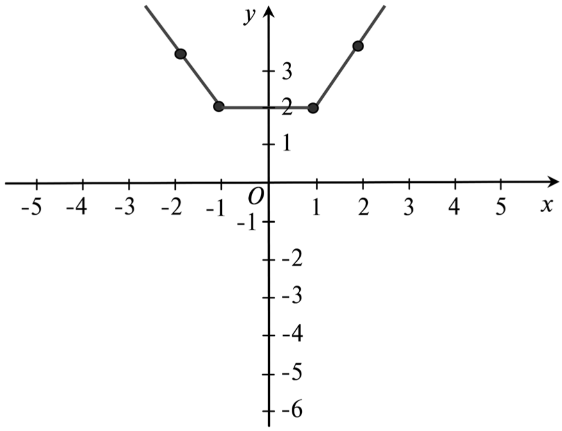
$$s = \begin{cases} 5t, \text{ если } 0 \leq t \leq 4; \\ 20, \text{ если } 4 < t \leq 5; \\ 4t, \text{ если } 5 < t \leq 8. \end{cases}$$



№ 206

а)

$$y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \leqslant 1; \\ 2, \text{ если } -1 \leqslant x < 1; \\ -2x, \text{ если } x < -1. \end{cases}$$

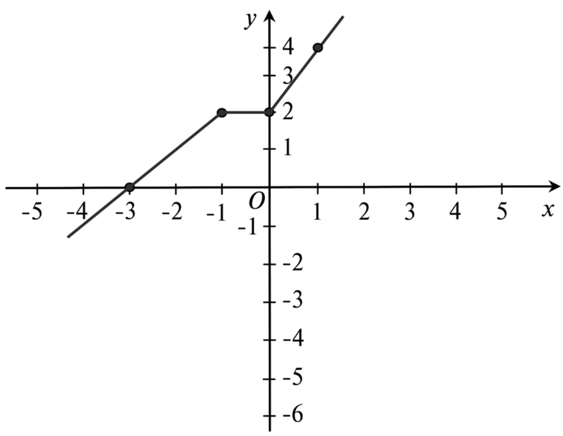


y не равен 0, ни при каких значениях x

$y > 0$, при $x \in (-\infty; +\infty)$

б)

$$y = \begin{cases} 2x + 2, \text{ если } x \geqslant 0; \\ 2, \text{ если } -1 \leqslant x < 0; \\ x + 3, \text{ если } x < -1. \end{cases}$$



$y = 0$, при $x = -3$

$y < 0$, при $x \in (-\infty; -3)$

$y > 0$, при $x \in (-3; +\infty)$

№ 214

Задание выполняется фронтально.

а) Для любых рациональных чисел куб суммы двух чисел равен произведению суммы чисел и неполному квадрату разности этих чисел; (И)

б) Существуют рациональные числа, для которых куб разности равен разности кубов; (И)

в) Для любых рациональных чисел куб разности двух чисел равен произведению разности чисел и неполному квадрату суммы этих чисел; (И)

г) Существуют рациональные числа, для которых сумма квадратов равна квадрату суммы; (И)

д) Существуют рациональные числа, для которых разность квадратов равна квадрату разности; (И) е) Для любых рациональных чисел разность четвертых степеней равна произведению разности и суммы этих чисел; (Л)

Существуют рациональные числа, для которых разность четвертых степеней не равна произведению разности и суммы этих чисел;

ж) Существуют рациональные числа, для которых разность четвертых степеней равна произведению разности и суммы этих чисел (И).

№ 215

а) (4,32 кг : 1,35 + 1,3 ц : 26 – 0,04 т – 0,0225) : (10,01 кг : 13 – 40 г) =
= (3,2 кг + 0,05 ц – 0,0009 т) : (0,77 кг – 40 г) =
= (3,2 кг + 5 кг – 0,9 кг) : (0,77 кг – 0,04 кг) = 7,3 кг : 0,73 кг = 10;
б) (0,08 т – 0,18 + 0,025 кг – 3,05 кг : 2) : (1,2 кг – 2,7 + 1 кг 60 г) =
= (0,0144 т + 0,025 кг – 1,525 кг) : (3,24 кг + 1,06 кг) =
= 12,9 кг : 4,3 кг = 3;
в) 40 м – 0,6 – 40см – (15,8 – 12,3) + 0,0005 км – (13,4 + 15,4) =
= 24 м – 40 см · 3,5 + 0,0005 км · 28,8 = 24 м – 1,4 м + 14,4 м = 37 м;
г) 10 м – (5,463 – 4,908) + 0,1 см – (19,4 – 17,4) – 5 мм – (14,7 – 11,6) =
= 10 м · 0,555 + 0,1 см · 2 – 5 мм · 3,1 = 5,55 м + 0,2 см – 15,5 мм =
= 5,55 м + 0,002 м – 0,0155 м = 5,5365 м.

№ 216 (а)

а) $P = 5x^3 + 2xy^2 + 3x$, $Q = 2x^3 + 4xy^2 + 5x$
$P - Q = (5x^3 + 2xy^2 + 3x) - (2x^3 + 4xy^2 + 5x) = 5x^3 + 2xy^2 + 3x - 2x^3 - 4xy^2 - 5x =$
$= 3x^3 - 2xy^2 - 2x$

№ 217

а) $\dfrac{a^{32} \cdot a^{11} \cdot a^{15} \cdot (a^4)^7 \cdot (3a)^{22}}{(3a)^{10} \cdot (a^{64} : a^{21}) \cdot a^{42} \cdot (3a)^{11}} + 5a^0 = \dfrac{a^{58} \cdot a^{28} \cdot a^{22} \cdot 3^{22} \cdot a^{21}}{3^{10} \cdot 3^{11} \cdot a^{10} \cdot a^{64} \cdot a^{42} \cdot a^{11}} + 5 = 3a^2 + 5;$

Если $a = 2$, то $3 \cdot 2^2 + 5 = 17$.

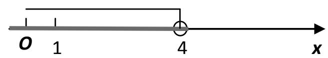
б) $\dfrac{7^{56} \cdot (b^{36} : b^{21}) \cdot c^{15} \cdot c^{39} \cdot (bc)^{24}}{c^{12} \cdot b^{19} \cdot (b^{34} : b^9) \cdot (b^5)^3 \cdot (7c)^{55} \cdot c^{10}} - 9(bc)^0 = \dfrac{7^{56} \cdot b^{15} \cdot b^{24} \cdot c^{78}}{7^{55} \cdot b^{19} \cdot b^5 \cdot b^{15} \cdot c^{77}} - 9 = 7c - 9;$

Если $b = -0,4$, $c = -5$, то $7 \cdot (-5) - 9 = -44$.

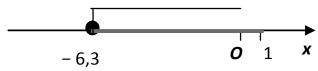
№ 220 (а, в, д)

а) $x^2 - 36 = 0$;
$(x - 6)(x + 6) = 0$;
$x - 6 = 0$ или $x + 6 = 0$
$x = 6$ $\qquad x = -6$
Ответ: {–6; 6}
в) $(5z - 2)^2 - 16 = 0$;
$(5z - 2 - 4)(5z - 2 + 4) = 0$;
$(5z - 6)(5z + 2) = 0$;
$5z - 6 = 0$ или $5z + 2 = 0$
$5z = 6$ $\qquad 5z = -2$
$z = 1,2$ $\qquad z = -0,4$
Ответ: {–0,4; 1,2}.
д) $(b + 3)^2 - (3b - 4)^2 = 0$;
$(b + 3 - 3b + 4)(b + 3 + 3b - 4) = 0$;
$(-2b + 7)(4b - 1) = 0$;
$-2b + 7 = 0$ или $4b - 1 = 0$
$-2b = -7$ $\qquad 4b = 1$
$b = 3,5$ $\qquad b = 0,25$
Ответ: {0,25; 3,5}.

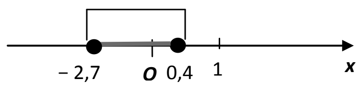
№ 225 (а, в, д, ж)

а) $x < 4$ 

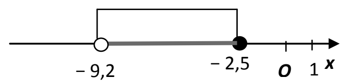
$(-\infty; 4)$

в) $x \geqslant -6{,}3$ 

$[-6{,}3; +\infty)$

д) $-2{,}7 \leqslant x \leqslant 0{,}4$ 

$[-2{,}7; 0{,}4]$

ж) $-9{,}2 < x \leqslant -2{,}5$ 

$(-9{,}2; -2{,}5]$

№ 226

а) $-9{,}4 \leqslant x \leqslant 0{,}2$; $[-9{,}4; 0{,}2]$

$-9{,}5 \notin [-9{,}4; 0{,}2]$; $-9{,}3 \in [-9{,}4; 0{,}2]$; $0\ [-9{,}4; 0{,}2]$; $0{,}3 \notin [-9{,}4; 0{,}2]$

б) $-3{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}1$, $a = -3{,}6$; $b = -3{,}3$; $c = 2$; $d = 2{,}1$

$-3{,}3 \in [-3{,}5; 2{,}1]$; $2 \in [-3{,}5; 2{,}1]$; $2{,}1 \in [-3{,}5; 2{,}1]$

в) $6{,}7 < x \leqslant 9{,}8$, $a = 6{,}6$; $b = 6{,}9$; $c = 9{,}3$; $d = 9{,}8$

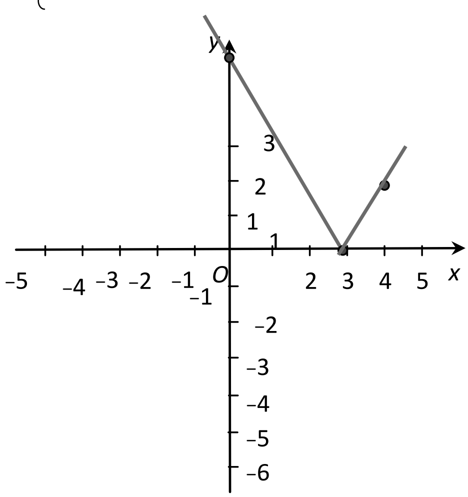
$6{,}9 \in (6{,}7; 9{,}8]$; $9{,}3 \in (6{,}7; 9{,}8]$; $9{,}8 \in (6{,}7; 9{,}8]$

г) $5{,}3 < x < 11{,}6$; $(5{,}3; 11{,}6)$

$5{,}2 \notin (5{,}3; 11{,}6)$; $5{,}3 \notin (5{,}3; 11{,}6)$; $11{,}4 \in (5{,}3; 11{,}6)$; $11{,}6 \notin (5{,}3; 11{,}6)$

№ 227 (а)

$$y = \begin{cases} 2x - 6, \text{ если } x \geqslant 3; \\ 6 - 2x, \text{ если } x < 3. \end{cases}$$



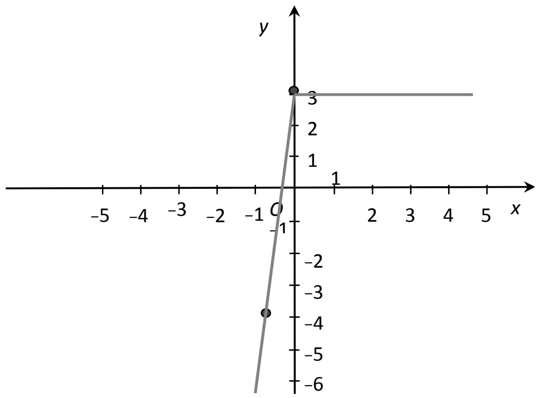
№ 228 (б)

$$y = \begin{cases} 3, \text{ если } x \geqslant 0; \\ 7x + 3, \text{ если } x < 0 \end{cases} \qquad A\,(1; 10);\ B\,(-3; -18)$$

$1 \in [0; +\infty)$, $A\,(1; 10)$ не принадлежит графику

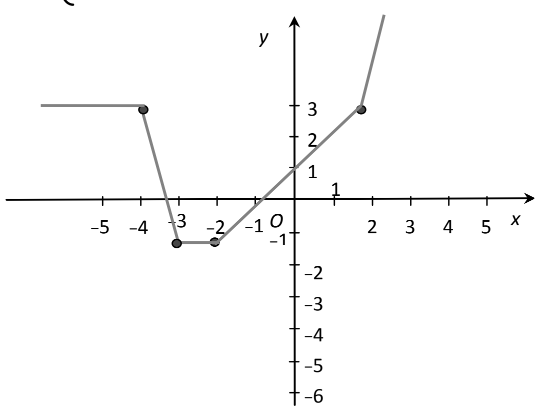
$-3 \in (-\infty; 0)$, $B\,(-3; -18)$ принадлежит

графику $(7 \cdot (-3) + 3 = -18)$



№ 235 (а)

$$y = \begin{cases} 4x - 5, \text{ если } x \geqslant 2; \\ x + 1, \text{ если } -2 \leqslant x < 2; \\ -1, \text{ если } -3 \leqslant x < -2; \\ -4x - 13, \text{ если } -4 \leqslant x < -3; \\ 3, \text{ если } x < -4 \end{cases}$$



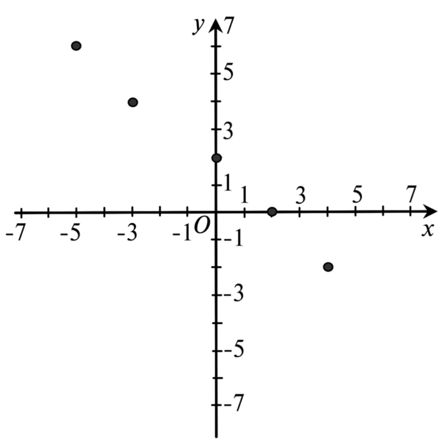
№ 250 (а)

Зависимость является функцией.

$X = \{-4; -1; 0; 2; 5\}$

$Y = \{-1; 4; 6; 9\}$

№ 253 (а)



№ 255 (а, б)

а) $y = -3x + 4$

Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 4$;

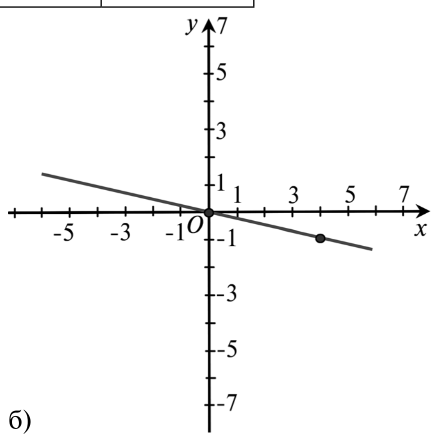
Если $x_2 = 2$, то $y_2 = -2$;

Если $x_3 = -2$, то $y_3 = 10$

№ 259

а)
$y = kx$
$p = 4$, $q = -1$
$k = -1 : 4 = -0,25$
$y = -0,25x$

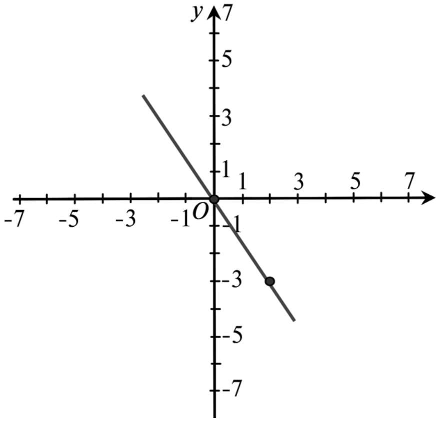
x	4
y	–1



б)
$y = kx$
$p = -3$, $q = 7,5$
$k = 7,5 : (-3) = -1,5$

$y = -1,5x$

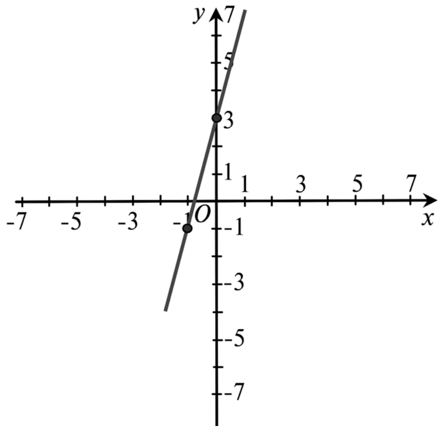
x	2
y	–3



№ 262

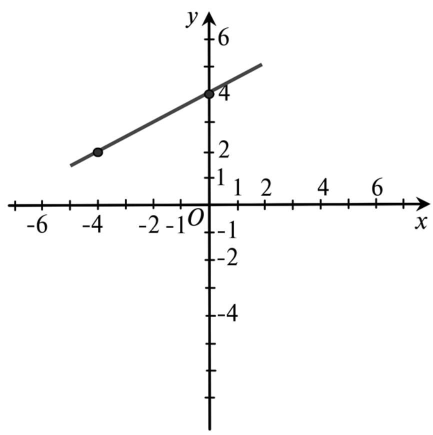
а) $f(x) = -2x - 3$

x	0	– 1
y	3	– 1



б) $f(x) = 0{,}5x + 4$

x	0	–4
y	4	2



№ 266

а) $f(x) = 6x + 7$

Пересечение с осью Ox: $f(x) = 0$, $6x + 7 = 0$;

$6x = -7$;

$x = -1$

$(-1\frac{1}{6}; 0)$

Пересечение с осью Oy: $x = 0$

$6 \cdot 0 + 7 = 7$

$(0; 7)$

б) $f(x) = -3x + 5$

Пересечение с осью Ox: $f(x) = 0$, $-3x + 5 = 0$;

$-3x = -5$;

$x = 1\frac{2}{3}$

$(1\frac{2}{3}; 0)$

Пересечение с осью Oy: $x = 0$

$-3 \cdot 0 + 5 = 5$

$(0; 5)$

№ 267 (а)

$$y = \begin{cases} x + 5, \text{ если } x \geqslant -2; \\ -x + 1, \text{ если } x < -2 \end{cases}$$

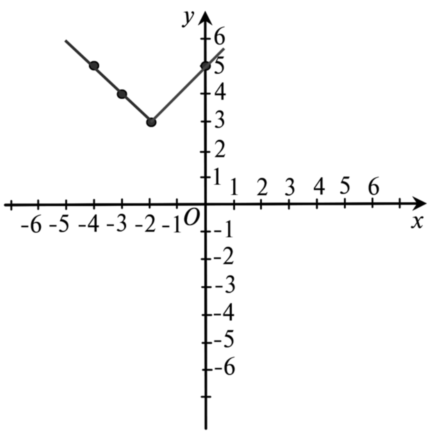
$X_1 = (-\infty; -2)$; $X_2 = [-2; +\infty)$

x	–4	–3
y	5	4

x	–2	0
y	3	5

(–4; 5); (–3; 4)

(–2; 3); (0; 5)



№ 269 (а)

$f(x) = |2x - 4|$, A (1; –2)

$-2 = |2 \cdot 1 - 4|$;

$-2 = |-2|$

$-2 = 2$ (Л), точка A не принадлежит

№ 272 (а)

$10,2 - (4,3x - 5,3) + 5,6 = 4,2x - (3,5 - 0,5x) + 0,8x - (3,9x - 4,8) + 0,7x$;

$10,2 - 4,3x + 5,3 + 5,6 = 4,2x - 3,5 + 0,5x + 0,8x - 3,9x + 4,8 + 0,7x$;

$-4,3x - 4,2x - 0,5x - 0,8x + 3,9x - 0,7x = -3,5 + 4,8 - 10,2 - 5,3 - 5,6$;

$-6,6x = -19,8$;

$x = 3$

Ответ: {3}.

Глава 6. Введение в теорию линейных уравнений и неравенств

Основные цели изучения данной главы:

• уточнить понятие уравнения, что значит решить уравнение, понятие корня уравнения и сформировать понятия равносильных уравнений и равносильных преобразований уравнений;

• сформировать понятие линейного уравнения с одной переменной и умение решать его;

• сформировать умение решать уравнение с модулем, с несколькими модулями;

• сформировать понятие линейного неравенства с одной переменной и умение решать его;

• сформировать понятие линейного уравнения с двумя переменными и умение его решать;

• сформировать понятие системы линейных уравнений с двумя переменными и умение ее решать графическим и алгебраическим способами;

• повторить основные понятия и способы действий, изученные в курсе 7 класса.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания учащиеся:

• *повторяют и систематизируют* знания, полученные в 5—6 классах;

• *используют* математическую терминологию в устной и письменной речи;

• *определяют* равносильность уравнений;

• *выполняют* равносильные преобразования уравнений;

• *решают* линейные уравнения;

• *решают* уравнения с одним и несколькими модулями;

• *решают* линейные неравенства;

• *решают* линейные неравенства с модулями;

• *решают* системы линейных уравнений с двумя переменными графическим и аналитическим способами;

• *используют* схемы, графики и таблицы;

• *строят и выполняют* алгоритмы решения уравнений, неравенств с одной переменной и систем уравнений с двумя переменными;

• *работают* с различными математическими моделями;

• *решают* текстовые задачи;

• *выполняют* действия с рациональными числами;

• *определяют* вид, истинность высказывания, *строят* отрицание ложных высказываний.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

П. 6.1.1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Основные содержательные цели:

1) формировать знания о линейных уравнениях;

2) формировать способность строить алгоритмы на примере алгоритма решения линейных уравнений;

3) формировать умение применять алгоритм при решении уравнений;

4) тренировать умение строить высказывания, обратные данным; раскладывать многочлены на множители; решать текстовые задачи.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся уточняют имеющиеся у них знания об уравнениях (определения уравнения, переменного в уравнении, что значит решить уравнение, корень уравнения), уточняют способ решения уравнения с помощью равносильных преобразований. Учащиеся знакомятся с определением равносильных уравнений, равносильных преобразований уравнений, уточняют правила равносильных преобразований уравнений. Эти знания рекомендуется уточнить и ввести на этапе актуализации, для чего можно использовать задания **№№ 288 – 290**.

В этом же пункте учащиеся знакомятся с понятием линейного уравнения с одной переменной (это определение рекомендуется ввести на этапе актуализации, для чего можно использовать задание **№ 291**).

При изучении данного пункта семиклассники выводят алгоритм решения линейного уравнения с одной переменной. Для проблематизации можно предложить учащимся решить линейное уравнение, записанное в общем виде $kx + b = 0$ (№ 293 (2)).

Для построения плана открытия учитель может использовать задание **№ 293 (1, 3)**. На уроке с учащимися в подводящем диалоге может быть получен следующий план открытия.

1. Перечислить, какие значения могут принимать k и b.
2. Для каждого случая, используя правила равносильных преобразований, найти x.
3. Сформулировать алгоритм решения линейных уравнений.

Для формирования умения решать линейные уравнения с одной переменной в учебнике предложен целый спектр разнообразных заданий, связанных с составлением уравнений, решением текстовых задач (**№№ 296, 298, 299, 300, 303, 304, 311, 319**). В учебнике предложены задания, которые предполагают решение уравнений: сводящихся к линейным, с применением основного свойства пропорции (**№ 310 (а – г), № 318**), формул сокращенного умножения (**№ 323**), метода приведению к целым коэффициентам (**№ 322**) и др. В учебнике предлагаются задания на пропедевтику решения дробно-рациональных уравнений (**№№ 317 – 318, 319 (б)**). Учитель выбирает из них те задания, которые целесообразно выполнить в конкретном классе в соответствии с существующими затруднениями и возможностями учащихся.

Для отработки понятия равносильных преобразований уравнения рекомендуется рассмотреть задание **№ 316**, при выполнении которого можно разобрать какое преобразование не является равносильным и почему.

Отдельное внимание уделяется случаям, когда уравнение не имеет корней либо имеет их бесконечное количество (переменная может принимать любое значение) – **№№ 305 (а, б), № 307, № 308**. Эти задания помогут учащимся в дальнейшем в решении линейных уравнений с параметром. С этой же целью можно выполнить задания **№№ 320 – 321, 324**.

Урок. Линейные уравнения и их решение

Новое знание

Определение линейного уравнения, случаи решения линейного уравнения, алгоритм решения линейных уравнений.

Актуализация

Повторить: определение уравнения, определение решения уравнения, понятие равносильных уравнений, понятие равносильных преобразований, правила равносильных преобразований равенств, правила равносильных преобразований уравнений, правила переноса слагаемых в уравнении.

Задание на пробное действие

Решить уравнение: $kx + b = 0$.

Фиксация затруднения

Я не могу точно сказать, что правильно решил линейное уравнение; я не могу сказать, каким будет решение линейного уравнения, если $k = 0$.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма решения линейных уравнений.

Цель деятельности

Выяснить, как решение линейного уравнения зависит от значений k и b, построить алгоритм решения линейного уравнения.

Эталон

Определение линейного уравнения

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение, которое имеет вид $kx + b = 0$, где k, b – некоторые числа.

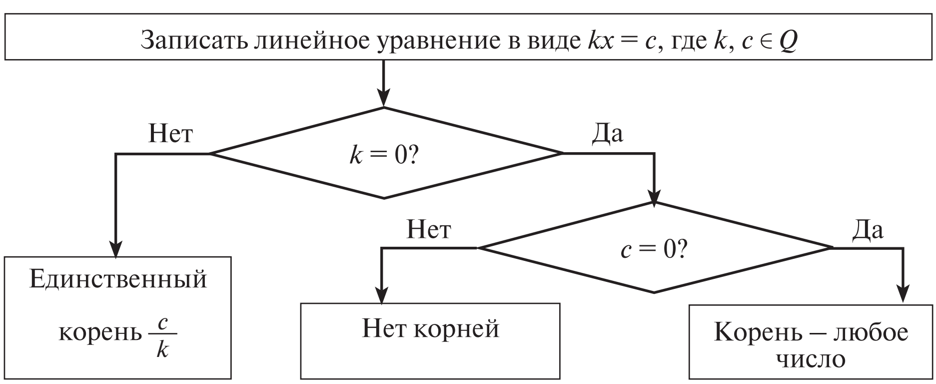
Число k называют **коэффициентом при переменной**, а число b – **свободным членом** линейного уравнения.

Случаи решения линейного уравнения

Значение k	Значение b	Корень уравнения
$k \neq 0$	$b \in Q$	$-\frac{b}{k}$
$k = 0$	$b \neq 0$	Нет корней
$k = 0$	$b = 0$	Корень – любое число

Алгоритм решения линейных уравнений

Алгоритм решения линейного уравнения с одной переменной



Урок. Линейные уравнения и их решение (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение решать линейные уравнения;

2) тренировать умение находить значения выражений, решение текстовых задач.

Урок. Линейные уравнения и их решение (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения решать линейные уравнения и применять алгоритм решения линейных уравнений при решении задач;

2) тренировать умение доказывать общие утверждения.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 297

а) $3x + 42 + 7x = 15x - 68 + 10;$
$3x + 7x - 15x =- 68 + 10 - 42;$
$-5x = -100;$
$x = -100 : (-5);$
$x = 20$
Ответ: {20}

б) $-35y + 8 + 30y = 47 - 20y - 39;$
$-35y + 30y + 20y = 47 - 39 - 8;$
$15y = 0;$
$y = 0$
Ответ: {0}

в) $-2z + 225 + z - 50 = 100 - z;$
$-2z + z + z = 100 - 225 + 50;$
$0 \cdot z = -75;$

Нет решения

Ответ: {∅}

г) $7a + 6 - 5a = 4 - 3a + 1 - a;$
$7a - 5a + 3a + a = 4 + 1 - 6;$
$6a = -1;$

$k \neq 0$, единственный корень $(\frac{c}{k})$

$a = -\frac{1}{6};$

Ответ: $\{-\frac{1}{6}\}$

д) $10b - 24 - 2b + 18 = -b + 9;$
$10b - 2b + b = 9 + 24 - 18;$
$9b = 15;$

$k \neq 0$, единственный корень $(\frac{c}{k})$

$b = \frac{15}{9};$

$b = \frac{5}{3};$

$b = 1\frac{2}{3}$

Ответ: $\{1\frac{2}{3}\}$.

е) $-12c - 9 + 8c = 15 - 4c - 6;$
$-12c + 8c + 4c = -6 + 9 + 15;$
$0 \cdot c = 18;$

нет решения

Ответ: {∅}

№ 301 (а)

а) $x - (5 - x) = 3;$
$x - 5 + x = 3;$
$2x = 8;$

$k \neq 0$, единственный корень $(\frac{c}{k})$

$x = 8 : 2;$
$x = 4$
Ответ: {4}.

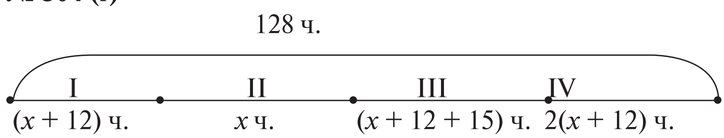
№ 302 (д, е)

д) $45(15 - 4a) - 15(7a - 12) = 0;$
$3(15 - 4a) - 7a + 12 = 0;$
$45 - 12a - 7a + 12 = 0;$
$-19a = -57;$
$19a = 57;$
$a = 3$
Ответ: {3}.

е) $0 = 3(47 - 5b) - 42(10 - 7b);$
$0 = 47 - 5b - 14(10 - 7b);$
$0 = 47 - 5b - 140 + 98b;$
$0 = 93b - 93;$
$93b = 93;$
$b = 1$
Ответ: {1}.

г) $8(2t + 5) - 72(15 - 2t) = 0;$
$2t + 5 - 9(15 - 2t) = 0;$
$2t + 5 - 135 + 18t = 0;$
$2t + 18t = 135 - 5;$
$20t = 130;$
$t = 6{,}5$
Ответ: $\{6{,}5\}$.

№ 304 (г)



$x > 0; x + 12 > 0; x + 27 > 0; 2(x + 12) > 0$
$(x + 12) + x + (x + 27) + 2(x + 12) = 128;$
$x + 12 + x + x + 27 + 2x + 24 = 128;$
$5x + 63 = 128;$
$5x = 128 - 63;$
$5x = 65;$
$x = 13$
13 ч. – во II подъезде;
13 + 12 = 25 (ч.) – I подъезд
13 + 27 = 40 (ч.) – III подъезд
2 · 25 = 50 (ч.) – IV подъезд
Ответ: 25 человек, 13 человек, 40 человек, 50 человек.

№ 305 (а, б)

а) $5x = 5(x + 2);$
$5x = 5x + 10;$
$5x - 5x = 10;$
$0 \cdot x = 10;$
Нет решения.
Ответ: $\varnothing$.

б) $3y - 4 = 4(y - 1) - y;$
$3y - 4 = 4y - 4 - y;$
$3y - 4y + y = -4 + 4;$
$0 \cdot y = 0;$
y – любое число
Ответ: любое число.

№ 306

а) $10s + 2(7s - 2) = 5(4s + 3) + 3s;$
$10s + 14s - 4 = 20s + 15 + 3s;$
$10s + 14s - 20s - 3s = 15 + 4;$
$s = 19$
Ответ: $\{19\}$.

б) $8(3t - 2) - 13t = 5(12 - 3t) + 7t;$
$24t - 16 - 13t = 60 - 15t + 7t;$
$24t - 13t + 15t - 7t = 60 + 16;$
$19t = 76;$
$t = 4$
Ответ: $\{4\}$.

№ 307 (а)

а) $5(x + 1) + 6(x + 2) = 11(x + 3);$
$5x + 5 + 6x + 12 = 11x + 33;$
$11x - 11x = 33 - 17;$
$0 \cdot x = 16;$
нет решения.
Ответ: уравнение не имеет решения.

№ 308 (а)

а) $8(3x - 1) - 9(5x - 11) = 91 - 21x;$
$24x - 8 - 45x + 99 = 91 - 21x;$

$-21x + 21x = 91 - 91;$
$0 \cdot x = 0;$
x – любое число
Ответ: данное уравнение имеет бесконечное множество корней.

№ 309

в) $(r - 3)(4 + r) = 2(3r - 2) + (4 - r)^2;$
$4r - 12 + r^2 - 3r = 6r - 4 + 16 - 8r + r^2;$
$4r + r^2 - 3r - 6r + 8r - r^2 = -4 + 16 + 12;$
$3r = 24;$
$r = 24 : 3;$
$r = 8$
Ответ: {8}.

д) $12 - 2(n - 1)^2 = 4(n - 2) - (n - 3)(2n - 5);$
$12 - 2n^2 + 4n - 2 = 4n - 8 - 2n^2 + 6n + 5n - 15;$
$-2n^2 + 4n - 4n + 2n^2 - 6n - 5n = -8 - 15 - 12 + 2;$
$-11n = -33;$
$n = -33 : (-11);$
$n = 3$
Ответ: {3}.

з) $(q - 5)(q + 1) + (q + 2)(6 - q) = 7;$
$q^2 - 5q + q - 5 + 6q - 12 - q^2 - 2q = 7;$
$0 \cdot q - 17 = 7;$
$0 \cdot q = 7 + 17;$
$0 \cdot q = 24;$
нет решения
Ответ: {11}.

№ 310

а) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7};$

$7(5x - 4) = 2(16x + 1);$
$35x - 28 = 32x + 2;$
$35x - 32x = 2 + 28;$
$3x = 30;$
$k \neq 0$, единственный корень $(\frac{c}{k})$
$x = 30 : 3;$
$x = 10$
Ответ: {10}.

в) $\frac{5 - z}{8} = \frac{18 - 5z}{12};$

$12(5 - z) = 8(18 - 5z);$
$3(5 - z) = 2(18 - 5z);$
$15 - 3z = 36 - 10z;$
$-3z + 10z = 36 - 15;$
$7z = 21;$
$z = 3;$

Ответ: {3}.

г) $\frac{4t + 33}{21} = \frac{17 + t}{14};$

$14(4t + 33) = 21(17 + t);$

$2(4t + 33) = 3(17 + t);$
$8t + 66 = 51 + 3t;$
$8t - 3t = 51 - 66;$
$5t = -15;$
$t = -3;$
Ответ: {–3}.

е) $1 - \frac{2b - 5}{6} = \frac{3 - b}{4};$

$(1 - \frac{2b - 5}{6}) \cdot 12 = \frac{3 - b}{4} \cdot 12$

$12 - 2(2b - 5) = 3(3 - b);$
$12 - 4b + 10 = 9 - 3b;$
$-4b + 3b = 9 - 12 - 10;$
$-b = -13;$
$b = 13$
Ответ: {13}.

к) $\frac{y - 2}{6} - \frac{y + 7}{15} = \frac{y}{4} - 2;$

$$\frac{(y - 2) \cdot 60}{6} - \frac{(y - 2) \cdot 60}{15} = \frac{y \cdot 60}{4} - 2 \cdot 60;$$

$10(y - 2) - 4(y + 7) = 15y - 120;$
$10y - 20 - 4y - 28 = 15y - 120;$
$10y - 4y - 15y = -120 + 20 + 28;$

$-9y = -72$;
$y = 8$
Ответ: $\{8\}$.

м) $3 - \frac{3 - 7t}{10} + \frac{t + 1}{2} = 4 - \frac{7 - 3t}{5}$;

$3 \cdot 10 - \frac{(3 - 7t) \cdot 10}{10} + \frac{(t + 1) \cdot 10}{2} = 4 \cdot 10 - \frac{(7 - 3t) \cdot 10}{5}$;

$30 - 3 + 7t + 5(t + 1) = 40 - 2(7 - 3t)$;
$27 + 7t + 5t + 5 = 40 - 14 + 6t$;
$12t - 6t = 26 - 32$;
$6t = -6$;
$t = -1$
Ответ: $\{-1\}$.

№ 311

а) Вся сумма x руб. Первый получил $\frac{1}{5}x + 190$ (руб.), второй $-\frac{1}{4}x + 170$ (руб.), третий — $\frac{1}{3}x + 160$ (руб.):

$\frac{1}{5}x + 190 + \frac{1}{4}x + 170 + \frac{1}{3}x + 160 = x$;

$(\frac{1}{5}x + 190 + \frac{1}{4}x + 170 + \frac{1}{3}x + 160) \cdot 60 = x \cdot 60$;

$(\ x + \ x + \ x + 520) \cdot 60 = x \cdot 60$;
$12x + 15x + 20x + 31\,200 = 60x$;
$47x - 60x = -31\,200$;
$-13x = -31\,200$;
$x = 2400$
Ответ: вся сумма 2400 руб.

б) Пусть число строк на странице x, того число букв в каждой строке $x + 15$, при этом $x \in N$, $x + 15 \in N$. Всего букв $x(x + 15)$. После изменений число букв станет $x + 15 -3$, число строк: $x - 5$, всего букв $(x + 15 -3)\ (x - 5)$. По условию число букв уменьшилось на 300.

$x(x + 15) - (x + 15 - 3)(x - 15) = 300$;
$x(x + 15) - (x + 12)(x - 5) = 300$;
$x^2 + 15x - x^2 - 12x + 5x + 60 = 300$;
$8x = 300 - 60$;
$8x = 240$.
$x = 30$ – число строк; $30 + 15 = 45$ (б.)
$30 \in N,\ 45 \in N$
Ответ: на странице 30 строк, в каждой строке 45 букв.

№ 318 (л)

л) $\frac{r + 1}{r - 1} = \frac{r - 5}{r - 3}$;
$(r + 1)(r - 3) = (r - 1)(r - 5)$;
$r^2 + r - 3r - 3 = r^2 - r - 5r + 5$;
$r^2 - r^2 + r - 3r + r + 5r = 3 + 5$;
$4r = 8$;
$r = 2$
Ответ: $\{2\}$

№ 319 (а)
$((x-5)\cdot 7+2):6+4=x;$
$((x-5)\cdot 7+2):6=x-4;$
$(x-5)\cdot 7+2=6(x-4);$
$7x-35+2=6x-24;$
$7x-6x=-24+35-2;$
$x=9$
Ответ: задумано число 9.
№ 322 (е)

е) $y+2-\dfrac{2y-\dfrac{4-3y}{5}}{15}=\dfrac{7y-\dfrac{y-3}{2}}{5};$

$\left(y+2-\dfrac{2y-\dfrac{4-3y}{5}}{15}\right)\cdot 15=\dfrac{7y-\dfrac{y-3}{2}}{5}\cdot 15;$

$15y+30-2y+\dfrac{4-3y}{5}=\left(7y-\dfrac{y-3}{2}\right)\cdot 3;$

$13y+30+\dfrac{4-3y}{5}=21y-\dfrac{(y-3)\cdot 3}{2};$

$\left(13y+30+\dfrac{4-3y}{5}\right)\cdot 10=\left(21y-\dfrac{(y-3)\cdot 3}{2}\right)\cdot 10;$

$130y+300+2(4-3y)=210y-15(y-3);$

$130y+300+8-6y=210y-15y+45;$

$124y+308=195y+45;$

$124y-195y=45-308;$

$-71y=-263;$

$y=\left\{3\dfrac{50}{71}\right\}$

№ 325
а) Если $(x-3)(x-5)=0$, то $x=5$ или $x=3$ (И)
Если $x=5$ или $x=3$, то $(x-3)(x-5)=0$ (И)
б) Если $y^2=49$, то $y=7$ (Л) неверно, что если $y^2=49$, то $y=7$
Если $y=7$, то $y^2=49$ (И)
в) Если $z^3=-64$, то $z=-4$ (И)
Если $z=-4$, то $z^3=-64$ (И)
г) Если $|x|>7$, то $x>7$ (Л) неверно, что если $|x|>7$, то $x>7$
Если $x>7$, то $|x|>7$.
д) Если $|x|\leqslant 6$, то $-6\leqslant x\leqslant 6$ (И)
Если $-6\leqslant x\leqslant 6$, то $|x|\leqslant 6$ (И)
е) Если $a>b$, то $b<a$ (И)
Если $b<a$, то $a>b$ (И)

№ 326 (а)
а) $-(5a+7)(4a-3)+(2a+2{,}5)(10a-6)=$
$=-20a^2-28a+15a+21+20a^2+25a-12a-15=6$

№ 329

а) $x^4 - x^3 + x - 1 = (x^4 - x^3) + (x - 1) = x^3(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^3 + 1) =$
$= (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1);$

б) $y^3 + 27 + 7y^2 + 21y = (y^3 + 27) + (7y^2 + 21y) = (y + 3)(y^2 - 3y + 9) + 7y(y + 3) =$
$= (y + 3)(y^2 - 3y + 9 + 7y) = (y + 3)(y^2 + 4y + 9);$

в) $z^5 + z^3 - z^2 - 1 = (z^5 + z^3) - (z^2 + 1) = z^3(z^2 + 1) - (z^2 + 1) = (z^2 + 1)(z^3 - 1) =$
$= (z^2 + 1)(z - 1)(z^2 + z + 1);$

г) $a^3 - a^2 - 9a + 9 = (a^3 - a^2) - (9a - 9) = a^2(a - 1) - 9(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 9) =$
$= (a - 1)(a - 3)(a + 3);$

д) $b^3 + 8c^3 + b^2 - 2bc + 4c^2 = (b^3 + 8c^3) + (b^2 - 2bc + 4c^2) =$
$= (b + 2c)(b^2 - 2bc + 4c^2) + (b^2 - 2bc + 4c^2) = (b^2 - 2bc + 4c^2)(b + 2c + 1);$

е) $d3 - 4d^2 - 12d + 27 = (d^3 + 27) - (4d^2 + 12d) = (d + 3)(d^2 - 3d + 9) - 4d\,(d + 3) =$
$= (d + 3)(d^2 - 3d + 9 - 4d) = (d + 3)(d^2 - 7d + 9);$

ж) $m^3 - n^3 - 6m^2 - 6mn - 6n^2 = (m^3 - n^3) - (6m^2 + 6mn + 6n^2) =$
$= (m - n)(m^2 + mn + n^2) - 6(m^2 + mn + n^2) = (m^2 + mn + n^2)(m - n - 6);$

з) $p^3 - 8p^2 - 32p + 64 = (p^3 + 64) - (8p^2 + 32p) = (p + 4)(p^2 - 4p + 16) - 8p(p + 4) =$
$= (p + 4)(p^2 - 4p + 16 - 8p) = (p + 4)(p^2 - 12p + 16).$

№ 334

а) $\frac{x}{9} - 6 = 12;$

$x - 54 = 108;$
$x = 108 + 54;$
$x = 162$
Ответ: {162}

б) $\frac{y}{5} - \frac{y}{6} = 7;$

$6y - 5y = 210;$
$y = 210$
Ответ: {210}

в) $3{,}9z + 4{,}3z = 1{,}2z + 28{,}8 - 7{,}4z;$
$3{,}9z + 4{,}3z - 1{,}2z + 7{,}4z = 28{,}8;$
$14{,}4z = 28{,}8;$
$z = 28{,}8 : 14{,}4;$
$z = 2$
Ответ: {2}.

г) $4{,}7t - 3{,}8 = 0{,}3t - 0{,}7t - 7{,}2 + 3{,}4t;$
$4{,}7t - 0{,}3t + 0{,}7t - 3{,}4t = -7{,}2 + 3{,}8;$
$1{,}7t = -3{,}4;$
$t = -2$
Ответ: {–2}.

№ 335

а) $5(x - 9) = 3(x + 7);$
$5x - 45 = 3x + 21;$
$5x - 3x = 45 + 21;$
$2x = 66;$
$x = 66 : 2;$
$x = 33$
Ответ: {33}.

б) $6(9 - y) = 7(4 - y);$
$54 - 6y = 28 - 7y;$
$-6y + 7y = 28 - 54;$
$y = -26$
Ответ: {–26}.

в) $z(z - 3) = (4 + z)(z - 5);$
$z^2 - 3z = 4z + z^2 - 20 - 5z;$
$z^2 - 3z - 4z - z^2 + 5z = -20;$
$-2z = -20;$
$z = 10$
Ответ: {10}.

г) $(a + 8)(1 - a) = 8 - a\,(a - 11);$
$a + 8 - a^2 - 8a = 8 - a^2 + 11a;$
$a - a^2 - 8a + a^2 - 11a = 8 - 8;$
$-18a = 0;$
$a = 0$
Ответ: {0}.

№ 338 (а, б)

а) $x + \frac{5}{2} = \frac{4x+3}{4} - \frac{1-3x}{8}$;

$8x + 20 = 8x + 6 - 1 + 3x$;
$8x - 8x - 3x = 6 - 1 - 20$;
$-3x = -15$;

$x = 5$

Ответ: {5}

б) $\frac{3y+12}{4} = 3 - \frac{5y-7}{3}$;

$9y + 36 = 36 - 20y + 28$;
$9y + 20y = 36 + 28 - 36$;
$29y = 28$;

$y = \frac{28}{29}$

Ответ: $\{\frac{28}{29}\}$.

№ 349 (а)

Младшему брату x лет ($x > 0$), тогда среднему брату $2x$ лет, старшему – $(x + 2x)$ лет.

По условию трем братьям 48 лет:
$x + 2x + 3x = 48$;
$6x = 48$;
$x = 48 : 6$;
$x = 8$
8 лет младшему брату
$2 \cdot 8 = 16$ (г.) среднему брату
$18 + 16 = 24$ (л.)
Ответ: братьям 8 лет, 16 лет и 24 года.

№ 361*

Если правду сказал Илья Муромец, то Соловья-разбойника убил Добрыня Никитич. В этом случае Добрыня Никитич и Алеша Попович соврали. Этот вариант возможен.

Если правду сказал Добрыня Никитич, тогда правду сказал и Алеша Попович. Этот вариант невозможен, т.к. по условию правду говорит только один богатырь.

Если правду сказал Алеша Попович, тогда правду сказал и Добрыня Никитич. Этот вариант невозможен, т.к. по условию правду говорит только один богатырь.

П. 6.1.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С МОДУЛЯМИ

Основные содержательные цели:

1) формировать способность строить алгоритмы на примере алгоритма решения уравнений с модулями;
2) формировать умение применять алгоритм при решении уравнений с модулями;
3) тренировать умение изображать решение неравенств на координатной плоскости, раскладывать многочлены на множители.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся учатся решать уравнения с модулями следующих видов: $|kx + b| = c$ ($k \neq 0$), $|ax + b| = |cx + d|$, а также уравнения, содержащие несколько модулей.

Учащиеся в шестом классе познакомились с понятием модуля, им знакомы два определения модуля.

• Расстояние от начала отсчета до точки, обозначающей данное число, называют модулем этого числа.

• Если число a больше или равно нулю, то его модуль равен самому числу a, если же число a меньше нуля, то его модуль равен $-a$, т. е.

$$\boxed{a = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}}$$

Уже в шестом классе учащиеся получили опыт решения простейших уравнений с модулем. При решении уравнений они использовали как геометрический смысл модуля, так и алгебраический. И если в шестом классе для решения простейших уравнений удобнее было использовать понятие «расстояние от начала отсчета», то теперь учащиеся будут пользоваться разветвленной формой определения модуля.

Знания учащихся о модуле можно повторить, используя задания **№№ 363–365.**

На первом уроке для проблематизации можно предложить учащимся выполнить задание **№ 366 (2)**.

Для подготовки учащихся к открытию можно использовать задание **№ 366 (1)**. После того, как на актуализации учащиеся выполнят это задание, они смогут построить следующий план открытия.

1. Перечислить, какие значения может принимать c.
2. Для каждого случая решить уравнение ($k \neq 0$).
3. Сформулировать алгоритм решения уравнения с модулем.

На втором уроке для проблематизации целесообразно предложить учащимся выполнить задание **№ 369 (1)**. Это уравнение можно решить, используя определение модуля (при этом учащиеся понимают, что четыре из полученных ими равенства сводятся к двум) или свойство «модули двух чисел равны, если эти числа равны или противоположны». В результате учащиеся приходят к следующему алгоритму.

1. Найти корни уравнения $ax + b = cx + d$.
2. Найти корни уравнения $ax + b = -(cx + d)$.
3. В ответе записать множество найденных корней.

После этого с учащимися разбирается решение уравнений, содержащих несколько модулей (уравнения типа предложенных в № 373). Этот алгоритм достаточно сложен для самостоятельного его построения учащимися и поэтому его рекомендуется строить, используя подводящий диалог.

Пятый шаг алгоритма решения уравнения с модулями, предложенного в учебнике, звучит следующим образом: *установить для всех числовых промежутков, какой вид принимает каждый модуль – самого выражения, содержащегося под знаком модуля, или выражения, противоположного ему.*. Это зависит от того, какое значение принимает выражение, стоящее под знаком модуля на данном промежутке (исходя из определения модуля).

Знак (+ или –) значения выражения, стоящего под знаком модуля, на каждом из полученных промежутках определяется с учащимися различными способами. Для менее подготовленных детей можно рекомендовать способ подстановки некоторого значения из соответствующего промежутка в выражения, а для более подготовленных детей знак определяется, исходя из свойств линейной функции – значение выражения меняет свой знак, проходя через «свой ноль». Какому из этих способов отдать предпочтение решает учитель и это решение зависит от уровня подготовки учеников. В первом случае учитель может дополнить алгоритм, расшифровав пятый шаг алгоритма более подробно. Например, следующим образом.

- Для каждого числового промежутка выбираем некоторое принадлежащее ему значение переменной.
- Определяем знак выражений, содержащихся под знаком модуля, при выбранном значении переменной.

- Записываем итоговое уравнение для каждого промежутка по следующему правилу.
- Если значение выражения, содержащегося под знаком модуля, при выбранном значении переменной положительно, то в уравнении для этого числового промежутка записываем указанное выражение без модуля.
- Если значение выражения, содержащегося под знаком модуля, при выбранном значении переменной отрицательно, то в уравнении для этого числового промежутка записываем без модуля выражение, противоположное указанному.

При оформлении решения уравнения с модулями на шаге «раскрытия» модулей можно использовать не таблицу (как предлагается в учебнике), а числовую прямую. Так, например, при раскрытии модулей в уравнении $|x + 3| + |2x + 5| = 4x$ можно разобрать, чему будет равно значение каждого из модулей на полученных промежутках, следующим образом.

$\lvert x + 3\rvert$	$- \Rightarrow -x - 3$	$+ \Rightarrow x + 3$	$+ \Rightarrow x + 3$
$\lvert 2x + 5\rvert$	$- \quad -2x - 5$	$- \quad -2x - 5$	$+ \quad 2x + 5$
	$(-\infty; -3)$	-3 $\quad [-3; -\frac{5}{2})$	$[-\frac{5}{2}; +\infty)$

После чего записать и решить исходное уравнение без знаков модуля для каждого промежутка.

При 3 ч в неделю можно не выделять тип уравнения $|ax + b| = |cx + d|$ в отдельный, а решать такие уравнения по общему алгоритму решения уравнения с модулями.

Для формирования умения решать уравнения с модулями в учебнике предложен целый спектр разнообразных заданий, среди них и задания повышенной сложности: уравнения, содержащие более трех модулей; уравнения с модулем, содержащие параметр. Учитель выбирает из них те задания, которые целесообразно выполнить в конкретном классе в соответствии с возможностями учащихся.

Урок. Решение уравнений с модулем

Новое знание

Алгоритм решения уравнений с модулем вида $|kx + b| = c$.

Актуализация

Повторить: определение модуля, алгоритм решения линейных уравнений.

Задание на пробное действие

Решить уравнение: $|kx + b| = c$.

Фиксация затруднения

Я не могу решить уравнение с модулем.

Я не могу точно сказать, что правильно решил уравнение с модулем.

Фиксация причины затруднения

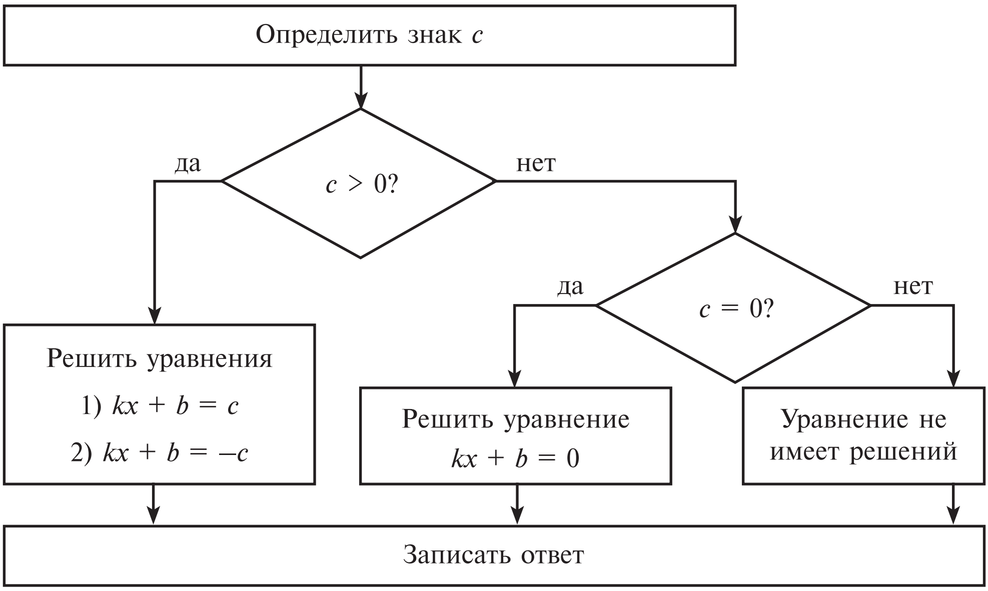
Нет алгоритма решения уравнений с модулем.

Цель деятельности

Построить алгоритм решения уравнений с модулем.

Эталон

Алгоритм решения уравнения $|kx + b| = c$ ($k \neq 0$)



Урок. Решение уравнения с модулями

Основные цели:

1) формировать способность строить алгоритмы на примере алгоритма решения уравнений с несколькими модулями;
2) формировать умение применять алгоритм при решении уравнений с несколькими модулями;
3) тренировать умение решать текстовые задачи.

Урок. Линейные уравнения и их решение (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения решать линейные уравнения и применять алгоритм решения линейных уравнений при решении задач;
2) тренировать умение доказывать общие утверждения.

Новое знание

Алгоритм решения уравнений с несколькими модулями.

Актуализация

Повторить: определение модуля, алгоритм решения линейных уравнений, алгоритм решения уравнения с модулем.

Задание на пробное действие

Решить уравнение: $|x + 12| = |x - 10|$.

Фиксация затруднения

Я не могу решить уравнение с двумя модулями.

Я не могу точно сказать, что правильно решил уравнение с двумя модулями.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма решения уравнений несколькими модулями.

Цель деятельности

Построить алгоритм решения уравнений с несколькими модулями.

Эталон

Алгоритм решения уравнений с несколькими модулями

1. Найти в уравнении все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из этих выражений к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на упрощённой модели числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают числовую прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, какой вид принимает каждый модуль – самого выражения, содержащегося под знаком модуля, или выражения, противоположного ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходное уравнение без знаков модуля.
7. Отобрать из полученных корней те, которые принадлежат рассматриваемому числовому промежутку.
8. В ответе записать множество всех получившихся корней.

Урок. Решение уравнения с модулями (РТ)

Основные содержательные цели:

1) тренировать умение решать уравнения с модулями;
2) тренировать умение решать текстовые задачи.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 363

а) $A(3)$, $B(8)$;
$OA = 3$; $OB = 8$;
б) $A(-3)$, $B(8)$;
$OA = 3$; $OB = 8$;
в) $A(3)$, $B(-8)$;
$OA = 3$; $OB = 8$;
г) $A(-3)$, $B(-8)$
$OA = 3$; $OB = 8$

№ 364

а) $|-5| + |-7| = 12$;
б) $-|4{,}2| + |3{,}6| = 0{,}6$;
в) $-|1{,}8| - |-3| + |-1{,}5| = -3{,}3$;
г) $|-3{,}2| \cdot |2| = 6{,}4$;
д) $|-6{,}4| \cdot |-0{,}5| = 3{,}2$;
е) $|8{,}1| : |-3| = 2{,}7$;
ж) $|-1{,}1| \cdot |-5| : 11 = 0{,}5$;
з) $3{,}9 : |-1{,}3| \cdot |4{,}1| = 12{,}3$;
и) $|-7{,}6| \cdot |-7| : |-1{,}9| = 28$.

№ 365

а) $|x| = 5$;
Ответ: $\{-5; 5\}$.
б) $|y| = -4$;
Ответ: $\varnothing$
в) $|-z| = 2{,}1$;
Ответ: $\{-2{,}1; 2{,}1\}$.
г) $|-t| = -3{,}4$;
Ответ: $\varnothing$.
д) $|2a| = 0$;
Ответ: $\{0\}$
е) $|-3b| = 0$;
Ответ: $\{0\}$.
ж) $-|0{,}5c| = 0$;
Ответ: $\{0\}$.
з) $-|d| = -7$;
Ответ: $\{-7; 7\}$

№ 366

а) $|x-4|=2;$

$x-4=2;\quad x-4=-2;$

$x=2+4;\quad x=-2+4;$

$x=6\quad x=2$

Ответ: {6; 2}.

б) $|2x+9|=-1;$

Ответ: $\varnothing$.

в) $|-3-6x|=0;$

$-3-6x=0;$

$-6x=3;$

$x=-0{,}5$

Ответ: {–0,5}.

№ 367

г) $|3+2a|=-4;$

Ответ: {$\varnothing$}.

д) $-|3c-18|=0;$

$|3c-18|=0;$

$3c-18=0;$

$3c=18;$

$c=6$

Ответ: {6}.

е) $-|-6b-4|=3;$

$|-6b-4|=-3;$

Ответ: $\varnothing$.

ж) $|u+6-4u|=3$

$u+6-4u=3;\quad u+6-4u=-3;$

$-3u=3-6;\quad -3u=-3-6;$

$-3u=-3;\quad -3u=-9;$

$u=-3:(-3);\quad u=-9:(-3);$

$u=1;\quad u=3$

Ответ: {1; 3}.

з) $-|-3-9d+11|=12;$

$|-3-9d+11|=-12;$

Ответ: $\varnothing$.

и) $-|6k-2+7k+1-3k|=-7;$

$|6k-2+7k+1-3k|=7;$

$|10k-1|=7;$

$10k-1=7;\quad 10k-1=-7;$

$10k=8;\quad 10k=-6;$

$z=0{,}8\quad z=-0{,}6$

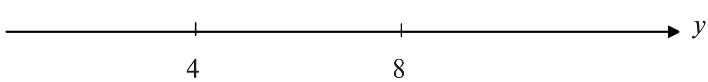
Ответ: {–0,6; 0,8}.

№ 369

б) $|y-8|=|4-y|;$

$y-8=0\quad 4-y=0$

$y=8\quad y=4$



$(-\infty;4]$	$(4;8]$	$(8;+\infty)$
$0\in(-\infty;4]$	$5\in(4;8]$	$9\in(8;+\infty)$
$-(y-8)=4-y$	$-(y-8)=-(4-y)$	$y-8=-(4-y)$
$-y+8=4-y$	$-y+8=-4+y$	$y-8=-4+y$
$-y+y=4-8$	$-y-y=-4-8$	$y-y=-4+8$
$0\cdot y=-4$	$-2y=-12$	$0\cdot y=4$
Нет решения	$y=6$	Нет решения
	$6\in(4;8]$	

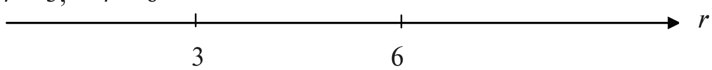
Ответ: {6}

в) $|z+9|=-|z+3|;$

Ответ: $\varnothing$

г) $-|s+5| = |-s-5|$;
Ответ: $\varnothing$

д) $-|3-r| = -|r-6|$;
$|3-r| = |r-6|$;
$3-r=0$; $r-6=0$;
$r=3$; $r=6$



$0 \in (-\infty; 3]$ $4 \in (3; 6]$ $7 \in (6; +\infty)$
1) $(-\infty; 3]$: $3-r>0$; $r-6<0$
2) $(3; 6]$: $3-r<0$; $r-6<0$
3) $(6; +\infty)$: $3-r<0$; $r-6>0$

1) $3-r=6-r$;	2) $r-3=6-r$;	3) $r-3=r-6$;
1) $3-r=6-r$;	2) $r-3=6-r$;	3) $r-3=r-6$;
$-r+r=6-3$;	$r+r=6+3$;	$r-r=-6+3$;
$0\cdot r=3$;	$2r=9$;	$0\cdot r=-3$;
Нет решения	$r=4{,}5$	Нет решения

$4{,}5 \in (3; 6]$
Ответ: $\{4{,}5\}$

е) $|15-t| = |t-15|$;
$15-t=0$ $t-15=0$
$t=15$ $t=15$

$(-\infty; 15]$	$(15; +\infty)$
$0 \in (-\infty; 15]$	$20 \in (15; +\infty)$
$15-t=-(t-15)$;	$-(15-t)=15-t$;
$15-t=-t+15$;	$-15+t=15-t$;
$0\cdot t=0$;	$2t=30$;
Любое число	$t=15$;

Ответ: любое число

ж) $|4a-5| = |3a+6|$;
$4a-5=0$ $3a+6=0$
$4a=5$ $3a=-6$
$a=1{,}25$ $a=-2$

$(-\infty; -2]$	$(-2; 1{,}25]$	$(1{,}25; +\infty)$
$-3 \in (-\infty; -2]$	$0 \in (-2; 1{,}25]$	$2 \in (1{,}25; +\infty)$
$-(4a-5)=-(3a+6)$	$-(4a-5)=3a+6$	$4a-5=3a+6$
$-4a+5=-3a-6$	$-4a+5=3a+6$	$4a-5=3a+6$
$-4a+3a=-5-6$	$-4a-3a=-5+6$	$4a-3a=5+6$
$-a=-11$	$-7a=1$	$a=11$
$a=11$	$a=-\frac{1}{7}$	
$11 \in (-\infty; -2]$	$-\frac{1}{7} \in (-2; 1{,}25]$	$11 \in (1{,}25; +\infty)$

Ответ: $\{-\frac{1}{7}; 11\}$

№ 372
а) Пусть x одно число, тогда второе число $x+8$. По условию частное чисел равно 2:

$\frac{x}{x+8}=2;$	$\frac{x+8}{x}=2$
$x=2(x+8);$	$x+8=2x;$
$x=2x+16;$	$x-2x=-8;$
$x-2x=16;$	$-x=-8;$
$-x=16;$	$x=8;$
$x=-16$	
$-16; -8$	$8; 16$

Ответ: искомые числа –16 и –8 или 8 и 16.

г) Пусть x одно число, тогда второе число $x+5$. По условию модуль одного из этих чисел равен модулю другого:

$|x|=|x+5|;$

$x=0;$ $x+5=0$

$x=-5$

$-6\in(-\infty;-5]$	$-1\in(-5;0]$	$1\in(0;+\infty)$
1) $(-\infty;-5]$: $x<0;$	$x+5<0$	
2) $(-5;0]$: $x<0;$	$x+5\geqslant 0$	
3) $(0;+\infty)$: $x\geqslant 0;$	$x+5\geqslant 0$	
1) $-x=-(x+5);$	2) $-x=x+5;$	3) $x=x+5;$
1) $-x=-x-5;$	2) $-x=x+5;$	3) $x=x+5;$
$0\cdot x=-5;$	$-2x=5;$	$0\cdot x=5;$
нет решения	$x=-2{,}5$	нет решения

$-2{,}5\in(-5;0]$

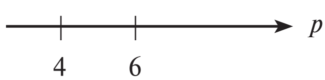
Ответ: искомые числа –2,5 и 2,5.

№ 373

г) $|p-6|-|p-4|=5;$

$p-6=0;$ $p-4=0;$

$p=6;$ $p=4;$



$(-\infty;4];$ $(4;6];$

1) $0\in(-\infty;4];$	2) $5\in(4;6];$
$-(p-6)+p-4=5;$	$-(p-6)-(p-4)=5;$
$-p+6+\mathrm{p}-4=5;$	$-p+6-p+4=5;$
$p\cdot 0=5-2;$	$-p=5-10;$
$p\cdot 0=3;$	$-p=-5;$
Нет решения	$p=5$

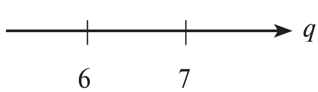
$5\in(4;6]$

Ответ: $\{5\}$

д) $|7-q|+|q-6|=4;$

$7-q=0;$ $q-6=0;$

$q=7;$ $q=6;$



$(-\infty;6];$	$(6;7];$	$(7;+\infty)$
1) $0\in(-\infty;6];$	2) $6{,}5\in(6;7];$	3) $8\in(7;+\infty)$
$7-q-(q-6)=4;$	$7-q+q-6=4;$	$-(7-q)+q-6=4;$

$7 - q - q + 6 = 4;$
$-2q = 4 - 13;$
$-2q = -9;$
$q = 4,5$
$4,5 \in (-\infty; 6]$

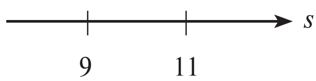
$1 + 0 \cdot q = 4;$
$0 \cdot q = 4 - 1;$
$0 \cdot q = 3;$
Нет решения

$-7 + q + q - 6 = 4;$
$2q = 4 + 13;$
$2q = 17;$
$q = 8,5$
$8,5 \in (7; +\infty)$

Ответ: $\{4,5; 8,5\}$

е) $-|4 + r| - |r + 11| = 17;$
$|4 + r| + |r + 11| = -17;$
Сумма двух неотрицательных чисел – число неотрицательное.
Ответ: $\varnothing$.

ж) $|9 - s| - |11 - s| = 10;$
$9 - s = 0; \quad 11 - s = 0;$
$s = 9; \quad s = 11;$



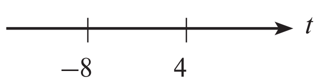
$(-\infty; 9];$
1) $0 \in (-\infty; 9];$
$9 - s - (11 - s) = 10;$
$9 - s - 11 + s = 10;$
$s \cdot 0 = 10 + 2;$
$s \cdot 0 = 12;$
Нет решения

$(9; 11];$
2) $10 \in (9; 11];$
$-(9 - s) - (11 - s) = 10;$
$-9 + s - 11 + s = 10;$
$2s = 10 + 20;$
$2s = 30;$
$s = 15$
$15 \in (9; 11]$

$(11; +\infty)$
3) $12 \in (11; +\infty)$
$-(9 - s) + 11 - s = 10;$
$-9 + s + 11 - s = 10;$
$s \cdot 0 = 10 - 2;$
$s \cdot 0 = 8;$
Нет решения

Ответ: $\varnothing$.

з) $|8 + t| - |4 - t| = -6;$
$8 + t = 0; \quad 4 - t = 0;$
$t = -8; \quad t = 4;$



$(-\infty; -8];$
1) $-9 \in (-\infty; -8];$
$-(8 + t) - (4 - t) = -6;$
$-8 - t - 4 + t = -6;$
$t \cdot 0 = -6 + 12;$
$t \cdot 0 = 6;$
Нет решения

$(-8; 4];$
2) $0 \in (-8; 4];$
$8 + t - (4 - t) = -6;$
$8 + t - 4 + t = -6;$
$2t = -6 - 4;$
$2t = -10;$
$t = -5$
$-5 \in (-8; 4]$

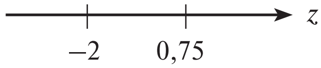
$(4; +\infty)$
3) $5 \in (4; +\infty)$
$8 + t + 4 - t = -6;$
$t \cdot 0 = -6 - 12;$
$t \cdot 0 = -18;$
Нет решения

Ответ: $\{-5\}$.

№ 375

з) $|2y - 4| + 4 = 3 - |7y + 13|;$
$|2y - 4| + |7y + 13| = 3 - 4;$
$|2y - 4| + |7y + 13| = -1;$
Сумма неотрицательных чисел – число неотрицательное.
Ответ: $\varnothing$

и) $|4z - 3| - 7 = 2 - |2 + z|;$
$|4z - 3| + |2 + z| = 2 + 7;$
$|4z - 3| + |2 + z| = 9;$
$4z - 3 = 0; \quad 2 + z = 0;$
$4z = 3; \quad z = -2;$
$z = 0,75$

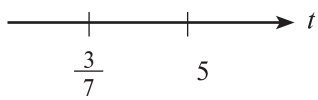


$(-\infty; -2]$;	$(-2; 0{,}75]$;	$(0{,}75; +\infty)$
1) $-3 \in (-\infty; -2]$;	2) $0 \in (-2; 0{,}75]$;	3) $1 \in (0{,}75; +\infty)$
$-(4z-3)-(2+z)=9$;	$-(4z-3)+(2+z)=9$;	$4z-3+2+z=9$;
$-4z+3-2-z=9$;	$-4z+3+2+z=9$;	$5z=9+1$;
$-5z=9-1$;	$-3z=9-5$;	$5z=10$;
$-5z=8$;	$-3z=4$;	$z=2$;
$z=-1{,}6$;	$z=-1\frac{1}{3}$;	$2 \in (0{,}75; +\infty)$
$-1{,}6 \notin (-\infty; -2]$;	$-1\frac{1}{3} \in (-2; 0{,}75]$	

Ответ: $\{-1 ; 2\}$.

к) $3-|3-7t|=4-|5-t|$;
$-|3-7t|+|5-t|=4-3$;
$-|3-7t|+|5-t|=1$;
$3-7t=0$; $5-t=0$;
$7t=3$; $t=5$;

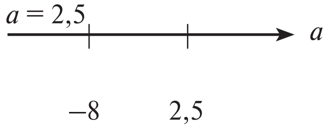
$t=\frac{3}{73}$;



$(-\infty;\frac{3}{7}]$;	$(; 5]$;	$(5; +\infty)$
1) $0 \in (-\infty;\ ]$;	2) $1 \in (; 5]$;	3) $6 \in (5; +\infty)$
$-(3-7t)+(5-t)=1$;	$3-7t+5-t=1$;	$3-7t-(5-t)=1$;
$-3+7t+5-t=1$;	$-8t=1-8$;	$3-7t-5+t=1$;
$6t=1-2$;	$-8t=-7$;	$-6t=1+2$;
$6t=-1$;	$t=\frac{7}{8}$;	$-6t=3$;
$t=-\frac{1}{6}$;		$t=-0{,}5$;
$-\frac{1}{6} \in (-\infty;\frac{3}{7}]$;	$\frac{7}{8} \in (\frac{3}{7}; 5]$;	$-0{,}5 \notin (5; +\infty)$

Ответ: $\{-\frac{1}{6}; \frac{7}{8}\}$.

л) $|2a-5|+7=|a+8|+4$;
$|2a-5|-|a+8|=4-7$;
$|2a-5|-|a+8|=-3$;
$2a-5=0$; $a+8=0$;
$2a=5$; $a=-8$
$a=2{,}5$



$(-\infty;-8]$;	$(-8; 2{,}5]$;	$(2{,}5; +\infty)$
1) $-9 \in (-\infty;-8]$;	2) $0 \in (-8; 2{,}5]$;	3) $3 \in (2{,}5; +\infty)$
$-(2a-5)+a+8=-3$;	$-(2a-5)-(a+8)=-3$;	$2a-5-(a+8)=-3$;

$-2a + 5 + a + 8 = -3;$
$-a = -3 - 13;$
$-a = -16;$
$a = 16;$
$16 \notin (-\infty; -8];$

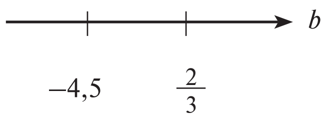
$-2a + 5 - a - 8 = -3;$
$-3a = -3 + 3;$
$-3a = 0;$
$a = 0;$
$0 \in (-8; 2{,}5];$

$2a - 5 - a - 8 = -3;$
$a = -3 + 13;$
$a = 10;$
$10 \in (2{,}5; +\infty)$

Ответ: $\{0; 10\}$.

м) $|6b - 4| - 2 = 3 + |2b + 9|;$
$|6b - 4| - |2b + 9| = 3 + 2;$
$|6b - 4| - |2b + 9| = 5;$
$6b - 4 = 0; \quad 2b + 9 = 0;$
$6b = 4; \quad 2b = -9;$

$b = \frac{2}{3}; \quad b = -4{,}5;$



$(-\infty; -4{,}5];$ $\quad (-4{,}5; \frac{2}{3}];$ $\quad (\frac{2}{3}; +\infty)$

1) $-5 \in (-\infty; -4{,}5];$
$-(6b - 4) + 2b + 9 = 5;$
$-6b + 4 + 2b + 9 = 5;$
$-4b = 5 - 13;$
$-4b = -8;$
$b = 2;$
$2 \notin (-\infty; -4{,}5];$

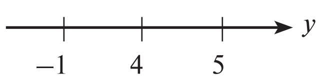
2) $0 \in (-4{,}5; \frac{2}{3}];$
$-(6b - 4) - (2b + 9) = 5;$
$-6b + 4 - 2b - 9 = 5;$
$-8b = 5 + 5;$
$-8b = 10;$
$b = -1{,}25;$
$-1{,}25 \in (-4{,}5; \frac{2}{3}];$

3) $1 \in (\frac{2}{3}; +\infty)$
$6b - 4 - (2b + 9) = 5;$
$6b - 4 - 2b - 9 = 5;$
$4b = 5 + 13;$
$4b = 18;$
$b = 4{,}5;$
$4{,}5 \in (\frac{2}{3}; +\infty)$

Ответ: $\{-1{,}25; 4{,}5\}$.

№ 378

б) $|y - 5| - |y + 1| + |y - 4| = -2;$
$y - 5 = 0; \quad y + 1 = 0; \quad y - 4 = 0;$
$y = 5; \quad y = -1; \quad y = 4$

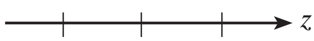


$(-\infty; -1]; \; (-1; 4]; \; (4; 5]; \; (5; +\infty);$

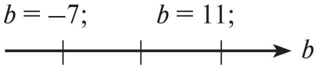
1) $-2 \in (-\infty; -1];$
$-(y - 5) + y + 1 - (y - 4) = -2;$
$-y + 5 + y + 1 - y + 4 = -2;$
$-y = -2 - 10;$
$-y = -12;$
$y = 12$
$12 \notin (-\infty; -1];$

2) $0 \in (-1; 4];$
$-(y - 5) - (y + 1) - (y - 4) = -2;$
$-y + 5 - y - 1 - y + 4 = -2;$
$-3y = -2 - 8;$
$-3y = -10;$
$y = 3\frac{1}{3}$
$3\frac{1}{3} \in (-1; 4];$

3) $4{,}5 \in (4;\ 5]$;
$-(y-5)-(y+1)+y-4=-2$;
$-y+5-y-1+y-4=-2$;
$-y=-2$;
$y=2$
$2 \notin (4;\ 5]$;
4) $6 \in (5;\ +\infty)$;
$y-5-(y+1)+y-4=-2$;
$y-5-y-1+y-4=-2$;
$y=-2+10$;
$y=8$;
$8 \in (5;\ +\infty)$;
Ответ: $\{3\frac{1}{3};\ 8\}$.
в) $|z+4|-|z-6|-|z+9|=5$;
$z+4=0$; $z-6=0$; $z+9=0$;
$z=-4$; $z=6$; $z=-9$;



−9   −4   6
$(-\infty;-9]$; $(-9;\ -4]$; $(-4;\ 6]$;
1) $-10 \in (-\infty;-9]$;   2) $-5 \in (-9;\ -4]$;   3) $0 \in (-4;\ 6]$;
$-(z+4)+z-6+z+9=5$; $-(z+4)+z-6-(z+9)=5$; $z+4+z-6-(z+9)=5$;
$(6+\infty)$;
4) $7 \in (6+\infty)$;
$z+4-(z-6)-(z+9)=5$
1) $-z-4+z-6+z+9=5$;   2) $-z-4+z-6-z-9=5$;   3) $z+4+z-6-z-9=5$;
4) $z+4-z+6-z-9=5$
$z=5+1$; $-z=5+19$; $z=5+11$; $z=5-1$;
$z=6$; $-z=24$; $z=16$; $z=4$;
$z=-24$;
$6 \notin (-\infty;\ -9]$; $-24 \notin (-9;\ -4]$; $16 \notin (-4;\ 6]$; $4 \notin (6+\infty)$;
Ответ: $\varnothing$.
г) $|a-15|+|a-21|+|a+19|=-7$;
Сумма неотрицательных чисел – число неотрицательное.
Ответ: $\varnothing$.
д) $|b+7|-|11-b|=|b+4|-6$;
$|b+7|-|11-b|-|b+4|=-6$;
$b+7=0$; $11-b=0$; $b+4=0$;
$b=-7$; $b=11$; $b=-4$;



−7   −4   11
$(-\infty;-7]$;
1) $-8 \in (-\infty;-7]$;
$-(b+7)-(11-b)+b+4=-6$;
$-b-7-11+b+b+4=-6$;
$b=-6+14$;
$b=8$;
$(-4;\ 11]$;
3) $0 \in (-4;\ 11]$;
$b+7-(11-b)-(b+4)=-6$;
$b+7-11+b-b-4=-6$;
$b=2$;

$(-7;\ -4]$;
2) $-5 \in (-7;\ -4]$
$b+7-(11-b)+b+4=-6$;
$b+7-11+b+b+4=-6$;
$3b=-6$;
$b=-2$;
$(11+\infty)$;
4) $12 - \in (11+\infty)$;
$b+7+11-b-(b+4)=-6$;
$b+7+11-b-b-4=-6$;
$-b=-6-14$;

$- b = -20;$

$b = 20;$

$8 \notin (-\infty; -7]$; $-2 \notin (-7; -4]$; $2 \in (-4; 11]$; $20 \in (11 +\infty)$;

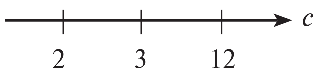
Ответ: {2; 20}

е) $|c - 12| = 4 - |c - 2| + |c - 3|$;

$|c - 12| + |c - 2| - |c - 3| = 4$;

$c - 12 = 0$; $c - 2 = 0$; $c - 3 = 0$;

$c = 12$; $c = 2$; $c = 3$;



$(-\infty; 2]$; $(2; 3]$; $(3; 12]$; $(12; +\infty)$;

1) $0 \in (-\infty; 2]$; 2) $2{,}5 \in (2; 3]$; 3) $4 \in (3; 12]$; 4) $13 \in (12; +\infty)$;

1) $-(c - 12) - (c - 2) + c - 3 = 4$;

$-c + 12 - c + 2 + c - 3 = 4$;

$-c = 4 - 11$;

$-c = -7$;

$c = 7$

2) $-(c - 12) + c - 2 + c - 3 = 4$;

$-c + 12 + c - 2 + c - 3 = 4$;

$c = 4 - 7$;

$c = -3$;

3) $-(c - 12) + c - 2 - (c - 3) = 4$;

$-c + 12 + c - 2 - c + 3 = 4$;

$-c = 4 - 13$;

$-c = 9$;

$c = 9$

4) $c - 12 + c - 2 - (c - 3) = 4$;

$c - 12 + c - 2 - c + 3 = 4$;

$c = 4 + 11$;

$c = 15$;

$7 \notin (-\infty; 2]$; $-3 \notin (2; 3]$; $9 \in (3; 12]$; $15 \in (12; +\infty)$;

Ответ: {9; 15}.

№ 382 (а)

а) $|x + 4| + |x - 1| + |x + 2| + |x - 2| = 3$;

$x + 4 = 0$; $x - 1 = 0$; $x + 2 = 0$; $x - 2 = 0$;

$x = -4$; $x = 1$; $x = -2$; $x = 2$;

1) $(-\infty; -4]$; $-5 \in (-\infty; -4]$;

$-(x + 4) - (x - 1) - (x + 2) - (x - 2) = 3$;

$-x - 4 - x + 1 - x - 2 - x + 2 = 3$;

$-4x = 3 + 3$;

$-4x = 6$;

$x = -1{,}5$

$-1{,}5 \notin (-\infty; -4]$;

2) $(-4; -2]$; $-3 \in (-4; -2]$;

$x + 4 - (x - 1) - (x + 2) - (x - 2) = 3$;

$x + 4 - x + 1 - x - 2 - x + 2 = 3$;

$-2x = 3 - 5$;

$-2x = - 2$;

$x = 1$

$1 \notin (-4; -2]$;

3) $(-2; 1]$; $0 \in (-2; 1]$;

$x + 4 - (x - 1) + x + 2 - (x - 2) = 3$;

$x + 4 - x + 1 + x + 2 - x + 2 = 3$;

$0 \cdot x = 3 - 9$;

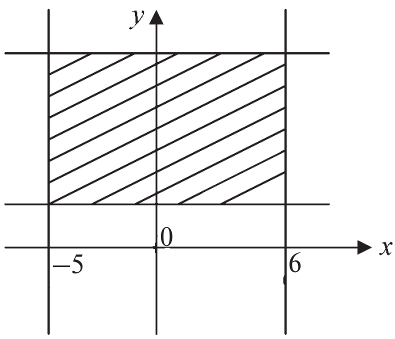
$0 \cdot x = - 6$;

Нет решения

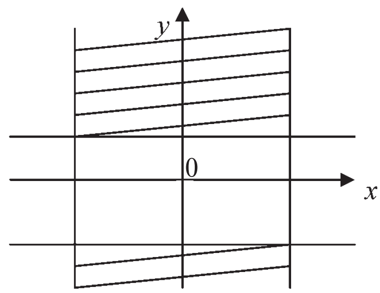
4) $(1; 2]$; $1{,}5 \in (1; 2]$;
$x + 4 + x - 1 + x + 2 - (x - 2) = 3$;
$x + 4 + x - 1 + x + 2 - x + 2 = 3$;
$2x = 3 - 7$;
$2x = -4$;
$x = -2$
$-2 \notin (1; 2]$;
5) $(2; +\infty)$; $3 \in (2; +\infty)$;
$x + 4 + x - 1 + x + 2 + x - 2 = 3$;
$4x = 3 - 3$;
$4x = 0$;
$x = 0$
$0 \notin (2; +\infty)$;
Ответ: $\varnothing$.

№ 387 (в, е)

в) $-5 \leqslant x < 6$; $2 < y \leqslant 9$



е) $|x| \leqslant 5$; $|y| > 3$
$-5 < x < 5$; $y < -3$; $y > 3$



№ 389 (а, в, д)

а) $a^6 - 2a^3b + b^2 = (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot b + (b)^2 = (a^3 - b)^2$;
в) $49x^4 - 25y^6 = (7x^2)^2 - (5y^3)^2 = (7x^2 - 5y^3)(7x^2 + 5y^3)$;
д) $n^3 - 6n^2p + 12np^2 - 8p^3 = (n)^3 - 3 \cdot n^2 \cdot 2p + 3 \cdot n \cdot (2p)^2 - (2p)^3 = (n - 2p)^3$.

№ 391

а)
1) $\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{15}$ (часть) проезжает за 1 ч
2) $\frac{1}{4} : \frac{1}{15} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ (ч)
Ответ: он должен ехать 3 ч 45 мин

б)
1) $60 \cdot 10 = 600$ (км) весь путь
2) $600 : 8 = 75$ (км/ч) новая скорость
3) $75 - 60 = 15$ (км/ч)

№ 394 (д, е, ж, з)

д) $|4a - 12| = 7$;
$4a - 12 = 7$; $4a - 12 = -7$;
$4a = 12 + 7$; $4a = 12 - 7$;
$4a = 19$; $4a = 5$;
$a = 4{,}75$ $a = 1{,}25$
Ответ: $\{1{,}25; 4{,}75\}$.

е) $|9 + 2b| = 2$;
$9 + 2b = 2$; $9 + 2b = -2$;
$2b = 2 - 9$; $2b = -2 - 9$;
$2b = -7$; $2b = -11$;
$b = -3{,}5$ $b = -5{,}5$
Ответ: $\{-5{,}5; -3{,}5\}$.

ж) $|3c - 6c + 3| = -5$;

Ответ: $\varnothing$.

з) $|5d + 2d - 4 - 6d| = 3$.

$d - 4 = 3$; $d = 3 + 4$; $d = 7$;

$d - 4 = -3$; $d = -3 + 4$; $d = 1$;

Ответ: $\{1; 7\}$.

№ 396

а) $|x + 7| = |x - 9|$;

$x + 7 = 0$; $x - 9 = 0$;

$x = -7$; $x = 9$

$(-\infty; -7]$;

1) $-8 \in (-\infty; -7]$

$-(x + 7) = -(x - 9)$;

$-x - 7 = -x + 9$;

$-x + x = 9 + 7$;

$0 \cdot x = 16$

Нет решения

$(-7; 9]$;

2) $0 \in (-7; 9]$

$x + 7 = -(x - 9)$;

$x + 7 = -x + 9$;

$x + x = 9 - 7$;

$2x = 2$;

$x = 1$

$1 \in (-7; 9]$

$(9; +\infty)$

3) $10 \in (9; +\infty)$

$x + 7 = x - 9$;

$x - x = -9 - 7$;

$0 \cdot x = -16$;

Нет решения

Ответ: $\{1\}$.

б) $|y - 5| = |11 - y|$;

$y - 5 = 0$; $11 - y = 0$;

$y = 5$; $y = 11$

$(-\infty; 5]$;

1) $0 \in (-\infty; 5]$

$-(y - 5) = 11 - y$;

$-y + 5 = 11 - y$;

$-y + y = 11 - 5$;

$0 \cdot y = 6$

Нет решения

$(5; 11]$;

2) $6 \in (5; 11]$

$y - 5 = 11 - y$;

$y + y = 11 + 5$;

$2y = 16$;

$y = 8$;

$8 \in (5; 11]$

$(11; +\infty)$

3) $12 \in (11; +\infty)$

$y - 5 = -(11 - y)$;

$y - 5 = -11 + y$;

$y - y = -11 + 5$;

$0 \cdot y = -6$

Нет решения

Ответ: $\{8\}$

в) $|z + 3| = -|z + 12|$;

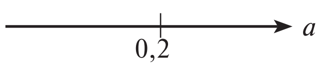
Ответ: $\varnothing$

г) $|5a - 1| = |-4a + 0{,}8|$;

$5a - 1 = 0$; $-4a + 0{,}8 = 0$;

$5a = 1$; $-4a = -0{,}8$;

$a = 0{,}2$; $a = 0{,}2$



$(-\infty; 0{,}2]$;

1) $0 \in (-\infty; 0{,}2]$

$-(5a - 1) = -4a + 0{,}8$;

$-5a + 1 = -4a + 0{,}8$;

$-5a + 4a = -1 + 0{,}8$;

$-a = -0{,}2$

$a = 0{,}2$

$0{,}2 \in (-\infty; 0{,}2]$

$(0{,}2; +\infty)$

2) $1 \in (0{,}2; +\infty)$

$5a - 1 = 4a - 0{,}8$;

$5a - 4a = -0{,}8 + 1$;

$a = 0{,}2$;

$0{,}2 \notin (0{,}2; +\infty)$

Ответ: $\{0{,}2\}$

д) $-|9b - 18| = -|16 - 8b| \Leftrightarrow |9b - 18| = |16 - 8b|$;

$9b-18=0;\qquad 16+8b=0;$
$9b=18;\qquad 16=-8b;$
$b=2;\qquad b=-2$

$-2\qquad 2\qquad b$

$(-\infty;-2]$;	$(-2;2]$	$(2;+\infty)$
1) $-5\in(-\infty;-2]$	2) $1\in(-2;2]$	3) $5\in(2;+\infty)$
$-9b+18=16-8b$;	$-9b+18=16-8b$;	$9b-18=-16+8b$;
$9b+8b=16-18$;	$9b+8b=16-18$;	$9b-8b=-16+18$;
$-b=-2$;	$-b=-2$	$b=2$
$b=2$	$b=2$	
$2\notin(-\infty;-2]$	$2\in(-2;2]$	$2\notin(2;+\infty)$

Ответ: $\{2\}$

е) $|8c+2-4c|=|5+3c+4|$;
$|4c+2|=|9+3c|$;
$4c+2=0;\qquad 3c+9=0;$
$4c=-2;\qquad 3c=-9;$
$c=-0{,}5;\qquad c=-3$

$-3\qquad -0{,}5\qquad c$

$(-\infty;-3]$;	$(-3;-0{,}5]$;	$(-0{,}5;+\infty)$
1) $-4\in(-\infty;-3]$	2) $-1\in(-3;-0{,}5]$	3) $0\in(-0{,}5;+\infty)$
$-(4c+2)=-(3c+9)$;	$-(4c+2)=3c+9$;	$4c+2=3c+9$;
$-4c-2=-3c-9$;	$-4c-2=3c+9$;	$4c-3c=9-2$;
$-4c+3c=-9+2$;	$-4c-3c=9+2$;	$c=7$;
$-c=-7$	$-7c=11$;	$7\in(-0{,}5;+\infty)$
$c=7$	$c=-1\frac{4}{7}$	
$7\notin(-\infty;-3]$	$-1\frac{4}{7}\in(-3;-0{,}5]$	

Ответ: $\{-1\frac{4}{7};7\}$

№ 402

а) Пусть x одно число, тогда второе число $x+21$. По условию частное чисел равно 8:

$\frac{x}{x+21}=8$;	$\frac{x+21}{x}=8$
$x=8(x+21)$;	$x+21=8x$;
$x=8x+168$;	$x-8x=-21$;
$x-8x=168$;	$-7x=-21$;
$-7x=168$;	$x=3$;
$x=-24$	
$-24;-3$	$3;24$

Ответ: искомые числа -24 и -3 или 3 и 24.

б) Пусть x первое число, $x+10$ – второе число. По условию сумма их модулей равна 16:
$|x|+|x+10|=16$;
$x=0;\qquad x+10=0;$
$x=-10$;

$-10\qquad 0\qquad x$

$(-\infty;-10]$; $\qquad(-10;0]$; $\qquad(0;+\infty)$

1) $-11 \in (-\infty; -10]$;	2) $-1 \in (-10; 0]$;	3) $1 \in (0; +\infty)$
$-x-(x+10)=16$;	$-x+x+10=16$;	$x+x+10=16$;
$-x-x-10=16$;	$0 \cdot x = 16-10$;	$2x = 16-10$;
$-2x = 16+10$;	$0 \cdot x = 6$;	$2x = 6$;
$-2x = 26$;	Нет решения	$x = 3$
$x = -13$		
$-13 \in (-\infty; -10]$		$3 \in (0; +\infty)$
-13 и -3		3 и 13

Ответ: искомые числа -13 и -3; 3 и 13.

№ 411 (а)

1) $\frac{1}{12} : \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 2}{12 \cdot 5} = \frac{1}{30}$ (часть) выполняется за 1 ч

2) $1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{24-2-3}{24} = \frac{19}{24}$ (часть) останется сделать

3) $\frac{19}{24} : \frac{1}{30} = \frac{19 \cdot 30}{24} = \frac{19 \cdot 5}{4} = \frac{95}{4} = 23\frac{3}{4}$ (ч)

Ответ: пекарь должен работать 23 ч 45 мин.

№ 414*

Так как все дети съели, по крайней мере, по 3 пирожных, то на долю мальчиков еще осталось $44 - 12 \cdot 3 = 8$.

Так как мальчики съели по 4 пирожных, то мальчиков было 8. А значит, девочек было $12 - 8 = 4$.

$3 \cdot 4 = 12$ (шт.) – съели девочки

Ответ: 12 штук.

№ 415*

Если Ваня и Петя съели вместе 35 конфет, то Коля и Миша съели вместе 20 конфет ($55 - 35 = 20$). При этом Миша съел конфет больше всех, а Коля съел хотя бы одну конфету. Значит, Миша не мог съесть более 19 конфет. Значит, каждый из двух мальчиков (Ваня и Петя) съел менее 19 конфет. Это возможно только, если один из них съел 18 конфет, а другой 17 конфет, иначе кто-нибудь (или Ваня или Петя) съест 19 конфет или более, что невозможно.

Ответ: Миша съел 19 конфет.

П. 6.1.3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ*

Особенности изучения учебного содержания

Содержание данного пункта не является обязательным для изучения при 3 ч алгебры в неделю. Его изучение может быть вынесено учителем на факультативные занятия. В результате учащиеся познакомятся со способом решения диофантовых уравнений с двумя переменными.

Учащиеся уже с 5 класса знакомы со способом перебора при решении уравнений. Они используют его наряду с методом проб и ошибок для уравнений, алгоритм решения которых им пока неизвестен. В данном пункте этот метод уточняется и оформляется в виде алгоритма.

В данном пункте учащиеся имеют возможность познакомиться с другим алгоритмом поиска целых решений линейных уравнений вида $ax + by = c$ – с использованием понятия НОД.

Учащиеся используют новые алгоритмы для решения текстовых задач.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

П. 6.2.1. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ РЕШЕНИЕ

Основные содержательные цели:

1) формировать понятия: линейное неравенство, решение линейного неравенства;

2) формировать способность строить алгоритмы на примере алгоритма решения линейного неравенства;

3) формировать умение применять алгоритм при решении неравенств;

4) тренировать умение решать текстовые задачи.

Особенности изучения учебного содержания

Ранее учащиеся уже решали простейшие неравенства, изображая их решение на числовой прямой. В данном пункте учащиеся уточняют имеющиеся у них знания о неравенствах (что такое неравенство, решение неравенства, что значит решить неравенство). Здесь же вводится понятие строгого и нестрого неравенства.

Знакомясь с кусочно-линейными функциями семиклассники рассматривали различные числовые промежутки, их названия, обозначения и геометрическое представление на числовой прямой. Поэтому при изучении данного пункта они только повторяют такие из числовых промежутков, как открытый и замкнутый лучи, а также знакомятся с промежутком вида $(-\infty\ ;\ +\infty\ )$.

Учащиеся знакомятся с определением равносильных неравенств, равносильных преобразований неравенств, знакомятся с правилами равносильных преобразований неравенств. Эти знания рекомендуется ввести на этапе актуализации, для этого можно использовать задания №№ 455 – 466.

В этом же пункте учащиеся знакомятся с понятием линейного неравенства с одной переменной. Это определение рекомендуется сформулировать с учащимися на этапе актуализации, для чего можно использовать задание № 469 (1).

При изучении данного пункта семиклассники строят алгоритм решения линейного неравенства с одной переменной. Для проблематизации можно предложить учащимся решить линейные неравенства, записанные в общем виде, воспользовавшись заданием № 469 (2). Для проведения аналогии с линейными уравнениями можно записать неравенства в другом виде, а именно:

1) $kx + b > 0$, 2) $kx + b < 0$, 3) $kx + b > 0$, 4) $kx + b < 0$.

Для открытия можно использовать задание № 469 (3) и 471. На уроке учащиеся, опираясь на опыт получения алгоритма решения линейных уравнений, могут предложить следующий план открытия.

1. Перечислить, какие значения могут принимать k и b.

2. Для каждого случая, используя правила равносильных преобразований, найти x.

3. Сформулировать алгоритм решения линейных неравенств.

Для первичного закрепления умения решать линейные неравенства в зависимости от уровня класса можно выбрать некоторые из заданий №№ 464, 467, 470, 474, 487. При выполнении № 487 рекомендуется обратить внимание учащихся на рациональный способ решения неравенства, предполагающий деление обеих частей неравенства на одно и то же число.

В учебнике предложен целый спектр разнообразных заданий, где работа с неравенствами предполагает

- составление неравенств (№№ 473,477, 481),
- решение текстовых задач (№№ 488),
- доказательство (№ 466, 479).

Кроме того, в учебнике предложены задания, которые предполагают решение неравенств методом приведения к целым коэффициентам (№ 480, 489, 491 - 492) и др. Учитель выбирает из них те задания, которые целесообразно выполнить в конкретном классе в соответствии с существующими затруднениями и возможностями учащихся.

В учебнике предлагаются задания на пропедевтику решения систем неравенств (№№ 489, 493), их выполнение предполагает поиск общих решений (пересечений) полученного при решении неравенства промежутка и заданного промежутка. При 4 ч алгебры в неделю эти задания рекомендуется выполнить, так как умение находить пересечение промежутков фактически готовит учащихся к изучению следующего пункта «Решение неравенств с модулями».

Для отработки понятия равносильных преобразований неравенства рекомендуется выполнить задание № 459, на котором можно разобрать, почему при умножении на отрицательное число следует менять знак неравенства.

Отдельное внимание уделяется случаям, когда неравенство не имеет решений либо его решением является любое число – №№ 475, 476. С этой же целью можно выполнить № 479 (а, б).

В заданиях №№ 485, 486, 494 учащиеся готовятся к решению неравенств с параметром.

После изучения данного пункта учащиеся пишут контрольную работу по содержанию главы 6. Готовность к контрольной работе можно проверить, используя раздел «Задачи для самоконтроля к главе 6».

Урок. Линейные неравенства и их решение

Новое знание

Понятие линейного неравенства, случаи решения линейных неравенств, алгоритм решения линейного неравенства $kx > c$, алгоритм решения линейного неравенства $kx < c$, алгоритм решения линейного неравенства $kx \geqslant c$, алгоритм решения линейного неравенства $kx \leqslant c$.

Актуализация

Повторить: понятие неравенства, виды неравенств, понятие решения неравенства, решение простейших неравенства с помощью числовой прямой, понятие равносильных неравенств, свойства неравенств, правила равносильных преобразований неравенств.

Задание на пробное действие

Решить неравенства: 1) $kx + b > 0$, 2) $kx + b < 0$, 3) $kx + b \geqslant 0$, 4) $kx + b \leqslant 0$.

Фиксация затруднения

Я не могу решить линейные неравенства.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма решения линейных неравенств.

Цель деятельности

Выяснить, как решение линейного неравенства зависит от значений k и b, построить алгоритм решения линейного неравенства.

Эталон

Понятие линейного неравенства:

Линейным неравенством с одной переменной x называются неравенство вида:

$$kx + b > 0, \quad kx + b < 0, \quad kx + b > 0, \quad kx + b < 0,$$

где k, b – некоторые числа.

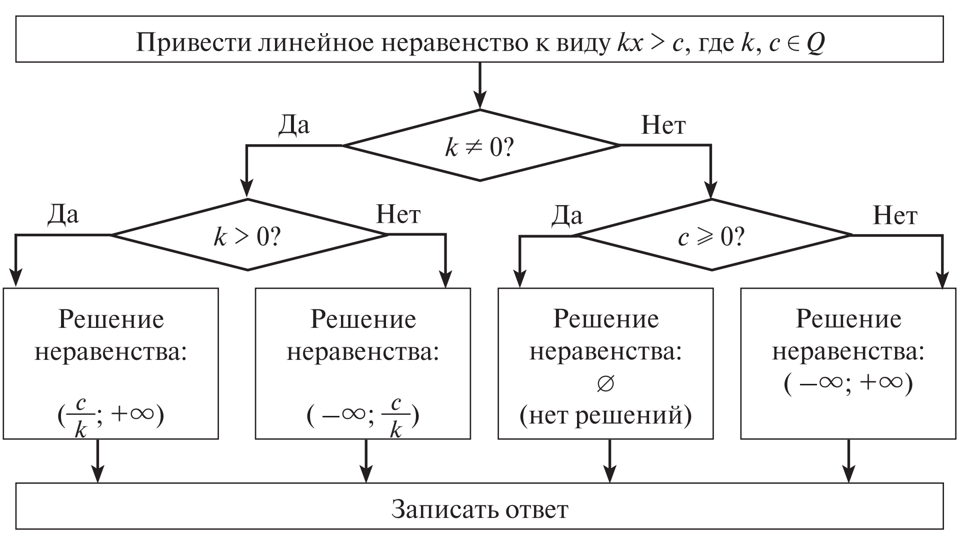
Случаи решения линейных неравенств

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx > c$	Решения неравенства $kx \geqslant c$
$k = 0$	$c < 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c = 0$	$\varnothing$ (нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$\varnothing$ (нет решений)	$\varnothing$ (нет решений)
$k > 0$	c – любое	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$
$k < 0$	c – любое	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx < c$	Решения неравенства $kx \leqslant c$
$k = 0$	$c < 0$	$\varnothing$ (нет решений)	$\varnothing$ (нет решений)
$k = 0$	$c = 0$	$\varnothing$ (нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k > 0$	c – любое	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$
$k < 0$	c – любое	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$

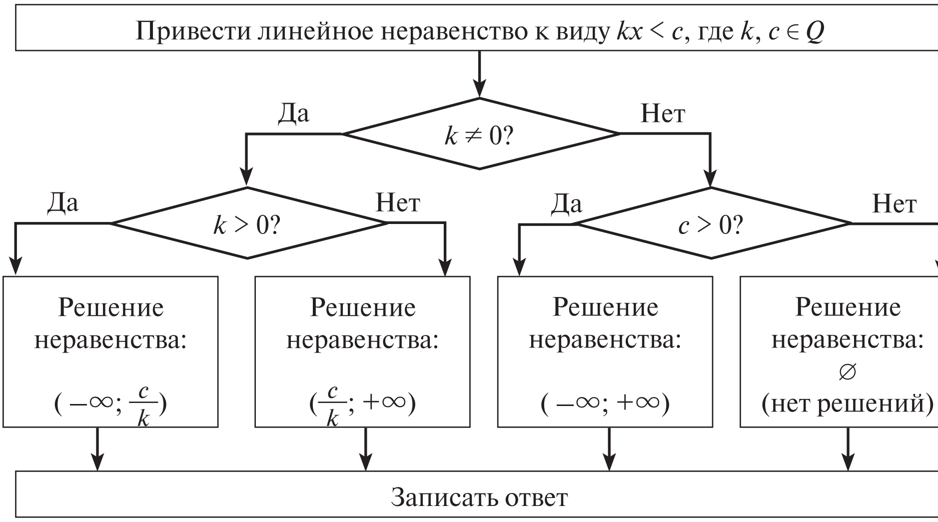
Алгоритм решения линейного неравенства, приводящегося к виду

kx > c, где ***k, c*** $\in$ ***Q***



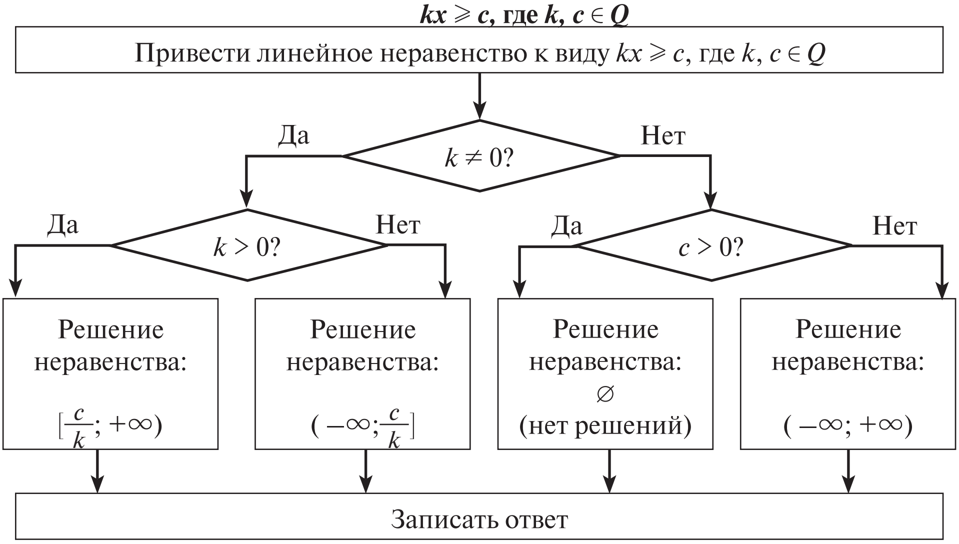
Алгоритм решения линейного неравенства, приводящегося к виду

$kx < c$, где $k, c \in Q$

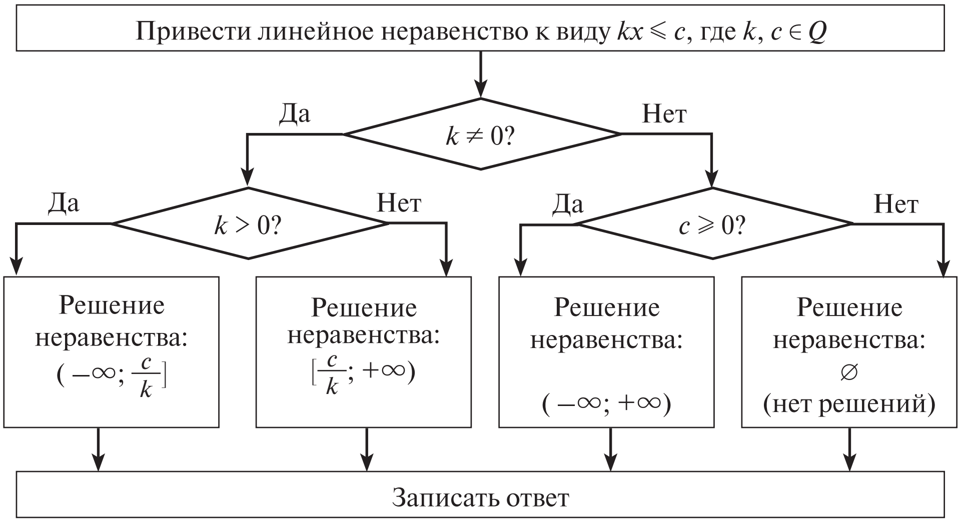


Алгоритм решения линейного неравенства, приводящегося к виду

$kx \geqslant c$, где $k, c \in Q$



Алгоритм решения линейного неравенства, приводящегося к виду $kx \leqslant c$, где $k, c \in Q$



Урок. Решение линейных неравенств (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение решать линейные неравенства;
2) тренировать умение строить графики кусочно-линейных функций, раскладывать многочлены на множители, решать текстовые задачи.

Урок. Линейные неравенства их решение (РК)

Основные цели:

1) организовать самоконтроль умения решать линейные неравенства и применять алгоритм решения линейных неравенств при решении задач;
2) тренировать умение строить графики функций с модулями, раскладывать многочлены на множители.

Урок. Решение линейных неравенств (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение решать линейные неравенства;
2) тренировать умение строить графики кусочно-линейных функций, раскладывать многочлены на множители, решать текстовые задачи.

Урок. Контрольная работа по темам: «Уравнения и неравенства» (ОРК)

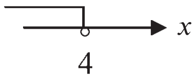
Основные цели:

1) тренировать умение учащихся осуществлять процедуру контроля;
2) тренировать умение учащихся выявлять причины затруднений собственной деятельности;
3) контроль знаний, умений, навыков по темам: «Уравнения и неравенства».

Рассмотрим решение некоторых заданий.

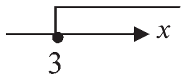
№ 458

а) $x < 4$;



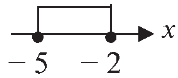
$(-\infty; 4)$

в) $x \geq 3$;



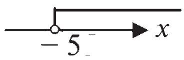
$[3; +\infty)$

д) $-5 \leq x \leq -2$;



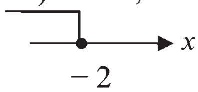
$[-5; -2]$

б) $x > -5$;



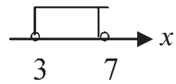
$(-5; +\infty)$

г) $x \leq -2$;



$(-\infty; -2]$

е) $3 < x < 7$;



$(3; 7)$

№ 461 (е, ж)

е) $2 - 6b < 5$ и $6b - 2 \leqslant -5$;
$2 - 6b < 5$; $6b - 2 \leqslant -5$;
$-6b < 5 - 2$; $6b \leqslant -5 + 2$;
$-6b < 3$; $6b \leqslant -3$;
$b > -0{,}5$ $b \leqslant -0{,}5$
Ответ: неравенства не равносильны

ж) $8c - 6 > 10$ и $4c > 8$;
$8c - 6 > 10$; $4c > 8$;
$8c > 10 + 6$; $c > 2$;
$8c > 16$;
$c > 2$
Ответ: неравенства равносильны.

з) $-5d + 7 < -8$ и $-3d < -3$;
$-5d + 7 < -8$; $-3d < -3$;
$-5d < -8 - 7$; $d > 1$;
$-5d < -15$;
$d > 3$

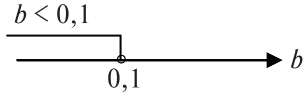
Число 2 является решением второго неравенства, а решением первого не является.

Ответ: неравенства не равносильны.

№ 464

ж) $4a - 2 > -10$;
$4a > -10 + 2$;
$4a > -8$;
$a > -8 : 4$;
$a > -2$
Ответ: $(-2; +\infty)$.

з) $10b + 7 < 8$;
$10b < 8 - 7$;
$10b < 1$;
$b < 0{,}1$



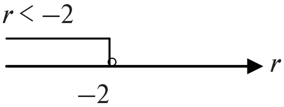
Ответ: $(-\infty; 0{,}1)$.

и) $6 \leqslant 4 - 3c$;
$3c \leqslant 4 - 6$;
$3c \leqslant -2$;
$c \leqslant -2 : 3$;
$c \leqslant \frac{2}{3}$

Ответ: $(-\infty; -\ ]$.

п) $11q + 7 \geqslant 9q + 13$;
$11q - 9q \geqslant 13 - 7$;
$2q \geqslant 6$;
$q \geqslant 3$
Ответ: $[3; +\infty)$.

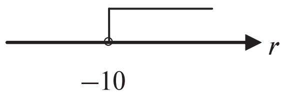
р) $-7r - 9 > 6r + 17$;
$-7r - 6r > 9 + 17$;
$-13r > 26$;
$r < -2$



Ответ: $(-\infty; -2)$.

с) $8s + 7 < -12s - 33$;
$8s + 12s < -33 - 7$;
$20s < -40$;
$s < -2$
Ответ: $(-\infty; -2)$.

т) $-12t - 4 < -9t + 26$;
$-12t + 9t < 4 + 26$;
$-3t < 30$;
$r > -10$



Ответ: $(-10; +\infty)$.

№ 472 (а, б, в, г)

а) $8x + 23 - 2x > 10 - 6x - 17$;
$8x + 6x - 2x > 10 - 23 - 17$;
$12x > -30$;
$x > -2{,}5$
Ответ: $(-2{,}5; +\infty)$.

б) $15x + 3 - 17x \leqslant 7 - 5x - 19$;
$15x + 5x - 17x \leqslant 7 - 3 - 19$;
$3x \leqslant -15$;
$x \leqslant -5$
Ответ: $[-\infty; -5]$.

в) $30 > 3x - x + 8x + 7x - 2x$;
$30 > 15x$;
$x < 2$
Ответ: $(-\infty; 2)$.

г) $5x + 8 \leqslant 6x + 12 + 3x + 2$;
$5x - 6x - 3x \leqslant 12 - 8 + 2$;
$-4x \leqslant 6$;
$x \geqslant -1{,}5$
Ответ: $[-1{,}5; +\infty)$.

№ 478

а) $2x - 7 + 9x \leqslant 4x - 5 + 3x$;
$2x + 9x - 4x - 3x \leqslant -5 + 7$;
$4x \leqslant 2$;
$x \leqslant 0{,}5$
Получили нестрогое неравенство, решением которого является замкнутый луч.
Ответ: 0,5.

б) $5 - 9y + 6 + 15y > 4y - 12 - 2y$;
$-9y + 15y - 4y + 2y > -12 - 5 - 6$;
$2y > -23$;
$y > -11{,}5$
Получили строгое неравенство, решением которого является открытый луч.
Ответ: нельзя назвать наименьшее решение.

в) $3 + 4z - 11 + 6z < 2z - 9 + z$;
$4z + 6z - 2z - z < -9 - 3 + 11$;

$7z < -1$;

$z < -\frac{1}{7}$
Ответ: нельзя назвать наибольшее решение.

г) $5t - 3t + 7 + 13t \geqslant 8t - 16 - 7t + 6t$;
$5t - 3t + 13t - 8t + 7t - 6t \geqslant -16 - 7$;
$8t \geqslant -23$;

$t \geqslant -2\frac{5}{8}$

Ответ: $-2\frac{5}{8}$.

д) $18 - 3p + 9 - 19p > 8p - 7 - 9p$;
$-3p - 19p - 8p + 9p > -7 - 18 - 9$;

$-21p > -34$;

$p < 1\frac{13}{21}$
Ответ: 1.

е) $9 - 2q - 12 + 17q > 9q - 11 + 3q$;
$-2q + 17q - 9q - 3q > -11 - 9 + 12$;
$3q > -8$;

$q > -2\frac{2}{3}$

Ответ: –2.

№ 480

г) $6-\frac{t}{3}\geqslant -4$;

$18-t\geqslant -12$;
$-t\geqslant -12-18$;
$-t\geqslant -30$;
$t\leqslant 30$
Ответ: $(-\infty; 30]$.

д) $\frac{r}{2}+2<\frac{r}{3}-6$;

$3r+12<2r-36$;
$3r-2r<-36-12$;
$r<-48$
Ответ: $(-\infty; -48)$.

ж) $\frac{p}{6}-3\leqslant -\frac{p}{9}+4$;

$3p-54\leqslant -2p+72$;
$3p+2p\leqslant 72+54$;
$5p\leqslant 126$
$p\leqslant 25{,}2$
Ответ: $(-\infty; 25{,}2]$.

е) $4-\frac{s}{4}\geqslant \frac{s}{5}+7$;

$80-5s\geqslant 4s+140$;
$-5s-4s\geqslant -80+140$;
$-9s\geqslant 60$;

$s\leqslant -6\frac{2}{3}$

Ответ: $(-\infty; -6\ ]$.

з) $3-\frac{q}{4}>-\frac{q}{7}-2$;

$84-7q>-4q-56$;
$-7q+4q>-84-56$;
$-3q<-140$;

$q<46\frac{2}{3}$

Ответ: $(-\infty; 46\frac{2}{3})$.

к) $\frac{2-8y}{5}<\frac{9+y}{4}$;

$4(2-8y)<5(9+y)$;
$8-32y<45+5y$;
$-32y-5y<45-8$;
$-37y<37$;
$y>-1$
Ответ: $(-1; +\infty)$

о) $\frac{y-2}{6}+1>\frac{y+1}{5}$;

$5(y-2)+30>6(y+1)$;
$5y-10+30>6y+6$;
$20-6>6y-5y$;
$y<14$;
Ответ: $(-\infty; 14)$

№ 487

а) $4(x+5)>28(x-9)$;
$x+5>7(x-9)$;
$x+5>7x-63$;
$x-7x>-5-63$;
$-6x>-68$;

$x<11\frac{1}{3}$

Ответ: $(-\infty; 11\frac{1}{3})$

б) $8(y-5)<24(7-y)$;
$y-5<3(7-y)$;
$y-5<21-3y$;
$y+3y<21+5$;
$4y<26$;

$y<6{,}5$

Ответ: $(-\infty; 6{,}5)$

в) $6(48-2z)>-48(3-z)$;
$48-2z>-8(3-z)$;
$48-2z>-24+8z$;
$-2z-8z>-24-48$;
$-10z>-72$;

$z<7{,}2$

Ответ: $(-\infty; 7{,}2)$.

д) $-18(6a-15)\geqslant -63(7-3a)$;
$2(6a-15)\leqslant 7(7-3a)$;
$12a-30\leqslant 49-21a$;
$12a+21a\leqslant 49+30$;
$33a\leqslant 79$;

$a\leqslant 2\frac{13}{33}$

Ответ: $(-\infty; 2\frac{13}{33}\ ]$.

г) $-14(3t + 12) \leqslant 49(6 - 7t)$;
$-2(3t + 12) \leqslant 7(6 - 7t)$;
$-6t - 24 \leqslant 42 - 49t$;
$-6t + 49t \leqslant 42 + 24$;
$43t \leqslant 66$;
$t \leqslant 1\frac{23}{43}$
Ответ: $(-\infty; 1\frac{23}{43}]$.

е) $15(21 - 4b) < 60(11 - 5b)$;
$21 - 4b < 4(11 - 5b)$;
$21 - 4b < 44 - 20b$;
$-4b + 20b < 44 - 21$;
$16b < 23$;
$b < 1\frac{7}{16}$
Ответ: $(-\infty; 1\frac{7}{16})$.

№ 488

а) Пусть одна сторона x см, вторая сторона $x + 8$ (см), где $x > 0$, $x + 8 > 0$. По условию периметр прямоугольника меньше 32 см:
$(x + x + 8) \cdot 2 < 32$;
$x + x + 8 < 16$;
$2x < 16 - 8$;
$2x < 8$;
$x < 4$, тогда для меньшей стороны выполняется $0 < x < 4$, значит для длины большей стороны верно: $8 < x + 8 < 4 + 8$.
Ответ: длина большей стороны больше 8 см и меньше 12 см.

б) Пусть одна сторона x см ($x > 0$). По условию периметр прямоугольника меньше 18 см:
$(x + 5) \cdot 2 < 18$;
$x + 5 < 9$;
$x < 9 - 5$;
$x < 4$
Ответ: длина стороны прямоугольника больше 0 см и меньше 4 см.

в) 24 мин = 0,4 ч
Пусть средняя скорость движения x км/ч, где $x > 0$. По условию расстояние до школы более 1,6 км:
$0{,}4x > 1{,}6$;
$x > 4$, $x > 0$
Ответ: значение средней скорости больше 4 км/ч;.

е) 3,5 т = 3500 кг

$3500 : 60 = 58\frac{1}{3}$ (шт.)

Ответ: на машине можно перевезти не больше 58 мешков..

№ 489 (а)

а) $\frac{x}{2} + 6 > \frac{x}{5} - 7$;

$5x + 60 > 2x - 70$;
$5x - 2x > -60 - 70$;
$3x > -130$;
$x > -43$
Ответ: $[0; +\infty)$.

№ 493 (а)

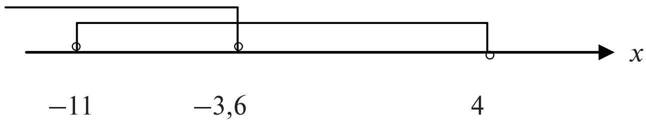
а) $7 - \frac{x}{3} > \frac{2x}{9} + 9$; $x \in (-11; 4)$;

$63 - 3x > 2x + 81$;

$-3x - 2x > 81 - 63$;

$-5x > 18$;

$x < -3{,}6$



Ответ: $(-11; -3{,}6)$.

№ 498

а)

1) $1 : 75 = \frac{1}{75}$ (часть) производительность труда первой бригады;

2) $1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 = \frac{1}{5}$ (часть) выполнила вторая бригада;

3) $\frac{1}{5} : 12 = \frac{1}{60}$ (часть) производительность труда второй бригады;

4) $\frac{1}{75} + \frac{1}{60} = \frac{4+5}{300} = \frac{9}{300} = \frac{3}{100}$ (часть) производительность обеих бригад;

5) $1 : \frac{3}{100} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ (д.)

Ответ: бригады выполнят всю работу за $33\frac{1}{3}$ дня.

в)

	p	**t**	**A**
I	$\frac{1}{27}$	27 ч	1
II	$\frac{1}{18}$	18 ч	1
III	$\frac{1}{54}$	54 ч	1

1) $\frac{1}{27} + \frac{1}{18} = \frac{2+3}{54} = \frac{5}{54}$ (часть) производительность труда 1 и 2 трубы;

2) $1 : \frac{5}{54} = 10{,}8$ (ч) время наполнения бассейна 1 и 2 трубами;

3) $\frac{1}{27} + \frac{1}{54} = \frac{2+1}{54} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$ (часть) производительность труда 1 и 3 трубы;

4) $1 : \frac{1}{18} = 18$ (ч) время наполнения бассейна 1 и 3 трубами;

5) $\frac{1}{18} + \frac{1}{54} = \frac{3+1}{54} = \frac{4}{54} = \frac{2}{27}$ (часть) производительность труда 2 и 3 трубы;

6) $1 : \frac{2}{27} = 13{,}5$ (ч) время наполнения бассейном 2 и 3 трубами;

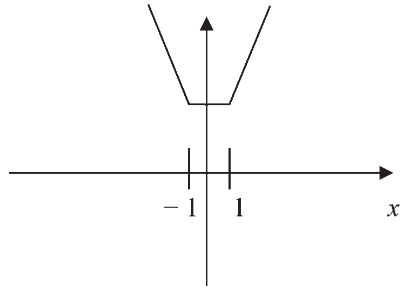
7) $\frac{1}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} = \frac{2+3+1}{54} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$ (часть) производительность трёх труб

8) $1 : \frac{1}{9} = 9$ (ч) время наполнения бассейна тремя трубами.

Ответ: 9 ч – минимальное время наполнения бассейна.

№ 499 (а)

$$y = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \geqslant 1 \\ 3, \text{ если } -1 \leqslant x < 1; \\ -3x, \text{ если } x < -1 \end{cases}$$



№ 502 (а)

а) $x^7 + x^5 + x^2 + 1 = (x^7 + x^5) + (x^2 + 1) = x^5(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^5 + 1)$.

№ 504 (а)

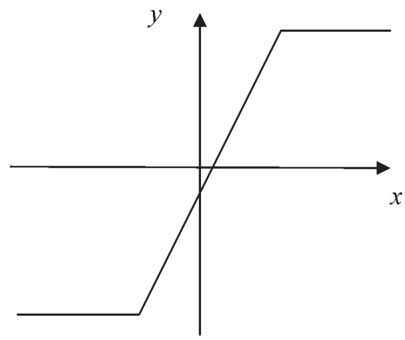
а) $f(x) = |x + 3| - |x - 4|$;

$x + 3 = 0; \quad x - 4 = 0;$

$x = -3; \quad x = 4$

$(-\infty; -3); [-3; 4]; (4 + \infty)$

$$y = \begin{cases} -7, x < -3; \\ 2x - 1, -3 \leqslant x \leqslant 4; \\ 7, x > 4. \end{cases}$$



№ 505 (а, в)

Данное задание выполняется у доски с комментированием.

а) $xy(x - y) - xz(x - z) - yz(z - y) = x(xy - y^2 - xz + z^2) - yz(z - y) =$
$= x(x(y - z) - (y - z)(y + z)) - yz(z - y) = x(y - z)(x - y - z) - yz(z - y) =$
$= (y - z)(x^2 - xy - xz + yz) = (y - z)(x(x - y) - z(x - y)) = (y - z)(x - y)(x - z)$

в) $m^2(n - k) - n^2(m - k) + k^2(m - n) = m^2n - m^2k - mn^2 + n^2k + k^2m - k^2n =$
$= mn(m - n) - mk(m - k) + nk(n - k) = m(mn - n^2 - mk + k^2) + nk(n - k) =$
$= m(m(n - k) - (n - k)(n + k)) + nk(n - k) = m(n - k)(m - n - k) + nk(n - k) =$
$= (n - k)(m(m - n - k) + nk) = (n - k)(m^2 - mn - mk + nk) =$
$=(n - k)(m(m - n) - k(\mathrm{m} - n)) = (n - k)(m - n)(m - k)$

№ 506

д) $3a - 4 \geqslant -13$;
$3a \geqslant -13 + 4$;
$3a \geqslant -9$;
$a \geqslant -3$
Ответ: $[-3; +\infty)$

е) $8b + 5 < 21$;
$8b < 21 - 5$;
$8b < 16$;
$b < 2$
Ответ: $(-\infty; 2)$

ж) $-14c + 9 > -47$;
$-14c > -47 - 9$;
$-14c > 56$;
$c < -4$
Ответ: $(-\infty; -4)$

з) $9 - 5d \leqslant -26$;
$-5d \leqslant -26 - 9$;
$-5d \leqslant -35$;
$d \geqslant 7$
Ответ: $[7; +\infty)$

и) $-5m + 3 > -9m - 17$;
$-5m + 9m > -17 - 3$;
$4m > -20$;
$m > -5$
Ответ: $(-5; +\infty)$

к) $8n - 6 \leqslant 9n + 14$;
$8n - 9n \leqslant 6 + 14$;
$-n \leqslant 20$;
$n \geqslant -20$
Ответ: $[-20; +\infty)$

л) $5p + 10 < -9p - 18;$
$5p + 9p < -10 - 18;$
$14p < -28;$
$p < -2$
Ответ: $(-\infty; -2)$.

м) $-6q - 5 < -8q + 11;$
$-6q + 8q < 5 + 11;$
$2q < 16;$
$q < 8$
Ответ: $(-\infty; 8)$.

№ 507

а) $x - 5 < -2$ и $x < 3;$
$x - 5 < -2; \quad x < 3;$
$x < -2 + 5;$
$x < 3$
Ответ: неравенства равносильные.

в) $3a < 27$ и $-a > -9;$
$3a < 27; \quad -a > -9;$
$a < 9; \quad a < 9$
Ответ: неравенства равносильные.

б) $2y > 12$ и $-y > -6;$
$2y > 12; \quad -y > -6;$
$y > 6; \quad y < 6$
Ответ: неравенства не равносильные.

г) $12b - 15 < 21$ и $-4b > 12$
$12b - 15 < 21; \quad -4b > 12;$
$12b < 21 + 15; \quad b > -3;$
$12b < 36;$
$b < 3$
Ответ: неравенства не равносильные.

№ 516

а) $\frac{x}{-9} + 5 > 7;$
$x - 45 < -63;$
$x < -63 + 45;$
$x < -18$
Ответ: $(-\infty; -18)$

б) $-\frac{z}{4} + 2 \leqslant -8;$
$z - 8 \geqslant 32;$
$z \geqslant 32 + 8;$
$z \geqslant 40;$
Ответ: $[40; +\infty)$

в) $12 - \frac{t}{2} \geqslant -3;$
$24 - t \geqslant -6;$
$-t \geqslant -6 - 24;$
$-t \geqslant -30;$
$t \leqslant 30$
Ответ: $(-\infty; 30]$

№ 517 (в, г)

в) $\frac{2x+5}{2} - 7 \leqslant \frac{3x+7}{3} - 12;$

$3(2x + 5) - 42 \leqslant 2(3x + 7) - 72;$

$6x + 15 - 42 \leqslant 6x + 14 - 72;$

$6x - 6x \leqslant 42 + 14 - 72 - 15;$

$0 \cdot x \leqslant -31$

Ответ: $\varnothing$

г) $\frac{3y-6}{7} - 15 > \frac{2y+5}{-4} - 16;$

$\frac{3y-6}{7} + \frac{2y+5}{4} > 15 - 16;$

$\frac{3y-6}{7} + \frac{2y+5}{4} > -1;$

$4(3y - 6) + 7(2y + 5) > -28;$

$12y - 24 + 14y + 35 > -28;$

$26y > -28 - 11;$

$26y > -39;$

$y > -1,5$

Ответ: $(-1,5; +\infty)$

№ 519 (а, б)

а) $7(2x + 6) > 35(3x - 4)$;
$2x + 6 > 5(3x - 4)$;
$2x + 6 > 15x - 20$;
$2x - 15x > -6 - 20$;
$-13x > -26$;
$x < 2$

б) $9(3y - 7) < -3(12 - 5y)$;
$3(3y - 7) < -(12 - 5y)$;
$9y - 21 < -12 + 5y$;
$9y - 5y < -12 + 21$;
$4y < 9$;
$y < 2{,}25$

№ 520

а) Пусть одна сторона прямоугольника x см, а вторая сторона – $(x + 3)$ см, где $x > 0$, $x + 3 > 0$.

По условию задачи периметр прямоугольника меньше 24 см:
$(x + x + 3) \cdot 2 < 24$;
$2x + 3 < 12$;
$2x < 12 - 3$;
$2x < 9$;
$x < 4{,}5$, тогда для меньшей стороны выполняется $0 < x < 4{,}5$, значит для длины большей стороны верно: $3 < x + 3 < 4{,}5 + 3$.

Ответ: длина большей стороны больше 3 см и меньше 7,5 см.

б) x ч время движения, $x > 0$. По условию расстояние менее 27 км:
$36x < 27$;
$x < 0{,}75$; 0,75 ч = 45 мин.
Ответ: понадобится менее 45 минут.

в) 50 т = 50 000 кг

$50\,000 : 28 = 1785\frac{5}{7}$ (м)

Ответ: не больше 1785 мешков.

№ 527 (а)

	p	**t**	**A**
I	$\frac{1}{30}$	30 д.	1
II	$\frac{1}{45}$	18 д.	0,4
Вместе	$\frac{1}{18}$	? д.	1

$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{3+2}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$(часть) общая производительность

Ответ: работа будет выполнена за 18 дней.

№ 533*

Введем обозначения для девяти последовательных целых чисел:
n; $n + 1$; $n + 2$; ... $n + 7$; $n + 8$.

По условию $n + (n + 1) + (n + 2)$ равно $(n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) + (n + 7) + (n + 8)$. Составив математическую модель, найдем наименьшее из искомых чисел $n = -10$.

Отсюда находим остальные заданные числа: – 9; – 8; –7; –6; –5; ...–2.

№ 534*

Отталкиваясь в своих рассуждениях от таблички на третьем доме, мы понимаем, что в нем не может жить ни Пятачок, ни Винни-Пух, т.е. там живет Сова. Тогда в первом живет не Сова, и не Винни-Пух, значит, там живет Пятачок. Тогда во втором доме живет Винни-Пух, что не противоречит условию.

П. 6.2.2. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЯМИ*

Основные содержательные цели:

1) формировать способность проводить исследования на примере исследования решений неравенств с модулями;
2) формировать умение применять выведенные правила при решении неравенств с модулями;
3) тренировать умение выполнять действия с именованными числами, решать текстовые задачи.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся учатся решать неравенства с модулями. Содержание данного пункта не является обязательным для изучения при 3 ч алгебры в неделю. Его изучение может быть вынесено учителем на факультативные занятия. В результате учащиеся познакомятся с алгоритмом решения неравенств с модулями.

Новый алгоритм во многом повторяет уже известный способ решения уравнений с модулями, поэтому сложность может вызвать только последний пункт алгоритма, который требует записать *объединение* всех полученных множеств.

Урок. Решение неравенств с модулями

Новое знание

Решение простейших неравенств с модулями.

Актуализация

Повторить: определение модуля, алгоритм решения уравнений с модулем.

Задание на пробное действие

Решите неравенство $|x| > c$, пользуясь определением модуля.

Фиксация затруднения

Я не могу решить неравенство, пользуясь определением модуля.

Фиксация причины затруднения

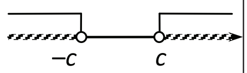
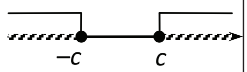
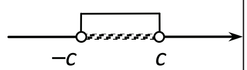
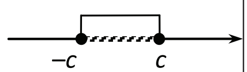
Нет алгоритма решения неравенств с модулем.

Цель деятельности

Исследовать решения неравенств с модулем, сформулировать правила решения неравенств с модулем.

Эталон

Решение простейших неравенств с модулями

$c > 0$			$c \leqslant 0$	
Неравенство	Схема	Множество решений	Неравенство	Множество решений
$\lvert x \rvert > c$		$(-\infty; -c) \cup (c; +\infty)$	$\lvert x \rvert > c$	$(-\infty; +\infty)$
$\lvert x \rvert \geqslant c$		$(-\infty; -c) \cup (c; +\infty)$	$\lvert x \rvert \geqslant c$	$(-\infty; +\infty)$
$\lvert x \rvert < c$		$(-c;\ c)$	$\lvert x \rvert < c$	$\varnothing$
$\lvert x \rvert \leqslant c$		$[-c;\ c]$	$\lvert x \rvert \leqslant c$	Если $c < 0$ $\varnothing$ Если $c = 0$ $x = 0$

Урок. Решение неравенств с несколькими модулями

Новое знание

Решение неравенств с несколькими модулями.

Актуализация

Повторить: определение модуля, алгоритм решения уравнений с несколькими модулями, решение простейших неравенств с модулями.

Задание на пробное действие

Решите неравенство: $|x - 2| + |x - 4| > 2$.

Фиксация затруднения

Я не могу решить неравенство с двумя модулями.

Фиксация причины затруднения

Нет алгоритма решения неравенств с несколькими модулями.

Цель деятельности

Построить алгоритм решения неравенств с несколькими модулями.

Эталон

Алгоритм решения неравенств с несколькими модулями

1. Найти в неравенстве все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из этих выражений к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на «упрощенной» модели числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают числовую прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, чему равно значение каждого модуля: самому выражению, содержащемуся под знаком модуля, или выражению, противоположному ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходное

неравенство без знаков модуля.

7. Найти пересечение полученных множеств решений и соответствующих числовых промежутков.
8. В ответе записать объединение всех получившихся множеств решений.

Урок. Решение неравенств с модулем (РТ)

Основные цели:

1) тренировать умение решать неравенства с модулем;

2) тренировать умение находить значения аргумента по данным значениям функции, решать текстовые задачи.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

№ 535

а) $|-4| + |-9| > (-4) + (-9)$;

б) $-|2{,}4| + 7{,}2 = (-2{,}4) + |7{,}2|$;

в) $-6{,}8 - |-5| < |-6{,}8| - (-5)$;

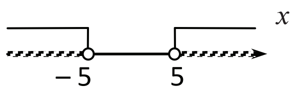
г) $|-4{,}3| \cdot |9{,}4| > (-4{,}3) \cdot |9{,}4|$;

д) $|-8{,}2| \cdot |-3{,}6| > |-8{,}2| \cdot (-3{,}6)$;

е) $|7{,}14| : |-4{,}5| = (7{,}14) : |-4{,}5|$.

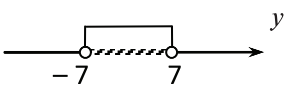
№ 536

а) $|x| > 5$;
$5 > 0$



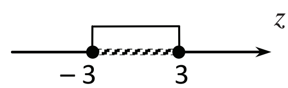
Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

б) $|y| < 7$;
$7 > 0$



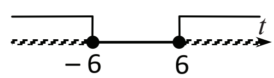
Ответ: $(-7; 7)$.

в) $|z| \leqslant 3$;
$3 > 0$



Ответ: $[-3; 3]$.

г) $|-t| \geqslant 6$;
$6 > 0$



Ответ: (–u; – 6] ∪ [6; +u).

д) $|-r| < -7$;
$-7 < 0$
Ответ: ∅

е) $|-p| > -3$;
$-3 < 0$
Ответ: (– u; + u).

ж) $|n| < 0$;
Ответ: ∅

з) $|m| \leqslant 0$;
Ответ: 0

и) $|a| > 0$
Ответ: (– u; 0)2(0; + u).

к) $|b| \geqslant 0$
Ответ: (– u; + u).

№ 537 (а, б, в, д, ж, и).

а) $|x + 1| < 5$; $5 > 0$

$-5 < x + 1 < 5$;

$-5 - 1 < x < 5 - 1$;

$-6 < x < 4$;

Ответ: $(-6; 4)$.

б) $|y - 2| > 4$; $4 > 0$

$y - 2 > 4$; $y - 2 < -4$;

$y > 4 + 2$; $y < -4 + 2$;

$y > 6$; $y < -2$;

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

в) $|-z + 3| \geqslant 3{,}6$; $3{,}6 > 0$

$-z + 3 \geqslant 3{,}6$; $-z + 3 \leqslant -3{,}6$;

$-z \geqslant 3{,}6 - 3$; $-z \leqslant -3{,}6 - 3$;

$-z \geqslant 0{,}6$; $-z \leqslant -6{,}6$;

$z \leqslant -0{,}6$ $z \geqslant 6{,}6$

Ответ: $(-\infty; -0{,}6] \cup [6{,}6; +\infty)$.

д) $|2a - 5| \leqslant 11$; $11 > 0$

$-11 \leqslant 2a - 5 \leqslant 11$;

$-11 + 5 \leqslant 2a \leqslant 11 + 5$;

$-6 \leqslant 2a \leqslant 16$;

$-3 \leqslant a \leqslant 8$

Ответ: [–3: 8].

ж) $-|9c - 7| \leqslant 36$;

$|9c - 7| \geqslant -36$;

Ответ: ∅.

и) $-|2{,}1s - 4| > 21$;

$|2{,}1s - 4| < -21$;

Ответ: ∅.

№ 541

а) $|x+7|<|x-9|$;

$x+7=0 \qquad x-9=0$

$x=-7 \qquad\quad x=9$

$(-\infty; -7) \qquad [-7; 9] \qquad (9; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; -7)$

$-(x+7) < -(x-9)$;

$-x-7 < -x+9$;

$-x+x < 9+7$;

$0 \cdot x < 16$

$(-\infty; +\infty)$

$\underline{(-\infty; -7)}$

2) $x \in [-7; 9]$

$x+7 < -(x-9)$;

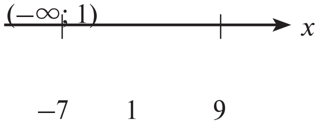
$x+7 < -x+9$;

$x+x < -7+9$;

$2x < 2$;

$x < 1$

$(-\infty; 1)$



$[-7; 1)$

3) $x \in (9; +\infty)$

$x+7 < x-9$;

$x-x < -7-9$;

$0 \cdot x < -16$;

нет решения

Ответ: $(-\infty; 1)$.

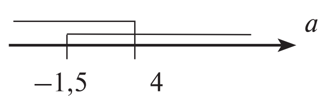
ж) $|2a-8| > |6a+9|$;

$|2a-8| - |6a+9| > 0$;

$2a-8=0 \quad 6a+9=0$

$2a=8 \qquad 6a=-9$

$a=4 \qquad\; a=-1{,}5$



$(-\infty; -1{,}5) \qquad [-1{,}5; 4] \qquad (4; +\infty)$

1) $a \in (-\infty; -1{,}5)$

$-(2a-8)+6a+9>0$;

$-2a+8+6a+9>0$;

$4a+17>0$;

$4a>-17$;

$a>-4{,}25$;

2) $a \in [-1{,}5; 4]$

$-(2a-8)-(6a+9)>0$;

$-2a+8-6a-9>0$;

$-8a-1>0$;

$-8a>1$;

$a<-0{,}125$;

3) $a \in (4; +\infty)$

$2a-8-(6a+9)>0$;

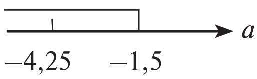
$2a-8-6a-9>0$;

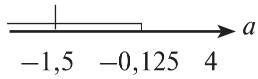
$-4a-17>0$;

$-4a>17$;

$a<-4{,}25$;

$(-4{,}25; +\infty)$ $\quad$ $(-\infty; -0{,}125)$ $\quad$ $(-\infty; -4{,}25)$





$(-4{,}25; -1{,}5)$ $\quad$ $[-1{,}5; -0{,}125)$ $\quad$ нет решения

Ответ: $(-4{,}25; -0{,}125)$.

з) $-|4b - 28| < |15 - 3b|$;

Слева неположительное число, справа – неотрицательное число. Любое неположительное число меньше или равно любого неотрицательного. Оба выражения одновременно не равны нулю ни при каких b.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

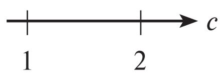
и) $|11c - 5 - 6c| < |12 - 4c + 2 - 3c|$;

$|5c - 5| < |14 - 7c|$;

$5c - 5 = 0$ $\quad$ $14 - 7c = 0$

$5c = 5$ $\quad$ $7c = 14$

$c = 1$ $\quad$ $c = 2$



$(-\infty; 1)$ $\quad$ $[1; 2]$ $\quad$ $(2; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; 1)$

$-(5c - 5) < 14 - 7c$;

$-5c + 5 < 14 - 7c$;

$-5c + 7c < 14 - 5$;

$2c < 9$;

$c < 4{,}5$

$(-\infty; 4{,}5)$

2) $x \in [1; 2]$

$5c - 5 < 14 - 7c$;

$5c + 7c < 14 + 5$;

$12c < 19$;

$c < 1\frac{7}{12}$;

$(-\infty; 1\ )$

3) $x \in (2; +\infty)$

$5c - 5 < -(14 - 7c)$;

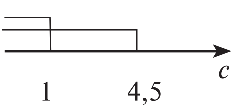
$5c - 5 < -14 + 7c$;

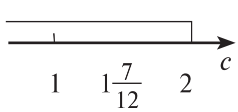
$5c - 7c < -14 + 5$;

$-2c < -9$;

$c > 4{,}5$

$(4{,}5; +\infty)$





$(-\infty; 1)$ $\quad$ $[1; 1\frac{7}{12}\ )$ $\quad$ $(4{,}5; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 1\frac{7}{12}) \cup\ (4{,}5; +\infty)$.

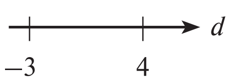
к) $|15d + 21 - 8d| \geqslant |13 - 4d + 3|$;

$|7d + 21| \geqslant |16 - 4d|$;

$7d + 21 = 0$ $\quad$ $16 - 4d = 0$

$7d = -21$ $\quad$ $4d = 16$

$d = -3$ $\quad$ $d = 4$



$(-\infty; -3)$ $\quad$ $[-3; 4]$ $\quad$ $(4 + \infty)$

1) $x \in (-\infty; -3)$

$-(7d + 21) \geqslant (16 - 4d)$;

$-7d - 21 \geqslant 16 - 4d$;

$-7d + 4d \geqslant 16 + 21$;

$-3d \geqslant 37$;

$d \leqslant -12\frac{1}{3}$;

2) $x \in [-3; 4]$

$7d + 21 \geqslant 16 - 4d$;

$7d + 21 \geqslant 16 - 4d$;

$7d + 4d \geqslant 16 - 21$;

$11d \geqslant -5$;

$d \geqslant -\frac{5}{11}$;

3) $x \in (4 + \infty)$

$7d + 21 \geqslant -(16 - 4d)$;

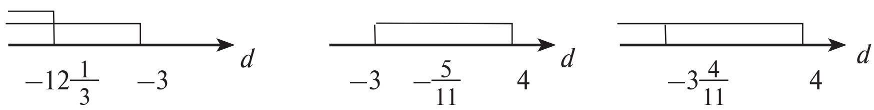
$7d + 21 \geqslant -16 - 4d$;

$7d + 4d \geqslant -16 - 21$;

$11d \geqslant -37$;

$d \geqslant -3$;

$(-\infty; -12\frac{1}{3}]$	$[-\frac{5}{11}; +\infty)$	$[-3\frac{4}{11}; +\infty)$



$(-\infty; -3)$	$[-\frac{5}{11}; 4]$	$(4 + \infty)$

Ответ: $(-\infty; -12\frac{1}{3}) \cup [-\frac{5}{11}; +\infty]$.

№ 543

а) $|2x - 1| + |3x + 12| > 0$;

Сумма неотрицательных чисел – число положительное

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

в) $|5z + 2| + |9z - 6| < 0$;

Ответ: $\varnothing$.

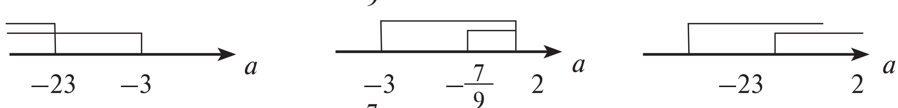
г) $|4a - 8| - |5a + 15| < 0$;

$4a - 8 = 0$ $\quad 5a + 15 = 0$

$4a = 8$ $\quad 5a = -15$

$a = 2$ $\quad a = -3$

$(-\infty; -3)$	$[-3; 2]$	$(2; +\infty)$
1) $x \in (-\infty; -3)$	2) $x \in [-3; 2]$	3) $x \in (2; +\infty)$
$-(4a - 8) + 5a + 15 < 0$;	$-(4a - 8) - (5a + 15) < 0$;	$4a - 8 - (5a + 15) < 0$;
$-4a + 8 + 5a + 15 < 0$;	$-4a + 8 - 5a - 15 < 0$;	$4a - 8 - 5a - 15 \leqslant 0$;
$a + 23 < 0$;	$-9a - 7 < 0$;	$-a - 23 < 0$;
$a < -23$;	$-9a < 7$;	$-a < 23$;
$a < -23$;	$a > -\frac{7}{9}$;	$a > -23$;
$(-\infty; -23)$	$(-\frac{7}{9}; +\infty)$	$(-23; +\infty)$



$(-\infty; -23)$	$[-\frac{7}{9}; 2]$	$(2; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -23) \cup [-\frac{7}{9}; +\infty)$.

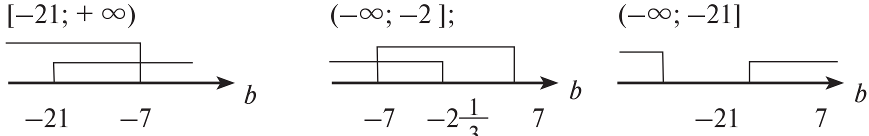
д) $|14 + 2b| - |b - 7| \leqslant 0$;

$14 + 2b = 0$ $\quad b - 7 = 0$

$2b = -14$ $\quad b = 7$

$b = -7$

$(-\infty; -7)$	$[-7; 7]$	$(7; +\infty)$
1) $x \in (-\infty; -7)$	2) $x \in [-7; 7]$	3)$x \in (7; +\infty)$
$-(14 + 2b) + b - 7 \leqslant 0$;	$14 + 2b + b - 7 \leqslant 0$;	$14 + 2b - (b - 7) \leqslant 0$;
$-14 - 2b + b - 7 \leqslant 0$;	$14 + 2b + b - 7 \leqslant 0$;	$14 + 2b - b + 7 \leqslant 0$;
$-b - 21 \leqslant 0$;	$7 + 3b \leqslant 0$;	$21 + b \leqslant 0$;
$-b \leqslant 21$;	$3b \leqslant -7$;	$b \leqslant -21$;
$b \geqslant -21$;	$b \leqslant -2\frac{1}{3}$;	
$[-21; +\infty)$	$(-\infty; -2]$;	$(-\infty; -21]$



$[-21; -7)$	$[-7; -2]$	нет решения

Ответ: $[-21; -2\frac{1}{3}]$.

е) $-|8 + c| - |10 - 2c| > 0$;
$|8 + c| + |10 - 2c| < 0$;
Сумма двух неотрицательных чисел не может быть меньше нуля.
Ответ: $\varnothing$

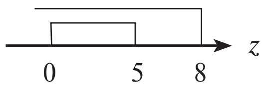
№ 546
б) $|y + 9| + |y - 7| < 7$;
$y + 9 = 0 \qquad y - 7 = 0$
$y = -9 \qquad y = 7$

$-9 \qquad 7$
$(-\infty; -9) \qquad [-9; 7] \qquad (7; +\infty)$
$(-\infty; -9) \cup [-9; 7] \cup (7; +\infty) = (-\infty; +\infty)$
$-10 \in (-\infty; -9)$
$-(y + 9) - (y - 7) < 7$;
$-y - 9 - y + 7 < 7$;
$-2y - 2 < 7$;
$-2y < 7 + 2$;
$-2y < 9$;
$y > -4{,}5$

$-9 \qquad -4{,}5$
нет решения
$0 \in [-9; 7]$
$y + 9 - (y - 7) < 7$;
$y + 9 - y + 7 < 7$;
$0 \cdot y + 16 < 7$;
$0 \cdot y < 7 - 16$;
$0 \cdot y < -9$;
нет решения
$8 \in (7; +\infty)$
$y + 9 + y - 7 < 7$;
$2y + 2 < 7$;
$2y < 7 - 2$;
$2y < 5$;
$y < 2{,}5$;
нет решения
Ответ: $\varnothing$.
в) $|z| - |z - 5| < 11$;
$z = 0 \qquad z - 5 = 0$
$\qquad\qquad z = 5$

$0 \qquad 5$
$(-\infty; 0) \qquad [0; 5] \qquad (5; +\infty)$
$(-\infty; 0) \cup [0; 5] \cup (5; +\infty) = (-\infty; +\infty)$
$-1 \in (-\infty; 0)$
$-z + z - 5 < 11$;
$0 \cdot z < 11 + 5$;
$0 \cdot z < 16$;
$(-\infty; 0)$

$1 \in [0; 5]$
$z + z - 5 < 11;$
$2z < 11 + 5;$
$2z < 16;$
$z < 8;$



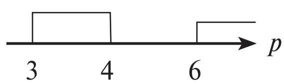
$[0; 5]$
$6 \in (5; +\infty)$
$z - (z - 5) < 11;$
$z - z + 5 < 11;$
$0 \cdot z < 11 - 5;$
$0 \cdot z < 6;$
$(5; +\infty)$
Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

г) $|p - 3| - |p - 4| > 5;$
$p - 3 = 0; \quad p - 4 = 0;$
$p = 3; \quad p = 4$

$(-\infty; 3)$
$0 \in (-\infty; 3);$
$-p + 3 + p - 4 > 5;$
$0 \cdot p - 1 > 5;$
$0 \cdot p > 5 + 1;$
$0 \cdot p > 6;$
нет решения

$[3; 4]$
$3{,}5 \in [3; 4]$
$p - 3 + p - 4 > 5;$
$2p - 7 > 5;$
$2p > 5 + 7;$
$2p > 12;$
$p > 6$

$(4 + \infty)$
$5 \in (4 + \infty)$
$p - 3 - (p - 4) > 5;$
$p - 3 - p + 4 > 5;$
$0 \cdot p + 1 > 5;$
$0 \cdot p > 5 - 1;$
$0 \cdot p > 4;$
нет решения



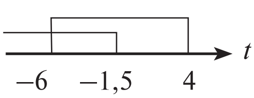
нет решения
Ответ: $\varnothing$.

д) $|6 + t| - |4 - t| < -1;$
$6 + t = 0; \quad 4 - t = 0$
$t = -6 \quad t = 4$

$(-\infty; -6)$
$-7 \in (-\infty; -6);$
$-(6 + t) - (4 - t) < -1;$
$-6 - t - 4 + t < -1;$
$0 \cdot t - 10 < -1;$
$0 \cdot t < -1 + 10;$
$0 \cdot t < 9;$
$(-\infty; -6)$

$[-6; 4]$
$0 \in [-6; 4]$
$6 + t - (4 - t) < -1;$
$6 + t - 4 + t < -1;$
$2t + 2 < -1;$
$2t < -1 - 2;$
$2t < -3;$
$t < -1{,}5$

$(4 + \infty)$
$5 \in (4 + \infty)$
$6 + t + 4 - t < -1;$
$0 \cdot t + 10 < -1;$
$0 \cdot t < -1 - 10;$
$0 \cdot t < -11$
нет решения



$[-6; -1{,}5)$
Ответ: $(-\infty; -1{,}5)$.

е) $|3 - q| + |q - 9| \geqslant 8;$
$3 - q = 0; \quad q - 9 = 0;$
$q = 3 \quad q = 9$

$(-\infty; 3)$ $[3; 9]$ $(9; +\infty)$

$(-\infty; 3) \cup [3; 9] \cup (9; +\infty) = (-\infty; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; 3)$

$3 - q - (q - 9) \leqslant 8;$

$3 - q - q + 9 \leqslant 8;$

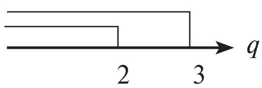
$-2q + 12 \leqslant 8;$

$-2q \leqslant 8 - 12;$

$-2q \leqslant -4;$

$q \leqslant 2;$

$(-\infty; 2]$



$(-\infty; 2]$

2) $x \in [3; 9]$

$-(3 - q) - (q - 9) \leqslant 8;$

$-3 + q - q + 9 \leqslant 8;$

$0 \cdot q + 6 \leqslant 8;$

$0 \cdot q \leqslant 8 - 6;$

$0 \cdot q \leqslant 2;$

нет решения

3) $x \in (9; +\infty)$

$-(3 - q) + q - 9 \leqslant 8;$

$-3 + q + q - 9 \leqslant 8;$

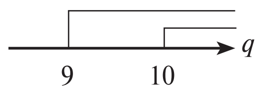
$2q - 12 \leqslant 8;$

$2q \leqslant 8 + 12;$

$2q \leqslant 20;$

$q \leqslant 10;$

$[10; +\infty)$



$[10; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [10; +\infty)$.

ж) $-|3 + r| - |r + 7| > 21;$

$|3 + r| + |r + 7| < -21;$

Слева сумма неотрицательных чисел (число неотрицательное), справа отрицательное число. Неотрицательное число не может быть меньше отрицательного числа.

Ответ: $\varnothing$

з) $|4 - s| - |9 - s| \leqslant 1;$

$4 - s = 0$ $9 - s = 0$

$s = 4$ $s = 9$

$(-\infty; 4)$ $[4; 9]$ $(9; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; 4)$

$4 - s - (9 - s) \leqslant 1;$

$4 - s - 9 + s \leqslant 1;$

$0 \cdot s - 5 \leqslant 1;$

$0 \cdot s \leqslant 1 + 5;$

$0 \cdot s \leqslant 6;$

$(-\infty; +\infty)$

2) $x \in [4; 9]$

$-(4 - s) - (9 - s) \leqslant 1;$

$-4 + s - 9 + s \leqslant 1;$

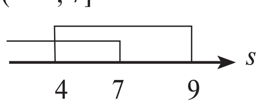
$2s - 13 \leqslant 1;$

$2s \leqslant 1 + 13;$

$2s \leqslant 14;$

$s \leqslant 7;$

$(-\infty; 7]$



$[4; 7]$

3) $x \in (9; +\infty)$

$-(4 - s) + 9 - s \leqslant 1;$

$-4 + s + 9 - s \leqslant 1;$

$0 \cdot s + 5 \leqslant 1;$
$0 \cdot s \leqslant 1 - 5;$
$0 \cdot s \leqslant -4;$
нет решения
Ответ: $[4; 7]$.

и) $|m + 2| - 8 < |m + 1| - 3;$
$|m + 2| - |m + 1| < 8 - 3;$
$|m + 2| - |m + 1| < 5;$
$m + 2 = 0 \quad m + 1 = 0$
$m = -2 \qquad m = -1$

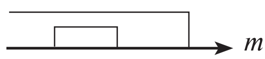
$-2 \qquad -1$

$(-\infty; -2)$ $\qquad [-2; -1]$ $\qquad (-1; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; -2)$
$-(m + 2) + m + 1 < 5;$
$-m - 2 + m + 1 < 5;$
$0 \cdot m - 1 < 5;$
$0 \cdot m < 5 + 1;$
$0 \cdot m < 5;$
$(-\infty; +\infty)$
$(-\infty; -2)$

2) $x \in [-2; -1]$
$m + 2 + m + 1 < 5;$
$2m + 3 < 5;$
$2m < 5 - 3;$
$2m < 2;$
$m < 1;$
$(-\infty; 1)$

3) $x \in (-1; +\infty)$
$m + 2 - (m + 1) < 5;$
$m + 2 - m - 1 < 5;$
$0 \cdot m + 1 < 5;$
$0 \cdot m < 5 - 1;$
$0 \cdot m < 4;$
$(-\infty; +\infty)$
$(-1; +\infty)$



$-2 \quad -1 \qquad 1$

$[-2; -1]$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

к) $|n - 5| + 6 \geqslant 17 - |n - 15|;$
$|n - 5| + |n - 15| \geqslant 17 - 6;$
$|n - 5| + |n - 15| \geqslant 11;$
$n - 5 = 0 \qquad n - 15 = 0$
$n = 5 \qquad n = 15$

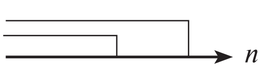
$5 \qquad 15$

$(-\infty; 5)$ $\qquad [5; 15]$ $\qquad (15; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; 5)$
$-(n - 5) - (n - 15) \geqslant 11;$
$-n + 5 - n + 15 \geqslant 11;$
$-2n + 20 \geqslant 11;$
$-2n \geqslant 11 - 20;$
$-2n \geqslant -9;$
$n \leqslant 4{,}5;$
$(-\infty; 4{,}5]$

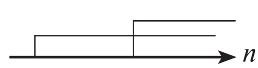
2) $x \in [5; 15]$
$n - 5 - (n - 15) \geqslant 11;$
$n - 5 - \text{n} + 15 \geqslant 11;$
$0 \cdot n + 10 \geqslant 11;$
$0 \cdot n \geqslant 11 - 10;$
$0 \cdot n \geqslant 1;$
нет решения

3) $x \in (15; +\infty)$
$n - 5 + n - 15 \geqslant 11;$
$2n - 20 \geqslant 11;$
$2n \geqslant 11 + 20;$
$2n \geqslant 31;$
$n \geqslant 15{,}5;$
$[15{,}5; +\infty)$



$4{,}5 \qquad 5$

$(-\infty; 4{,}5]$



$15 \qquad 15{,}5$

$[15{,}5; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 4{,}5] \cup [15{,}5; +\infty)$

л) $|3b-9|+|2b+8|>18$;

$3b-9=0$ $\quad$ $2b+8=0$

$3b=9$ $\quad$ $2b=-8$

$b=3$ $\quad$ $b=-4$

$(-\infty; -4)$

1) $x \in (-\infty; -4)$

$-(3b-9)-(2b+8)>18$;

$-3b+9-2b-8>18$;

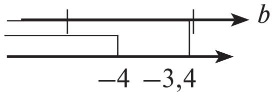
$-5b+1>18$;

$-5b>18-1$;

$-5b>17$;

$b<-3{,}4$;

$(-\infty; -3{,}4)$



$(-\infty; -4)$

$[-4; 3]$

2) $x \in [-4; 3]$

$-(3b-9)+2b+8>18$;

$-3b+9+2b+8>18$;

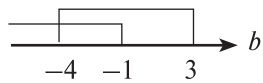
$-b+17>18$;

$-b>18-17$;

$-b>1$;

$b<-1$;

$(-\infty; -1)$



$[-4; 1)$

$(3; +\infty)$

2) $x \in (3; +\infty)$

$3b-9+2b+8>18$;

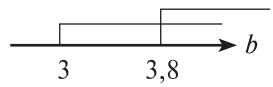
$5b-1>18$;

$5b>18+1$;

$5b>19$;

$b>3{,}8$;

$(3{,}8; +\infty)$



$(3{,}8; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3{,}8; +\infty)$

м) $|4a+12|<9+|3a-6|$;

$|4a+12|-|3a-6|<9$;

$4a+12=0$ $\quad$ $3a-6=0$

$4a=-12$ $\quad$ $3a=6$

$a=-3$ $\quad$ $a=2$

$(-\infty; -3)$

1) $x \in (-\infty; -3)$

$-(4a+12)+3a-6<9$;

$-4a-12+3a-6<9$;

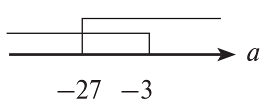
$-a-18<9$;

$-a<9+18$;

$-a<27$;

$a>-27$;

$(-27; +\infty)$



$(-27; -3)$

$[-3; 2]$

2) $x \in [-3; 2]$

$4a+12+3a-6<9$;

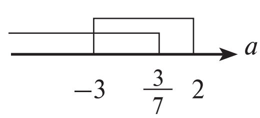
$7a+6<9$;

$7a<9-6$;

$7a<3$;

$a<\frac{3}{7}$;

$(-\infty; \frac{3}{7})$



$[-3; \frac{3}{7})$

$(2; +\infty)$

3) $x \in (2; +\infty)$

$4a+12-(3a-6)<9$;

$4a+12-3a+6<9$;

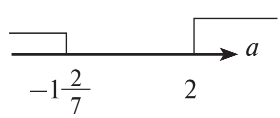
$7a+18<9$;

$7a<9-18$;

$7a<-9$;

$a<-1$;

$(-\infty; -1)$



нет решения

Ответ: $(-27; \frac{3}{7})$.

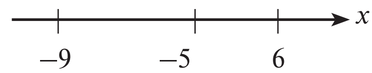
№ 548 (а).

а) $|x+9|+|x-6|<|x+5|-4$;

$|x+9|+|x-6|-|x+5|<-4$;

$x+9=0$ $\quad$ $x-6=0$ $\quad$ $x+5=0$

$x = -9$ $\qquad x = 6$ $\qquad x = -5$



$(-\infty; -9)$ $\quad [-9; -5]$ $\quad (5; 6)$ $\quad [6; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; -9)$

$-(x + 9) - (x - 6) + x + 5 < -4;$

$-x - 9 - x + 6 + x + 5 < -4;$

$-x + 2 < -4;$

$-x < -4 - 2;$

$-x < -6;$

$x > 6;$

$(6; +\infty)$

нет решения

2) $x \in [-9; -5]$

$x + 9 - (x - 6) + (x + 5) < -4;$

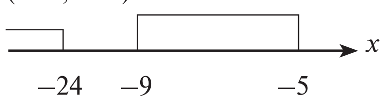
$x + 9 - x + 6 + x + 5 < -4;$

$x + 20 < -4;$

$x < -4 - 20;$

$x < -24;$

$(-\infty; -24)$



нет решения

3) $x \in (5; 6)$

$x + 9 - (x - 6) - (x + 5) < -4;$

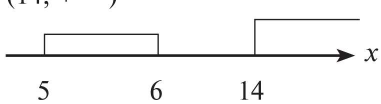
$x + 9 - x + 6 - x - 5 < -4;$

$-x < -4 - 10;$

$-x < -14;$

$x > 14;$

$(14; +\infty)$



нет решения

4) $x \in [6; +\infty)$

$x + 9 + x - 6 - (x + 5) < -4;$

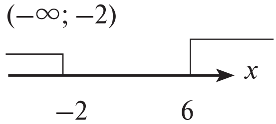
$x + 9 + x - 6 - x - 5 < -4;$

$x - 2 < -4;$

$x < -4 + 2;$

$x < -2;$

$(-\infty; -2)$



нет решения

Ответ: $\varnothing$

№ 555

а) в килограммы:

0,563 т + 71,52 кг + 3480 г – 0,09 ц = 563 кг + 71,52 кг + 3,48 кг – 9 кг = 629 кг

б) в сантиметры:

25,9 м + 428,5 мм + 10,15 см – 16,8дм = 2590 см + 42,85 см + 10,15 см – 168 см = 2475 см

в) в часы:

90 мин + 1,25 суток – 10,5 часа + 90 000 с = 1,5 ч + 30 ч – 10,5 ч + 25 ч = 46 ч

г) в рубли:

12,5 тыс. р. – 19 500 коп + 129,8 р. – 80 коп = 12 500 р. – 195 р. + 129,8 р. – 0,8 р. = 12 434 р.

№ 557

а)

1) 12 + 15 = 27 (км/ч) скорость сближения

2) $27 \cdot 1,5 = 40,5$ (км)

Ответ: расстояние между пунктами 40,5 км.

б)

Пусть x км/ч скорость второго поезда.

1) $x < 60$

$\frac{160}{60 - x} = 8$

$8(60 - x) = 160;$

$480 - 8x = 160;$

$8x = 320;$

$x = 40$

Скорости: 40 км/ч и 60 км/ч

2) $x > 60$

$\frac{160}{x - 60} = 8$

$8(x - 60) = 160;$

$8x - 480 = 160;$

$8x = 640;$

$x = 80$

Скорости: 80 км/ч и 60 км/ч

Ответ: скорость второго поезда может быть 40 км/ч или 80 км/ч.

в)

1) 1440 – 420 = 1020 (км) расстояние, которое проехали автомобилисты;

2) 1020 : 6 = 170 (км/ч) скорость удаления;

3) 170 – 80 = 90 (км/ч)

Ответ: скорость второго автомобиля 90 км/ч.

№ 558 (з)

з) $y = \frac{3(x - 2)(x - 5)}{x^3(2x + 10)(x - 4)}$.

$x^3(2x + 10)(x - 4) \neq 0;$

$2x^3(x + 5)(x - 4) = 0;$

$x = 0$ или $x + 5 = 0$ или $x - 4 = 0$

$x = -5$ $\quad$ $x = 4$

Ответ: $(-\infty; -5); (-5; 4); (4; 0); (0; +\infty)$.

№ 559 (а)

а) $(x + 3y) - ((5y - 6x) + 7) - (9x + 8y - 12) = x + 3y - (5y - 6x + 7) - 9x - 8y + 12 =$
$= x + 3y - 5y + 6x - 7 - 9x - 8y + 12 = -2x - 10y + 5.$

№ 562 (г)

г) $y = \frac{12x - 7}{3x + 14}$; $\quad y_1 = 1; y_2 = 2; y_3 = -1.$

$\frac{12x-7}{3x+14}=1;$

$12x-7=3x+14;$

$9x=21;$

$x=2\frac{1}{3}$

$\frac{12x-7}{3x+14}=2$

$12x-7=2(3x+14);$

$12x-7=6x+28;$

$6x=35;$

$x=5\frac{5}{6}$

$\frac{12x-7}{3x+14}=-1;$

$12x-7=-(3x+14);$

$12x-7=-3x-14;$

$15x=-7;$

$x=-\frac{7}{15}$

№ 563

а) $|x|<7;$

$-7<x<7;$

Ответ: $(-7;\ 7)$

в) $|-z+3|>5;$

$-z+3>5;$ $-z+3<-5;$

$-z>5-3;$ $-z<-5-3;$

$-z>2;$ $-z<-8;$

$z<-2;$ $z>8$

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(8+\infty)$

д) $-|11c+6|\geqslant 28;$

$|11c+6|\leqslant -28;$

Ответ: $\varnothing$

б) $|y|>9;$

$y>9;\ y<-9;$

Ответ: $(-\infty;-9)\cup(9+\infty)$

г) $|5+a|\leqslant 15;$

$-15\leqslant 5+a\leqslant 15;$

$-15-5\leqslant a\leqslant 15-5;$

$-20\leqslant a\leqslant 10;$

Ответ: $[-20;\ 10]$

е) $-|6d-12|<-42;$

$|6d-12|>42;$

$6d-12>42;$ $6d-12<-42;$

$6d>42+12;$ $6d<-42+12;$

$6d>54;$ $6d<-30;$

$d>9;$ $d<-5;$

Ответ: $(-\infty;\ -5)\cup(9+9)$

№ 566

а) $|7x+21|<14;$

$-14<7x+21<14;$

$-14-21<7x<14-21;$

$-35<7x<-7;$

$-5<x<-1;$

Ответ: $(-5;\ -1)$

в) $|9z-13z+25|>16;$

$-4z+25>16;$ $-4z+25<-16;$

$-4z>16-25;$ $-4z<-16-25;$

$-4z>-9;$ $-4z<-41;$

$z<2{,}25;$ $z>10{,}25$

Ответ: $(-\infty;\ 2{,}25)\cup(10{,}25;\ +\infty)$

б) $-|9y-36|\leqslant -18;$

$|9y-36|\geqslant 18;$

$9y-36\geqslant 18;$ $9y-36\leqslant -18;$

$9y\geqslant 18+36;$ $9y\leqslant -18+36;$

$9y\geqslant 54;$ $9y\leqslant 18;$

$y\geqslant 6;$ $y\leqslant 2;$

Ответ: $(-\infty;\ 2]\cup[6;\ +\infty)$

г) $|-3s+12s-33-15s|\geqslant 3;$

$|-6s-33|\geqslant 3;$

$-6s-33\geqslant 3$ или $-6s-33\leqslant -3;$

$-6s\geqslant 36;$ $-6s\leqslant 30;$

$s\leqslant -6;$ $s\geqslant -5;$

Ответ: $(-\infty;\ -6]\cup[-5;\ +\infty).$

№ 570 (а, б)

а) $|x-7|+|x-5|>9;$

$x-7=0$ $x-5=0$

$x=7$ $x=5$

$(-\infty;\ 5)$ $[5;\ 7]$ $(7;\ +\infty)$

1) $x\in(-\infty;\ 5)$

$-(x-7)-(x-5)>9;$

$-x+7-x+5>9;$

$-2x+12>9;$

$-2x>9-12;$

2) $x\in[5;\ 7]$

$-(x-7)+x-5>9;$

$-x+7+x-5>9;$

$0\cdot x+2>9;$

$0\cdot x>9-2;$

3) $x\in(7;\ +\infty)$

$x-7+x-5>9;$

$2x-12>9;$

$2x>9+12;$

$2x>21;$

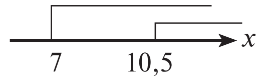
$-2x > -3;$
$x < 1{,}5$
$(-\infty; 1{,}5)$

$(-\infty; 1{,}5)$

$0 \cdot x > 7;$
нет решения

$x > 10{,}5;$

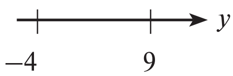
$(10{,}5; +\infty)$



$(10{,}5; +\infty)$

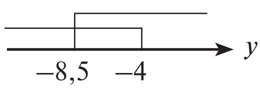
Ответ: $(-\infty; 1{,}5) \cup (10{,}5; +\infty)$

б) $|y + 4| + |y - 9| < 12;$
$y + 4 = 0$ $\quad$ $y - 9 = 0$
$y = -4$ $\quad$ $y = 9$



$(-\infty; -4)$ $\qquad$ $[-4; 9]$ $\qquad$ $(9; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; -4)$
$-(y + 4) - (y - 9) < 12;$
$-y - 4 - y + 9 < 12;$
$-2y + 5 < 12;$
$-2y < 12 - 5;$
$-2y < 17;$
$y > -8{,}5$
$(-8{,}5; +\infty)$



$(-8{,}5; -4)$

2) $x \in [-4; 9]$
$y + 4 - (y - 9) < 12;$
$y + 4 - y + 9 < 12;$
$0 \cdot y + 13 < 12;$
$0 \cdot y < 12 - 13;$
$0 \cdot y < -1;$
нет решения

3) $x \in (9; +\infty)$
$y + 4 + y - 9 < 12;$
$2y - 5 < 12;$
$2y < 12 + 5;$
$2y < 17;$
$y < 8{,}5;$
$(-\infty; 8{,}5)$

нет решения

Ответ: $(-8{,}5; -4)$.

№ 586*

Пусть количество рядов равно x, $x \in N$. Тогда количество учеников равно $12(x - 1) + 1$ или $11x + 2$. Составив математическую модель, найдем $x = 13$, отсюда школьников 145.

№ 587*

Ответ: 28, 56, 84.

№ 640 (в, г)

в) $15(2s + 4) = 30(2 - 9s);$
$2s + 4 = 2(2 - 9s);$
$2s + 4 = 4 - 18s;$
$2s + 18s = 4 - 4;$
$20s = 0;$
$s = 0$
Ответ: $\{0\}$.

г) $14(2r - 6) = 21(r - 4) + 7r;$
$2(2r - 6) = 3(r - 4) + r;$
$4r - 12 = 3r - 12 + r;$
$4r - 3r - r = 12 - 12;$
$0 \cdot r = 0.$
$0 \cdot r = 0.$
Ответ: любое число.

№ 643 (в, г)

в) $\frac{2s-1}{7} = 3 - \frac{2s-3}{2}$;

$2(2s - 1) = 42 - 7(2s - 3)$;

$4s - 2 = 42 - 14s + 21$;

$4s + 14s = 42 + 21 + 2$;

$18s = 65$;

$s = \frac{65}{18}$;

$s = 3\frac{11}{18}$

Ответ: $\{3\frac{11}{18}\}$.

г) $\frac{3q+4}{3} = \frac{5q+6}{5} + \frac{2}{15}$;

$5(3q + 4) = 3(5q + 6) + 2$;

$15q + 20 = 15q + 18 + 2$;

$15q - 15\text{q} = 20 - 20$;

$0 \cdot q = 0$;

Ответ: любое число.

№647

а) $|9 + z| - |2 - z| = -9$;

$9 + z = 0$; $2 - z = 0$;

$z = -9$; $z = 2$

1) $(-\infty; -9]$

$-9 - z - 2 + z = -9$;

$0 \cdot z = -9 + 9 + 2$;

$0 \cdot z = 2$;

Нет решения

2) $(-9; 2]$

$9 + z - 2 + z = -9$;

$2z = -9 - 9 + 2$;

$2z = -16$;

$z = -8, -8 - (-9; 2]$

3) $(2; +\infty)$

$9 + z + 2 - z = -9$;

$0 \cdot z = -9 - 9 - 2$;

$0 \cdot z = -20$;

Нет решения

Ответ: $\{-8\}$.

в) $|5b - 15| = |15 - 5b|$;

$5b - 15 = 0$; $15 - 5b = 0$

$b = 3$; $b = 3$

1) $(-\infty; 3]$

$15 - 5b = 15 - 5b$;

любое число из промежутка $(-\infty; 3]$.

2) $(3; +\infty)$

$5b - 15 = 5b - 15$;

любое число из промежутка $(3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

б) $-|6 - 18t| - |2t + 8| = 7$;

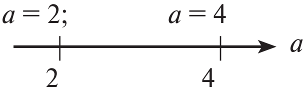
$|6 - 18t| + |2t + 8| = -7$;

Ответ: $\varnothing$

д) $4 - |3a - 6| = |4 - a|$;

$3a - 6 = 0$; $4 - a = 0$;

$a = 2$; $a = 4$



1) $(-\infty; 2]$

$4 + 3a - 6 = 4 - a$;

$3a + a = 4 - 4 + 6$;

$4a = 6$;

$a = 1{,}5$; $1{,}5 \in (-\infty; 2]$

2) $(2; 4]$

$4 - 3a + 6 = 4 - a$;

$-3a + a = 4 - 4 - 6$;

$-2a = -6$;

$a = 3$; $3 \in (-\infty; 2]$

3) $(4; +\infty)$

$4 - 3a + 6 = a - 4$;

$-3a - a = -4 - 4 - 6$;

$-4a = -14$

$a = 3{,}5$; $3{,}5 \notin (4; +\infty)$

Ответ: $\{1{,}5; 3\}$.

№ 652(б, в)

б) $-5{,}2(7 - 2n) > -1{,}3(7n + 4)$;

$4(7 - 2n) < 7n + 4$;

$28 - 8n < 7n + 4$;

в) $2{,}8q - 0{,}6(8 - q) < 0{,}5 - 2{,}3(-2q + 3)$;

$28q - 6(8 - q) < 5 - 23(-2q + 3)$;

$28q - 48 + 6q < 5 + 46q - 69$;

$-8n - 7n < 4 - 28;$
$-15n < -24;$

$n > 6\frac{24}{15};$

$n > \frac{8}{5};$

$n > 1{,}6$

Ответ: $(1{,}6; +\infty)$.

$28q - 46q + 6q < 5 + 48 - 69;$
$-12q < -16;$

$q > \frac{16}{12};$

$q > \frac{4}{3};$

$q > 1\frac{1}{3}$

Ответ: $(1\frac{1}{3}; +\infty)$.

§ 3 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

П.6.3.1. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

Основные цели:

1) сформировать понятие линейного уравнения с двумя переменными и о его графика;
2) сформировать представление об общем решении линейного уравнения с двумя переменными и умение находить его аналитически и графически;
3) повторить и закрепить: способы нахождения НОД двух чисел, условия взаимного расположения графиков линейной функции.

Особенности изучения учебного содержания

Изложение материала третьего параграфа начинается с введения понятия «линейное уравнение с двумя переменными». У учащихся есть опыт составления и работы с подобными соотношениями на множестве натуральных и целых чисел. В 5 и 6 классах они находили значения переменных методом перебора, в 7 классе учащиеся знакомились со способом решения линейных диофантовых уравнений в целых числах. Теперь учащиеся уточняют свои представления о линейных уравнениях с двумя переменными и знакомятся с общим способом их решения. При изучении вопроса решения линейного уравнения с двумя переменными помимо традиционно рассматриваемого случая не равных нулю коэффициентов рассматриваются и случаи, когда один из коэффициентов либо оба коэффициента равны нулю. Умение выражать одну переменную через другую, построение графика линейного уравнения будут в дальнейшем применяться семиклассниками при решении систем линейных уравнений (метод подстановки, графический метод), поэтому поиску общего решения линейного уравнения следует уделить достаточно времени.

Для организации **самостоятельного открытия** учащимися понятия общего решения линейного уравнения с двумя переменными рекомендуется использовать систему заданий № 588–591.

Новое знание

Общее решение линейного уравнения с двумя переменными.

Актуализация

Повторить: способ выражения одной переменной из данного равенства через другие (№ 588).

Уточнить: понятие линейного уравнения с двумя переменными (№ 589) и известные способы его решения.

Задание на пробное действие

Решите линейное уравнение с двумя переменными, полученное при решении задачи № 589, на множестве рациональных чисел.

Можно использовать в качестве задания на пробное действие № 590 (1).

Фиксация затруднения

Я не могу решить линейное уравнение с двумя переменными.

Я не могу обосновать свой способ решения линейного уравнения с двумя переменными.

Фиксация причины затруднения

Неизвестен общий способ решения линейного уравнения с двумя переменными.

Цель деятельности

Найти способ решения линейного уравнения с двумя переменными.

Эталон

Учащимися должен быть получен первый шаг алгоритма решения линейного уравнения с двумя переменными.

Открыть новое знание учащиеся могут с использованием текста задания **№ 590 (2–3)**, после чего в форме подводящего диалога с учащимися рассматриваются случаи решения линейного уравнения с двумя переменными с равным нулю коэффициентом (коэффициентами). Далее эти случаи систематизируются с помощью алгоритма решения линейного уравнения с двумя переменными, вариант которого представлен в учебнике.

Рассмотрим решение некоторых заданий.

Для формирования понятия решения линейного уравнения с двумя переменными предлагается выполнить **№591**. Чтобы проверить, является ли пара чисел (4; –1) решением, необходимо выполнить подстановку этих значений в заданное уравнение.

а) $2x - 3y = 11$

$2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 8 + 3 = 11$

$11 = 11$ верно

Ответ: пара чисел является решением.

Для того чтобы подобрать решение для уравнения, удобно одно значение выбрать произвольно, а второе определить, решив уравнение с одной переменной.

Например, если $x = 0$, то $2 \cdot 0 - 3 \cdot y = 11 \Leftrightarrow -3y = 11 \Leftrightarrow y = -\frac{11}{3}$.

Значит, пара чисел $\left(0; -\frac{11}{3}\right)$;является решением.

б) $-3x + 5y = 17$

$-3 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = -17$

$-17 = 17$ неверно

Ответ: пара чисел не является решением.

Если $x = 1$, то $-3 \cdot 1 + 5y = 17 \Leftrightarrow 5y = 17 + 3 \Leftrightarrow 5y = 20 \Leftrightarrow y = 4$, т. е. пара чисел (1; 4) является решением данного уравнения.

Поясним на примерах алгоритм решения линейного уравнения с двумя переменными $ax + by = c$.

№593

а) Так как оба коэффициента при переменных не равны нулю, выразим одну из переменных через другую (возможны два способа решения).

1 способ.

Выразим x через y: $x - 6y = -3 \Leftrightarrow x = 6y - 3$.

Ответ: $(6y - 3; y)$, y – любое число.

2 способ.

Выразим y через x: $x - 6y = -3 \Leftrightarrow 6y = x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{x+3}{6}$.

Ответ: $\left(x; \frac{x+3}{6}\right)$, x – любое число.

д) Так как коэффициент при переменной y равен нулю, то решим уравнение относительно x:

$4x + 0y = 13 \Leftrightarrow 4x = 13 \Leftrightarrow x = 13 : 4 \Leftrightarrow x = 3{,}25$

Ответ: $(3{,}25; y)$, y – любое число.

Рассмотрим задания на применение алгоритма построения графика уравнения $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 > 0$.

№596 (а, в, г)

Графиком каждого заданного уравнения является прямая. Поэтому достаточно найти координаты двух точек, отметить их на координатной плоскости и провести прямую.

Решение:

а) $x + y = 3$

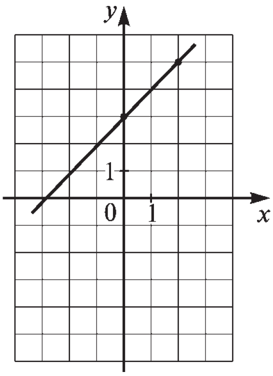
x	0	2
y	3	5

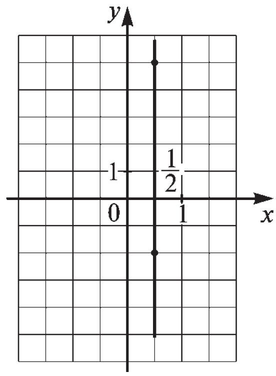
в) $6x + 0y = 3$

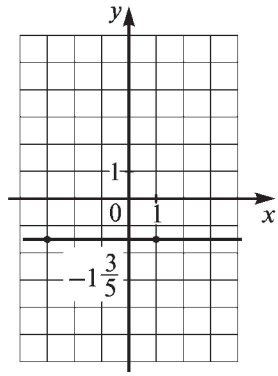
x	0,5	0,5
y	−2	5

г) $0x + 5y = -8$

x	−3	1
y	$-1\frac{3}{5}$	$-1\frac{3}{5}$







Можно обратить внимание учащихся на то, что график уравнения в случае (в) не является графиком ***функции*** в соответствии с известным из курса 7 класса определением функции.

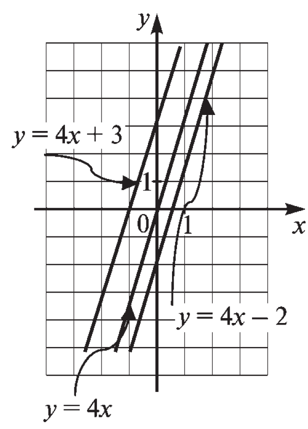
Из **раздела для повторения** укажем примеры решения и ответы к заданиям, выполнение которых рекомендуется. Учитель может выбрать и другие задания на темы, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от выявленных у учащихся затруднений.

Необходимо обратить внимание на задания в **№600–601**, так как они подготавливают учащихся к изучению темы «Системы линейных уравнений с двумя переменными. Графическое решение системы».

№600

Решение:

Сопоставляя линейные уравнения с соответствующими графиками, учащиеся вспоминают из курса 7 класса: *если коэффициенты при x в линейных функциях равны, то графики параллельны (либо совпадают), а если не равны, то графики пересекаются*.



Эти выводы помогают ответить на вопросы в **№601**, не выполняя построений графиков линейных функций: параллельны – а, г, е, ж; б, д; пересекаются – а, б; а, в; а, д; а, з; б, в; б, г; б, д; б, е; б, ж; б, з; в, г; в, д; в, е; в, ж; в, з; г, д; г, з; д, е; д, ж; д, з; е, з; ж, з; совпадают – а, ж.

Рассмотрим решение нестандартных задач данного пункта.

№ 606*

а) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, т. е. либо $x - y = 0$, либо $x + y = 0$. Откуда, либо $y = x$, либо $y = -x$.

Значит, графиком уравнения будет объединение двух прямых $y = x$ и $y = -x$.

б) Аналогично, $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y) = 0$. Значит, графиком уравнения будет объединение двух прямых $y = \frac{x}{2}$ и $y = -\frac{x}{2}$.

в) Заметим, что если $x \neq 0$ или $y \neq 0$, то $x^2 + y^2 > 0$.
Значит, $x = y = 0$. Графиком уравнения будет одна точка (0; 0).

г) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x + y)(x^2 + y^2) = 0$, т. е. либо $y = x$, либо $y = -x$, либо $x = y = 0$. Но точка (0; 0) лежит на прямых $y = x$ и $y = -x$, поэтому отдельно мы ее выделять не будем.

Графиком уравнения будет объединение двух прямых $y = x$ и $y = -x$.

д) $xy = 0$, значит либо $x = 0$, либо $y = 0$.

Графиком уравнения будет объединение двух прямых $x = 0$ и $y = 0$.

е) Заметим, что расстояние от точки (0; 0) до точки с координатами (x; y) равно $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Значит, искомое множество точек – это множество точек, удаленных от точки (0;0) на расстояние 2.

Графиком уравнения будет окружность радиуса 2 с центром в точке (0;0).

ж) $0 = x^2 + y^2 - 4x = (x - 2)^2 + y^2 - 4$, т. е. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Аналогично, графиком уравнения будет окружность радиуса 2 с центром в точке (2;0).

з) $0 = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$. Это эквивалентно тому, что $x - y = 0$.

Значит, графиком уравнения будет прямая $y = x$.

№607*

Первый вариант решения.

Заметим, что последняя цифра произведения натуральных чисел определяется только последней цифрой каждого из сомножителей. Рассмотрим числа 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6,... Каждое следующее получается из предыдущего умножением на 2. Посмотрим на последние цифры чисел 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6. Это 2, 4, 8, 6, 2, 4. Заметим, что цифры повторяются через 3. Они будут повторяться и далее, так как каждая следующая цифра получается из предыдущей по одному и тому же правилу. Заметим, что $2011=502 \cdot 4 + 3$. Поэтому у числа 2^{2011} будет такая же последняя цифра, как и у чисел 2^3, 2^7, 2^{11},... , то есть 8.

Второй вариант решения.

Заметим, что $2011 = 502 \cdot 4 + 3$. Поэтому $2^{2011} = 2^{502 \cdot 4 + 3} = 2^{4 \cdot 502} \cdot 2^3 = 16^{502} \cdot 8$. Число, оканчивающееся на 6, в любой натуральной степени будет оканчиваться на 6. Поэтому 16^{502} будет заканчиваться на 6, а все произведение $16^{502} \cdot 8$ будет оканчиваться на 8.

П.6.3.2. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ

Основные содержательные цели:

1) сформировать понятие системы линейных уравнений с двумя переменными;

2) сформировать умение находить решение системы линейных уравнений с двумя переменными графическим способом;

3) сформировать представление об использовании теоремы о целочисленных точках графика уравнения для решения систем;

4) повторить и закрепить: свойство степени с отрицательным основанием; способ умножения многочлена на многочлен и нахождения значения многочлена при заданном значении переменной; условия взаимного расположения графиков линейной функции.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся знакомятся с первым методом решения систем линейных уравнений с двумя переменными: графическим. Обратим внимание, что в предложенном в учебнике алгоритме решения линейных уравнений с двумя переменными графическим способом предлагается делать проверку найденного решения. Это приучает семиклассников к мысли, что применяемый ими способ решения не всегда приводит к нахождению точного решения и мотивирует к дальнейшему поиску способов решения систем линейных уравнений.

Для **самостоятельного открытия** учащимися графического способа решения системы линейных уравнений с двумя переменными рекомендуется использовать следующую систему заданий № 608–610.

Новое знание

Графический способ решения системы линейных уравнений с двумя переменными

Актуализация

Повторить: способ графического решения линейного уравнения с двумя переменными, построения графиков на одной координатной плоскости подготавливает открытие нового способа (№ 608).

Ввести: понятие системы линейных уравнений. Для этого рекомендуется построить математическую модель задачи 1 из теоретической части пункта. Понятие решения системы линейных уравнений можно закрепить с помощью выполнения задания № 609.

Задание на пробное действие

В № 610 проблематизируется способ решения систем линейных уравнений.

Фиксация затруднения

Я не могу найти решение системы линейных уравнений.

Я не могу обосновать свой способ решения системы линейных уравнений.

Фиксация причины затруднения

Не известен общий способ решения системы линейных уравнений.

Цель деятельности

Найти способ решения системы линейных уравнений.

Эталон

Алгоритм графического решения систем линейных уравнений с двумя переменными.

Открыть новое знание учащиеся могут с использованием вопросов задания № 610 (а – в).

Для формирования умения применения алгоритма графического решения систем линейных уравнений с двумя переменными предлагается **№611**.

№611

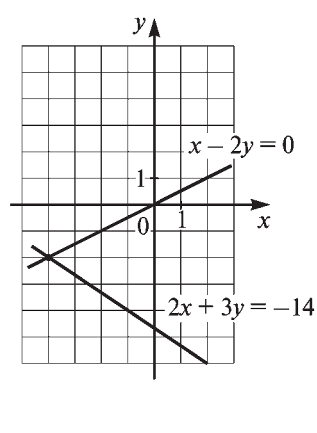
Для построения графиков уравнений составляются таблицы значений y при двух значениях x, наносятся на плоскость соответствующие точки, проводятся прямые.

Прямые пересекаются. Нужно найти координаты точки пересечения: (–4; –2). Проверить, подставив полученную пару чисел в каждое уравнение системы:

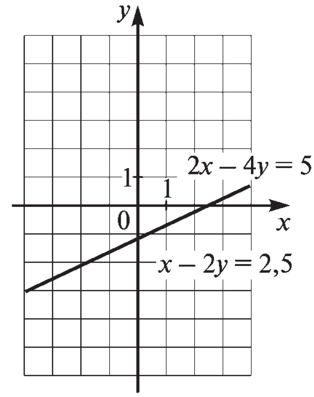
1) $2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-2) = -8 - 6 = -14$, $-14 = -14$ верно;

2) $-4 - 2 \cdot (-2) = -4 + 4 = 0$, $0 = 0$ верно.

Ответ: система имеет единственное решение (–4; –2).



в)

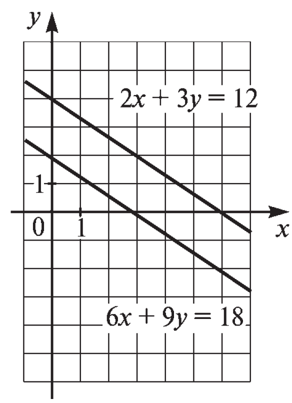


Построение графиков двух уравнений выполняется аналогично: прямые совпадают. Проверить можно, вычислив координаты точек пересечения каждой прямой с осями: (0; –1,25) и (2,5; 0) – одинаковы. А через две различные точки можно провести только одну прямую – графики совпали. Значит, все решения первого уравнения являются решениями второго уравнения и наоборот.

В ответ записать общее решение одного из уравнений, например, второго.

Ответ: система имеет бесконечно много решений $(2y + 2,5; y)$, y – любое число.

г)



При построении графиков получается, что прямые не пересекаются. Это рекомендуется обосновать. Для обоснования нужно выразить в каждом из уравнений переменную, например, y: $y = -\frac{2}{3}x + 4$ и $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Если графики уравнений имеют общую точку, то, решив уравнение – $-\frac{2}{3}x + 4 = -\frac{2}{3}x + 2$, найдем ее координаты.

Но уравнение не имеет решений. Значит, такой общей точки нет.

Прямые параллельны. Система уравнений не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Задание **№614(1)** позволяет потренировать умение применять теоремы о целочисленных решениях линейного уравнения с двумя переменными и подготовить учащихся к выполнению **№614(2)**, где необходимо решить систему уравнений с использованием той же теоремы.

№614(1)

Выразим из уравнения $x - 2y = 6$ переменную y:

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

1) С помощью метода проб и ошибок можно найти целочисленные точки – см. таблицу.

2) Прямая проходит через точку (0; –3).

Значит, по теореме все целочисленные точки имеют вид (0 +2t; –3 + t), где t – целое число.

Таким образом, прямая проходит через точки (2; –2), (4; –1), (8; 1), (20; 7) и т.д.

Ответ: (0; –3), (2; –2), (4; –1).

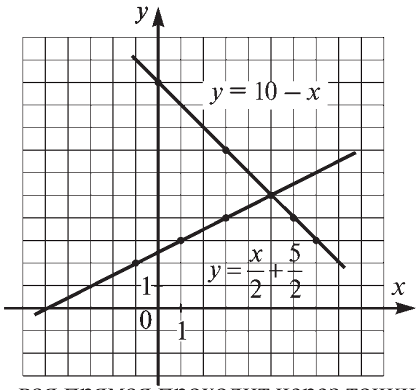
x	$y = \frac{1}{2}x - 3$	y
–1	$\frac{1}{2}\cdot(-1) - 3$	$-3\frac{1}{2} \in \boldsymbol{Z}$
0	$\frac{1}{2}\cdot 0 - 3$	–3
1	$\frac{1}{2}\cdot 1 - 3$	$-2\frac{1}{2} \in \boldsymbol{Z}$
2	$\frac{1}{2}\cdot 2 - 3$	–2
3	$\frac{1}{2}\cdot 3 - 3$	$-1\frac{1}{2} \in \boldsymbol{Z}$
4	$\frac{1}{2}\cdot 4 - 3$	–1

№614(2а)

Решим графически систему $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ x + y = 10 \end{cases}$

Перепишем систему в виде $\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = 10 - x \end{cases}$

Прямые не параллельны (и не совпадают). Значит, система имеет единственное решение.



Рассмотрим прямую $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$. Она проходит через точку (1;3) . Коэффициент при x равен $\frac{1}{2}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(1 + 2t;\ 3 + t)$, где t – целое.

Рассмотрим прямую $y = 10 - x = 10 + (-1) \cdot x$. Прямая проходит через точку (0;10). Коэффициент при x равен –1. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(0 + t;10 - t)$, где t – целое.

Таким образом, можно заметить, что первая прямая проходит через точки (1;3) , (3;4) , (5;5) и т. д., а вторая прямая – через точки (0;10), (1;9) , (2;8) , (3;7) , (4;6), (5;5) и т.д. То есть обе прямые проходят через точку (5;5) (см. рис). А так как решение системы единственно, то это и есть ответ.

Ответ: (5; 5).

Из **раздела для повторения** укажем примеры решения и ответы к заданиям, выполнение которых рекомендуется. Учитель может выбрать и другие задания раздела на темы, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от выявленных у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение задания **№618**, которое готовит учащихся к изучению вопроса о количестве решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Решение:

Известно, что графики линейных функций $y = ax + b$ с одинаковыми коэффициентами при x либо параллельны, либо совпадают, а графики линейных функций с различными коэффициентами при х пересекаются в одной точке. Поэтому

а) подойдут, например функции $y = 3x - 2$, $y = 3x$, $y = 3x + 7$;

б) подойдут, например функции $y = 5x - 2$, $y = -3x + 1$, $y = 1$.

Графики функций $y = 4x + 1$ и $y = 1 + 4x$ совпадают.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№624*

Может. Подойдут, например, пары чисел 0,2 и 0,1 ($0,2 \cdot 0,1 = 0,02 < 0,1 < 0,2$) или 3 и –1 ($3 \cdot (-1) = -3 < -1 < 3$).

П.6.3.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХУРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ: СПОСОБ ПОДСТАНОВКИ И СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ

Основные содержательные цели:

1) сформировать умение решать системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки и способом алгебраического сложения;

2) повторить и закрепить: деление чисел с остатком; понятие простого числа; нахождение НОД чисел по их каноническому разложению на простые множители.

В данном пункте учащиеся знакомятся с двумя алгебраическими методами решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными: способом подстановки и способом сложения. Важно отметить, что эти способы рассматриваются на разных уроках.

Необходимо напомнить учащимся о том, что при рассмотрении графического метода решения систем линейных уравнений было зафиксировано, что данный метод не всегда оказывается достаточно точным и надежным. Часто он бывает просто непригоден для решения систем. Поэтому для практического решения задач важно иметь алгебраические методы, позволяющие посредством вычислений быстро и точно находить множество решений систем уравнений.

Для **самостоятельного открытия** алгоритма решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки рекомендуется использовать № 626. Задание № 625, в котором учащиеся должны *подставить* значение $d = 3^{111}$ в данное выражение, готовит учащихся к открытию этого способа.

Новое знание

Алгоритм решения системы линейных уравнений способом подстановки.

Актуализация

Повторить: способ нахождения значения буквенного выражения при заданном значении переменной (№ 625).

Задание на пробное действие

№ 626.

Можно предложить учащимся решить данную систему, не используя графический метод решения.

Фиксация затруднения

Я не могу найти решение системы линейных уравнений, не используя графический метод решения.

Я не могу обосновать свой способ решения системы линейных уравнений.

Фиксация причины затруднения

Не известен другой способ решения системы линейных уравнений.

Цель деятельности

Найти новый способ решения системы линейных уравнений.

Эталон

Алгоритм решения систем линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки.

Открыть новое знание учащиеся могут с использованием вопросов задания № 626 (2).

При открытии нового знания необходимо ввести понятие равносильных систем двух уравнений с двумя переменными.

Для **самостоятельного открытия** алгоритма решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения рекомендуется использовать №627 (г).

Новое знание

Алгоритм решения системы линейных уравнений способом сложения.

Актуализация

Повторить:

- правило «весов»: обе части уравнения можно увеличить, уменьшить, на одно и то же число, отличное от нуля;
- решение систем способом подстановки (№ 627).

В ходе анализа решенных систем №627 можно задать вопрос: «В каком случае данный способ может вызвать затруднения?».

Задание на пробное действие

Найдите другой способ решения системы № 627 (г).

Фиксация затруднения

Я не могу найти другой способ решения системы.

Я не могу обосновать свой способ решения системы линейных уравнений.

Фиксация причины затруднения

Не известен новый способ решения системы линейных уравнений.

Цель деятельности

Найти новый способ решения системы линейных уравнений.

Эталон

Алгоритм решения систем линейных уравнений с двумя переменными способом сложения.

Открыть новое знание учащиеся могут с использованием вопросов задания № 627 (2).

Приведем **примеры решения к заданиям** из данного пункта.

№627

На первых порах, особенно для слабых учащихся, рекомендуется выражение, которое подставляется в уравнение, показывать графически, например, следующим образом:

Решение:

в) $\begin{cases} 3m-2n=5 \\ 2m-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2n=5 \\ n=2m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2(2m-2)=5 \\ n=2m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-4 \end{cases}$

Ответ: (–1; –4).

г) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1-3y \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1-3y \\ 1-3y-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

Ответ: (–1; 1).

№628

При оформлении решения системы способом алгебраического сложения рекомендуется указывать, какие действия проводились с каждым из уравнений.

Решение:

б) $\begin{cases} 2x+3y=1 \,|\cdot 2 \\ 3x-2y=8 \,|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=2 \\ 9x-6y=24 \end{cases} \Big| \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=26 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

Ответ: (2; –1).

в) $\begin{cases} 2x+3y=1 \,|\cdot(-2) \\ 4x+6y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-6y=-2 \\ 4x+6y=-5 \end{cases} \Big| \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 0x+0y=-7 \\ 4x+6y=-5 \end{cases}$

№629

в) $\begin{cases} -\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=0{,}2 \,|\cdot 30 \\ -\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1\dfrac{2}{3} \,|\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+6y=6 \\ -2x+3y=10 \,|\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+6y=6 \\ 4x-6y=-20 \end{cases} \Big| \oplus \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x=-14 \\ 4x-6y=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=\dfrac{38}{3} \end{cases}$

№630

Это задание раскрывает геометрический смысл решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными: для того чтобы найти координаты точки пересечения графиков уравнений, необходимо решить систему уравнений. При этом опять реализуется принципы вариативности и комфортности: учащиеся выбирают тот способ, который будет им удобен.

Решение:

а) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 5x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-7 \\ 5x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-7 \\ 5x-2(3x-7)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=32 \\ x=13 \end{cases}$

Ответ: (13; 32).

Применение решений систем уравнений демонстрируется при выполнении **№631**, где необходимо составить формулу линейной функции при условии, что известны координаты двух точек, через которые проходит график функции.

Решение.

Чтобы задать формулой линейную функцию $y = ax + b$, нужно выяснить, какие конкретные значения принимают a и b. По условию известно, что прямая проходит через точки (2; 2) и (1; –1), а значит, выполняются два верных равенства: $2 = 2a + b$ и $-1= 1a + b$ при одних и тех же значениях a и b. И, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо решить систему уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} 2 = 2a + b \\ -1 = 1a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ -1 = 1a + 2 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2a \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 3 \end{cases}$$

Ответ: $y = 3x - 4$.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№639*

Пусть $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – два различных целочисленных решения уравнения.

Тогда $121x_1 - 49y_1 = 1$ и $121x_2 - 49y_2 = 1$. Вычтя одно равенство из другого, получим $121(x_1 - x_2) = 49(y_1 - y_2)$. Так как 121 и 49 – взаимно простые числа (то есть не имеют общих натуральных делителей, кроме 1), то $x_1 - x_2$ – делится на 49, а $y_1 - y_2$ – делится на 121. Теперь заметим, что если $x_2 = x_1 + 49t$, то $y_2 = y_1 + 121t$.

Таким образом, если мы найдем одно целочисленное решение, мы найдем и все остальные.

$49y = 121x - 1$, откуда у = $\dfrac{121x-1}{49} = 2 + \dfrac{23x-1}{49}$. Нам нужно найти такое x (от 1 до 49), чтобы $23x - 1$ делилось на 49. Таким x будет число 32, тогда $y = 79$.

Ответ: $x = 32 + 49t$, $y = 79+121t$, t – любое целое число.

Глава 7. Введение в статистику

Основные цели изучения данной главы:

- сформировать умение анализировать информацию, представленную с помощью таблиц и диаграмм, представлять информацию с помощью таблицы, круговой или столбчатой диаграмм;
- сформировать умение находить размах и моду набора чисел;
- сформировать умение находить медиану набора чисел.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания учащиеся:

- *повторяют и систематизируют* знания, полученные в 5—6 классах;
- *используют* математическую терминологию в устной и письменной речи;
- *анализируют* информацию, представленную с помощью таблиц и диаграмм;
- *строят* диаграммы;
- *находят* среднее арифметическое;
- *находят* размах, моду и медиану набора чисел;
- *используют* схемы и таблицы;
- *решают* текстовые задачи;
- *сокращают* дроби;
- *упрощают* выражения:
- *решают* неравенства;
- *раскладывают* многочлены на множители;
- *решают* уравнения разными способами;
- *строят и выполняют* алгоритмы чтения, записи и составления выражений;
- *работают* с различными математическими моделями;
- *выполняют* действия с рациональными числами;
- *определяют* вид, истинность высказывания, *строят* отрицание ложных высказываний.

§ 1. СБОР И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ

П. 7.1.1. СПОСОБ УПОРЯДОЧИВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Основные цели:

1) формировать умение считывать информацию с таблиц и диаграмм;

2) тренировать умение строить диаграммы;

3) тренировать умение решать текстовые задачи, упрощать выражения.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении этого пункта с учащимися обсуждается важность умения анализировать и представлять в разных формах информацию. Важно, чтобы учащиеся поняли, что для того, чтобы информация приносила пользу, ее нужно уметь систематизировать, анализировать и делать на ее основании выводы, приводящие к достижению поставленных целей.

В данном пункте учащиеся повторяют и уточняют известные им с начальной школы способы представления в информации — с помощью таблицы, круговой и столбчатой диаграмм. Алгоритмы построения диаграмм входят в курс начальной школы. Если на протяжении 5–7 классов системно осуществлялось повторение этого материала, то изучение этой темы можно построить как уроки повторения с уточнением формулировок алгоритмов. Если же по каким-то причинам в 4 классе этот материал не изучался или не было организовано его системное повторение, то изучение понятия круговой и столбчатой диаграмм и алгоритмов их построения изучается как введение нового.

В результате изучения материала пункта учащиеся уточняют алгоритм построения столбчатой диаграммы и алгоритм построения круговой диаграммы.

Урок. Способ упорядочивания информации

Новое знание

Алгоритмы построения столбчатой и круговой диаграмм.

Актуализация

Рассмотреть вопрос использования таблиц, столбчатых и круговых диаграмм для работы с информацией.

Задание на пробное действие

Сформулируйте шаги построения столбчатых и круговых диаграмм.

Фиксация затруднения

Я не могу сформулировать шаги построения столбчатых и круговых диаграмм.

Фиксация причины затруднения

Нет способа построения столбчатых и круговых диаграмм.

Цель деятельности

Сформулировать способы построения столбчатых и круговых диаграмм.

Эталон

Алгоритм построения столбчатой диаграммы

1. Отметить на горизонтальной оси значения независимой величины.
2. Отметить на вертикальной оси соответствующие значения зависимой величины.
3. Для каждого значения независимой величины построить столбик, высота которого равна соответствующему значению зависимой величины.

Алгоритм построения круговой диаграммы

1. Найти сумму всех зависимых величин ($S = a_1 + a_2 + ... + a_n$).
2. Найти долю каждой зависимой величины в общей сумме ($\frac{a_1}{S}$).
3. Вычислить величину центрального угла, соответствующую доле каждой зависимой величины ($360° \cdot \frac{a_1}{S}$, $360° \cdot \frac{a_1}{S}$, ..., $360° \cdot \frac{a_1}{S}$).
4. Построить центральные углы, соответствующие каждой зависимой величине.

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 676

1) 19,6; 31,1;
2) Дальневосточный, 2006 – 2009
   Уральский, 2002 – 2003
3) Центральный
4) Дальневосточный
5) Центральный, 2002 – 2009;
   Приволжский, 2002 – 2003

6) Уральский, 2002-2009
Дальневосточный, 2002-2009
7) Уменьшалась.

№ 677
1) 11:10
2) 16:10
3) 22:00
4) 4 ч 40 мин
5) В Лондон, Дюссельдорф, Дубай, Женева, Франкфурт-на-Майне.
6) 2 ч 15 мин S716
7) 10 ч 55 мин UA 965
8) UN255; C7905
9) Вена, Барселона, Алматы, Лондон, Женева, Франкфурт-на-Майне.
10) Вашингтон, Дубай.

№ 678
1) Файлы, карандаш с ластиком.
2) 1520 р.
3) Файлы, карандаш с ластиком
4) 13310 р.
5) 360
6) Карандаш с ластиком, бумага.

№ 679
1) Азовское море, Приморско-Ахтарск, 1.
2) Средиземное море, Родос, 16,4.
3) Ионическое море, Кротоне.
4) Нет
5) 6

№ 684
Пусть x р. первоначальная сумма
$x(1 + 0{,}12)^3 = 40\,492{,}8 + x$;
$x \cdot 1{,}12^3 = 40\,492{,}8 + x$;
$x \cdot 1{,}404928 = 40\,492{,}8 + x$;
$x = 40\,492{,}8 : 0{,}404928$
$x = 100\,000$
Ответ: 100 000 рублей.

№ 687
а) $-7y - (-4x - (5y - 6x - 7z)) - (8x - 9z - 3y) = y - 10x - 4z$
б) $-(5m + 9n) - (13n - (8m + 4n)) + (7m - (3n - 8m)) - (12m - 10n) = 6m - 11n$

№ 691
1) Мясорубка, чайник;
2) 51 300 р.
3) Мясорубка, Блендер;
4) 366 750 р.
5) 360 ед.
6) Чайник, Миксер.

№ 696
1) 9 месяцев – 6%
$70\,000 \cdot 0{,}06 = 4200$ (р.)
2) $70\,000 \cdot 0{,}09 = 6300$ (р.)
3) за первый год доход 7 000 р.

За следующие 6 месяце 77 000 · 0,05 = 3 850 р.
7 000 + 3 850 = 10 850 (р.)
4) 70 000 · 1,122 – 70 000 = 17 808 (р.)

№ 697

а) $x = 0$; $y = 9$ (0; 9)
   $y = 0$ $x = -1,5$ (–1,5; 0)
б) $x = 0$; $y = -7$ (0; –7)
   $y = 0$ $x = -2$ (–2; 0)
в) $x = 0$; $y = 2,5$ (0; 2,5)
   $y = 0$ $x = 5$ (5; 0)

П. 7.1.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Основные содержательные цели:
1) повторить понятие «среднее арифметическое»;
2) тренировать умение находить среднее арифметическое;
3) ввести понятия «размах набора чисел», «мода набора чисел», «медиана набора чисел», тренировать умение находить размах, моду и медиану набора чисел;
4) тренировать умение решать текстовые задачи, неравенства.

Особенности изучения учебного содержания

В данном пункте учащиеся узнают о науке статистика и о том, что изучает статистика. Узнают, что одним из ее разделов является математическая статистика, изучающая математические методы систематизации и анализа данных. Учащиеся узнают, что для описания и анализа имеющихся числовых данных используются статистические характеристики: среднее арифметическое, размах, мода, медиана набора. При изучении материала данного пункта учащиеся строят алгоритм нахождения медианы набора чисел.

Урок. Статистические характеристики числовых данных

Новое знание

Понятия «размах набора чисел», «мода набора чисел», алгоритм нахождения медианы набора чисел.

Актуализация

Повторить: понятие «среднее арифметическое».

Задание на пробное действие

Найти размах, моду набора чисел в таблице № 705.

Фиксация затруднения

Я не могу найти предложенные характеристики.

Фиксация причины затруднения

Нет понятий «размах», «мода» набора чисел.

Цель деятельности

Сформулировать определения новых статистических характеристик набора чисел.

Эталон

Размах

Размахом набора чисел называется разность между наибольшим и наименьшим числом из этого набора.

Мода

Модой набора чисел называется число, наиболее часто встречающееся в числовом наборе.

Примечание: понятие медианы учитель вводит в подводящем диалоге, при наличии резервных уроков можно посвятить изучению этой статистической характеристики отдельный урок.

Приведем **примеры решения** некоторых заданий.

№ 704

а) $(26 + 35 + 37 + 42 + 43) : 5 = 36{,}6$
б) $(8 + 48 + 51 + 63 + 78 + 95) : 6 = 57{,}2$
в) $(12 + 32 + 44 + 68 + 95 + 112 + 139 + 215) : 8 = 89{,}6$
г) $(8 + 24 + 25 + 31 + 32 + 33 + 48 + 52 + 69 + 72 + 85) : 11 = 43{,}5$

№ 705

1) $(26 + 25 + 19 + 19 + 28 + 26 + 32 + 37 + 24 + 35 + 38) : 11 = 28$

№ 706

1) Владимирская обл. 1,48
Ивановская обл. 1,11
Костромская обл. 0,72
Курская обл. 1,20
Московская обл. 6,64
Орловская обл. 0,84
Смоленская обл. 1,01
Тверская обл. 1,42
Ярославская обл. 1,34
г. Москва 10,41
2) а) 6,498; б) 2,61; в) 16,265; г) 2,605
3) а) 2002 и 2009; б) 2008 и 6,61; в) 2008-2009 и 2002; г) 2009 и 10,27
4) а) 9,53; б) ,82; в) 0,1; г) 0,04
5) нет, нет, нет, 1,16; нет; 0,83; нет; нет; 1,32; 10,39.

№ 712

а) $\dfrac{4x-3}{5} > \dfrac{7x+2}{3}$

$12x - 9 > 35x + 10;$
$21x < -19;$

$x < -\dfrac{19}{21}$

Ответ: $(-\infty; -\dfrac{19}{21})$.

б) $\dfrac{4-3y}{7} < \dfrac{7+y}{5}$

$20 - 15y < 14 + 7y;$
$22y > 6;$

$y > \dfrac{3}{11}$

Ответ: $(\dfrac{3}{11}; +\infty)$.

в) $\dfrac{3x+2}{2} - 5 \leqslant \dfrac{4x+1}{3} - 7$

$9x + 6 - 30 \leqslant 8x + 2 - 42;$
$x \leqslant -16$

Ответ: $(-\infty; -16]$.

г) $\dfrac{2y-3}{4} - 5 \geqslant \dfrac{y+2}{3} - 4$

$6y - 9 - 60 \geqslant 4y + 8 - 48;$
$2y \geqslant -5;$
$y \geqslant -2{,}5.$ *Ответ:* $[-2{,}5; +\infty)$.

№ 715

а) Пусть величина первого угла $x°$, тогда величина второго угла $(x - 10)°$, величина третьего угла $2x°$. Сумма углов треугольника равна 180°:

$x + x - 10 + 2x = 180;$

$4x = 190$

$x = 47{,}5$

$47{,}5 \cdot 2 = 95$

Ответ: величина большего угла 95°.

№ 720

Среднее: 407

Мода: нет

Размах: 364

Медиана: 443

№ 726

а) $\frac{2x-1}{3} > \frac{3x+5}{2};$

$4x - 2 > 9x + 15;$

$5x < -17;$

$x > -3{,}4$

Ответ: $(-3{,}4; +\infty)$.

б) $\frac{3-8x}{5} < \frac{7+y}{3};$

$9 - 24y < 35 + 5y;$

$29y > -26$

$y > -\frac{26}{29}$

Ответ: $(-\frac{26}{29}; +\infty)$.

в) $\frac{4x+1}{3} + 9 \leqslant \frac{5x-9}{3} + 12;$

$4x + 1 + 27 \leqslant 5x - 9 + 36;$

$x \geqslant 1$

Ответ: $[1 + +\infty)$.

г) $\frac{3y-6}{4} - 2 \geqslant \frac{2y+1}{3} - 3;$

$9y - 18 - 24 \geqslant 8y + 4 - 36;$

$y \geqslant 10;$

Ответ: $[10 + +\infty)$.

№ 727

а) Пусть x и y – искомые числа, по условию их сумма равна 38: $x + y = 38$. При делении первого числа на 11 в остатке получается 7: $x = 11n + 7$, при делении второго числа на 11 в остатке получается 9: $y = 11m + 9$.

$\begin{cases} x + y = 38 \\ x = 11n + 7 \\ y = 11m + 9 \end{cases}$

$11n + 7 + 11m + 9 = 38$

$11n + 11m = 22$

$n + m = 2$

Если $n = 0$, то $m = 2$

$x = 7$

$y = 31$

Если $n = 1$, то $m = 1$

$x = 18$

$y = 20$

Если $n = 2$, то $m = 0$

$x = 29$

$y = 9$

Ответ: искомые числа 7 и 31 или 18 и 20 или 29 и 9.

б) Пусть величина третьего угла $x°$, тогда величина первого угла $3x°$, величина второго угла $(3x + 40)°$. Сумма углов треугольника 180°.

$3x + 3x + 40 + x = 180;$

$7x = 140;$

$x = 20$

$20 \cdot 3 + 40 = 100$

Ответ: величина второго угла 100°.

ТЕХНОЛОГИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО МЕТОДА

Принципиальное отличие ТДМ от традиционного демонстрационно-наглядного метода обучения заключается прежде всего в том, что в ТДМ представлено описание последовательности деятельностных шагов не учителя, а ученика. Выполняя эти шаги в образовательном процессе, ученик становится в позицию субъекта учебной деятельности, то есть «переоткрывает» для себя уже созданное в культуре, но для него самого — новое знание. Выполняемые учеником шаги вбирают в себя полный перечень личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных УУД ФГОС, составляющих основу умения учиться. А содержание и методики учебника помогают учителю организовать этот процесс в соответствии с технологическими и дидактическими требованиями ТДМ[1] .

Столь радикальное изменение метода работы в практике школьного образования становится возможным, так как за последние десятилетия большинство учителей накопили значительное число приемов и способов активизации деятельности учащихся. Поэтому в образовательной системе Л.Г. Петерсон предложены несколько уровней реализации ТДМ:

1) *базовый уровень* — это переходный уровень, систематизирующий инновационный опыт российской школы активизации деятельности учащихся в процессе трансляции системы знаний;

2) *технологический уровень* — это уровень, когда учитель реализует технологические требования ТДМ, но пока еще работает в поисковом режиме;

3) *системно-технологический уровень* — это уровень, когда учитель включил ТДМ в систему своей работы и реализует технологические требования ТДМ во всей их полноте.

Базовый уровень ТДМ при введении нового знания включает в себя следующие шаги.

1) Организационный момент.
2) Актуализация знаний.
3) Проблемное объяснение нового знания.
4) Первичное закрепление во внешней речи.
5) Самостоятельная работа с самопроверкой.
6) Включение нового знания в систему знаний и повторение.
7) Итог урока.

На этапе *организационного момента* определяются цели урока и организуется с помощью мотивирующих приемов осознанное вхождение учащихся в пространство учебной деятельности на уроке.

Цель этапа *актуализации знаний* — подготовка мышления детей к изучению нового материала, воспроизведение учебного содержания, необходимого для восприятия нового, и указание ситуации, демонстрирующей недостаточность имеющихся знаний.

На этапе *проблемного объяснения* нового учитель обращает внимание учащихся на отличительное свойство задания, вызвавшего затруднение, раскрывает целесообразность введения нового знания, формулирует цель и тему урока и организует подводящий диалог, направленный на построение и осмысление нового способа действий. В завершение этапа новое знание фиксируется вербально, знаково и с помощью схем.

---

[1] В образовательной системе Л.Г. Петерсон учителю предложены варианты сценариев каждого урока курса математики «Учусь учиться» 0—9, то есть, начиная с дошкольной подготовки вплоть до выпуска из основной школы.

На этапе *первичного закрепления во внешней речи* изученное содержание закрепляется и проводится через внешнюю речь.

На этапе *самостоятельной работы с самопроверкой* организуется самоконтроль усвоения нового учебного содержания, при этом новый способ действия переводится во внутренний план.

Цель этапа *включения нового знания в систему знаний и повторения* — определение границ применимости нового знания, тренировка навыков его использования совместно с ранее изученным материалом и повторение содержания, которое закрепляет изученное на предыдущих уроках и потребуется на следующих уроках.

На этапе *подведения итогов урока* фиксируется изученное на уроке новое знание, уточняется его значимость, организуется самооценка учебной деятельности и намечаются дальнейшие цели деятельности.

Структура урока базового уровня ТДМ выделяет из общей структуры рефлексивной самоорганизации ту ее базовую часть, которая представляет собой целостный элемент, обеспечивающий сознательное, глубокое и прочное усвоение учащимися накопленного в культуре опыта и развитие познавательных процессов. Не вступая в противоречие с целостной структурой деятельностного метода обучения, базовый уровень ТДМ позволяет учителю осваивать деятельностный метод в спокойном, комфортном для себя темпе по индивидуальной траектории саморазвития.

На **технологическом уровне** при введении нового знания учитель начинает переходить к использованию следующей структуры урока.

1. *Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности.*

Данный этап урока предполагает осознанный переход ученика из жизнедеятельности в пространство учения. С этой целью организуется его мотивирование к учебной деятельности на уроке («буду учиться») через механизм «надо» — «могу» — «хочу», а именно:

1) актуализируются требования к ученику со стороны учебной деятельности (понимание нормы учебной деятельности — «надо»);

2) устанавливаются тематические рамки (мне понятно — «могу»);

3) создаются условия для возникновения у него внутренней потребности включения в учебную деятельность (принятие нормы на личностном уровне — «хочу»).

В развитом варианте здесь происходят процессы адекватного самоопределения в учебной деятельности, предполагающие сопоставление учеником своего реального «Я» с образом «Я — идеальный ученик», затем осознанным подчинением себя системе нормативных требований учебной деятельности и выработкой внутренней готовности к их реализации (субъектный и личностный уровни).

2. *Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии.*

На данном этапе организуется подготовка и мотивация учащихся к надлежащему самостоятельному выполнению пробного учебного действия, его осуществлению и фиксации индивидуального затруднения.

Соответственно, данный этап предполагает:

1) актуализацию изученных способов действий, достаточных для построения нового знания, их обобщение и знаковую фиксацию;

2) актуализацию соответствующих мыслительных операций и познавательных процессов;

3) мотивирование учащихся к пробному учебному действию («надо» — «могу» — «хочу»), и его самостоятельное осуществление;

4) фиксация учащимися индивидуальных затруднений в выполнении ими пробного учебного действия или его обосновании (в форме «я не знаю ...»).

Завершение этапа связано с организацией выхода учащихся в рефлексию пробного действия.

3. *Выявление места и причины затруднения.*

На данном этапе учащиеся выявляют место и причину затруднения. С этой целью они должны:

1) уточнить, какую именно конкретную задачу они не смогли решить или обосновать решение (то есть место затруднения);

2) выявить и зафиксировать во внешней речи, какого способа действия им не хватает, чтобы решить и обосновать исходную задачу и задачи такого класса или типа вообще (то есть причину затруднения).

4. *Построение проекта выхода из затруднения (цель, тема, план, способ, средство).*

На данном этапе учащиеся в коммуникативной форме обдумывают проект будущих учебных действий:

- ставят цель (целью всегда является устранение зафиксированного затруднения),
- согласовывают тему урока,
- строят план достижения цели,
- выбирают способ (дополнение или уточнение),
- определяют средства (алгоритмы, модели, учебник и т.д.)

Этим процессом руководит учитель: на первых порах с помощью подводящего диалога, затем — побуждающего, а затем и посредством организации самостоятельной учебной деятельности учащихся.

5. *Реализация построенного проекта.*

На данном этапе осуществляется реализация построенного проекта: обсуждаются различные варианты, предложенные учащимися, и выбирается оптимальный вариант, который фиксируется в языке вербально и знаково.

Построенный способ действий используется для решения исходной задачи, вызвавшей затруднение.

В завершение, уточняется общий характер нового знания и фиксируется преодоление возникшего ранее затруднения.

6. *Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.*

На данном этапе учащиеся в форме коммуникативного взаимодействия (фронтально, в группах, в парах) решают типовые задания на новый способ действий с проговариванием алгоритма решения вслух.

7. *Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.*

При проведении данного этапа используется индивидуальная форма работы: учащиеся самостоятельно выполняют задания нового типа и осуществляют их самопроверку, пошагово сравнивая с эталоном. В завершение организуется исполнительская рефлексия хода реализации построенного проекта учебных действий и контрольных процедур.

Эмоциональная направленность этапа состоит в акцентировании учеников на успех: организации, по возможности, для каждого ученика ситуации успеха, мотивирующей его к включению в дальнейшую познавательную деятельность. «Всели в ученика, — говорил В. А. Сухомлинский, — веру в себя, в успех. Моральные силы для преодоления своих слабых сторон ребенок черпает в своих успехах».

8. *Включение в систему знаний и повторение.*

На данном этапе выявляются границы применимости нового знания и выполняются задания, в которых новый способ действий предусматривается как промежуточный шаг.

Организуя этот этап, учитель подбирает задания, в которых тренируется использование изученного ранее материала, имеющего методическую ценность для введения в последующем новых способов действий. Таким образом, происходит, с одной стороны, тренировка в применении изученного способа действия, а с другой — подготовка к введению в будущем нового знания.

9. *Рефлексия учебной деятельности на уроке (итог урока).*

На данном этапе фиксируется новое содержание, изученное на уроке, и организуется рефлексия и самооценка учениками собственной учебной деятельности. В завершение, соотносятся ее цель и результаты, фиксируется степень их соответствия и намечаются дальнейшие цели деятельности.

Данная структура урока графически может быть изображена с помощью схемы (рис. 1), помогающей учителю соотнести между собой этапы учебной деятельности. Эта схема является, по сути, опорным сигналом, который в адаптированном виде представляет методологическую схему, описывающую структуру учебной деятельности [3] с включенными в нее шагами, обеспечивающими глубокое и прочное усвоение знаний.

Технология деятельностного метода Л.Г. Петерсон (ТДМ)

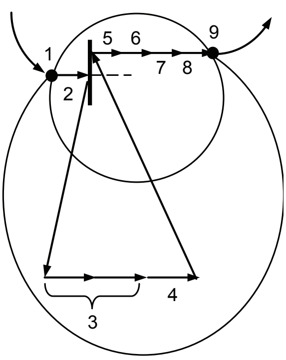


Рис. 1

1) Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности.
2) Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии.
3) Выявление места и причины затруднения.
4) Построение проекта выхода из затруднения.
5) Реализация построенного проекта.
6) Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.
7) Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.
8) Включение в систему знаний и повторение.
9) Рефлексия учебной деятельности.

Предложенная технология носит интегративный характер: в ней синтезированы не конфликтующие между собой идеи из концепций развивающего образования ведущих российских педагогов и психологов с позиций преемственности с традиционной школой.

Действительно, при реализации шагов 1, 2, 5—9 выполняются требования традиционной школы к организации передачи учащимся знаний, умений и навыков; шаги 2—8 обеспечивают системное прохождение учащимися всех этапов, выделенных П. Я. Гальпериным как необходимые для глубокого и прочного усвоения знаний; завершение 2-го шага связано с созданием затруднения в деятельности («коллизии»), что является, по мнению Л. В. Занкова, необходимым условием развивающего обучения. На этапах 2—5, 7, 9 обеспечиваются требования к организации учебной деятельности, разработанные В.В. Давыдовым. Таким образом, на основе методологической версии теории деятельности (Г. П. Щедровицкий, О. С. Анисимов и др.) удалось построить последовательность деятельностных шагов, которая может использоваться в современной сфере образования в качестве синтезирующего предиката.

Как уже отмечалось, прохождение данных этапов ТДМ позволяет учащимся на каждом уроке тренировать весь комплекс УУД ФГОС, составляющих основу умения учиться. Их примеры по этапам ТДМ приведены в следующей таблице[2].

---

[2] Условные обозначения:
Л — личностные УУД; Р — регулятивные УУД; П — познавательные УУД; К — коммуникативные УУД.

	Этапы урока в ТДМ	Тренируемые УУД
1	Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности	• познавательная мотивация / самоопределение (Л); • смыслообразование (Л); • целеполагание (Р); • планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками (К)
2	Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии	• анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (П); • извлечение необходимой информации из текстов (П); • использование знаково-символических средств (П); • осознанное построение речевого высказывания (П); • подведение под понятие (П); • выполнение пробного учебного действия (Р); • фиксирование затруднения в пробном действии (Р); • волевая саморегуляция в ситуации затруднения (Р); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (К); • учет разных мнений (К); • использование критериев для обоснования своего суждения (К)
3	Выявление места и причины затруднения	• анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (П); • подведение под понятие (П); • определение основной и второстепенной информации (П); • осознанное построение речевого высказывания (П); • структурирование знаний (П); • постановка и формулирование проблемы (Р); • волевая саморегуляция в ситуации затруднения (Р); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (К); • учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (К); • разрешение конфликтов (К)
4	Построение проекта выхода из затруднения	• самоопределение (Л); • смыслообразование (Л); • анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия (П); • самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели (Р); • поиск и выделение необходимой информации (П); • выбор наиболее эффективных способов решения задач (П);

		• планирование, прогнозирование (Р); • структурирование знаний (П); • осознанное построение речевого высказывания (П); • волевая саморегуляция в ситуации затруднения (Р); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (К); • учет разных мнений (К); • использование критериев для обоснования своего суждения (К). • планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками (К); • разрешение конфликтов (К)
5	Реализация построенного проекта	• смыслообразование (Л); • анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (П); • волевая саморегуляция (Р); • познавательная инициатива (Р); • выдвижение гипотез и их обоснование (Р); • самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера на основе метода рефлексивной самоорганизации (Р); • поиск необходимой информации (П); • использование знаково-символических средств (П); • моделирование и преобразование моделей разных типов (предметы, схемы, знаки и т.д.) (П); • установление причинно-следственных связей (П); • осознанное построение речевого высказывания (П); • построение логической цепи рассуждений (П); • доказательство (П); • нравственно-этическое оценивание усваиваемого содержания (Л); • осознание ответственности за общее дело (Л); • следование в поведении моральным нормам и этическим требованиям (Л); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • адекватное использование речевых средств для решения коммуникационных задач (К); • формулирование и аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (К); • учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (К); • использование критериев для обоснования своего суждения (К); • достижение договоренностей и согласование общего решения (К); • разрешение конфликтов (К)

6	Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи	• анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (П); • извлечение из математических текстов необходимой информации (П); • моделирование и преобразование моделей разных типов (П); • использование знаково-символических средств (П); • подведение под понятие (П); • установление причинно-следственных связей (П); • выполнение действий по алгоритму (П); • осознанное построение речевого высказывания (П); • построение логической цепи рассуждений (П); • доказательство (П); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • адекватное использование речевых средств для решения коммуникационных задач (К); • формулирование и аргументация своего мнения в коммуникации (К); • учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (К); • использование критериев для обоснования своего суждения (К); • достижение договоренностей и согласование общего решения (К); • осознание ответственности за общее дело (Л); • следование в поведении моральным нормам и этическим требованиям (Л)
7	Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону	• анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (П); • извлечение из математических текстов необходимой информации (П); • использование знаково-символических средств (П); • подведение под понятие (П); • выполнение действий по алгоритму (П); • осознанное построение речевого высказывания (П); • доказательство (П); • контроль (Р); • коррекция (Р); • оценка (Р); • волевая саморегуляция в ситуации затруднения (Р); • осознанное построение речевого высказывания (П); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • использование критериев для обоснования своего суждения (К)

8	Включение в систему знаний и повторение	• нравственно-этическое оценивание усваиваемого содержания (Л); • анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (П); • понимание текстов, извлечение необходимой информации (П); • подведение под понятие (П); • моделирование, преобразование модели (П); • использование знаково-символических средств (П); • установление причинно-следственных связей(П); • выведение следствий (П); • самостоятельное создание алгоритмов деятельности (П); • выполнение действий по алгоритму (П); • построение логической цепи рассуждений (П); • доказательство (П); • осознанное построение речевого высказывания (П); • контроль, коррекция, оценка (Р); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • формулирование и аргументация своего мнения в коммуникации (К); • учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (К); • использование критериев для обоснования своего суждения (К). • достижение договоренностей и согласование общего решения (К); • постановка вопросов (К); • адекватное использование речевых средств для решения коммуникационных задач (К); • управление поведением партнера (К) • осознание ответственности за общее дело (Л); • следование в поведении моральным и этическим нормам (Л)
9	Рефлексия учебной деятельности	• рефлексия способов и условий действия (Р); • контроль и оценка процесса и результатов деятельности (Р); • самооценка на основе критерия успешности (Л); • адекватное понимание причин успеха / неуспеха в учебной деятельности (Л); • выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (К); • формулирование и аргументация своего мнения, учет разных мнений (К); • использование критериев для обоснования своего суждения (К); • планирование учебного сотрудничества (К); • следование в поведении моральным нормам и этическим требованиям (Л)

Приведенная структура урока в ТДМ, сохраняя общие закономерности включения в учебную деятельность, видоизменяется в зависимости от возрастного этапа обучения и типа урока.

Типология уроков

В образовательной ***системе*** деятельностного метода Л.Г. Петерсон в соответствии с общим принципом формирования системы знаний выделяются 4 типа уроков:

- уроки *открытия нового знания*, где учащиеся под руководством учителя учатся самостоятельно строить новые способы действий и приобретают первичное умение применять новое знание;
- уроки *рефлексии*, которые ориентированы на формирование умения: 1) применять полученные знания, в том числе и в нестандартных условиях (*рефлексивно-тренировочные*); 2) самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность (*рефлексивно-коррекционные*);
- уроки *обучающего контроля*, на которых учащиеся учатся контролировать результаты своей учебной деятельности;
- уроки *систематизации знаний*, в ходе которых учащиеся систематизируют и структурируют знания по курсу математики.

Все уроки строятся на основе метода рефлексивной самоорганизации, поэтому в их процессе также используется весь комплекс универсальных учебных действий, но на каждом из этих уроков делаются разные акценты. Так, если на уроках открытия нового знания основное внимание уделяется проектированию новых способов действий в проблемных ситуациях, то на уроках рефлексии — формированию умения их применять, корректировать свои действия и самостоятельно создавать новые алгоритмы деятельности в задачных ситуациях (решение нестандартных задач). На уроках обучающего контроля отрабатываются действия контроля, коррекции и оценки, а на уроках систематизации знаний формируется способность к структурированию знаний.

Технология деятельностного метода Л. Г. Петерсон уточняется в соответствии с возрастной периодизацией учащихся и типами уроков.

Опишем алгоритмы проектирования уроков всех типов в ТДМ и краткие методические рекомендации к их проведению.

Проектирование и проведение уроков в ТДМ

Рассмотрим особенности организации деятельности учащихся 7—9 классов на уроках в ТДМ разной целевой направленности — а именно, те конкретные шаги, которые должен продумать учитель при проектировании этих уроков.

В скобках указано примерная продолжительность каждого этапа. Вместе с тем, в зависимости от конкретной ситуации и дидактических целей учителя, их продолжительность может быть разная. Однако указанное время дает представление о среднем значении продолжительности этапа, которое поможет полноценно реализовать все задачи урока без задержки учащихся после звонка, что всегда нежелательно и непродуктивно.

1. Урок открытия нового знания (ОНЗ)

1-й этап. Мотивация к учебной деятельности (1–2 мин)

Основной целью этапа является включение учащихся в учебную деятельность на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели необходимо следующее.

1) *Организовать определение типа урока.*

Определение типа урока создает для учащихся ориентировочную основу действия. Ученики предлагают версии, опираясь на свой опыт. Учитель уточняет тип урока, исходя из логики развития содержания и результатов предыдущих уроков. Например, после успешно проведенной текущей контрольной работы естественно ожидать урок ОНЗ.

2) *Организовать актуализацию способа работы учащихся на уроках ОНЗ, принятого в классе («надо»).*

Поскольку к 7 классу структура учебной деятельности должна быть в основном усвоена учащимися, они должны знать все шаги урока ОНЗ:

- вспоминаем эталоны, которые нам понадобятся для следующего шага;
- выполняем пробное действие;
- выясняем, что мы пока не знаем;
- ставим цель и проектируем, как ее достичь;
- выполняем проект, формулируем новое свойство, правило, алгоритм;
- тренируемся в его применении;
- пишем и проверяем самостоятельную работу;
- решаем задачи на повторение;
- подводим итог.

Это не значит, что все эти шаги каждый раз надо проговаривать полностью. После того как они отработаны, может быть, достаточно одного вопроса учителя:

— Все помнят, как мы работаем?

Или, возможно, уточняется этап, который в данный период отрабатывается в классе.

— Над каким этапом урока ОНЗ мы сейчас работаем? (Мы учимся ставить проблему — правильно устанавливать, что мы пока не знаем.)

Другими словами, исходя из уровня формирования у учащихся регулятивных УУД, учитель планирует организацию следующего шага учащихся в освоении структуры учебной деятельности и ее сознательного применения на уроке.

3) *Организовать фиксацию учащимися тематических рамок урока («могу»).*

Тематические рамки урока фиксируются с максимально возможным подключением учащихся так, чтобы им была понятна логика развития содержания. Например:

— Какую тему мы изучаем? (Квадратные уравнения.)

— Мы узнаем сегодня новый прием, который позволит нам решать некоторые квадратные уравнения быстрее.

4) *Создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в учебную деятельность («хочу»).*

Личностное позитивное отношение к учению не формируется в течение нескольких минут урока, а определяется созданной в классе образовательной средой. Это творческая доброжелательная среда, где ученику интересно, где он имеет опыт успеха, где он ощущает моральную поддержку учителя и сверстников, заинтересованность в его успехе. Как писал Б. А. Слуцкий,

Ничему меня не научит,
То, что тычет, талдычит, жучит...

Вместе с тем, на каждом уроке важно поддерживать, а не разрушать эту среду — улыбкой, неожиданным замечанием или заранее продуманным приемом, который заставит детей приятно удивиться, улыбнуться, почувствовать доброту и поддержку. При этом особое внимание и, возможно, предварительное планирование приемов работы должно быть обращено к менее успешным детям.

Очень важно осознать значимость этого этапа — без положительной мотивации ученик будет постоянно «выпадать» из урока, — и профессионализм учителя заключается в том, чтобы механизм «надо» — «могу» — «хочу» помог ему включить в учебную деятельность каждого учащегося.

В отличие от первого этапа урока ОНЗ в 5—6 классах, на данном этапе определяется тип урока. Учащиеся, зная к 7 классу структуру урока каждого типа, понимают цель и требования к каждому этапу, что обеспечивает для них создание ориентировочной основы действий.

На этой базе в дальнейшем можно организовать процессы адекватного самоопределения учащихся в учебной деятельности. Механизмы организации этой работы описаны в пособии, которое так и называется: «Мотивация и самоопределение в учебной деятельности» [4]. Заметим, что самоопределение исключительно важно не только для успешной работы учащихся на конкретном уроке, но и с позиций общей цели формирования способностей к самоопределению, что является приоритетной задачей образования на этапе обучения в 7—9 классах средней школы.

Этап можно завершить вопросом:

— Готовы к работе?

Оптимальным результатом данного этапа является положительная мотивация (в развитом варианте — самоопределение на субъектном или личностном уровнях) каждого учащегося к учебной деятельности на уроке.

2-й этап. Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии (5–7 мин)

Основной целью этапа является подготовка мышления учащихся к построению нового способа действий и осознание их потребности в этом построении.

Для реализации этой цели необходимо следующее.

1) Организовать актуализацию мыслительных операций, достаточных для построения нового знания (анализ, сравнение, обобщение, аналогия, классификация и др.)

С этой целью можно использовать задания на поиск закономерностей (на 1—2 минуты), в которых одновременно проводится тренинг устных вычислений и преобразований («математическая разминка»).

2) Организовать повторение способов действий, достаточных для построения нового знания, проговорить эти способы вслух и зафиксировать в форме эталонов.

Важно не перегружать данный этап заданиями на «доработку» изученного ранее материала. Эта распространенная методическая ошибка порождает «порочный круг»: затягивание этапа актуализации ведет к тому, что на уроке часть этапов, необходимых для полноценного усвоения нового знания, остается не пройдена — не достаточно времени. Поэтому в дальнейшем и этот материал приходится тоже «дорабатывать», что не позволит качественно изучить следующие темы и т.д.

Поэтому для актуализации желательно отбирать, в основном, то, что необходимо для построения нового знания. Например, при изучении теоремы Виета и обратной к ней, нужно повторить понятие корня уравнения, формулы корней квадратного уравнения и правила действий и преобразований многочленов.

Сэкономить время на данном этапе поможет правильный подбор домашнего задания накануне урока — оно должно содержать все способы действий, необходимые для построения нового свойства, алгоритма, правила и т.д.

3) Организовать анализ и выполнение учащимися задания на пробное действие.

Задание на пробное действие — это задание, содержащее новый для учащихся способ действий, который им, собственно, и предстоит открыть для себя на данном уроке. Учащиеся должны понимать, что пробное действие предлагается с двумя целями:

- для того чтобы глубже осознать и сформулировать проблему;
- для того чтобы эти «пробы» помогли определить способ решения проблемы.

Например, при изучении теоремы Виета и обратной к ней это может быть следующее задание.

— Решите уравнение $x^2 - 9\frac{5}{9}x + 5 = 0$ устно за 1 минуту, не используя формулы корней.

Новизна задания, очевидно, в том, что корни уравнения требуется найти, не используя формулы корней.

4) Организовать фиксирование учащимися индивидуального затруднения в учебной деятельности.

Поскольку способ действий не известен, то, естественно, возникают разные версии ответов, а кто-то не сможет получить никакой ответ. Учитель организует фиксирование учащимися своего индивидуального затруднения, которых, по сути, два типа:

- «Я не знаю, как правильно решить эту конкретную задачу»
- «Я не знаю, как обосновать свое решение»

Для организации фиксирования учащимися своего затруднения можно использовать различные приемы. Например, через 1 минуту после начала его выполнения спросить у учащихся полученные ответы и записать на доске все имеющиеся версии, затем выставить правильный ответ и спросить:

— Поднимите руки, кто не смог получить правильный ответ.

— В чем ваше затруднение? Что вы не знаете?

При изучении, например, теоремы Виета и обратной к ней учащиеся в этом случае фиксируют свое затруднение так: «Я не знаю как найти корни квадратного уравнения $x^2 - 9\frac{5}{9}x + 5 = 0$, не используя формул корней».

Если кто-то из учеников все-таки укажет корни 9 и $\frac{5}{9}$, что без знания теоремы Виета крайне маловероятно, учащихся можно спросить:

— У кого получились правильные ответы — обоснуйте правильность своего решения.

Начиная с 1 класса, учащиеся знают, что для доказательства надо применить *согласованный* эталон. Поскольку теорема Виета не изучалась, то они фиксируют свое затруднение так: «Я не знаю, как обосновать свое решение».

Подчеркнем еще раз: задача повторения пройденного материала является здесь второстепенной. Поэтому организовать 2-й этап урока в ТДМ надо так, чтобы он заканчивался примерно на 10-й минуте.

На этом этапе может использоваться как фронтальная, так и групповая форма работы.

3-й этап. Выявление места и причины затруднения (2—3 мин)

Основной целью данного этапа является формулировка проблемы, то есть причины затруднения.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) Организовать актуализацию содержания задачи на пробное действие.

— Какую задачу вам надо было решить?

Учащиеся повторяют формулировку задачи на пробное действие.

2) Организовать выявление и фиксацию во внешней речи общего способа решения задач на пробное действие.

— Какой способ (алгоритм) нужно знать для ее решения?

Учащиеся дают обобщенную формулировку способа решения задачи на пробное действие. В рассмотренном выше примере — для решения этой задачи нужно знать, как найти корни квадратного уравнения без использования формул корней.

3) Организовать фиксацию во внешней речи причины затруднения — тех конкретных знаний и умений, которых недостает для решения задачи на пробное действие и задач такого типа вообще.

Формулировка причины затруднения в учебной деятельности на уроке открытия нового знания всегда начинается словами «Я не знаю...» с указанием выявленного на предыдущем шаге способа действий. В нашем случае:

— Я не знаю, как найти корни квадратного уравнения без использования формул корней.

Если у этого способа есть название, учитель может сообщить его учащимся:

— Подобные задачи позволяет решать теорема Виета и обратная к ней.

На этом этапе используется фронтальная форма работы.

Определение причины своего затруднения — принципиально важный шаг вхождения учащихся в учебную деятельность. Однако заметим, что иногда сформулировать общий способ решения задачи на пробное действие они могут по одному только ее виду, без решения и подводящих вопросов. Если в 7—9 классах проблема и способ ее разрешения очевидны для учащихся и опыт постановки проблемы у них достаточный, то этапы 2 и 3 можно провести в «свернутом виде»: от задания на пробное действие перейти сразу к формулировке проблемы.

4-й этап. Построение проекта выхода из затруднения (3—4 мин)

Основной целью данного этапа является постановка цели, определение темы урока, способа, средств и плана выхода из затруднения.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо сделать следующее.

1) Организовать постановку цели учебной деятельности.

Цель учебной деятельности всегда заключается в устранении причины затруднения, поэтому она непосредственно выводится из формулировки причины затруднения.

Учебная цель включает в себя получение ***знания***, которого недостает для решения исходной задачи, и выработку ***умения*** его применять.

В примере, рассмотренном выше, цель учебной деятельности можно сформулировать так: узнать теорему Виета и обратную к ней и научиться их применять.

2) Организовать согласование темы учебной деятельности.

Тема учебной деятельности обычно выводится из цели. В нашем случае: «Теорема Виета и обратная к ней».

Постановка цели и определение темы учебной деятельности — *ключевые шаги* учебной деятельности, так как личностное отношение ученика к цели учебной деятельности определяет степень его включенности в эту деятельность, а значит, и ее результат. Тем не менее, благодаря подготовительной работе, проведенной на предыдущих этапах урока, оба этих шага занимают не более минуты.

3) Организовать определение способа, средств и плана выхода из затруднения.

На данном этапе урока учащиеся под руководством учителя определяют способ, средства и план (последовательность шагов, которые необходимо сделать для реализации поставленной цели). то есть фактически строят проект выхода из затруднения.

Для успешного решения задач данного этапа, необходимо тщательно продумывать организацию деятельности учащихся. Способ организации, уровень самостоятельности учащихся зависит от конкретной ситуации в классе — опыта детей и опыта работы учителя в ТДМ, уровня их подготовки.

Если класс только начинает работать в ТДМ, то учитель может просто предложить выбрать учащимся способ и средства проектирования из готовых вариантов, составленных предварительно им самим, а при определении плана — попросить их составить правильную последовательность из подготовленных им, но «перепутанных» шагов. Тогда работа на данном этапе строится фронтально, учитель занимает активную позицию организатора коммуникации, используя подводящий и побуждающий диалоги.

Если же у учащихся накоплен достаточный опыт планирования, то целесообразно организовать работу учащихся в группах в течение 2 минут, а затем сравнить и согласовать их варианты.

К 7 классу у учащихся сформирована способность к коммуникации в позициях автора, понимающего и критика, поэтому в групповой работе на данном этапе обучения формируется способность к коммуникации в позиции организатора. Для успешного решения задачи в группе каждый учащийся пробует себя в разных коммуникативных позициях, что дает ему возможность определить свои способности. Естественно, что групповая форма работы наиболее эффективна и интересна для учащихся.

Результатом данного этапа является принятый учащимися согласованный алгоритм их действий по реализации на следующих этапах поставленной цели — получение конкретного ***знания*** и выработка ***умения*** его применять.

5-й этап. Реализация построенного проекта (6–8 мин)

Основной целью данного этапа является построение нового знания, фиксирование в знаках и речи и указание области его применимости.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) Организовать построение нового способа действий.

На данном шаге обычно используется подготовленная учителем система заданий, которую последовательно выполняют учащиеся для того, чтобы прийти к самостоятельному выводу. В рассмотренном выше примере они должны установить, что сумма корней квадратного уравнения противоположна b, а произведение — равно c.

2) Организовать фиксацию полученного вывода в речи и в знаковой форме.

В рассмотренном примере на данном шаге учащиеся уточняют формулировку теоремы Виета, строят обратное утверждение и фиксируют новое знание в форме эталона.

Эталоны необходимы не только для лучшего усвоения знаний, но и для организации самопроверки: на данном уроке — на этапе самостоятельной работы, а в последующем — на уроках рефлексии, развивающего контроля, для повторения.

3) Организовать решение исходной задачи и фиксацию преодоления затруднения.

В нашем случае учащиеся обращаются к исходному уравнению $x^2 - 9\frac{5}{9}x + 5 = 0$. Анализируя коэффициенты b и c данного уравнения, они должны догадаться, что его корнями являются числа 9 и $\frac{5}{9}$. Свой результат они обосновывают с помощью теоремы, обратной теореме Виета.

4) Организовать уточнение общего характера нового знания и определение области его применимости.

В нашем примере учащиеся на данном шаге фиксируют, что теорема Виета применима для любого квадратного уравнения, а подбор корней по коэффициентам целесообразно использовать только в случае «удобных» коэффициентов.

Грамотная организация коммуникативного взаимодействия позволяет существенно экономить время проведения данного этапа. На первом его шаге предпочтительна групповая форма работы, а на последующих — фронтальная.

Результатом данного этапа является фиксация каждой группой решения поставленной учебной задачи в части построения нового ***знания***.

6-й этап. Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи (5—6 мин)

Основной целью этапа является усвоение учащимися нового знания и формирование умения его применять.

Законы эффективного усвоения знаний описаны в теории поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина. На предыдущих пяти этапах было организовано прохождение четырех первых этапов усвоения:

- мотивация — на 1-м этапе;
- создание ориентировочной основы действий — также на 1-м этапе;
- материальное и материализованное действие — на 2—5 этапах;
- фиксация нового знания в знаках и речи — на 5-м этапе.

Здесь учащиеся проходят следующий этап усвоения знаний — тренинг в применении с проведением через *внешнюю* (*громкую*) речь. Они решают типовые задания на новый способ действия с проговариванием вслух определения, алгоритма, свойства и т. д.

Сначала работа организуется либо фронтально (например, «цепочкой» с неожиданным переходом по знаку учителя, что активизирует внимание учащихся), либо в группах. В завершение этапа обязательна работа в парах для того, чтобы проговорить новый алгоритм смог каждый учащийся, при этом второй ученик, слушая и проверяя соседа по парте, проговаривает алгоритм про себя (*внутренняя* речь).

7-й этап. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (8—10 мин)

Основной целью этапа является интериоризация нового знания, индивидуальная рефлексия достижения цели и создание ситуации успеха.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) Организовать самостоятельное выполнение учащимися заданий на новый способ действий.

Учащимся предлагается 2—3 типовых задания на новое знание, при выполнении которых они могут использовать построенные эталоны. Они выполняют их самостоятельно и, таким образом, они проводят новое знание через внутреннюю речь (проговаривают про себя).

2) Организовать самопроверку учащимися своих решений по эталону.

При проверке своего решения по эталону все учащиеся еще раз «проговаривают» про себя каждый шаг нового способа действий.

3) Организовать индивидуальная рефлексию учащимися достижения цели своей учебной деятельности.

При самопроверке своего решения каждый ученик получает возможность определить, при необходимости, место и причину своей ошибки и исправить ее, опираясь на эталон.

Если такая работа не проводилась на предыдущих ступенях обучения, то на первых порах к эталону добавляется образец правильного решения. А если эта работа системно проводилась, то к 7 классу способность к самопроверке по эталону у учащихся уже полностью сформирована.

4) Создать ситуацию успеха для каждого ученика.

На данном этапе учитель вначале просит поднять руку тех, кто допустил ошибки, и просит объяснить их причины. Если есть ученики, которые с самопроверкой не справились, просит помочь им тех, кто справился.

— Молодцы, разобрались в своих ошибках!

Затем руки поднимают те, кто не сделал ошибок:

— Молодцы!

Переживание учащимся ситуации успеха при правильном решении заданий или осознание причины своих ошибок и их осознанное исправление способствуют формированию у них положительного самоопределения к учебной деятельности.

8-й этап. Включение в систему знаний и повторение (5—15 мин)

Основной целью этапа является включение нового способа действий в систему знаний, повторение и закрепление ранее изученного и, вместе с тем, опережающая подготовка к изучению следующих тем.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) организовать решение учащимися зданий, в которых новое знание связывается с материалом, изученным ранее;

2) организовать решение учащимися зданий, требующих системной тренировки, и заданий на подготовку к изучению следующих тем.

Этот этап проводится в форме коммуникативного взаимодействия преимущественно в группах или в парах.

В учебниках курса «Учусь учиться» предоставляется возможность выбора учащимися заданий на повторение, творческих заданий, организации во внеклассной работе проектной и исследовательской деятельностей.

9-й этап. Рефлексия учебной деятельности на уроке (2—3 мин)

Основной целью этапа является проведение учащимися рефлексии своей учебной деятельности на уроке, самооценка и фиксация домашнего задания.

Для реализации поставленной цели необходимо:

1) Организовать рефлексию деятельности на уроке класса в целом, группы, каждого учащегося.

При организации рефлексии деятельности разбираются вопросы:

- где и почему возникло затруднение (в работе класса, группы, собственной работе);
- каким способом преодолено возникшее затруднение;
- какой новый способ действия был построен;
- какова область его применения;
- достигнута ли цель урока;
- что необходимо сделать в дальнейшем.

2) Организовать самооценку учениками деятельности на уроке (класса, группы, своей собственной работы).

Учащиеся соотносят поставленные цели и полученные результаты, устанавливают степень их соответствия и знаково фиксируют принятым в классе способом. Выставленная в той или иной форме отметка отражает степень удовлетворенности учащихся работой на уроке.

3) Организовать фиксацию перспектив дальнейшей учебной деятельности и заданий для самоподготовки (домашнего задания).

Исходя из самооценки, они определяют, что еще им надо сделать для усвоения нового знания, обсуждают и записывают домашнее задание.

Домашнее задание предлагается с элементами выбора, творчества, при этом оно должно обеспечивать подготовку учащихся к учебной деятельности на следующих уроках.

Таким образом, особенностью проведения этапа рефлексии учебной деятельности в 7—9 классах, в отличие от 5—6 классов, является то, что акцент делается, прежде всего, не на методе решения учебной задачи, как раньше, а на методе организации самой учебной деятельности.

Отметим, что в 7—9 классах средней школы приоритетными этапами урока являются этапы:

- мотивации и самоопределения в учебной деятельности;
- фиксирования затруднения и постановки проблемы;
- построения и реализации проекта выхода из затруднения;
- самостоятельной работы с самопроверкой;
- рефлексии деятельности на уроке.

При этом использование ТДМ на предыдущих этапах обучения и сформированность основных видов учебной деятельности позволяет учащимся в 7—9 классах

на этапе мотивации осознать механизм самоопределения;

на этапах фиксирования затруднения, постановки проблемы, проектирования и реализации проекта — зафиксировать метод рефлексивной самоорганизации, дающий ключ к эффективному преодолению затруднений;

на этапе самостоятельной работы с самопроверкой по эталону — процедуру контроля;

на этапе рефлексии деятельности — процедуру самооценки;

на всех без исключения этапах — нормы коммуникативного взаимодействия.

В процессе такой деятельности осваиваются приоритетные на данном возрастном этапе универсальные действия — социальные пробы, попытки строить общение в различных коллективах с учетом принятых в них норм взаимоотношений, рефлексия собственного поведения и адекватная самооценка своих действий, поступков и возможностей.

Уроки всех остальных типов также строятся на основе метода рефлексивной самоорганизации и, соответственно, проектируются и проводятся аналогичным образом с учетом целей, которые на них ставятся.

2. Уроки рефлексии

2.1. Урок рефлексии тренировочного типа (РТ)

Уроки *рефлексии тренировочного типа* ориентированы на формирование умения применять полученные знания в типовых и нестандартных условиях. Вместе с тем, на них продолжается работа по формированию умения выявлять и исправлять свои ошибки, но эта деятельность не является приоритетной.

1-й этап. Мотивация к тренировочной деятельности (1–2 мин)

Основной целью данного этапа является включение учащихся в тренировочную деятельность на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии тренировочного типа необходимо:

1) Организовать определение типа урока.
2) Организовать актуализацию принятого в классе способа работы на уроках РТ-типа, («надо»).
3) Организовать фиксацию учащимися тематических рамок урока («могу»).
4) Создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в тренировочную деятельность («хочу»).

Результатом данного этапа является положительная мотивация каждого учащегося к тренировочной деятельности на уроке.

2-й этап. Актуализация знаний и выполнение тренировочных упражнений (7—10 мин)

Основной целью этапа является подготовка к выполнению тренировочных упражнений.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии тренировочного типа необходимо:

1) Организовать актуализацию известных способов действий, достаточных для выполнения тренировочных заданий;
2) Зафиксировать актуализированные способы действий в речи;

4) Зафиксировать актуализированные способы действий в знаках (эталоны);
5) Организовать актуализацию мыслительных операций, достаточных для выполнения тренировочных заданий: анализ, сравнение, обобщение;
6) Организовать обобщение актуализированных способов действий;
7) Организовать представление спектра заданий, требующих тренировки рассматриваемых способов действий.

Данный этап является достаточно насыщенным по содержанию и по объему выполнения работы. Для того чтобы данный этап прошел успешно, необходимо, чтобы домашнее задание, предложенное учащимся накануне этого урока, содержало в себе все способы действий, достаточные для построения на этом уроке нового алгоритма, правила и т. д.

На рассматриваемом этапе урока предпочтительной является групповая форма работы.

В ходе урока целесообразно использовать индивидуальные карточки рефлексии, которые учащиеся заполняют по ходу урока. Такая карточка может иметь следующий вид.

Фамилия, имя:			
	Домашняя работа (указать номера)	**Тренировочные упражнения** (указать номера)	**Самостоятельная работа** (указать номера)
Выполнено без ошибок			
Возникли затруднения			
Правила, над которыми надо поработать			

3-й этап. Построение плана деятельности (2 — 3 мин)

<u>Основной целью</u> этапа является построение учащимися плана деятельности. Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать постановку учащимися цели деятельности;
2) организовать определение учащимися средств (алгоритмы, модели, справочники и т.д.) для выполнения тренировочных заданий;
3) организовать построение учащимися плана работы с тренировочными заданиями[3] .

План тренировочной работы может иметь следующий вид.

1. Выполнить свое тренировочное задание.
2. Сопоставить решение с подробным образцом.
3. Зафиксировать правильность выполнения заданий, если возникли затруднения, зафиксировать место и причину затруднения в своей карточке рефлексии.
4. На основе подробного образца исправить ошибки.
5. Выполнить следующее тренировочное задание.

На этом этапе предпочтительной является групповая форма работы.

4-й этап. **Реализация плана деятельности (7—10 мин)**

Основной целью этого этапа является выполнение учащимися отобранных тренировочных заданий и коррекция полученных в ходе выполнения результатов.

[3] На первом уроке данного типа план составляется в подводящем диалоге. Со временем по мере необходимости данный план может уточняться.

Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать реализацию построенного плана;
2) организовать фиксацию полученных результатов;
3) организовать анализ полученных результатов;
4) организовать коррекцию выявленных затруднений.

Каждый ученик выполняет задания самостоятельно, самостоятельно проводит самопроверку (подробные образцы находятся у учителя и он выдаёт их по просьбе, либо находятся на отдельном столе и учащиеся самостоятельно берут их оттуда). Ученики могут выполнить разное количество заданий. Каждый учащийся самостоятельно фиксирует свой результат в своей карточке.

5-й этап. Обобщение возникших затруднений во внешней речи (3 – 5 мин)

Основной целью этапа является проговаривания формулировок способов действий, которые вызвали затруднение. Для этого необходимо:

1) организовать обсуждение типовых затруднений;
2) организовать проговаривание формулировок способов действий, которые вызвали затруднение.

Если у многих учащихся остались затруднения при выполнении какого-то упражнения, то рекомендуется разобрать это задание на доске.

6-й этап. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (5 – 10 мин)

Основной целью этапа является организация проведения учащимися самопроверки усвоения тренируемых способов действия. Для этого необходимо:

1) организовать самостоятельное выполнение учащимися типовых заданий на тренируемые способы действия;
2) организовать самостоятельное соотнесение работы с эталоном для самопроверки;
3) организовать по результатам выполнения самостоятельной работы составление текста рефлексии деятельности по применению нового способа действия.
4) организовать обсуждение и запись домашнего задания.

7-й этап. Повторение (5 – 7 мин)

Основной целью этапа является организация повторения ранее изученных тем.

8-й этап. Рефлексия деятельности на уроке (2 – 3 мин)

Основной целью этапа является организация проведения учащимися рефлексии своей учебной деятельности на уроке и их самооценки. Для этого необходимо:

1) организовать фиксацию тренируемого материала на уроке;
2) организовать оценивание учащимися собственной деятельности на уроке;
3) организовать фиксацию неразрешённых затруднений на уроке как направлений будущей учебной деятельности.

На этом этапе все звенья урока соединяются в единую систему, тренируется способность к рефлексии своей деятельности.

Таким образом, на уроках рефлексии тренировочного типа сохранены все ключевые требования со стороны метода рефлексивной самоорганизации и теории поэтапного формирования умственных действий (П. Я. Гальперин).

Второй тип уроков рефлексии — уроки коррекционного типа (РК) — решает те же задачи, что и тренировочные уроки, но акцент в них перенесен на формирование умения выявлять и исправлять свои ошибки.

Уроки *рефлексии тренировочного типа* рекомендуется проводить, когда необходимо сформировать умение применять полученные знания в ситуациях, более сложных, чем ситуации, разобранные на предыдущих уроках ОНЗ. Например, когда требуется комбинация известных способов действий, либо уточнение способа для нестандартных условий его применения. Так, если предыдущий урок

ОНЗ был посвящен теореме Виета и обратной ей теореме, то на уроке рефлексии тренировочного типа целесообразно предложить учащимся более сложные задания по этой теме, но таких типов, которые еще не разбирались на уроке ОНЗ.

Например, в качестве системы тренировочных заданий могут выступать следующие задачи, требующие применения теореме Виета и обратной ей.

• Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен $2 + \sqrt{3}$.

• Пусть x_1, x_2 корни уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Найдите значение выражения $x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2$.

На 2-м этапе уроков РТ рекомендуется работать с заданиями на уровне поиска идеи решения, а на 3-м — строить план выполнения задания. К непосредственному выполнению этих заданий учащиеся приступают только на этапе реализации проекта и самостоятельной работы.

Так, при определении способа решения первого тренировочного задания учащиеся могут перечислить следующие шаги плана решения.

1. Вспомнить формулировку теоремы, обратной теореме Виета.
2. Подобрать второй корень, чтобы коэффициенты приведенного квадратного корня уравнения были целыми.
3. Найти сумму и произведение данного и сопряженного с ним корня.
4. Воспользовавшись теоремой, обратной теореме Виета, составить приведенное квадратное уравнение с полученными коэффициентами.

2.2. Урок рефлексии коррекционного типа (РК)

Уроки *рефлексии коррекционного типа* ориентированы на формирование умения выявлять и исправлять свои ошибки. Одновременно с этим, на них продолжается работа по формированию умения применять полученные знания в типовых и нестандартных условиях, но эта работа перестает быть ведущей.

1-й этап. Мотивация к коррекционной деятельности (1—2 мин)

Основной целью данного этапа является включение учащихся в коррекционную деятельность на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать определение типа урока;
2) организовать актуализацию принятого в классе способа работы на уроках РК-типа, («надо»);
3) организовать фиксацию учащимися тематических рамок урока («могу»);
4) создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в коррекционную деятельность («хочу»).

Результатом данного этапа является положительная мотивация каждого учащегося к коррекционной деятельности на уроке.

2-й этап. Актуализация знаний и фиксация затруднения в индивидуальной деятельности (10—12 мин)

Основной целью данного этапа является подготовка мышления учащихся и осознание потребности в выявлении причин затруднений в процессе их деятельности.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать самостоятельное воспроизведение учащимися изученных способов действий (понятий, алгоритмов, свойств и т. д.), выбранных для коррекционной деятельности, и примеров их применения;
2) организовать актуализацию мыслительных операций, достаточных для выполнения самостоятельной работы;

3) организовать выполнение *самостоятельной работы № 1* с фиксацией учащимися в каждом задании используемого эталона (A_1, A_2, $П_1$ и т. д.);
4) организовать самопроверку учащимися своих работ по образцу и фиксацию полученных результатов (без исправления ошибок);
5) организовать фиксацию собственных ошибок.

На уроках в 7—9 классах, в отличие от предыдущих ступеней обучения, учащиеся сами воспроизводят и фиксируют способы действий, с которыми они будут работать на данном уроке. Домашнее задание целесообразно составить так, чтобы из выполненных учащимися заданий можно было составить примеры на эти способы действий.

На данном этапе могут сочетаться фронтальная, групповая и индивидуальная формы работы.

В самостоятельной работе на 5—6 минут предлагаются задания на использование выделенных способов действий. Во время выполнения самостоятельной работы учитель закрывает доску, на которой зафиксированы повторенные алгоритмы и определения понятий.

При самопроверке учащимися своей работы на данном этапе не предполагается выяснение причин ошибок и их исправление. Учащиеся лишь фиксируют правильность выполнения заданий по готовому образцу.

Отметим, что способности к грамотному самоконтролю и рефлексивному анализу учебной деятельности формируются у учащихся при работе по программе «Учусь учиться» в начальной школе и в 5—6 классах основной школы. К 7 классу учащиеся хорошо знакомы с механизмом самопроверки по образцу и эталону, со структурой рефлексивного анализа, поэтому в 7—9 классах они способны уже сами фиксировать все шаги этих действий, а учитель имеет возможность лишь отслеживать и корректировать этот процесс.

Таким образом, данный этап завершается фиксацией затруднений, возникших при решении самостоятельной работы.

3-й этап. Локализация индивидуальных затруднений (2—3 мин)

Основной целью данного этапа является определение места и причины своих ошибок на основе пошагового сопоставления работ с эталоном для самопроверки.

При проверке работы используется принятый в классе алгоритм исправления ошибок. Эти алгоритмы конструировали сами учащиеся, начиная с первых классов начальной школы, постепенно уточняя их и усложняя.

Соотнесение своего решения с эталоном позволяет «проговорить» каждый шаг решения, уточнить используемые способы действий, обосновать правильность своего решения или выявить место и причину ошибки, что способствует развитию логического мышления и речи.

После проверки своих работ по эталону, учащиеся, успешно справившиеся с самостоятельной работой, могут приступить к выполнению заданий творческого уровня или выступать в качестве консультантов. Таким образом, у каждого ученика есть возможность работать по своей собственной образовательной траектории, что принципиально важно на этапе обучения в 7—9 классах основной школы.

4-й этап. Постановка цели коррекционной деятельности (1 мин)

Основной целью данного этапа является постановка учащимися индивидуальных целей коррекционной деятельности.

Поскольку способ и план работы над ошибками уже построен и отработан в алгоритме исправления ошибок на протяжении нескольких лет обучения, то этап проектирования на уроках рефлексии коррекционного типа сворачивается до постановки цели.

5-й этап. Коррекция выявленных затруднений (4—5 мин)

Основной целью данного этапа является исправление ошибок с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо

- для учащихся, допустивших ошибки:
  1) организовать исправление ошибок с помощью с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий;
  2) организовать самопроверку выполненных заданий;
- для учащихся, не допустивших ошибки:
  1) организовать выполнение заданий более высокого уровня сложности по изучаемой теме или заданий творческого уровня (требующих построения новых методов решения), которые они выполняют вплоть до этапа повторения.

В результате прохождения данного этапа учащиеся должны исправить все свои ошибки и уточнить для себя способы действий, в которых возникли затруднения.

6-й этап. Обобщение возникших затруднений во внешней речи (3—4 мин)

Основной целью этапа является проведение способов действий, в которых возникли затруднения, через внешнюю речь.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать обсуждение типовых затруднений в группах;
2) организовать проговаривание формулировок способов действий, которые вызвали затруднение.

Коммуникативное взаимодействие в группах можно организовать по следующему плану:

- перечислить типы примеров, в которых ученики группы допустили ошибки;
- перечислить алгоритмы, нарушенные в примере каждого типа;
- проговорить формулировки способов действий, которые вызвали затруднения.

7-й этап. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (7—15 мин)

Основной целью этапа является самопроверка своего умения применять изученные способы действий.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать самостоятельное выполнение учащимися заданий на изученные способы действий;
2) организовать самопроверку учащимися своих заданий с помощью эталона для самопроверки;
3) организовать индивидуальную рефлексию учащимися достижения цели своей учебной деятельности на уроке;
4) создать ситуацию успеха для каждого ученика.

8-й этап. Решение задач и повторение (5—15 мин)

Основной целью этапа является: включение изученных способов действий в систему знаний; решение задач на повторение.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать решение учащимися зданий, в которых новые способы действия связываются с материалом, изученным ранее;
2) организовать решение учащимися зданий, требующих системной тренировки, и заданий на подготовку к изучению следующих тем.

9-й этап. Рефлексия коррекционной учебной деятельности на уроке (2–3 мин)

Основной целью этапа является проведение учащимися рефлексии учебной деятельности на уроке, обсуждение и запись домашнего задания.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать фиксацию степени соответствия поставленной цели и результатов учебной деятельности;
2) орган изовать фиксацию причин (алгоритмов, правил, понятий и т. д.) затруднений, возникших на уроке;
3) организовать фиксацию способа исправления ошибок (алгоритма исправления ошибок);
4) организовать самооценку учениками работы на уроке — класса, группы, своей собственной работы;
5) организовать фиксацию неразрешенных на уроке затруднений как направлений будущей учебной деятельности;
6) организовать обсуждение и запись домашнего задания.

На данном этапе все звенья урока соединяются в единую систему, тренируется способность к рефлексии собственной деятельности и самооценке.

Таким образом, на уроках рефлексии коррекционного типа также сохранены все ключевые требования со стороны метода рефлексивной самоорганизации и теории поэтапного формирования умственных действий (П. Я. Гальперин).

Следующий тип уроков — уроки обучающего и развивающего контроля (ОРК). Они проводятся в соответствии с технологией деятельностного метода и предполагают **два этапа**, которые проводятся на двух уроках. На первом из них учащиеся выполняют контрольную работу и проводят самоконтроль выполненных заданий, а на втором — корректируют свои ошибки. Таким образом, в ходе этих уроков учащиеся осваивают функцию контроля результатов своей учебной деятельности и коррекции выявленных затруднений.

Уроки *рефлексии коррекционного* типа рекомендуется проводить, когда необходимо закрепить умение применять полученные знания в типовых ситуациях и предоставить возможность по формированию умения применять их в нестандартных ситуациях (в зависимости от уровня подготовленности учащихся). Поэтому на уроке рефлексии коррекционного типа целесообразно предлагать учащимся самостоятельную работу с обязательной частью (где содержатся типовые задания, которые уже разбирались), и дополнительной частью (с более сложными заданиями).

Учащиеся, допустившие ошибки в обязательной части, работают над ошибками и отрабатывают минимум — содержание, определенное стандартом, необходимое для усвоения. Остальные возвращаются к работе с дополнительной частью самостоятельной работы, после чего переходят к заданиям творческого уровня.

При этом у учащихся, не допустивших ошибок в обязательной части самостоятельной работы, формируется умение применять полученные знания в ситуациях, более сложных, чем в разобранных на предыдущих уроках ОНЗ ситуациях (они работают с более сложными заданиями). Такая организация работы на уроке соответствует принципу минимакса, заложенному в дидактической системе деятельностного метода Л.Г. Петерсон.

Так, самостоятельная работа по теме: «Терема Виета и обратная к ней теорема» может иметь следующее содержание.

Обязательная часть:

№1. Решите уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$, используя теорему, обратную теореме Виета.

№ 2. Один из корней квадратного уравнения $x^2 + 13x + c = 0$ равен 5. Найдите свободный член с этого уравнения.

Дополнительная часть:

№ 3. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $5x^2 - \sqrt{5x} - 1 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

№ 4. Уравнение $x^2 + 9x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $5x_1 + 4$ и $5x_2 + 4$.

3. Урок обучающего и развивающего контроля (ОРК)

I урок

1-й этап. Мотивация к контролирующей деятельности (1—2 мин)

Основной целью данного этапа является включение учащихся в деятельность контроля на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели на уроке ОРК необходимо:

1) организовать определение типа урока;
2) организовать актуализацию способа работы на уроках ОРК, установить форму и процедуру контроля, предъявить критерий выставления оценки («надо»);
3) организовать фиксацию учащимися тематических рамок контроля («могу»);
4) создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в коррекционную деятельность («хочу»).

Результатом данного этапа является положительная мотивация каждого учащегося к деятельности контроля на уроке.

2-й этап. Актуализации знаний и фиксации затруднения в деятельности (39—43 мин)

Основной целью этапа является подготовка мышления учащихся к рефлексии своей деятельности. Для этого необходимо:

1) организовать перечисление учащимися контролируемых способов действий (норм);
2) организовать активизацию мыслительных операций, необходимых для выполнения контрольной работы, внимание и т. д.;
3) организовать индивидуальную деятельность учащихся (провести контрольную работу);
4) организовать сопоставление учащимися своих работ по готовому образцу с фиксацией результатов (без исправления ошибок);
5) предоставить возможность учащимся провести самооценку своих работ по заранее обоснованному критерию.

Отличительной особенностью данного этапа от аналогичного этапа в 5—6 классах является то, что контролируемые способы действий перечисляются самими учащимися без проговаривания их формулировок и знаковых фиксаций. Для проведения данного этапа учителю необходимо подготовить образец для самопроверки и критерий выставления отметки. Объем и уровень контрольной работы в соответствии с принципом минимакса определяется государственным стандартом. Данный этап завершается фиксацией своих ошибок, выставлением самооценки и сдачей контрольной работы учителю.

II урок

Данный урок соответствует анализу контрольной работы в традиционной школе и проводится после проверки контрольной работы учителем.

3-й этап. Локализация индивидуальных затруднений (3—4 мин)

Основной целью этапа является проведение учащимися рефлексивного анализа своей контрольной работы. Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать постановку учащимися цели своей деятельности;
2) мотивировать учащихся к сопоставлению своих работ по эталону для самопроверки;

3) организовать сопоставление работ по эталону для самопроверки с целью:
   а) организации выявления учащимися места затруднения;
   б) организации выявления учащимися причины затруднения;
   в) организации фиксации отсутствия затруднений в ходе решения и его обоснования.

Учащиеся на этом этапе сравнивают свое решение с эталоном. Сравнение с эталоном необходимо для соотнесения своего решения с используемыми способами действий. Как отмечалось выше, это способствует формированию речи, логического мышления, умению критериально обосновывать свою точку зрения.

Данный этап проводится аналогично соответствующему этапу урока рефлексии. Отличительной особенностью данного этапа является то, что на этом этапе анализируется правильность самопроверки своей работы. Таким образом, на данном этапе тренируется способность к грамотному контролю и самоконтролю.

4-й этап. Постановка цели коррекционной деятельности (1 мин)

Основной целью данного этапа является постановка учащимися индивидуальных целей коррекционной деятельности.

Поскольку способ и план работы над ошибками уже построен и отработан в алгоритме исправления ошибок на протяжении нескольких лет обучения, то этап проектирования сворачивается до постановки цели.

5-й этап. Коррекция выявленных затруднений (4–5 мин)

Основной целью данного этапа является исправление ошибок с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий.

Для реализации этой цели на уроке необходимо

- для учащихся, допустивших ошибки:
  1) организовать исправление ошибок с помощью с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий;
  2) организовать самопроверку выполненных заданий;
- для учащихся, не допустивших ошибки:
  1) организовать выполнение заданий более высокого уровня сложности по изучаемой теме или заданий творческого уровня (требующих построения новых методов решения).

Данный этап проводится аналогично соответствующему этапу урока рефлексии. Учащиеся, не допустившие ошибок, продолжают выполнять задания творческого уровня или участвуют в коммуникации в позициях организатора, понимающего или критика. На данном этапе предпочтительной является групповая форма работы.

6-й этап. Обобщение затруднений во внешней речи (3–4 мин)

Основной целью этапа является усвоение способов действий, вызвавших затруднение.

Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать обсуждение типовых затруднений;
2) организовать перечисление способов действий, которые вызвали затруднения.

На данном этапе целесообразно организовать коммуникативное взаимодействие с опорой на вербальную и знаковую фиксацию. Отметим, что если позволяет время, целесообразно проговорить формулировки способов действий, которые вызвали затруднения.

7-й этап. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (10–15 мин)

Основной целью этапа является интериоризация способов действий, вызвавших затруднения, индивидуальная рефлексия достижения цели, создание ситуации успеха.

Для реализации этой цели необходимо, чтобы учащиеся, допустившие ошибки в контрольной работе:

1) выполнили самостоятельную работу, аналогичную контролируемой работе, выбирая только те задания, в которых допущены ошибки;
2) провели самопроверку своих работ по готовому эталону и зафиксировали знаково результаты.

Учащиеся, не допустившие ошибки в контрольной работе, выполняют самопроверку заданий творческого уровня по предложенному образцу или эталону для самопроверки.

Работа имеет узкую типовую направленность и предполагает решений заданий, аналогичных заданиям, предлагаемым в контрольной работе. Каждый учащийся, допустивший ошибку при выполнении контрольной работы, на данном этапе должен иметь возможность проверить насколько он разобрался в причине этой ошибки и свою способность решать задания такого типа, насколько он достиг поставленной перед собой на уроке цели. Отметим, что на данном этапе, также обращается внимание на процедуру грамотного контроля.

8-й этап. Включение в систему знаний и повторение (5—10 мин)

Основной целью этапа является включение используемых способов действий в систему знаний, повторение и закрепление ранее изученного.

При положительном результате предыдущего этапа для реализации этой цели необходимо:

1) организовать выполнение заданий, в которых рассматриваются способы действий, связанные с ранее изученными и между собой;
2) организовать выполнение заданий на подготовку к изучению следующих тем.

При отрицательном результате предыдущего этапа необходимо повторить предыдущий этап, выполнив аналогичные задания.

9-й этап. Рефлексия деятельности на уроке каждого учащегося и класса в целом

Основной целью этапа является проведение учащимися рефлексивного анализа своей деятельности, деятельности своей группы и осознание механизма деятельности по контролю.

Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать проговаривание механизма деятельности по контролю;
2) организовать рефлексию деятельности на уроке каждого учащегося и класса в целом;
3) зафиксировать степень соответствия поставленной цели и результатов деятельности;
4) организовать проведение самооценки учениками деятельности на уроке;
5) организовать анализ, в ходе которого учащиеся определяют, где и почему были допущены ошибки, способы их исправления;
6) организовать перечисление способов действий, вызвавших затруднение;
7) организовать работу учащихся по определению заданий для самоподготовки (домашнее задание с элементами выбора, творчества);
8) организовать работу учащихся по определению целей последующей деятельности.

Данный этап можно организовать как в форме коммуникативного взаимодействия, так и организовать самостоятельную деятельность учащихся.

Информационно-образовательная среда, реализующая системно-деятельностный подход

Важным ресурсом достижения учащимися результатов образования в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов является **создание информационно-образовательной среды**, адекватной деятельностному методу организации образовательного процесса.

Исходя из условий воспроизводимости базового процесса в системе деятельности «учитель — ученик», реализация технологии деятельностного метода обучения в практическом преподавании обеспечивается следующей системой дидактических принципов.

1) *Принцип деятельности* — заключается в том, что ученик, получая знания не в готовом виде, а добывая их сам, осознает при этом содержание и формы своей учебной деятельности, понимает и принимает систему ее норм, активно участвует в их совершенствовании, что способствует активному успешному формированию его общекультурных и деятельностных способностей, общеучебных умений.

2) *Принцип непрерывности* — означает преемственность между всеми ступенями и этапами обучения на уровне технологии, содержания и методик с учетом возрастных психологических особенностей развития детей.

3) *Принцип целостности* — предполагает формирование у учащихся обобщенного системного представления о мире (природе, обществе, самом себе, социокультурном мире и мире деятельности, о роли и месте каждой науки в системе наук, а также роли ИКТ).

4) *Принцип минимакса* — заключается в следующем: школа предоставляет каждому ученику возможность освоения содержания образования на «максимальном» уровне (определяемом зоной ближайшего развития возрастной группы) и обеспечивает условия для его усвоения на уровне социально безопасного «минимума» (федерального государственного образовательного стандарта).

5) *Принцип психологической комфортности* — предполагает снятие всех стрессообразующих факторов учебного процесса, создание в школе и на уроках доброжелательной атмосферы, ориентированной на реализацию идей педагогики сотрудничества, развитие диалоговых форм общения.

6) *Принцип вариативности* — предполагает формирование у учащихся способностей к систематическому перебору вариантов и адекватному принятию решений в ситуациях выбора.

7) *Принцип творчества* — означает максимальную ориентацию на творческое начало в образовательном процессе, создание условий для приобретения учащимся собственного опыта творческой деятельности.

Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования ориентирует на **системное использование средств ИКТ** для решения коммуникативных и познавательных задач как необходимое условие подготовки школьников к жизни в современном информационном обществе.

Реализация в образовательном процессе по математике дидактической системы деятельностного метода обучения способствует созданию в школе главного ресурса перехода к широкому внедрению ИКТ-формированию у всех участников образовательного процесса (как учащихся, так и учителей) личностных качеств, стиля мышления и поведения, адекватных требованиям жизни в информационном обществе (развитие логического мышления, способности к структурированию знаний, их организации и представлению в знаково-символическом виде, освоение метода моделирования, формирование умения понимать и четко следовать предписаниям, готовности к самоизменению и саморазвитию и др.).

Кроме того, средства обучения и методического обеспечения в курсе математики «Учусь учиться» побуждают школьников и учителей овладевать компьютерными технологиями, поскольку их использование реально помогает сократить время на подготовку уроков, диагностику результатов обучения, а главное — многократно улучшает качество образовательного процесса и его результативность (электронные тренинги для учащихся, электронные сценарии уроков с использованием цифровых средств обучения, электронные средства диагностики результатов обучения и др.)

Итак, система дидактических принципов деятельностного метода обучения, построенная на основе методологической версии системно-деятельностного подхода, позволяет создать при работе по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов информационно-образовательную среду, адекватную реализации единого учебно-воспитательного и здоровьесберегающего процесса деятельностного типа.

Достижение результатов освоения основной образовательной программы ФГОС

Достижение предметных результатов ООП в курсе «Учусь учиться»

Учебное содержание по всем выделенным содержательно-методическим линиям полностью обеспечивает выполнение требований к предметным результатам ФГОС основного общего образования разделов «Математика. Алгебра» предметной области «Математика и информатика», а именно:

1) ***линия моделирования*** направлена на формирование следующих предметных результатов: формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах;

2) ***логическая линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: развитие умений работать с учебным математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) ***числовая линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных ***вычислений***;

4) ***алгебраическая линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

5) ***функциональная линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

6) ***линия анализа*** данных направлена на формирование следующих предметных результатов: овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений.

Достижение личностных результатов ООП в курсе «Учусь учиться»

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования устанавливает следующие требования к личностным результатам образования.

1. Воспитание российской гражданской идентичности: патриотизма, основ культурного наследия народов России и человечества, усвоение гуманистических и демократических ценностных ориентаций, воспитание чувства ответственности.

С этой целью тексты заданий в учебниках погружают ученика в мир российской действительности (имена персонажей текстовых задач, описанные в них ситуации и т.д.), несут в себе гуманистический потенциал созидания и добра.

Разнообразные задания вычислительного и исследовательского характера могут стать поводом для разворачивания внеурочной проектной работы учащихся, направленной на их более глубокое знакомство с основами культурного наследия народов России и человечества.

Для реализации данных проектов можно организовать самостоятельную работу учащихся с информацией: они могут пользоваться справочной и художественной литературой, энциклопедиями, электронными образовательными ресурсами. Таким образом, у учащихся развивается интерес к истории познания, достижениями российской математической школы, воспитывается чувство гордости за свою страну.

Использование технологии и системы дидактических принципов деятельностного метода обучения в ходе образовательного процесса по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов формируют у учащихся демократические ценностные ориентации и адекватные им личностные качества: понимание возможности разных точек зрения, способность к их согласованию на основе выработанных критериев, умение точно выражать свои мысли, аргументировать свою позицию, следовать согласованным правилам и др.

2. Формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений, с учётом устойчивых познавательных интересов, а также на основе формирования уважительного отношения к труду, развития опыта участия в социально значимом труде.

Для развития у учащихся ответственного отношения к учению, готовности и способности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов используется методологически обоснованный механизм «надо» — «хочу» — «могу».

Прежде всего, применение технологии деятельностного метода обучения последовательно и поэтапно формирует у ученика понимание нормы учения (то есть того, «что мне надо делать» как ученику). С этой целью в курсе математики «Учусь учиться» используется норма учебной деятельности, построенная в общей теории деятельности (Г. П. Щедровицкий, О. С. Анисимов и др.) и адаптированная к образовательному процессу для учащихся 5—9 классов.

Одновременно для формирования у учащихся внутренней потребности включения в учебную деятельность («я это хочу») в классе создается психологически комфортная образовательная среда, где ученик не боится высказать свое мнение, где его трудолюбие, старание, ответственное отношение к делу встречает доброжелательную поддержку, где он приобретает позитивный опыт переживания ситуации успеха, а с другой стороны — обеспечивается возможность его развития в собственном темпе на уровне своего возможного максимума («я это могу»).

Технологически это обеспечивается реализацией в учебном процессе по математике деятельностного метода обучения и соответствующей системы дидактических принципов (принципов психологической комфортности, минимакса, вариативности, деятельности, непрерывности).

Кроме того, созданию психологически комфортной образовательной среды способствует содержание заданий, которое подобрано так, чтобы поддерживать у учащихся интерес к занятиям математикой и желание включаться в учебный процесс по математике в зоне своего ближайшего развития.

С этой целью используются следующие педагогические приемы.

1) Включение в учебное содержание заданий, выполнение которых вызывает у учащихся интерес и дает положительный эмоциональный заряд. В 7—9 классах это задания на поиск закономерностей, соревнования, решение занимательных задач и т. д.
2) Многофункциональная целевая направленность заданий, позволяющая в одном задании тренировать достаточно большую группу способностей, что снижает нагрузку на детей и существенно экономит учебное время.
3) Включение в курс разноуровневых заданий, позволяющих создавать ситуацию успеха для учащихся разного уровня подготовки.

Использование перечисленных приемов способствует развитию у учащихся мотивов учебной деятельности и формированию личностного смысла учения. По мере освоения нормы учебной деятельности, понимания и принятия на личностно значимом уровне социальной роли «ученика» внешние мотивы сменяются внутренними и тем самым создаются условия для формирования у них устойчивой учебно-познавательной мотивации и готовности к саморазвитию.

Для формирования у учащихся готовности и способности к построению дальнейшей индивидуальной траектории образования в курсе предлагается значительное число разноуровневых заданий от обязательного для всех минимума до уровня Всероссийских олимпиад школьников. Таким образом, создаются условия для адекватного определения учащимися уровня своей математической подготовки, своих интересов и возможностей, что поможет им осознанно выбрать собственные профессиональные предпочтения.

3. Формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, учитывающего социальное, культурное, языковое, духовное многообразие современного мира.

Механизмом формирования целостного представления о мире (природе — обществе — самом себе) в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов является дидактический принцип целостности, в соответствии с которым в данном курсе раскрывается происхождение математических понятий, их связь с реальными проблемами окружающего мира, место и роль математики в системе знаний.

Этому способствует, прежде всего, включение учащихся на всех уроках в самостоятельную учебную деятельность по конструированию новых понятий и способов действия, что позволяет каждому ученику в собственном опыте пройти путь рождения математических знаний, осознать их необходимость и значимость, связь с жизнью, практикой, другими областями познания.

Для реализации этой цели, с одной стороны, учебное содержание по всем темам курса адаптировано для системной реализации деятельностного метода обучения, а с другой, — в учебное содержание регулярно включаются задачи прикладной направленности, как задачи с житейскими ситуациями, так и задачи, возникающие в других областях знания, например, в биологии, географии, физике, лингвистике.

Подобные задания могут стать началом организации внеурочной проектной работы учащихся (как индивидуальной, так и групповой) с использованием справочной литературы и электронных образовательных ресурсов.

4. Формирование осознанного, уважительного и доброжелательного отношения к иному мнению, готовности и способности вести диалог с другими людьми и достигать в нём взаимопонимания.

Формирование у учащихся осознанного уважительного и доброжелательного отношения к иному мнению в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов технологически обеспечивается системным использованием деятельностного метода обучения. Так, при изучении любой темы курса на этапе пробного учебного действия (2 этап уроков в ТДМ) учащиеся высказывают свои версии ответов, на этапе проектирования нового способа действия и реализации проекта (4—5 этапы уроков в ТДМ) — предлагают свои способы решения возникшей проблемы, выдвигают свои гипотезы. При этом они не знают заранее, кто из них прав, поэтому у них вырабатывается навык осознанного уважительного и доброжелательного отношения к каждой версии, как возможному верному варианту.

Опыт получения согласованного варианта на каждом уроке воспитывает у учащихся готовность и способность вести диалог с другими людьми и достигать в нем взаимопонимания.

5. Освоение социальных норм, правил поведения, ролей и форм социальной жизни в группах и сообществах.

В курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов формируется система норм выполнения учебных действий по математике, которые зафиксированы в форме эталонов к каждому уроку.

Эталоны строят сами учащиеся в ходе собственной учебной деятельности, что развивает у них опыт участия в социально значимом труде и вырабатывает уважительное отношение к труду.

С другой стороны, эталоны представляют собой общую согласованную позицию учащихся о правилах, нормах выполнения математических преобразований, поэтому их можно рассматривать как систему построенных самими учащимися критериев, своеобразный «свод математических законов», которыми они пользуются для обоснования правильности своей позиции, выявления причин отклонения своих действий от установленных ими же самими норм, а также для коррекции, контроля и оценки выполненных учебных действий по математике.

Структурированность математического знания помогает сформировать у учащихся при системном использовании деятельностного метода обучения опыт правового, ответственного поведения, подчинения своих действий общепринятым нормам.

Поскольку изучение математических структур ведет к образованию адекватных им умственных структур, составляющих основу и механизмы мышления и поведения человека вообще (Ж. Пиаже), то овладение инструментарием критериальной оценки выполняемых учебных действий по математике позволяет учащемуся на каждом уроке, при самоконтроле и рефлексии собственных учебных действий на основе эталонов, вырабатывать ответственное отношение к выполнению и самооценке не только математических действий, но и любых действий на основе нравственных и социальных норм, правил поведения, ролей и форм социальной жизни в группах и сообществах как в жизненной практике, так и в любой трудовой деятельности.

6. Развитие морального сознания и компетентности в решении моральных проблем на основе личностного выбора, формирование нравственных чувств и нравственного поведения, осознанного и ответственного отношения к собственным поступкам.

Особенностью решения данных задач в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов является то, что систематическое включение учащихся в учебную деятельность на основе деятельностного метода обучения придает этому процессу более глубокий и личностный характер.

Проблемные ситуации нравственно-этического характера, которые неизбежно возникают у учащихся в совместной учебной деятельности по созданию системы математических знаний, являются своеобразными моделями реальных жизненных проблем, связанных с нормами поведения и нравственности, отношений друг с другом. Таким образом, учитель получает возможность в связи с поставленными в их совместной деятельности, а потому актуальными и личностно значимыми для них ситуациями организовать на уроке или во внеурочной деятельности во второй половине дня осознание и принятие как личной ценности категорий порядочности и правдивости, терпимости и великодушия, вежливости и уважения, помочь им выработать доброжелательность и отзывчивость, культурные способы общения и нравственного поведения.

7. Формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и взрослыми в процессе образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.

С этой целью в данном курсе предусмотрена работа в парах, группах, совместная исследовательская и проектная работа (в том числе, и во внеурочной деятельности), которая строится на основе норм коммуникативного взаимодействия и предполагает, в частности, освоение каждым учеником коммуникативных позиций «автора», «понимающего», «критика», «арбитра».

Реализация деятельностного метода обучения позволяет сформировать у учащихся не только первичный опыт выхода из спорных ситуаций, но и знание общего способа действий в ситуации конфликта, а также опыт успешного и осознанного применения этого способа, в результате которого требуемые умения вырабатываются системно и надежно.

Так, на уроках открытия нового знания учащиеся в ходе построения нового способа действий по математике всегда сталкиваются с ситуацией разных мнений. При этом они усваивают, что самый короткий путь согласования позиций заключается в том, чтобы понять причину разногласия, а затем найти и реализовать способ устранения этой причины на основе согласованных способов действий.

Этот путь они проходят сначала под руководством учителя, не осознавая его, затем обобщают свой опыт, и после этого сознательно применяют правила, выработанные в своей учебной деятельности. В процессе работы в парах и группах они тренируются в самостоятельном применении усвоенных правил разрешения конфликтных ситуаций.

Учебное содержание по алгебре, сформулированное в виде четких и однозначных правил и алгоритмов, облегчает освоение способов грамотного обоснования своей позиции, разрешения проблемных ситуаций и тем самым помогает учащимся переносить изученные способы действий в жизненную практику.

8. Формирование ценности здорового образа жизни, усвоение правил индивидуального и коллективного безопасного поведения в чрезвычайных ситуациях.

На уроках математики по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов учащиеся приобретают системный опыт преодоления затруднений на основе метода рефлексивной самоорганизации, осваивают и многократно успешно применяют алгоритмы эффективного разрешения проблемных ситуаций (на примере математических проблем). Благодаря этому у них формируется умение воспринимать ситуации затруднения не как повод для тревоги и огорчения, а как сигнал для активного поиска способов и средств их преодоления. Развитие волевой саморегуляции, способности осуществлять верный выбор стратегии поведения и преодоления возникших трудностей.

Содержание и методики курса алгебры «Учусь учиться» предполагают системное освоение учащимися всего комплекса организационно-рефлексивных действий. Таким образом, данный курс становится площадкой, на которой у учащихся в процессе изучения математики формируются адаптационные механизмы сохранения и поддержки своего здоровья, продуктивного поведения и действия в любых проблемных ситуациях, требующих изменения себя и окружающей действительности.

9. Развитие опыта экологически ориентированной рефлексивно-оценочной и практической деятельности в жизненных ситуациях.

Развитие опыта рефлексивно-оценочной деятельности в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов осуществляется на уроках рефлексии и обучающего контроля знаний, а также на этапах самоконтроля и рефлексии учебной деятельности уроков всех типов. Опыт самопроверки и критериальной самооценки своей работы и учебной деятельности в целом, выявление и коррекции своих ошибок вырабатывают у учащихся ответственное отношение к собственным действиям и поступкам, что и составляет основу современного экологического мышления и рефлексивно-оценочной и практической деятельности в жизненных ситуациях.

11. Развитие эстетического сознания, освоение творческой деятельности эстетического характера.

Формирование у учащихся эстетического сознания средствами предмета математики в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов основано на результатах исследований эстетической привлекательности математических объектов, из которых следует, что эстетические чувства у ученика при изучении математики возникают через восприятие гармонии (например, стройности и убедительности математических рассуждений) и такие характеристики математического знания, как неожиданно простое и наглядное решение сложной задачи, универсальность математического языка, выражение с его помощью взаимосвязи внешне различных явлений, упорядоченность и структурированность математических объектов, их внутреннее единство.

Дидактической основой формирования мотивации к творческому труду в данном курсе является принцип творчества, который обеспечивается, прежде всего, возможностью для каждого ученика на уроках открытия нового знания включаться в процесс создания новых способов действий. Помимо этого, учащимся систематически предлагаются задания творческого характера, где им требуется проявить активность, создать что-то новое.

В курсе практикуются также творческие домашние задания, где учащимся предлагается найти и представить некоторую информацию, придумать свои примеры, задачи или уравнения, конкретизирующие изученный в классе новый способ действий, либо создать собственный проект.

Таким образом, в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов у учащихся развивается эстетическое сознание и формируются опыт творческой деятельности с учетом специфики предмета математики.

Достижение метапредметных результатов ООП в курсе «Учусь учиться»

Возможность достижения метапредметных результатов образования, определенных ФГОС, обеспечивается в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов в процессе формирования познавательных, регулятивных и коммуникативных УУД на основе технологии и системы дидактических принципов детельностного метода обучения и соответствующих им содержания, методик и методического обеспечения данного курса.

Вначале на уроках математики в ТДМ учащиеся приобретают первичный опыт выполнения осваиваемого УУД. Затем организуется мотивация учащихся к его самостоятельному выполнению и знакомство с соответствующей нормой (правилом, алгоритмом) выполнения данного УУД (или структуры учебной деятельности в целом). После этого учащиеся уже осознанно включают изученное УУД в практику обучения на уроках и во внеурочной деятельности при организации процессов самовоспитания и саморазвития. В завершение, учащимся предлагается самоконтроль изучаемых УУД и обучающий контроль.

Таким образом, формирование каждого УУД, входящего в структуру учебной деятельности, проходит через все необходимые, методологически обоснованные этапы:

1) опыт действия и мотивация;
2) знание способа действия;
3) тренинг, самоконтроль и коррекция;
4) контроль.

Изученные УУД включаются в практику каждого урока, и у учащихся постепенно и поэтапно вырабатывается весь комплекс метапредметных умений в соответствии с требованиями ФГОС.

В непрерывном курсе математики «Учусь учиться» при формировании каждого УУД часть этого пути учащиеся проходят в 1—4 классах начальной школы, затем последовательно — в курсе математики 5—6 классах, и завершают — в курсе алгебры 7—9 классов.

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования устанавливает следующие требования к метапредметным результатам образования.

1. Умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

На начальных этапах обучения по курсу математики «Учусь учиться» учитель на этапах 3 («Выявление места и причины затруднения») и 4 («Построение проекта выхода из затруднения») уроков в ТДМ с помощью подводящего диалога помогает учащимся осознать недостаточность имеющихся у них знаний по математике, а затем предлагает им самим поставить цель своей учебной деятельности, корректируя и уточняя их версии пока без обращения к общему способу целеполагания.

В курсе алгебры 7—9 классов организуется мотивация учащихся к освоению умения самостоятельно ставить перед собой учебную цель. Обобщая имеющийся у них опыт, учащиеся под руководством учителя фиксируют содержание понятия цели и алгоритм постановки цели учебной деятельности, а затем на следующих этапах обучения делают это самостоятельно, сопоставляя свои действия с эталоном и, при необходимости, корректируя их. В завершение учащимся предлагается самоконтроль и обучающий контроль умения выполнять данное УУД.

Таким образом, формирование готовности к целеполаганию проходит через все указанные выше необходимые этапы формирования УУД. В результате учащиеся овладевают способностью самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

2. Умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач.

Технологические требования к 4 этапу урока в ТДМ («Построение проекта выхода из затруднения») состоят в том, что учащиеся в коммуникативной форме обдумывают проект своих будущих учебных действий:

- ставят цель;
- согласовывают тему урока;
- выбирают способ;
- строят план достижения цели;
- определяют средства, ресурсы и сроки.

Благодаря этому, появляется возможность организовать надежное формирование у учащихся указанных УУД посредством проведения их описанным выше путем в 5—9 классах: опыт — знание способа — применение, самоконтроль и коррекция — контроль. Важно и то, при этом учащиеся овладевают коммуникативными умениями и способностью оценивать время, средства и ресурсы для своих планов, а на следующем этапе урока — доводить свои планы до исполнения.

3. Умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

В соответствии с общим подходом, принятым в данном курсе, формирование умения соотносить свои действия с планируемыми результатами и контролировать свою деятельность в процессе достижения результата осуществляется на 7 этапе уроков в ТДМ («Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону»). При проведении данного этапа учащиеся самостоятельно выполняют задания нового типа, осуществляют их самопроверку, пошагово сравнивая с эталоном, выявляют и корректируют возможные ошибки, определяют способы действий, которые вызывают у них затруднения, строят планы по их доработке. Этому же посвящены и уроки рефлексии, но на этих уроках учащиеся не просто выявляют свои проблемы, а уже непосредственно выполняют коррекцию своих действий и вырабатывают соответствующие умения.

Как и при формировании всех универсальных учебных действий в данном курсе учащиеся вначале приобретают первичный опыт выполнения изучаемых УУД, затем знакомятся с нормами их выполнения, сформулированными в виде правил и алгоритмов, и после этого осознанно выполняют эти универсальные действия на каждом уроке по математике курса «Учусь учиться».

Адаптационные механизмы поведения, способность к быстрому реагированию на изменяющиеся условия жизни и деятельности вырабатываются у учащихся посредством реализации в образовательном процессе дидактических принципов вариативности и творчества, освоения ими способов решения проблем творческого и поискового характера.

Творческие способности проявляются в стремлении открыть общую закономерность, лежащую в основе каждого отдельного решения (Д. Б. Богоявленская). Следовательно, системное приобретение опыта построения общего способа математических действий, освоение метода рефлексивной самоорганизации, знакомство с общенаучными методами решения исследовательских проблем (метод перебора, метод проб и ошибок и др.) дает учащимся инструмент эффективного поведения в нестандартной ситуации.

4. Умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности ее решения.

На 9 этапе уроков в ТДМ («Рефлексия учебной деятельности на уроке») подобным же образом формируется умение вырабатывать самооценку своей учебной деятельности. На данном этапе фиксируется новое содержание, изученное на уроке, организуется процесс соотнесения целей и результатов, собственной учебной деятельности и изученного алгоритма ее выполнения и делается вывод о ее эффективности /неэффективности.

Оценивать свои возможности решения учебных задач школьники учатся в процессе выбора собственного уровня работы. В учебниках выделены обязательные и необязательные задания, принцип вариативности реализуется, в частности, посредством составления самими учащимися некоторой части классной и домашней работы путем самостоятельного выбора «подходящих» для них по каким-то признакам заданий. Таким образом, они систематически приобретают опыт оценки своих возможностей решения учебных задач.

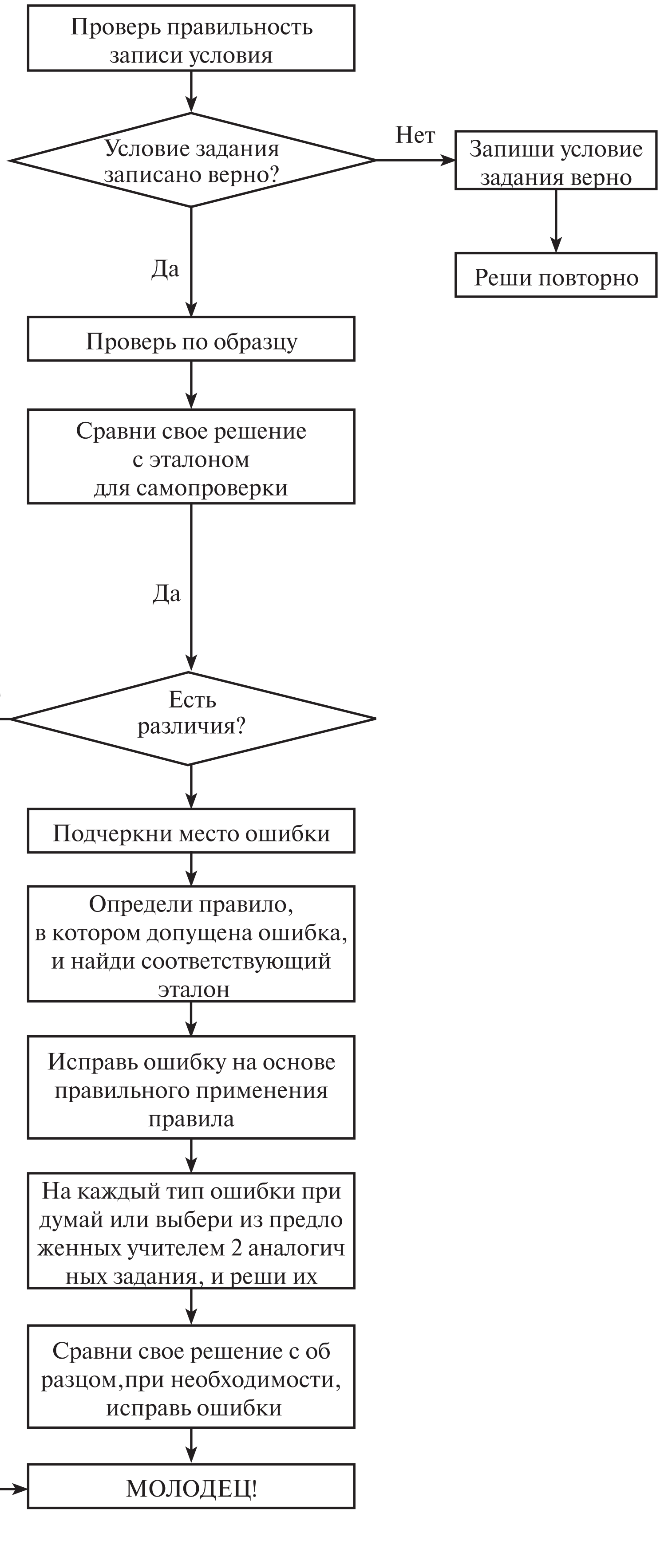
5. Владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности.

Формирование основ самоконтроля и самооценки, самостоятельного принятия решений и осознанного выбора своей образовательной траектории формируется в курсе математики «Учусь учиться» в соответствии с принятым общим подходом на 7 этапе уроков в ТДМ («Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону») и на уроках рефлексии.

По мере освоения метода рефлексивной самоорганизации общие алгоритмы УУД, в том числе и действий самоконтроля и самооценки, совершенствуются и уточняются. Так, на первых этапах обучения в начальной школе для самоконтроля и коррекции своих ошибок учащиеся применяют простейший трехшаговый алгоритм.

1. Определяю, какое правило я знаю
2. Повторяю правило
3. Применяю правило

К 4 классу после изучения тем «Алгоритм», «Программа действий» они строят вариант алгоритма, который более подробно описывает последовательность действий при самоконтроле.


Проверь правильность записи условия
Условие задания записано верно?
Нет
Запиши условие задания верно
Реши повторно
Да
Проверь по образцу
Сравни свое решение с эталоном для самопроверки
Да
Нет
Есть различия?
Подчеркни место ошибки
Определи правило, в котором допущена ошибка, и найди соответствующий эталон
Исправь ошибку на основе правильного применения правила
На каждый тип ошибки при думай или выбери из предло женных учителем 2 аналогич ных задания, и реши их
Сравни свое решение с об разцом,при необходимости, исправь ошибки
МОЛОДЕЦ!

В 5 классе данный вариант алгоритма еще раз уточняется, и учащиеся овладевают общим способом самоконтроля и коррекции своих действий, который они используют в дальнейшем в 7—9 классах и средней школе.

Кроме того, в методическом аппарате учебников 1—9 классов имеется система самостоятельных и контрольных работ (в учебнике 8 — 9 классов с этой целью разработаны экспресс-тесты), которые позволяют учащимся после изучения каждой темы и каждого раздела курса сделать вывод о достижении / недостижении поставленных целей и задач. Систематическое использование эталонов, то есть согласованных в классе норм математической деятельности, которые учащиеся сами строят в ходе уроков, помогает им правильно определять, что именно они усвоили или не усвоили (то есть причины своего успеха / неуспеха), и на этой основе осуществлять осознанный выбор траектории своего саморазвития в учебной и познавательной деятельностях.

Выработка отношения к ошибке как рабочей ситуации, требующей коррекционных действий, наряду с освоением учащимися эффективных инструментов коррекции собственных ошибок (метод рефлексивной самоорганизации, алгоритм исправления ошибок) формируют у учащихся способность конструктивно действовать даже в ситуации неуспеха.

Аналогичным образом формируются основы самооценки собственной деятельности на основе 9 этапа уроков в ТДМ («Рефлексия учебной деятельности на уроке»).

6. Умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Логические действия являются основными видами учебных действий при выполнении практически всех заданий курса математики «Учусь учиться». Решая задачи и примеры, уравнения и неравенства, устанавливая и продолжая закономерности, моделируя объекты и процессы, строя диаграммы и графики, преобразовывая фигуры, учащиеся выполняют действия анализа и синтеза, сравнения и обобщения, классификации и аналогии, устанавливают причинно-следственные связи, подводят под понятия, строят логические рассуждения, обосновывают выполняемые ими операции.

Задания учебников, начиная с самого 1 класса, подобраны так, чтобы систематически предоставлять учащимся возможность тренировать весь комплекс логических операций и необходимость устанавливать взаимосвязи, логически обосновывать свои действия. В формулировках заданий часто используются обороты «Проанализируй...», «Сравни...», «Что общего?», «Выполни задание по образцу», «Сделай вывод», «Обоснуй свой ответ», «Разбей на части...» и т.д. Но даже если этих оборотов нет, то все равно решение практически любого задания курса математики требует от учащихся построения цепочек логических рассуждений.

В 1—6 классах в рамках логической линии учащиеся изучают темы «Высказывания», «Виды высказываний», «Определение», «Логическое следование», «Обратное утверждение», «Отрицание высказываний» и др. В 7—9 классах изучаются сложные высказывания с союзами «и» и «или».

На этих уроках учащиеся не просто приобретают опыт выполнения логических действий, а фиксируют эти действия в форме эталонов. Затем изученные логические понятия используются при изучении всех тем курса. Таким образом, создаются условия не только для надёжного усвоения самих этих понятий и формирования умения их грамотного использования, но и для их применения в жизни и практической деятельности, а также для более глубокого и осознанного усвоения собственно математического содержания курса.

7. Умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

Математический язык представляет собой знаки и символы, описывающие количественные отношения и пространственные формы окружающего мира. Поэтому знаково-символические средства математического языка — цифры и буквы, знаки сравнения и арифметических действий, математические выражения, геометрические фигуры, числовой луч, диаграммы и графики и др. — систематически используются на уроках математики для представления информации, моделирования изучаемых объектов и процессов окружающего мира, решения учебных и практических задач.

Кроме того, в курсе математики «Учусь учиться» широко представлены предметные и графические модели самих математических объектов и операций — натуральных, дробных, положительных и отрицательных чисел, арифметических действий, функциональных зависимостей между величинами, уравнений и неравенств и др. Учащиеся сами строят модели этих объектов, постепенно осознавая суть математического метода исследования реального мира — «умение называть разные вещи одним именем» (А. Пуанкаре).

Начиная с самых первых уроков знакомства с текстовыми задачами, учащиеся систематически работают с их материализованными моделями (схематическими рисунками, схемами, таблицами), наглядно представляющими существенные характеристики исследуемых объектов — количественные и пространственные отношения между ними, взаимосвязи между объектом и его частями и др. Дети учатся читать и строить эти модели, используют их для анализа и поиска решения текстовых задач, интерпретации полученных результатов, выявления общих способов действия во внешне различных ситуациях. Благодаря этому, они не только глубже усваивают учебное содержание по математике, но и овладевают умением использовать знаково-символические средства представления информации для создания моделей изучаемых объектов и процессов.

При этом на доступном для учащихся уровне перед ними раскрываются все три основных этапа математического моделирования:

1) этап *математизации действительности*, то есть построения математической модели некоторого фрагмента действительности;
2) этап *изучения математической модели,* то есть построения математической теории, описывающей свойства построенной модели;
3) этап *приложения полученных результатов* к реальному миру.

Так, при решении текстовой задачи ученик читает и анализирует ее, переводит текст на знаково-символический язык — строит схемы и схематические рисунки, отражающие числовые и пространственные отношения между объектами, процессами, целым объектом и его частями, затем работает с моделью, получает результат и соотносит его с данными в исходном тексте задачи.

Этот путь учащиеся проходят и при построении математических понятий и способов действий. На всех этапах обучения с 1 по 9 класс предметные и графические модели помогают раскрыть перед учащимися недостаточность их знаний и необходимость построения некоторого нового понятия или алгоритма. С другой стороны, модели позволяют организовать процесс его практического построения самими детьми, то есть пройти первый этап математического моделирования.

На втором этапе — этапе изучения построенной математической модели, учащиеся выявляют свойства изучаемых математических объектов и на этапе приложения полученных результатов с их помощью решают актуальные практические задачи (например, строят приемы рациональных вычислений, применяют свои знания для решения текстовых задач и т.д.).

Таким образом, они не просто осваивают знаково-символические средства представления информации для создания моделей изучаемых объектов и процессов, но и приобретают начальные представления об общенаучном методе исследования реального мира — математическом моделировании.

8. Смысловое чтение.

В курсе математики «Учусь учиться» формирование у учащихся навыков смыслового чтения текстов осуществляется при работе с тестовыми задачами, текстами учебника, справочной литературой и Интернет-источниками. В качестве научного инструмента при этом используется метод работы с текстами (МРТ), разработанный в методологической версии теории деятельности (О. С. Анисимов).

На первом этапе учащиеся овладевают навыками понимания текстов задач с опорой на наглядные материальные и материализованные модели (схематические рисунки, схемы, таблицы, числовые и буквенные выражения). При этом используются задачи-ловушки (с неполными данными, лишними данными, нереальными условиями), задачи в косвенной форме, задачи, требующие от детей сопоставления текстов, обобщения, самостоятельной формулировки вопросов, выбора возможных вариантов решения, задачи, имеющие внешне различные сюжеты, но одинаковые математические структуры, построение моделей текстовых задач, составление задач по схемам и выражениям и т. д.

Начиная с 1 класса, проводится системная работа по обучению детей анализу задачи на основе заданного общего алгоритма. Эта работа продолжается в основной школе и к 6 классу позволяет сформировать у большинства детей способность провести самостоятельный анализ любой текстовой задачи.

В 7—9 классе сформированные УУД системно применяются на уроках алгебры, отрабатываются и закрепляются. При этом акцент делается на развитие у учащихся самостоятельности в освоении учебного содержания. Учебные тексты написаны таким образом, чтобы учащий (при желании) был способен самостоятельно осознать смысл нового шага и предложенные способы действий. Это достигается благодаря структуре теоретического материала, отражающей метод рефлексивной самоорганизации. Задачный раздел связан с теоретическим посредством ссылок типа: «Сопоставь свое предположение с правилом на стр. 7», «С помощью какого утверждения на стр. 34 можно обосновать полученный вариант?» и пр.

Такая структура учебника помогает учащимся самостоятельно работать с теоретическим материалом, что важно для последующего обучения в 10—11 классах и дальнейшего профессионального саморазвития каждого ученика.

9. Умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками, работать индивидуально и в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов, формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение.

Структура уроков в технологии деятельностного метода (ТДМ) включает в себя этапы, предполагающие получение разных версий ответов как естественный ход событий. Так, на этапе выполнения пробного учебного действия (этап 2) каждый учащийся получает свою версию ответа, и поскольку новый способ действий еще не изучался, то каждый из них сталкивается с затруднением, но у всех оно разное: кто-то вообще не знает, с чего начать и не получил никакого ответа; у других ответы есть, но они оказались неверными; а кто-то получил верный ответ, но не знает, как его обосновать (ведь способ действий еще не изучался).

Поэтому всегда возникают разные версии, мнения, которые учащиеся приучаются внимательно и уважительно выслушивать и обсуждать. Аналогичным образом, гипотезы, которые выдвигают учащиеся на этапе проектирования (этап 4), тоже разные, но при этом каждая из них может помочь найти верный результат.

Таким образом, образовательная среда, которая создается при работе в ТДМ на рассмотренных и других этапах урока, формирует у учащихся готовность воспринимать различные точки зрения, вести диалог, согласовывать позиции с учетом всех высказанных мнений, находить общее решение, формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение.

Необходимость на уроках открытия нового знания совместно решать общую задачу предполагает системное использование в обучении диалоговых форм общения под руководством учителя, парной и групповой форм работы, в ходе которых у учащихся формируется умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками. Данные метапредметные умения формируются на 1—6 и 8—9 этапах уроков в ТДМ, кроме этапа 7 («Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону»), где отрабатываются индивидуальные формы работы.

В ходе совместной деятельности учащихся в группах и парах используется распределение ролей на основе общих правил коммуникативного взаимодействия. При этом основным мотивом для согласованных действий и конструктивного разрешения конфликтных ситуаций посредством учета интересов каждого является необходимость получения и представления общего результата: те, кто не сумел договориться и правильно организовать свою работу, — проигрывают.

10. Умение осознанно использовать речевые средства в соответствии с задачей коммуникации для выражения своих мыслей, планирования и регуляции своей деятельности, владение устной и письменной речью, монологической контекстной речью.

Технологической основой эффективного достижения указанного результата в курсе математики «Учусь учиться» является использование правил коммуникативного взаимодействия общей теории деятельности (О. С. Анисимов) и поэтапная теория формирования умственных действий (П. Я. Гальперин).

Учащиеся имеют возможность поэтапно овладевать речевыми средствами для решения коммуникативных и познавательных задач на разных уровнях:

1) выражение в речи своих учебных действий и их результатов по заданному алгоритму;
2) выражение в речи своих учебных действий и их результатов по известному алгоритму в типовых ситуациях;
3) выражение в речи своих учебных действий и их результатов в поисковых ситуациях по заданному общему плану действий;
4) выражение в речи своих учебных действий и их результатов в ситуациях творческого поиска.

Первый вид речевого высказывания осуществляется на 6 этапе урока в ТДМ («Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи»), где каждый учащийся выполняет комментирование (фронтально, при работе в парах, в группах) типовых заданий на способ действий, построенный на данном уроке самими учащимися под руководством учителя.

Второй и третий виды речевого высказывания осуществляются на 8 этапе урока открытия нового знания в ТДМ («Включение в систему знаний и повторение») и на уроках рефлексии. Учащиеся систематически используют алгоритмы, построенные на предыдущих уроках, для комментирования решения примеров, уравнений, простых и составных задач в типовых и поисковых ситуациях (когда алгоритмы известны, но не заданы непосредственно).

Четвертый вид речевого высказывания осуществляется на 3—5 этапах урока открытия нового знания в ТДМ («Выявление места и причины затруднения», «Построение и реализация проекта»), а также на уроках рефлексии и внеклассной работе при решении творческих задач и в коллективной и индивидуальной проектной работе, где предполагается также активное использование средств ИКТ. Здесь же предусмотрена подготовка и проведение учащимися презентаций своих творческих работ, что способствует развитию не только речевых средств, но и познавательных и коммуникативных УУД.

11. Формирование и развитие ИКТ-компетенций.

При работе по курсу математики «Учусь учиться» на всех возрастных этапах с 1 по 9 класс учащиеся овладевают широким спектром первичных навыков работы с информацией: они учатся анализировать, сравнивать и обобщать информацию, осуществлять ее синтез и классификацию, вести запись, осуществлять поиск необходимой информации, выделять и фиксировать информацию, систематизировать ее, интерпретировать, преобразовывать, передавать и хранить, представлять информацию и создавать новую в соответствии с поставленной учебной целью.

Формирование умений осуществлять поиск необходимой информации и работать с ней реализуется в учебниках данного курса по нескольким направлениям:

- целенаправленный поиск конкретной информации (знаний, способов действий) для решения учебных задач, презентаций своих творческих работ и т. д.;
- отсылки по текстам учебников, например, к предыдущим текстам и заданиям, справочным материалам, энциклопедиям и т. д.;
- поиск информации в различных источниках (в книгах, журналах, справочниках и энциклопедиях, в сети Интернет, в беседах со взрослыми и др.) для выполнения проектных работ и последующая работа с ней: анализ и систематизация собранной информации, представление полученной информации в нужном виде (в виде текстов для школьной газеты или буклета, набранных с помощью клавиатуры компьютера, в виде рисунков, таблиц, презентаций, диаграмм и т. д.).

Уже в начальной школе учащиеся работают с таблицами, схемами, множествами, строят диаграммы Эйлера—Венна, находят подмножества, объединение и пересечение множеств, выполняют их классификацию по заданным свойствам, строят круговые и столбчатые диаграммы, графики движения. Эта работа системно продолжается в основной школе с использованием координат на плоскости, формул и графиков функций, что дает новые возможности для представления и интерпретации полученных данных.

На всех уроках математики школьники овладевают навыком фиксирования информации средствами математического языка — выражений и формул, графиков и схем. Они самостоятельно строят алгоритмы новых способов действий (линейные, разветвленные, циклические) и фиксируют их с помощью блок-схем. Работая с текстовыми задачами, они учатся выделять существенную информацию и представлять ее в форме схематических рисунков, графических схем, таблиц. Затем они анализируют полученную таким образом информацию и на этой основе решают поставленные познавательные задачи.

Разработанная в данном курсе система эталонов позволяет сформировать у учащихся навык целенаправленного поиска в известном источнике нормативно заданной информации, нужной для решения задач и обоснования правильности своих действий. Этому же служат приведенные в учебнике правила, формулы, образцы решения задач и примеров.

При подготовке проектов во внеурочной индивидуальной и групповой работе учащиеся осуществляют поиск информации в ситуации, когда источник информации не известен. При этом они используют справочную литературу и Интернет-ресурсы, подготовку презентаций с использованием современных технологических средств (фотографирование, сканирование, презентации в Power Point и т. д.).

12. Формирование и развитие экологического мышления, умение применять его в познавательной, коммуникативной, социальной практике.

В процессе изучения курса математики «Учусь учиться» для 1—9 классов в соответствии с принципом целостного представления о мире, входящего в дидактическую систему деятельностного метода обучения, у учащихся формируется современная научная картина мира. Изучаемые математические понятия рассматриваются в их собственном закономерном развитии, в многообразии отношений с другими объектами, понятиями, явлениями и процессами, что формирует представление о математике как общей понятийной базе различных областей знания.

Таким образом, математическое знание позволяет раскрыть глубинную связь между явлениями, внешне никак не связанными друг с другом. С другой стороны, деятельностный метод обучения помогает сформировать у учащихся личностное отношение к изучаемым знаниям, неравнодушное, ответственное отношение к результатам своей деятельности.

Благодаря этому, средствами математического образования удается внести существенный вклад в формирование базового компонента экологического мышления и экологического воспитания — осознания глубинной взаимосвязи природы, общества, человека, их влияния и зависимости друг от друга, а также воспитания у учащихся чувства ответственности за свои поступки.

Отметим, что многие личностные и метапредметные результаты формируются в к***урсе алгебры опосредованно: при выполнении многих заданий на расшифровку*** предлагаются высказывания и слова, которые могут послужить поводом для дискуссии на тему отношений между людьми, патриотизма, моральных проблем, отношения к учебе.

Так, например, в 8 классе при нахождении набольшего и наименьшего значения квадратного трехчлена учащиеся выстраивают соответствующие им буквы по возрастанию (убыванию) и получают понятия: «искренность» и «бескорыстие». Им предлагается ответить на вопрос, связаны ли эти понятия с понятием «дружба».

В 9 классе для уточнения представления о приближенных вычислениях используется содержание, отражающее экологические проблемы нашей планеты: «Прочитайте следующие предложения:

а) В течение XX века численность населения мира выросла от 1,65 до 6 миллиардов.

б) Несмотря на огромную роль лесов, каждую минуту на нашей планете вырубается от 14 до 20 га леса.

в) С начала XVII по конец XX в. с лица Земли исчезло 68 видов млекопитающих, 130 видов птиц, 28 видов рептилий, 6 видов рыбы и 6 видов амфибий.

Можно ли считать указанные числа точными значениями данных величин. Поясните свой ответ. Как называют такие данные?»

Подобная работа проводится в курсе «Учусь учиться» систематически.

ПРИМЕРЫ СЦЕНАРИЕВ УРОКОВ [4]

Тип урока: ОНЗ[5]
Тема: «Требование достаточной полноты к математической модели»
Основные цели:
1) сформировать понятие о достаточной полноте математической модели;
2) уточнить алгоритм решения задач методом математического моделирования;
3) тренировать умение применять новые шаги алгоритма для решения задач;
4) повторить общенаучные методы работы с математической моделью.
Оборудование.
Демонстрационный материал:
1) алгоритм решения задач методом математического моделирования:

I. Построение математической модели.

1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6) Установить взаимосвязи между величинами.
7) Составить уравнение и обосновать его.
8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.
9) Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.

10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод

11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

2) пробное задание:

Задача № 17.
Построй такую математическую модель к задаче, чтобы она удовлетворяла требованию достаточной полноты.

3) план проекта выхода из затруднения:

1. Узнать по учебнику, в чем заключается требование достаточной полноты математической модели.
2. На основе этого требования построить математическую модель, удовлетворяющую данному требованию.
3. Внести изменения в этап построения математической модели алгоритма, который описывает решение задач методом математического моделирования.

---

[4] Уроки посвящены изучению главы 1 учебника 7 класса
[5] Урок открытия нового знания

4) требование достаточной полноты математической модели:

Математическая модель удовлетворяет **требованию достаточной полноты**, если она содержит все существенные для решения задачи требования, которые следуют как из условия задачи, так и из свойств исследуемых объектов, которые могут и не описываться в явном виде.

5) уточненный алгоритм решения задач методом математического моделирования:

I. Построение математической модели.

1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6) Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта).
7) Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.
8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением.
9) Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.

10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод

11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

6) подготовительное задание на этап включения в систему знаний:

Переведи на русский язык:

1) $x = y$;	4) $x > 3y$;
2) $x > y$;	5) $x = y + 3$;
3) $x = 3y$;	6) $x > y + 3$.

7) алгоритм применения метода перебора:

1. Проанализировать неравенство и найти множество его возможных решений.
2. Проверить, можно ли сократить количество элементов данного множества.
3. Проверить для каждого из элементов составленного множества, является ли он решение данного неравенства.
4. Записать ответ, выписав все найденные решения.

8) вопросы для этапа рефлексии

1. Что нового вы сегодня узнали?
2. Какую цель вы ставили перед собой?
3. Вы достигли поставленной цели?
4. Какие знания вы использовали при достижении цели?
5. Как вы открывали новые знания?
6. Успешной была ваша работа на уроке?

Раздаточный материал:

1) подробный образец выполнения заданий из домашней работы:

№ 2 (б)

$5(x-3)-2x = x+5, x \in N \rightarrow \boxed{3x - ?}$

$5x-15-2x = x+5 \Leftrightarrow x = 15+5 \Leftrightarrow 2\Leftrightarrow x = 20 \Leftrightarrow x = 10,\ 10 \in N$

$3 \cdot 10 = 30$ (я.) — удовл. условию задачи

Ответ: нужно взять 30 яиц для приготовления трех пирогов.

№ 11 (б)

Пусть x чел. — первоначальное количество людей в вагоне. $x \in N$. После того, как из него вышли 9 человек, а вошли 17, в вагоне стало $x-9+17$ чел., что по условию в 1,5 раза больше, чем x.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$x-9+17 = 1{,}5x, x \in N \rightarrow \boxed{1{,}5\,x\ - ?}$

Все взаимосвязи, заданные в условии задачи, описаны данным уравнением.

$x+8 = 1{,}5x \Leftrightarrow 0{,}5\,x = 8 \Leftrightarrow x = 16,\ 16 \in N$

$1{,}5 \cdot 16 = 24$ (чел.) — удовл. условию задачи

Ответ: стало 24 человека.

№ 5 (б)

Пусть x и y — искомые числа, $x \in N, y \in N$, т.к. в условии говорится, что числа натуральные. По условию $x+y=28$. Обозначим неполные частные соответствующих чисел a и b. Тогда по формуле деления с остатком имеем $x = 8a+5$, $y = 8b+7$, где $a, b \in N$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомые величины:

$$\begin{cases} x+y=28, x \in N, y \in N \\ x = 8a+5, \text{a} \in N \\ y = 8b+7, b \in N \end{cases} \qquad \boxed{x, y - ?}$$

Все взаимосвязи, заданные в условии задачи, описаны соответствующими уравнениями.

$(8a+5)+(8b+7) = 28;$

$8(a+\text{b}) = 16;$

$a+b = 2;$

$a = b = 1;$ (т. к. $a, b \in N$)

$x = 8+5 = 13;$

$y = 8+7 = 15;$

$13 \in N,\ 15 \in N$

Ответ: 13 и 15.

№ 14

–31,2 — **Т**; –21,6 — **О**; –15,2 — **П**; –10,2 — **О**; –5,7 — **Л**; –3,9 — **О**; 20 — Г; 22,3 — **И**; 23,7 — **Я**.

1. **Выбрать** из двух данных шагов алгоритма новый. 2. Указанный для вашей группы новый шаг алгоритма проиллюстрировать примером из домашней работы.
Шаги алгоритма решения задачи методом математического моделирования. Для группы №

I.	Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины. Установить взаимосвязи между величинами.
II.	Составить уравнение и обосновать его. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением
III.	Зафиксировать искомую величину. Внимательно прочитать задачу.
IV.	Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины. Определить, какие величины известны, и какие надо найти.
V.	Проверить соответствие единиц измерения величин. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением
VI.	Зафиксировать искомую величину. Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.

2) задание группам на этапе актуализации знаний:

3) карточка для работы в группах на этапе реализации проекта:

1. Какое уравнение явно задано в условии задачи? 2. Какой объект моделируется в задаче? 3. Какое неравенство следует из свойств моделируемого объекта (это условие в задаче явно не указано).

4) эталон для самопроверки самостоятельной работы:

	1. Внимательно прочитать задачу.
Известно, что величины углов треугольника это последовательные натуральные числа. Нужно найти величины углов треугольника.	**2. Определить, какие величины известны, и какие надо найти.**
	3. Проверить соответствие единиц измерения величин.

Пусть $x°$ — величина первого угла.	**4. Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.**
$x \in N,\ x < 180$	**5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.**
По условию величины углов последовательные числа, тогда 2-ой угол равен $x + 1°$, а 3-ий равен $x + 2°$. По свойству углов любого треугольника $x + (x + 1) + (x + 2)$ равно 180°. Составим математическую модель: $\begin{cases} x \in N,\ x < 180 \\ x + (x + 1) + (x + 2) = 180 \end{cases}$	**6. Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта)** **7. Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.**
Каждый элемент условия задачи (и заданный неявно) описан соответствующим соотношением.	**8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.**
$\boxed{\begin{array}{l} x = ? \\ x + 1 = ? \\ x + 2 = ? \end{array}}$	**9.Зафиксировать искомую величину.**

Ход урока

1. Мотивация к учебной деятельности

Цель:

1) включение учащихся в учебную деятельность;
2) организовать определение типа урока;
3) организовать деятельность учащихся по установке тематических рамок: математическое моделирование;
4) создать условия для возникновения у ученика внутренней потребности включения в учебную деятельность.

Организация учебного процесса на этапе 1:

— Здравствуйте, ребята. Рада вас приветствовать на уроке алгебры. Вот вы уже, какие взрослые: «доросли» до алгебры. Есть желание поработать на новом предмете?

— Какой темой вы занимались на прошлом уроке? (Математическое моделирование.)

— Сегодня вы продолжите работать над этой темой и узнаете новое о математической модели задачи. По какому плану вы будете работать на уроке?

2. Самостоятельная деятельность по известной норме и организация учебного затруднения

Цель:

1) организовать самостоятельное воспроизведение способов действий, достаточных для построения нового способа действий;
2) организовать приведение примеров на воспроизведённые способы действий;
3) зафиксировать воспроизведённые способы действий в речи;
4) зафиксировать воспроизведённые способы действий в знаках (эталоны);
5) организовать актуализацию мыслительных операций, достаточных для построения нового знания: анализ, сравнение, обобщение;
6) организовать обобщение актуализированных способов действий;

7) организовать представление спектра заданий, требующих использование нового способа действия;
8) организовать анализ пробного задания и возможности его выполнения;
9) организовать фиксацию возможных затруднений учащимися.

Организация учебного процесса на этапе 2:

Каждой группе даётся подробный образец выполнения №№ 2; 11; 5; 14 из домашней работы (Р—1).

Задание группам: провести самопроверку заданий из домашней работы, зафиксировать места затруднений, исправить ошибки.

На работу отводится 2 минуты. Организаторы групп проговаривают места и причины затруднения, которые возникли у членов группы (если затруднения были).

После чего группам выдаются карточки (Р—2), в соответствии с которыми продолжается работа в группах.

Возможный вариант выполнения задания (отвечают представители первых трех групп, остальные группы, у которых тот же новый шаг проверяют и дополняют ответ, могут привести пример из другой задачи домашнего задания):

I. (IV.) Новый шаг алгоритма — **Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины** — можно проиллюстрировать при решении задачи № 11 (б), стр. 7. Т. к. количество людей может выражаться только целым положительным числом, $x \in N$. Этот шаг записали[6].

II. (V.) Новый шаг алгоритма — **Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением** — можно проиллюстрировать при решении задачи № 5 (б). Условие, в котором говорится, что сумма двух натуральных чисел равна 28 описано уравнением $x + y = 28$ и указанием множества значений $x \in N$, $y \in N$; условия о том, что первое число при делении на 8 дает остаток 5 описано уравнением $x = 8a + 5$,

$a \in N$, а второе число при делении на 8 дает остаток 7 описано уравнением
$y = 8b + 7$, $b \in N$. Этот шаг проговаривается устно.

III. (VI.) Новый шаг алгоритма — **Зафиксировать искомую величину** — можно проиллюстрировать при решении задачи №11 (б). В задаче нужно ответить на вопрос: сколько человек стало в вагоне. В задаче сказано, что после указанных изменений количество людей в вагоне стало в 1,5 раза больше, чем было, а было x. Зафиксируем искомую величину: $1{,}5x$?

Этот шаг записывается рядом с математической моделью в рамке, помечаем стрелкой (чтобы не забыть перейти от ответа модели по стрелке к нахождению ответа к задаче).

Далее предлагается составить на доске из шагов, которые есть у групп, алгоритм решения задачи методом математического моделирования.

— Обсудите следующий вопрос в группах: Какой этап математического моделирования описывается этими шагами?

Задание выполняется в группах. На вопрос отвечает одна из групп (желательно, спросить представителя той группы, которая не дополнила ответы в предыдущем задании). На доску вывешивается эталон (Д-1).

— Что вы повторяли?

— Над каким следующим заданием вы будете размышлять?

— Построй такую математическую модель к задаче № 17, чтобы она удовлетворяла требованию достаточной полноты (Д-2).

— Обсудите в группах, что нового в задании, какие затруднения у вас могут возникнуть при выполнении задания (на работу 30 секунд).

---

[6] Обсуждая вопрос о множестве значений неизвестной величины, нужно обратить внимание учащихся на способы указания этого множества в условии задач (множество значений задается явно в задаче № 5 (б) стр. 6 и неявно в задаче №11 (б), стр. 7).

Одна из групп озвучивает результат обсуждения, остальные при необходимости уточняют, дополняют.

Возможный вариант ответа:

Новое в задании: понятие о требовании достаточной полноты.

Возможные затруднения: либо не сможем построить нужную математическую модель, либо построим, но не правильно, либо не сможем обосновать, что построенная математическая модель действительно удовлетворяет требованию достаточной полноты.

3. Выявление места и причины затруднения

Цель:

1) организовать восстановление выполненных операций;
3) организовать соотнесение возможных действий с используемыми эталонами (алгоритмом, понятием и т.д.);
3) организовать фиксацию места (шага, операции), где возникло затруднение;
4) на этой основе организовать выявление и фиксацию во внешней речи причины затруднения — тех конкретных знаний, умений или способностей, которых недостает для решения исходной задачи и задач такого класса или типа вообще;
5) организовать составление текста по фиксации места и причины выявленных затруднений.

Организация учебного процесса на этапе 3:

— Посовещайтесь в группах в течение 1 минуты и ответьте на вопросы:

1) какое задание должны были выполнить;
2) чем могли воспользоваться при выполнении задания;
3) в каком месте и почему возникнет затруднение.

Одна из групп озвучивает результат обсуждения, остальные при необходимости уточняют, дополняют.

Возможный вариант ответа:

Надо было построить математическую модель к задаче, которая удовлетворяла бы требованию достаточной полноты. Можно было воспользоваться нашим алгоритмом. Но в нем ничего не сказано про достаточную полноту модели. Задание вызвало затруднение, т. к. не знаем, в чем заключается требование достаточной полноты, и у нас нет алгоритма построения достаточно полной математической модели.

— Что дальше? (Надо остановиться, и подумать.)

4. Построение проекта выхода из затруднения

Цель:

организовать построение проекта выхода из затруднения:

- учащиеся ставят цель проекта (целью всегда является устранение причины возникшего затруднения);
- учащиеся уточняют и согласовывают тему урока;
- учащиеся определяют средства (алгоритмы, модели, справочники и т. д.);
- учащиеся формулируют шаги, которые необходимо сделать для реализации поставленной цели;

Организация учебного процесса на этапе 4:

Посовещайтесь в группах в течение 30 секунд:

1) сформулируйте цель дальнейшей деятельности;
2) сформулируйте тему урока;
3) составьте план действий по реализации, поставленной цели.

Одна из групп озвучивает результат обсуждения, остальные при необходимости уточняют, дополняют.

Возможный вариант ответа:

Цель: узнать, в чем заключается требование достаточной полноты математической модели, и научиться строить математическую модель, удовлетворяющую данному требованию.

Тема урока: «Требование к математической модели».

План: найти в учебнике, в чем заключается требование достаточной полноты математической модели, и на его основе составить правило (алгоритм) построения математической модели, удовлетворяющей данному требованию.

— Нужно ли составлять новый алгоритм построения достаточно полной математической модели? Куда можно внести соответствующие изменения?

После этого учителем на доску вывешивается план работы (Д-3),уточняются шаги плана и еще раз проговариваются.

5. Реализация построенного проекта

Цель:

1) организовать реализацию построенного проекта в соответствии с планом;
2) анализ полученных результатов в форме коммуникативного взаимодействия;
3) организовать фиксацию нового способа действия в речи;
4) организовать фиксацию нового способа действия в знаках (с помощью эталона);
5) организовать фиксацию преодоления затруднения;
6) организовать уточнение общего характера нового знания (возможность применения нового способа действий для решения всех заданий данного типа).

Организация учебного процесса на этапе 5:

Работа по выполнению первого пункта плана организуется в группах, одна из групп озвучивает результат работы, остальные при необходимости уточняют, дополняют. После выступления групп на доску вывешивается эталон (Д-4).

После чего учитель задает вопросы, уточняющего характера:

- Всегда ли соотношения, полученные в математической модели, описываются в условии задачи? (нет, они могут только подразумеваться, т. е. возникать на основе свойств исследуемого объекта).
- Все ли соотношения, следующие из свойств объекта, указываются в математической модели? (нет, математическая модель должна содержать только существенные для ее решения соотношения).

— Теперь вернитесь к пробному заданию и выполните его в группах, ответив на следующие вопросы:

1. Какое уравнение явно задано в условии задачи?
2. Какой объект моделируется в задаче («герой» этой задачи)?
3. Какое неравенство следует из свойств моделируемого объекта (это условие в задаче явно не указано).

Группам раздается карточка с вопросами (Р-3). На работу по выполнению второго пункта плана отводится 1 минута после чего, одна из групп озвучивает результат работы, остальные при необходимости уточняют, дополняют.

Возможный вариант ответа: Нами получена такая математическая модель:

$$\begin{cases} 2(x + x + 5) = 65 \\ x > 0, \end{cases}$$

где x м — ширина участка.

— Обоснуйте что, вы построили модель, которая удовлетворяет требованию достаточной полноты. (Математическая модель удовлетворяет требованию достаточной полноты, т. к. она содержит все существенные для решения задачи требования, которые следуют как из условия задачи (уравнение), так и из свойства исследуемого объекта (сторон прямоугольника), которое не описывается в явном виде (неравенство)).

— С этого момента, договоримся строить достаточно полные математические модели, при решении любой задачи. Для этого нужно скорректировать алгоритм.

Посовещайтесь в группах в течение 1 минуты и ответьте на вопросы:

—Какой из этапов математического моделирования изменится?

— Какие шаги и как поменяются в связи с требованием достаточной полноты?

— Проверьте свои предположения по эталону (на доске фиксируется уточненный вариант алгоритма (Д-5))[7].

6. Первичное закрепление во внешней речи

Цель:

организовать усвоение детьми нового способа действий при решении данного класса задач с их проговариванием во внешней речи.

Организация учебного процесса на этапе 6:

№ 19 (2)

Задание выполняется у доски с проговариванием новых шагов алгоритма.

Т. к. величины углов последовательные четные числа, обозначим 1-ый угол $2x°$, тогда 2-ой угол равен $2x + 2°$, а 3-ий $2x + 4°$.

Определим множество значений x.

По условию $2x \in N$. Величина угла любого треугольника это положительное число, меньшее 180°, значит, $0 < 2x < 180$. Учитывая, что величина угла является натуральным числом, левую часть неравенства можно опустить, достаточно указать $2x < 180$. Два условия можно записать в одно: $x = \{1; 2; 3...90\}$.[8]

По уточненному алгоритму нужно установить взаимосвязи, которые возникают из свойств треугольника (могут быть явно не указаны): Сумма углов любого треугольника равна 180° (устно)[9].

По уточненному алгоритму нужно записать не только уравнение, но и **неравенство**:

$$\begin{cases} 2x < 180,\ 2x \in N \\ 2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 180. \end{cases}$$

По уточненному алгоритму нужно проверить, что каждый элемент описан соответствующим **соотношением**: в уравнении описано, что углы последовательные четные числа, а также учитывается общее свойство всех треугольников. В неравенстве описано, какие значения может принимать угол треугольника (устно).

Далее устно проговаривается ход решения задачи (зафиксировать искомые величины, найти корень уравнения, проверить, не нарушится ли при найденном значении x неравенство, ответить на вопрос задачи...).

— Какому требованию удовлетворяет полученная математическая модель? Проговорите в парах, в чем заключается это требование.

---

[7] Если у учащихся возникнет вопрос, почему изменился шестой, а не пятый пункт алгоритма, учитель обговаривает случай, когда в задаче может быть «спрятано» не только множество значений неизвестной величины, но и уравнение. Чтобы оба варианта указать в алгоритме, воспользовались более емким понятием «взаимосвязи между величинами». Чтобы понять, как уравнение может указываться в задаче неявно, предлагается рассмотреть № 19 (2).

[8] Преобразовывать неравенство и сводить два этих условия к одному условию необязательно, т. к. данное действие является фактически решением системы неравенств. На данный момент у учащихся формируется умение строить математическую модель задачи. Решая задачу, учащиеся проверяют соответствие найденных корней неравенству подстановкой.

[9] Учитель в подводящем диалоге выводит учащихся на поиск закономерностей, заданных в задаче неявно. Предлагается установить, какой объект моделируется в задаче, вспомнить, какое свойство углов треугольника устанавливалось ими на уроках математики. Обговорить, что данное свойство будет доказано позже на уроках геометрии. После чего, учитель просит учащихся применить свойство: «Сумма углов любого треугольника равна 180°» для треугольника из данной задачи.

7. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону

Цель:

1) организовать самостоятельное выполнение учащимися типовых заданий на новый способ действия;
2) организовать самостоятельное соотнесение работы с эталоном для самопроверки;
3) по результатам выполнения самостоятельной работы организовать составление текста рефлексии деятельности по применению нового способа действия.

Организация учебного процесса на этапе 7:

Что дальше необходимо сделать?

Для самостоятельной работы учащимся предлагается выполнить № 19 (1), причем предлагается, только построить математическую модель к задаче.

— Какие шаги алгоритма вы должны сделать? Нужно ли находить решения, удовлетворяющие модели?

Учащиеся выполняют самостоятельную работу и проводят самопроверку по эталону для самопроверки (Р-4).

— Проанализируйте в группах результаты выполнения самостоятельной работы:

- назовите, какие шаги алгоритма были новыми при выполнении задания;
- назовите, в каких местах и почему возникли затруднения.

Организаторы озвучивают результаты анализа работ.

8. Включение в систему знаний и повторение.

Цель:

1) Тренировать умение использовать новые шаги алгоритма при решении более сложных задач;
2) Организовать повторение учебного содержания, необходимого для обеспечения содержательной непрерывности.

Организация учебного процесса на этапе 8:

— Как показала самостоятельная работа, большинство из вас научились строить модель, которая удовлетворяет требованию достаточной полноты. Для чего же нужно строить такие модели? Насколько важно при построении модели учитывать все свойства моделируемого объекта? Чтобы понять, как влияет полнота математической модели на результат решения задачи, разберите в группах ход решения задачи из учебника на стр. 10—11.

На работу отводится 3 минуты.

— Посовещайтесь в группе и ответьте на вопросы:

Какое уравнение могло быть пропущено в математической модели? Почему?

Какому требованию она бы не удовлетворяла?

Какая бы возникла ситуация при решении данной задачи, если бы ее модель не была достаточно полной? Сделайте вывод.

№ 20 (а)

Перед решением задачи рекомендуется выполнить фронтально следующее подготовительное задание (Д-6). Учитель показывает образец перевода записи «$x = y$» — «Первое число равно второму».

Решение задачи оформляется учителем на доске. Выполнения одного шага алгоритма комментируется одним учеником. Для составления математической модели вызывается один из сильных учеников. Для ее решения организуется подводящий диалог, который должен вывести ребят на использование метода перебора. (Есть ли алгоритм решения такой математической модели? Какие методы использовались раньше, когда не было известного способа решения уравнения? Какой из этих методов (метод проб и ошибок или метод перебора) можно применить в данном случае?

Учителем оговаривается, что его можно использовать для решения не только уравнения, но и неравенства. На доске вывешивается алгоритм применения метода полного перебора (Д-7).

Возможный вариант решения:

Пусть x дер. — количество тополей, y дер. — количество берез. Тогда дубов — y дер., кленов — y дер., т.к. количество берез, дубов и кленов одинаковое. Т. к. количество деревьев может выражаться только натуральным числом: $x \in N$, $y \in N$. По условию x более, чем в три раза больше, чем число всех остальных деревьев, т. е. $x > 3(y + y + y)$. Известно, что число кленов и тополей меньше 12, т.е. $x + y < 12$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x \in N, y \in N \\ x > 3(y + y + y) \\ x + y < 12. \end{cases} \rightarrow \boxed{x = ?}$$

$$\begin{cases} x \in N, y \in N \\ x > 9y \\ x + y < 12. \end{cases}$$

Найдем решение методом перебора ($x \in N$, $y \in N$):

Т. к. $x + y < 12$, множество возможных значений сократится до $x < 12$, $y < 12$, т. е. $x = \{1; 2; 3...11\}$ и $y = \{1; 2; 3...11\}$.

1. Если $\underline{y = 1}$, то $x > 9 \cdot 1 \Leftrightarrow \underline{x > 9}$.
   1.1. $y = 1$, $x = 10$, то $1 + 10 < 12$ (и);
   1.2 $y = 1$, $x = 11$, то $1 + 11 < 12$ (л).
2. Если $\underline{y = 2}$, то $x > 9 \cdot 2 \Leftrightarrow \underline{x > 18}$ ($x \notin \{1; 2; 3...11\}$).
3. Если $\underline{y > 2}$, то $\underline{x > 18}$ ($x \notin \{1; 2; 3...11\}$).

Ответ: в парке 10 тополей.

9. Рефлексия деятельности на уроке

Цель:

1) организовать фиксацию нового содержания, изученного на уроке;
2) организовать рефлексивный анализ учебной деятельности с точки зрения выполнения требований, известных учащимся;
3) организовать оценивание учащимися собственной деятельности на уроке;
4) организовать фиксацию неразрешённых затруднений на уроке как направлений будущей учебной деятельности;
5) организовать обсуждение и запись домашнего задания;
6) организовать составление текста по рефлексии деятельности на уроке.

Организация учебного процесса на этапе 9:

Работая, в группах вы должны ответить на следующие вопросы.

На доску вывешиваются вопросы для рефлексии (Д-8).

Группы проводят рефлексию своей деятельности.

Одна из групп озвучивает ответы на вопросы.

— Как вы верно определили, на этом уроке вы уяснили в чем заключается требование достаточной полноты к математической модели. Но это требование не единственное, которому должна удовлетворять математическая модель. Есть еще одно. С ним вы познакомитесь дома, при чтении пункта 1.1.2. Составьте дома эталон «Основные требования к математической модели», в котором укажите два требования к ней.

Домашнее задание:

п. 1.1.2. составить эталон «Основные требования к математической модели»; № 19 (2) дорешать задачу; № 27 и № 3 (а).

Тип урока: РТ[10]

Тема урока: «Математическая модель и основные требования к ней»

Основные цели:

1) тренировать умение строить математическую модель, удовлетворяющую основным требованиям к ней;

2) тренировать умение решать задачи по уточненному алгоритму;

3) тренировать умение решать уравнения методом приведения к целым числам;

4) тренировать умение определять вид высказывания, его истинность и строить его отрицание.

5) познакомить[11] учащихся с новым типом урока и его планом.

Оборудование.

Демонстрационный материал:

1) план урока:

1. Повторение и выявление затруднений при проверке домашнего задания.
2. Выполнение тренировочных заданий по теме урока.
3. Выполнение самостоятельной работы с самопроверкой.
4. Выполнение заданий по другой теме.
5. Подведение итогов урока.

2) алгоритм решения задач методом математического моделирования:

1. Внимательно прочитать задачу.
2. Определить, какие величины известны, и какие надо найти.
3. Проверить соответствие единиц измерения величин.
4. Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.
5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6. Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта).
7. Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.
8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением.
9. Зафиксировать искомую величину.
10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.
11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

---

[10] Урок рефлексии тренировочного типа.
Первые сценарии уроков данного типа написаны на базовом уровне реализации ТДМ. В дальнейшем постепенно работа на всех этапах этого урока (кроме самостоятельной работы) будет организовываться в группах, что соответствует технологическому уровню проведения уроков в ТДМ. Можно начинать вводить элементы данного урока постепенно (например, на первых порах этапы самостоятельной работы и повторения можно опускать).

[11] В данном сценарии проводится первый урок данного типа (учащиеся впервые ставят подобную цель и знакомятся с планом рефлексивно-тренировочного урока).

3) основные требования к математической модели:

1. Достаточная простота.
2. Достаточная полнота.

4) алгоритм применения метода перебора:

1. Проанализировать неравенство и найти множество его возможных решений.
2. Проверить, можно ли сократить количество элементов данного множества.
3. Проверить для каждого из элементов составленного множества, является ли он решение данного неравенства.
4. Записать ответ, выписав все найденные решения.

5) план тренировочной работы:

1. Выполнить свое тренировочное задание.
2. Сопоставить решение с подробным образцом.
3. Зафиксировать правильность выполнения заданий, если возникли затруднения, зафиксировать место и причину затруднения в своей карточке рефлексии.
4. На основе подробного образца исправить ошибки.
5. Выполнить следующее тренировочное задание.

6) карточка с вопросами для этапа рефлексии:

7. Какие умения вы сегодня тренировали?
8. Какую цель вы ставили перед собой?
9. Вы достигли поставленной цели?
10. Какие знания вы использовали при выполнении заданий?
11. Какие затруднения возникали в процессе работы над заданиями?
12. Какие достижения вы можете отметить?

Раздаточный материал:
1) подробный образец выполнения задания из домашней работы:

№ 3 (а)
Пусть x тыс. руб. — выручка в феврале ($x > 0$). Выручка в январе была ($x + 49{,}58$) тыс. руб., в марте ($x - 178{,}92$) тыс. руб. Общая выручка за квартал составит$x + (x\ + 49{,}58) + (x - 178{,}92)$, что по условию равно 700,46 тыс. руб.
Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x + (x + 49{,}58) + (x - 178{,}92) = 700{,}46 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x - 178{,}92 = ?}$$

$x + x + 49{,}58 + x - 178{,}92 = 700{,}46;$
$3x = 700{,}46 + 178{,}92 - 49{,}58;$
$3x = 829{,}8;$
$x = 276{,}6;$
$276{,}6 > 0$
$276{,}6 - 178{,}92 = 97{,}68$ (тыс. руб.)

Ответ: 97,68 тысяч рублей получил магазин в марте.

Дорешать задачу **№ 19 (2)**, стр. 11

$$\begin{cases} x \in N, x < 180 \\ x + (x + 1) + (x + 2) = 180 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = ? \\ x - 178{,}92 = ? \\ x + 2 = ? \end{matrix}}$$

$3x + 3 = 180;$
$x + 1 = 60;$
$x = 59$
$59 \in N, 59 < 180$
$59 + 1 = 60$
$59 + 2 = 61$

Ответ: 59°, 60°, 61°.

№ 27

Пусть $x°$ — величина меньшего острого угла, $0 < x < 90$. Тогда 2-ой угол равен $x + 26°$, третий угол равен 90° (т. к. треугольник прямоугольный). По свойству углов любого треугольника их сумма $x + (x + 26) + 90$ равна 180°. Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} 0 < x < 90 \\ x + x + 26) + 90 = 180 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = ?}$$

$x + (x + 26) + 90 = 180;$
$x + x = 26 + 90 = 180;$
$2x = 180 - 26 - 90;$
$2x = 64;$
$x = 32$
$0 < 32 < 90$

Ответ: меньший угол равен 32°.

2) подробные образцы выполнения тренировочных заданий:

№ 3 (б)

Пусть x км прошли в первый день. $x > 0$. Во второй день $(x - 4{,}54)$ км, в третий $(x + 5{,}61)$ км. За три дня они прошли $x + (x - 4{,}54) + (x + 5{,}61)$, что по условию равно 112,73 км.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x + (x - 4{,}54) + (x + 5{,}61) = 112{,}73 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x - 4{,}54 = ?}$$

$x + (x - 4{,}54) + (x + 5{,}61) = 112{,}73;$
$x + x - 4{,}54 + x + 5{,}61 = 112{,}73;$
$3x - 4{,}54 + 5{,}61 = 112{,}73;$
$3x + 1{,}07 = 112{,}73;$
$3x = 111{,}66;$
$x = 37{,}22$
$37{,}22 > 0$
$37{,}22 - 4{,}54 = 32{,}68$

Ответ: 32,68 км.

№ 19 (3)

Т. к. величины углов последовательные числа, кратные трем обозначим 1-ый угол $3x°$, тогда 2-ой угол равен $3x + 3°$, а 3-ий $3x + 6°$. Определим множество значений х. По условию $3x° \in N$. Величина угла любого треугольника это положительное число, меньшее 180°, значит, $0 < 3x < 180$. Учитывая, что величина угла является натуральным числом, левую часть неравенства можно опустить, достаточно указать $3x < 180$.

Сумма углов $3x + (3x + 3) + (3x + 6)$ любого треугольника равна 180°.

Составим математическую модель и зафиксируем искомые величины:

$$\begin{cases} 3x < 180,\ 3x \in N \\ 3x + (3x + 3) + (3x + 6) = 180. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} 3x = ? \\ 3x + 3 = ? \\ 3x + 6 = ? \end{array}}$$

$3x + (3x + 3) + (3x + 6) = 180;$

$3x + 3x + 3 + 3x + 6 = 180;$

$9x + 9 = 180;$

$x + 1 = 20;$

$x = 19$

$3 \cdot 19 < 180;\ 3 \cdot 19 \in N$

$57 < 180,\ 57 \in N$

$57 + 3 = 60°;\ 57 + 6 = 63°.$

Ответ: 57°; 60°; 63°.

№ 4(а)

Пусть x шт. — количество дисков, которое окупит все расходы ($x \in N$). «Чистая» прибыль с каждого диска равна (250 – 50) руб. Тогда «чистая» прибыль с x дисков $(250 - 50)x$ руб. Сумма всех расходов за месяц 50 000 + 100 000 + 200 000 + 30 000 должна окупаться, т. е. должна быть равна $(250 - 50)x$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x \in N \\ (250 - 50)x = 50\,000 + 100\,000 + 200\,000 + 30\,000 \end{cases}$$

$200x = 380\,000;$

$x = 1900$

$1900 \in N$

Ответ: 1900 дисков.

№ 20 (в)

Пусть x игроков набрали 10 баллов, y игроков набрали 8 баллов. $x, y \in N$. Тогда по условию7 баллов набрали x игроков, 5 баллов набрали x игроков. В турнире принимали участие не менее 12 игроков, игроков набравших другое количество баллов не было, значит, $y + 3x \geqslant 12$. Игроков, набравших 8 баллов, было больше, чем всех остальных, тогда $y > x + x + x$. При этом больше 7 баллов, т. е. 8 и 10 баллов набрали менее 10 игроков, тогда $y + x < 10$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} y + 3x \geq 12 \\ y > x + x + x \\ y + x < 10 \\ x \in N,\ y \in N \end{cases}$$

Найдем решение методом перебора.
$x \in N$, $y \in N$. Проверим, можно ли сократить количество элементов данного множества. Из неравенства $y + x < 10$ ясно, что $x = \{1; 2; ...8\}$, $y = \{1; 2; ...8\}$.
Оформим решение в виде таблицы, проверим для каждой пары элементов составленного множества, являются ли они решениями данных неравенств:

	$y > 3x$	$y + x < 10$	$y + 3x \geqslant 12$
$x = 1$	$y > 3 \cdot 1$ $y = 4$	$4 + 1 < 10$ (и)	$4 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 5$	$5 + 1 < 10$ (и)	$5 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 6$	$6 + 1 < 10$ (и)	$6 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$\boldsymbol{y = 7}$	$\boldsymbol{7 + 1 < 10}$ **(и)**	$7 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 8$	$8 + 1 < 10$ (и)	$8 + 3 \cdot 1 \geqslant 12$ (л)
	$y = 9$	$9 + 1 < 10$ (л)	
$x = 2$	$y > 3 \cdot 2$ $y = 7$	$7 + 2 < 10$ (и)	$7 + 3 \cdot 2 \geqslant 12$ (и)
	$y = 8$	$8 + 2 < 10$ (л)	
	$y > 8$	$y + 2 < 10$ (л)	
$x = 3$	$y > 3 \cdot 3$ $y > 9$	$y + 3 < 10$ (л)	
$x > 3$	$y > 12$	$y + x < 10$ (л)	

Ответ: 7 игроков.

3) самостоятельная работа:

Решите одну задачу на выбор:
1) Первый угол треугольника на 20° меньше третьего и в 2 раза больше второго. Найти углы этого треугольника, если сумма первого и третьего углов равна 100°.
2) Один острый угол прямоугольного треугольника на 10° меньше другого. Найди острые углы треугольника.

4) эталоны для самопроверки самостоятельной работы:

Задача № 1.

	1. Внимательно прочитать задачу.
Нужно найти величины углов данного треугольника.	**2. Определить, какие величины известны, и какие надо найти.**
Единицы измерения согласованы.	**3. Проверить соответствие единиц измерения величин.**
Пусть $x°$ — величина второго угла.	**4. Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.**
$0 < x < 90$	**5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.**

Тогда по условию 2-ой острый угол равен $x + 10°$. Треугольник прямоугольный, значит, третий угол равен 90° По свойству углов любого треугольника $x + \quad +(x + 10) + 90$ равно 180° .Составим математическую модель: $\begin{cases} 0 < x < 90 \\ x + 90 + (x + 10) = 180 \end{cases}$	**6. Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта)** **7. Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.**
Каждый элемент условия задачи (и заданный неявно) описан соответствующим соотношением.	**8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.**
$\boxed{\begin{array}{l} x = ? \\ x + 10 = ? \end{array}}$	**9. Зафиксировать искомую величину.**
$x + 90 + (x + 10) = 180;$ $x + 90 + x + 10 = 180;$ $2x = 180 - 90 - 10;$ $2x = 80;$ $x = 40$ $0 < 40 < 90$	**10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.**
$40 + 10 = 50$	**11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.**
Углы в 40°и 50° существуют, являются острыми, что соответствует смыслу задачи. *Ответ:* 40° и 50°.	**12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.**

5) карточка для рефлексии:

Фамилия, имя:			
	Домашняя работа (указать номера)	**Тренировочные упражнения** (указать номера)	**Самостоятельная работа** (указать номера)
Выполнено без ошибок			
Возникли затруднения			
Правила, над которыми надо поработать			

Ход урока

1. Мотивация к тренировочной-коррекционной деятельности.

Цель:

1) включение учащихся в тренировочную-коррекционную деятельность;
2) организовать определение типа урока;
3) организовать деятельность учащихся по установке тематических рамок;
4) создать условия для возникновения у учащихся внутренней потребности включения в тренировочную коррекционную деятельность.

Организация учебного процесса на этапе 1:

— Здравствуйте, ребята. Что нового вы узнали про математическую модель на прошлом уроке и дома?

— Удалось вам потренироваться в построении математических моделей, удовлетворяющих основным требованиям? В применении уточненного алгоритма? Всем ли было достаточно времени для тренировки?

— Сегодня будет необычный урок. Этот урок я предлагаю полностью посвятить тренировке в решении задач по уточненному алгоритму. Основная задача этого урока — потренироваться в применении алгоритма решения задач методом математического моделирования. Какова тема урока? (Основные требования к математической модели.)

— Как вы считаете, нужен вам такой урок?

— С чего надо начать урок?

Могут прозвучать различные варианты ответов, из которых учитель фиксирует внимание учащихся на следующем: «Мы не знаем, это новый для нас тип урока».

Учитель вывешивает план урока (Д-1). В ходе урока учитель обращается к этому плану, разъясняя каждый следующий его шаг.

Учитель разъясняет назначение карточек. У каждого ученика на столе есть индивидуальная карточка рефлексии (Р-5). В этой карточке рефлексии каждый учащийся будет фиксировать правильность выполнения заданий из домашней работы и тренировочных заданий, заданий из самостоятельной работы. В карточке нужно указать номера, которые выполнены без ошибок, номера заданий, в которых возникли затруднения. Кроме того, в карточке указываются правила, на которые допущены ошибки.

2. Актуализация знаний и выполнение тренировочных упражнений.

Цель:

1) организовать актуализацию известных способов действий, достаточных для выполнения тренировочных заданий;
2) зафиксировать актуализированные способы действий в речи;
4) зафиксировать актуализированные способы действий в знаках (эталоны);
5) организовать тренировку мыслительных операций, достаточных для выполнения тренировочных заданий: анализ, сравнение, обобщение;
6) организовать обобщение актуализированных способов действий;
7) организовать представление спектра заданий, требующих тренировки рассматриваемых способов действий.

Организация учебного процесса на этапе 2:

— Чтобы можно было начать тренироваться в применении алгоритма решения задач, что вам сначала необходимо повторить? (Уточненный алгоритм решения задач.)

Эталон Д-2 вывешивается на доску, шаги алгоритма пронумерованы.

— Дома вы применяли этот эталон?

— Покажите, какой эталон вы составили дома? Проверьте себя (на доску вывешивается эталон «Основные требования к математической модели» (Д-3)).

— Как связаны друг с другом эти эталоны? (Выполнение шагов уточненного алгоритма гарантируют построение математической модели, которая удовлетворяет требованию достаточной полноты.)

— Какой шаг алгоритма отвечает за достаточную простоту математической модели? (Выбор неизвестных величин, которые будем обозначать буквой (буквами).)

— Как я уже сказала, этот урок будет посвящен тренировке. Скажите, одинаково ли тренируется пловец, выступающий на Олимпийских играх и Ваня из седьмого класса «А», который занимается плаваньем? А почему у них разная нагрузка? Такая же ситуация и у вас на уроке. Вам не нужно тренироваться по одинаковой программе. Ведь все вы по-разному усвоили изученный материал, кто-то активно работал на прошлом уроке, кто-то нет, кто-то дома хорошо потрудился, кто-то не очень. Чтобы понять, как кому тренироваться, проверьте, насколько успешно вы справились с домашним заданием. У вас на партах лежит подробный образец выполнения задания из домашней работы. Вы должны будете сопоставить свои работы с подробным образцом, отметить галочкой шаги алгоритма, которые направлены на построение достаточно полной математической модели.

На работу отводится 2 минуты. После чего учитель опрашивает учащихся, каждый из которых озвучивает эти шаги для одной из задач.

— Теперь зафиксируйте результат выполнения заданий в карточке, в столбце «Домашняя работа».

В связи с тем, что учащиеся работают по данной карточке в первый раз, работа может быть организована следующим образом. Сначала учителем задается вопрос: «Кто выполнил задание № 19 (2) без ошибок? Занесите № 19 (2) в столбец с домашним заданием в первую строку (*выполнено без ошибок*)». После чего задается вопрос: «Кто ошибся при выполнении № 19 (2) ? Занесите этот номер в столбец с домашним заданием во вторую строку (*возникли затруднения*)» В чем причина затруднения? У кого такая же причина? Над чем вам нужно поработать?» Зафиксируйте в третьей строке таблицы: решение задач по алгоритму (шаги 9-12)». Аналогичный опрос проводится по каждому из заданий. Если ошибки в шаге, помеченном галочкой, записывается: построение достаточно полной модели.

— При выполнении домашнего задания все математические модели решались известными способами. А какой метод применяли для нахождения решения построенной модели, если известного способа нет? (Метод перебора).

Эталон Д-4 вывешиваются на доску.

— Что вы повторили?

— Перечислите задания, при выполнении которых вам будут необходимы эталоны, которые вы сейчас повторили? (Решение задач.)

—Вы правильно определили спектр заданий, с которыми вы сегодня будете работать.

3. Построение плана деятельности

Цель:

1) организовать постановку учащимися цели деятельности;
2) организовать определение учащимися средств (алгоритмы, модели, справочники и т. д.) для выполнения тренировочных заданий;
3) учащиеся строят план работы с тренировочными заданиями[12].

Организация учебного процесса на этапе 3:

— По результатам выполнения домашнего задания можно сформулировать разные цели вашей дальнейшей деятельности.

---

[12] В связи с тем, что это первый урок данного типа план строится в подводящем диалоге либо выстраивается учащимися из предложенных учителем шагов.

Учитель обращает внимание детей на две стрелки в плане урока, показывающие разные направления дальнейшей их деятельности на уроке.

— У кого были затруднения, при выполнении домашнего задания сначала будут тренироваться в выполнении аналогичных заданий (строить математические модели, удовлетворяющие основным требованиям, и отрабатывать шаги уточненного алгоритма). Те ребята, у которых не было затруднений, будут тренироваться применять знания при решении задач более высокого уровня.

— Как вы думаете, что можно использовать при работе с тренировочными заданиями? (Эталоны, учебник, подробный образец, при необходимости будем обращаться к учителю за помощью.)

— Попробуйте в группах составить план своей работы из следующих шагов:

- Зафиксировать правильность выполнения заданий, если возникли затруднения, зафиксировать место и причину затруднения в своей карточке рефлексии.
- Выполнить свое тренировочное задание.
- Сопоставить решение с подробным образцом.
- Выполнить следующее тренировочное задание.
- На основе подробного образца исправить ошибки.

В результате обсуждения итогов работы групп на доске фиксируется нужный план работы (Д-5).

4. Реализация плана деятельности

Цель:

1) организовать реализацию построенного плана;
2) организовать фиксацию полученных результатов;
3) организовать анализ полученных результатов;
4) организовать коррекцию выявленных затруднений.

Организация учебного процесса на этапе 4:

— Теперь учащиеся, у которых возникли затруднения в домашней работе, будут тренироваться отдельно от ребят, которые справились с домашним заданием.

План работы по тренингу вывешивается на доску (Д-4). Каждый шаг разъясняется учащимся, например, где и когда они могут взять образец решения и пр.

Задания записываются на доске:

Задание 1 (для учащихся, у которых возникли затруднения в домашней работе): №№ 3 (б); № 19 (3)

Задание 2: № 4 (в); № 4(а)

Каждый ученик выполняет задание самостоятельно, самостоятельно проводит самопроверку (подробные образцы находятся у учителя, по просьбе он их выдаёт либо находятся на отдельном столе и учащиеся самостоятельно их оттуда берут). Ученики могут выполнить разное количество заданий. Каждый учащийся самостоятельно фиксирует свой результат в своей карточке. На работу с упражнениями отводится $\approx$ 20 минут.

5. Обобщение возникших затруднений во внешней речи

Цель:

1) организовать обсуждение типовых затруднений;

2) организовать проговаривание формулировок способов действий, которые вызвали затруднение.

Организация учебного процесса на этапе 5:

— Использование, каких правил вызвало затруднения?

Эталоны, при использовании которых были допущены ошибки, озвучиваются.

Если у многих учащихся остались затруднения при выполнении какого-то упражнения задания 1, то рекомендуется разобрать это задание на доске.

6. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону

Цель:

1) организовать самостоятельное выполнение учащимися типовых заданий на тренируемые способы действия;

2) организовать самостоятельное соотнесение работы с эталоном для самопроверки;

3) по результатам выполнения самостоятельной работы организовать составление текста рефлексии деятельности по применению нового способа действия.

4) организовать обсуждение и запись домашнего задания.

Организация учебного процесса на этапе 6:

— Посмотрите, что вы должны делать дальше по плану урока?

— Как вы думаете, с какой целью выполняется эта самостоятельная работа? (Проверить хорошо ли я потренировался, и еще раз потренироваться в применении алгоритма.)

Для самостоятельной работы учащимся предлагается выполнить задачу, условие которой напечатано в карточке (Р-3).

Учащиеся выполняют самостоятельную работу, указывая номера эталонов, которыми пользуются при выполнении заданий и проводят самопроверку по эталону для самопроверки (Р-4).

— Проанализируйте результаты выполнения самостоятельной работы и занесите их в свою карточку.

7. Повторение

Цель:

Организовать повторение метода приведения к целым числам при решении уравнений и определения вида высказывания, его истинности и построения его отрицания.

Организация учебного процесса на этапе 7:

№ 26 (б, д)

Задание выполняется у доски с комментарием.

б) $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = 1\frac{7}{20}$; умножим обе части уравнения на 20

$4x + 5x = 27;$

$9x = 27;$

$x = 3$

Ответ: {3}

д) $\frac{5x}{7} - \frac{7x}{5} = 4$ умножить обе часть уравнения на 35

$25x - 49x = 140;$

$-24x = 140;$

$x = -\frac{140}{24};$

$x = -5\frac{5}{6}$

Ответ: $\{-5\frac{5}{6}\}$.

№ 21 (через один)

Задание выполняется устно. При его выполнении учащиеся отвечают на дополнительные вопросы учителя: Какие высказывания называются общими? О существовании? Как доказать истинность высказывания о существовании, ложность общего высказывания? Какие способы доказательства истинности общего высказывания вы знаете? Что такое отрицание высказывания? И пр.

а) Общее, ложное. Температура воздуха в Красноярске иногда не равна 30°C.
в) Общее, ложное. Некоторые насекомые не являются животными.
д) О существовании, истинное.
ж) О существовании, истинное.
и) Истинное.
л) Общее, ложное. Некоторые учителя — мужчины.

8. Рефлексия деятельности на уроке

Цель:

1) организовать фиксацию тренируемого материала на уроке;
2) организовать оценивание учащимися собственной деятельности на уроке;
3) организовать фиксацию неразрешённых затруднений на уроке как направлений будущей учебной деятельности.

Организация учебного процесса на этапе 9:

— Чтобы проанализируйте вашу работу на этом уроке ответьте на вопросы.

13. Какие умения вы сегодня тренировали?
14. Какую цель вы ставили перед собой?
15. Вы достигли поставленной цели?
16. Какие знания вы использовали при выполнении заданий?
17. Какие затруднения возникали в процессе работы над заданиями?
18. Какие свои достижения вы можете отметить.

На доску вывешиваются вопросы для рефлексии (Д-6).

Учащиеся устно отвечают на вопросы. Для ответа на последний вопрос учитель предлагает провести индивидуальную рефлексию по последней строке личной карточки.

— Какое название вы можете предложить уроку, который сегодня был?

Нужно остановиться на одном из названий, предложенном учащимися: урок-тренировка, урок-тренинг, тренировочный урок.

— В дальнейшей работе на уроках алгебры вы часто будете работать на таких уроках-тренингах.

Домашнее задание:

п. 1.1.2. № 3(в), № 4(в) или № 20(б); № 30 (а, в); № 20.

Тип урока: РК[13]

Тема урока: «Математическое моделирование»

Основные цели:

1) организовать самоконтроль усвоения понятия достаточно полной математической модели;
2) организовать самоконтроль умения решать задачи по уточненному алгоритму;
3) организовать самоконтроль умения вычислять значение числового выражения, решения уравнений, выполнять действия со смешанными числами и десятичными дробями, применять признаки делимости;
4) повторить понятие определения.

[13] Урок рефлексии коррекционного типа.

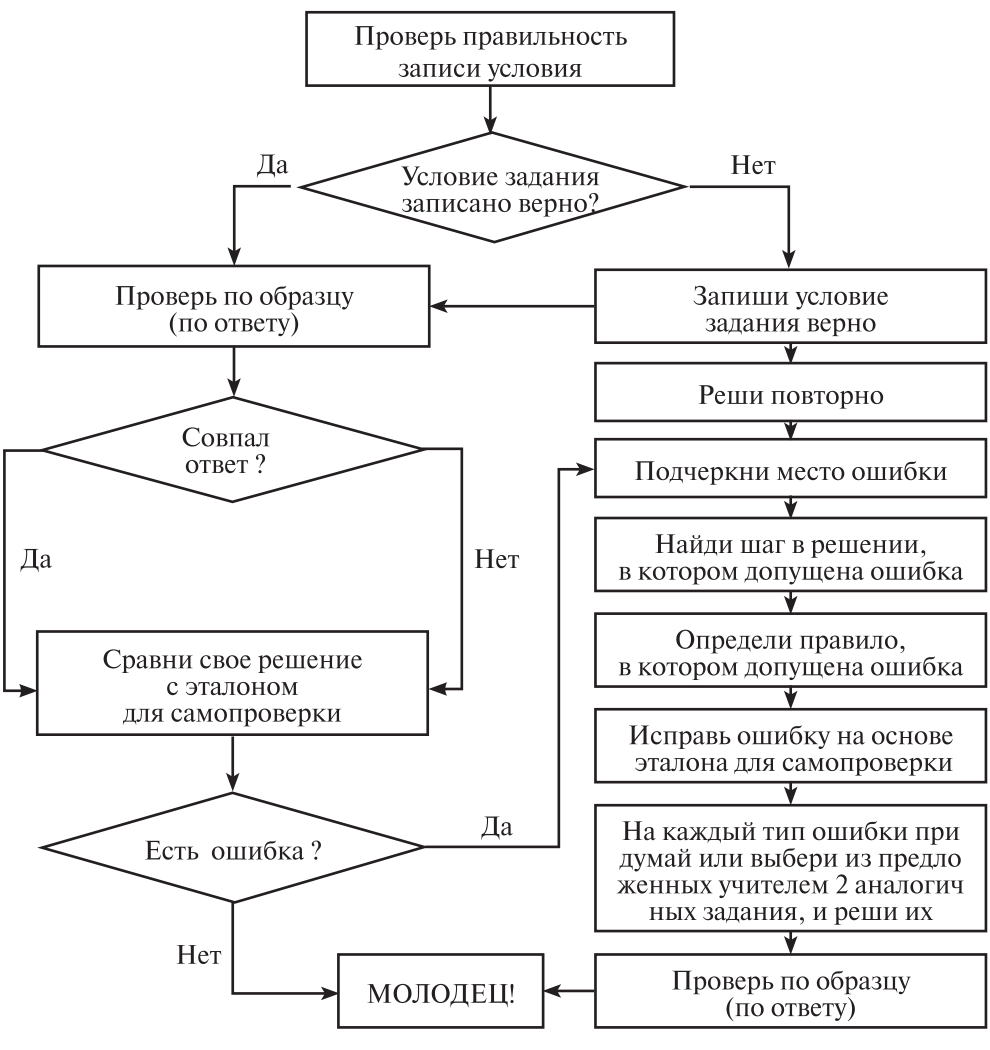
Оборудование.

Демонстрационный материал:

1) план работы на уроке:

1. Подготовка к самостоятельной работе.
2. Самостоятельная работа № 1.
3. Самопроверка самостоятельной работы по образцу.
4. Самопроверка самостоятельной работы по эталону для самопроверки.
5. Фиксация места и причины ошибки или фиксация отсутствия затруднений.
6. Постановка цели деятельности.
7. Работа над ошибками или работа с дополнительными заданиями.
8. Самостоятельная работа № 2 и самопроверка.
9. Повторение.
10. Подведение итогов.

2) алгоритм самопроверки и работы над ошибками:



3) уточненный алгоритм решения задач методом математического моделирования (из урока № 3, Д-2);

4) основные требования к математической модели (из урока № 3, Д-3);

5) требование достаточной полноты математической модели (из урока № 2, Д-4);

6) этапы математического моделирования (из урока №1 , Д-2);

7) образец выполнения самостоятельной работы № 1:

1) $x > 0$

$x + x + 1 = 11$

$x + x + 1 > 2(x + 1)$, где x см — длина первого звена.

2) нет решения.

8) вопросы для этапа рефлексии:

- Какие цели ставили в начале урока?
- Смогли реализовать поставленные цели?
- Каковы причины возникших затруднений?
- С какими затруднениями не смогли справиться?

Раздаточный материал:

1) алгоритм самопроверки и работы над ошибками (аналогичный эталону Д-2);

2) подробный образец выполнения заданий из домашней работы:

№ 3(в)

Пусть фабрика выпустила x т клубничных конфет, тогда $x > 0$. Миндальных конфет выпустили ($x - 39{,}56$) т, а сливочных — ($x + 97{,}69$) т. Всего трех сортов фабрика выпустила ($x + (x - 39{,}56) + (x + 97{,}69)$) т, что по условию равно 524,48 т. Кроме того, из задачи ясно, что на фабрике не могли произвести отрицательное количество миндальных конфет, тогда $x - 39{,}56 \geq 0$.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x - 39{,}56 \geqslant 0 \\ x + (x - 39{,}56) + (x + 97{,}69) = 524{,}48 \end{cases} \rightarrow \boxed{x - 39{,}56 = ?}$$

$3x = 466{,}35$

$x = 155{,}45$

$155{,}45 - 39{,}56 \geqslant 0$

Ответ: в августе 115,89 т выпустили миндальных конфет.

№ 4(в)

Пусть цена закупки одного фонаря x руб., тогда $x > 0$. Доходы от продажи 4570 фонарей составят $570 \cdot 4570$ (руб.). Расходы в месяц составят ($x \cdot 4570 + 300\,000 + 400\,000 + 76\,900$) руб. Расходы окупаются, если доходы равны расходам.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4570x + 300\,000 + 400\,000 + 76900 = 570 \cdot 4570 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = ?}$$

$4570x = 1\,828\,000$

$x = 400$

$400 \geqslant 0$

Ответ: компания должна закупать фонари по цене 400 руб.

№ 20 (б)

Пусть в зоопарке было x крокодилов, y тигров. Тогда слонов тоже — x и обезьян —x. $x, y \in N$. Тогда по условию у более чем на 11, больше, чем $x + x$, тогда $y > 11 + x + x$. При этом, сумма x и y меньше 16.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} y > 11 + x + x \\ y + x < 16 \\ x \in N, y \in \mathrm{N} \end{cases} \rightarrow \boxed{x = ?}$$

Найдем решение методом перебора.

$x \in N$, $y \in N$. Проверим, можно ли сократить количество элементов данных множеств. Из первого неравенства ясно, что $\underline{y = \{14; 15; ...\}}$.

Из неравенства $y + x < 16$ ясно, что $x = \{1; 2; ...14\}$,

$\underline{y = \{14; 13; ...1\}}$. Тогда оба неравенства будут верными при $y = \{14\}$.

Чтобы сумма x и 14была меньше 16, x должен быть меньше 2, значит, $x = 1$. При этом

$14 > 11 + 1 + 1$(И.).

Ответ: в зоопарке 1 крокодил.

№ 30 (а, в)

а) $2x - \frac{1}{5} = \frac{3}{7}$ умножим обе части равенства на 35

$70x - 7 = 15$

$70\,x = 22$

$x = \frac{11}{35}$

Ответ: $\{\frac{11}{35}\}$

б) $\frac{3x}{12} = \frac{15x}{6} - 1$ сократим дроби

$\frac{x}{4} = \frac{5x}{2} - 1$ умножим обе части на 4

$x = 10x - 4$

$9x = 4$

$x = \frac{4}{9}$

Ответ: $\{\frac{4}{9}\}$

№ 28

5 лет = $12 \cdot 5$ мес. = 60 мес.

Пусть x руб. — ежемесячная сумма, на которую должна уменьшаться стоимость оборудования. Тогда $x > 0$. За 5 лет стоимость оборудования всего уменьшится на $60x$ руб. По условию к концу 5 года стоимость 50 100 уменьшиться до нуля, т. е. $60x$ должна составить 50 100 руб.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 60x = 50\,100 \end{cases}$$

$x = 835$

$835 > 0$

Ответ: На 835 рублей должна уменьшаться первоначальная стоимость оборудования.

3) самостоятельная работа № 1:

> Длина ломаной ABC равна 11 см. Первое ее звено на 1 см меньше второго, а второе ее звено в 2 раза меньше расстояния между ее началом и концом. Найдите длину второго звена этой ломаной.
>
> 1. Постройте математическую модель данной задачи.
> 2. Решите задачу.

4) эталон для самопроверки самостоятельной работы № 1:

	1. Внимательно прочитать задачу.
Известна длина ломаной. Неизвестны длины ее звеньев.	**2. Определить, какие величины известны, и какие надо найти.**
Единицы измерения согласованы (выражены в см).	**3. Проверить соответствие единиц измерения величин.**
Пусть длина первого звена x см,	**4. Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.**
тогда $x > 0$.	**5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.**
Длина второго звена $x + 1$ см. Длина ломаной $x + x + 1$, что по условию равно 11 см. Расстояние между ее началом и концом равно в 2 раза больше второго звена, т. е. $2(x + 1)$ см. Известно, что длина любой ломаной больше расстояния между ее началом и концом.	**6. Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта)**
Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину: $x > 0$ $x + x + 1 = 11$ $x + x + 1 > 2(x + 1)$	**7. Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.**
Уравнение задано в задаче явно. Неравенство $x > 0$ следует из того, что длина величина неотрицательная. Неравенство $x + x + 1 > 2(x + 1)$ задано в задаче неявно (свойство длины ломаной).	**8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.**
$x + 1 = ?$	**9. Зафиксировать искомую величину.**
$x + x + 1 = 11 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ $5 > 0$ (И.) $5 + 5 + 1 > 2(5 + 1)$ (Л.) Данная математическая модель не имеет решения, т. к. искомое значение x должно удовлетворять каждому из соотношений.	**10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.**
Ответ: задача не имеет решения.	**11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.** **12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.**

5) таблица результатов:

№ (виды) заданий	Результат выполнения самостоятельной работы № 1		Эталоны, в которых допущены ошибки (в алгоритме указать шаг)	Результат работы над ошибками	Результат выполнения самостоятельной работы № 2
	По образцу	По эталону для самопроверки			
1.					
1. Построение математической модели, удовлетворяющей основным требованиям. 2. Нахождение всех решений, удовлетворяющей построенной модели.					
Дополнительное задание	**Результат выполнения**				
1. а 1. б					
2. а 2. б					
3. а 3. б					

6) дополнительные задания:

1. Вычислите:

   а) $-6\frac{3}{7} : \frac{5}{14} - 9\frac{4}{5} \cdot (-2\frac{1}{7})$; б) $-3\frac{3}{25} : 5\frac{1}{5} - 6\frac{1}{15} : 4\frac{1}{3}$

2. Решите уравнение:

   а) $2{,}1x + 1{,}4(5 - x) = -3(x - 0{,}2) + 13{,}8$;

   б) $-1{,}5(x - 6) - 4x = 38{,}1 + 7\,(x + 1{,}2)$.

3. Вставьте на место звездочки цифру

   а) в число 350942* так, чтобы оно делилось на 6;

   б) в число 897566* так, чтобы оно делилось на 36.

Ответы: № 1. а) 3; б) – 2; № 2. а) {2}; б){– 3}; № 3. а) 4; б) 4.

7) задания для выбора (тренинга):

№ 1.[14] Длина ломаной *MKN* равна 12 см. Первое ее звено в 3 раза больше второго, а второе ее звено в 5 раз меньше расстояния между ее началом и концом. Найдите длину первого звена этой ломаной.

1) Составить математическую модель к задаче.
2) Решить задачу.

---

[14] Для учащихся, которые допустили ошибку на этапе построения математической модели.

Подробный[15] **образец решения:**

1) Составим математическую модель к задаче:

Пусть длина второго звена x см, тогда $x > 0$. Длина первого звена $3x$ см. Длина ломаной $3x + x$, что по условию равно 12 см. Расстояние между ее началом и концом равно в 5 раз больше второго звена, т. е. $5x$ см. Известно, что длина любой ломаной больше расстояния между ее началом и концом.

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 3x = 12 \\ x + 3x > 5x \end{cases}$$

2) Решим задачу:

1 способ.

$x + 3x = 12 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

$3 > 0$ (И.)

$3 + 9 > 15$ (Л.)

Данная математическая модель не имеет решения, т. к. искомое значение x должно удовлетворять каждому из соотношений.

2 способ.

$x + 3x > 5x \Leftrightarrow 4x > 5x$ (Л., при $x > 0$)

Одно из соотношений математической модели ложно на множестве значений, которые может принимать x, значит, данная модель не имеет решений.

№ 2[16]. Найди решение математической модели:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 2x = 12 \\ x + 3x > 4x \end{cases}$$

Образец решения:

Данная математическая модель не имеет решения, т. к. искомое значение x должно удовлетворять каждому из соотношений.

8) самостоятельная работа № 2:

1. Длина ломаной ABC равна 13 см. Первое ее звено на 5 см меньше второго, и в 4 раза меньше расстояния между ее началом и концом. Найдите длину второго звена этой ломаной.
2. Найдите решение следующей математической модели:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + x + 3 = 15 \\ x + x + 5 > 4x \end{cases}$$

[15] В данном случае предоставляется подробный образец, т. к. с помощью данного тренировочного задания учащимися отрабатываются ошибки в любом из первых девяти шагов алгоритма (т. е. этапа построения математической модели). Каждый ученик должен иметь возможность проверить и зафиксировать правильность выполнения нужного ему шага и отследить дальнейший ход решения.

[16] Для учащихся, которые верно построили модель, но допустили ошибку при поиске ее решения.

9) эталон для самопроверки самостоятельной работы № 2:

	1. Внимательно прочитать задачу.
Известна длина ломаной. Неизвестны длины ее звеньев.	**2. Определить, какие величины известны, и какие надо найти.**
Единицы измерения согласованы (выражены в см).	**3. Проверить соответствие единиц измерения величин.**
Пусть длина первого звена x см,	**4. Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.**
тогда $x > 0$.	**5. Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.**
Длина второго звена (x +5) см. Длина ломаной ($x + x + 5$) см, что по условию равно 13 см. Расстояние между ее началом и концом равно в 4 раза больше первого звена, т. е. $4x$ см. Известно, что длина любой ломаной больше расстояния между ее началом и концом. Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину: $x > 0$ $x + x + 5 = 13$ $x + x + 5 > 4x$	**6. Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта)** **7. Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.**
Уравнение задано в задаче явно. Неравенство $x > 0$ следует из того, что длина величина неотрицательная. Неравенство $x + x + 1 > 2(x + 1)$ задано в задаче неявно (свойство длины ломаной).	**8. Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.**
$x + 5 = ?$	**9. Зафиксировать искомую величину.**
$x + x + 5 = 13 – 2x = 13 – 5 \Leftrightarrow x = 4$ $4 > 0$ (И.) $4 + 4 + 5 > 4 \cdot 4$ (Л.) Данная математическая модель не имеет решения, т. к. искомое значение x должно удовлетворять каждому из соотношений.	**10. Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.**
Ответ: задача не имеет решения.	**11. Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.** **12. Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.**

№ 2

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + x + 3 = 15 \\ x + x + 5 > 4x \end{cases}$$

$x + x + 3 = 15 \Leftrightarrow 2x + 3 = 15 \Leftrightarrow 2x = 15 - 3 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$

$6 > 0$

$6 + 6 + 5 > 4 \cdot 6$ (Л.)

Данная математическая модель не имеет решения, т. к. искомое значение x должно удовлетворять каждому из соотношений.

10) карточка рефлексии:

Понятия и способы действий	Знаю	Умею
Понятие достаточно полной математической модели.		
Составление математической модели, удовлетворяющей основным требованиям.		
Нахождение решения математической модели, которая состоит из нескольких соотношений, которые выполняются одновременно		
Решение задач методом математического моделирования по уточненному алгоритму		

11) карточка для локализации затруднений в группах:

№ задания	Выполнено правильно	Используемые эталоны	Вызвало затруднение	
			Места затруднений (указать шаги алгоритма)	Причины затруднений
1.1.				
1.2.				

Ход урока

1. Мотивация к коррекционной деятельности.

Цель:

1) организовать деятельность учащихся по установке тематических рамок: математическое моделирование;
2) сформулировать основную образовательную цель урока: тренировать умение решать задачи методом математического моделирования;
3) создать условия для возникновения у ученика внутренней потребности включения в коррекционную деятельность.

Организация учебного процесса на этапе 1:

На доске пронумерованные эталоны Д-3— Д-6, у учащихся на партах карточки Р-1, Р-5, Р-10.

— Посмотрите на доску и сформулируйте тему урока.

На доске и в тетрадях фиксируется тема урока.

— Назовите, какой эталон я вывешиваю на доску? (Д-2)

— На каком уроке используется алгоритм самопроверки и работы над ошибками?

— Сформулируйте цель вашей деятельности на уроке такого типа.

— Я напомню вам план урока рефлексии.

На доску вывешивается план урока (Д-1).

— Анализируя план урока, сформулируйте в группах цель каждого этапа урока.

Учащиеся работают в группах 2 минуты. Одна из групп озвучивает результат обсуждения, остальные группы дополняют, уточняют ответ.

2. Актуализация знаний и фиксация затруднения в индивидуальной деятельности.

Цель:

1) самостоятельное воспроизведение **способов действий** (норм) — понятий, алгоритмов, свойств и т. д.: понятия достаточно полной математической модели и этапах математического моделирования, алгоритм решения задач методом математического моделирования по уточненному алгоритму.
2) приведение **примеров** на каждый способ действия;
3) актуализировать соответствующие мыслительные операции, внимание, память и т. д.: сравнение, анализ, аналогия, обобщение;
4) организовать фиксацию актуализированных способов действий в речи;
5) организовать фиксацию актуализированных способов действий в знаках (эталоны);
6) обозначить основные используемые в самостоятельной работе эталоны (A_1, A_2, $П_1$, B, O и т. д.);
7) организовать обобщение актуализированных понятий, правил, способов действий и т. д.;
8) мотивировать учащихся к написанию с. р. № 1 на применение способов действий, запланированных для рефлексивного анализа;
9) организовать выполнение с. р. № 1 с фиксацией учащимися в каждом задании используемого эталона (A_1, A_2, $П_1$ и т. д.);
10) организовать самопроверку учащимися своих работ по образцу и фиксацию полученных результатов (без исправления ошибок);
11) организовать мотивацию учащихся к сопоставлению работ по эталону для самопроверки с целью:
    а) выявления места и причины затруднения;
    б) самопроверки хода решения и правильности фиксации используемого эталона.

Организация учебного процесса на этапе 2:

— Вы продолжаете работать в группах. Каждая группа получит подробный образец выполнения заданий из домашней работы (Р-1). При выполнении, каких заданий вы использовали знания, представленные в эталонах?

— Работая, в группах вы должны проверить правильность выполнения этих заданий, воспроизвести понятия и способы действий, которые использовали. Также вы должны сравнить ход решения задач из домашнего задания, указать сходство и различия в их решениях.

Если при выполнении задания у кого-нибудь в группе возникли затруднения, организаторы должны назвать места и причины возникших затруднений, ошибки необходимо исправить, на работу 3 минуты.

По каждому заданию отчитывается одна из групп, при необходимости ответ дополняется.

Возможный вариант ответа:

1. При составлении математической модели задач используются понятие достаточно полной математической модели (математическая модель удовлетворяет требованию достаточной полноты, если она содержит все существенные для

решения задачи требования, которые следуют как из условия задачи, так и из свойств исследуемых объектов, которые могут и не описываться в явном виде).

Надо было использовать алгоритм решения задач методом математического моделирования по уточненному алгоритму.

2. **Задача № 3(в)** отличается от всех остальных, тем, что только в ее математической модели есть соотношение, которое задано в условии неявно ($x \geqslant 39{,}564$). Это шестой шаг алгоритма: **установить взаимосвязи между величинами (возникающие из свойств моделируемого объекта**).

Решение задачи **№ 20(б)** отличается от решения всех остальных задач, тем, что для поиска решения математической модели используется общенаучный метод — метод перебора, который используется нами, когда мы не имеем известного способа решения. Это десятый шаг алгоритма: **найти все решения, удовлетворяющие построенной модели**.

— Можно сказать, что данная задача отличается не шагом алгоритма, а этапом математического моделирования, каким? (Это этап работы с математической моделью.)

В задаче **№ 28** при **проверке соответствия единиц измерения величин**, столкнулись с тем, что они не согласованы и пришлось переводить 5 лет в месяцы.

Ход решения задачи **№ 4 (в)** ничем не отличался от всех остальных задач.

Учащиеся могут предложить и другие отличия (однако все вышеуказанные отличия нужно разобрать).

3. Все задачи похожи тем, что применялся один и тот же метод решения — метод математического моделирования. Задачи объединяет и то, что составленные по ним математические модели содержат несколько соотношений, которые должны выполняться одновременно. Во всех случаях среди соотношений есть неравенство.

Далее с учащимися выполняется **№ 18** у доски.

Возможный вариант решения:

а) $AD = 9{,}6$см
$AB = AD : 4$
$BC = AB - 0{,}4$
$CD = 1{,}5BC$
Длина ломаной равна $AB + BC + CD$.
Составим математическую модель: $9{,}6 : 4 + (9{,}6 : 4 - 0{,}4) + 1{,}5(9{,}6 : 4 - 0{,}4)$
Найдем значение выражения: $AB + BC + CD = 2{,}4 + 2 + 3 = 7{,}4$ (см)

б) После неудачных попыток построить ломаную, строится подводящий диалог, в результате которого формулируется свойство ломаной: чтобы ломаная существовала должно выполняться условие $AB + BC + CD > AD$.

— Что вы можете сказать, про математическую модель, которую вы построили к задаче? К чему это привело?

— Скорректируйте решение задачи, какой ответ вы получили? (Нет решения, т. к. такой ломаной не существует.)

— Что вы сейчас повторили?

— Что по плану вы дальше будете делать?

— Как вы будете выполнять самостоятельную работу? (Самостоятельно, указывая номера эталонов, которыми будем пользоваться.)

— Когда вы будете ссылаться на алгоритм, указывайте номер шага.

Учащимся раздаются карточки с самостоятельной работой № 1 (Р-3).

— На работу отводится около 8 минут.

После выполнения работы.

— Что теперь вы должны сделать? (Проверить работы по образцу.)

На доску вывешивается образец выполнения самостоятельной работы № 1 (Д-7).

— Зафиксируйте результаты проверки по образцу в карточках результатов (Р-5).

— Что теперь вы должны сделать?

— С какой целью вы будете сопоставлять свои работы с эталоном для самопроверки?

3. Локализация индивидуальных затруднений.

Цель:

организовать пошаговое сопоставление работ по эталону для самопроверки (работа проводится в группах):

а) организовать выявление учащимися места затруднения;

б) организовать выявление учащимися причины затруднения;

в) организовать фиксацию отсутствия затруднений в ходе решения и его обосновании.

Организация учебного процесса на этапе 3:

Каждому учащемуся в группе раздаётся эталон для самопроверки самостоятельной работы № 1 (Р-4).

— Работать вы будете в группах. Каждый из вас должен сопоставить свою работу с эталоном для самопроверки. Что вы будете использовать при проверке? (Алгоритм самопроверки.)

— Если у вас возникли затруднения, что вы должны сделать? (Мы должны определить, в каких местах возникли затруднения, и по каким причинам возникли затруднения.)

—Вы каждый это сделаете самостоятельно (проверяйте решение пошагово), но руководители групп должны зафиксировать результаты самопроверки всех членов группы в карточке (Р-11). На работу 3 минуты.

По окончании работы каждый руководитель группы анализирует результаты самопроверки во внешней речи.

Можно локализацию затруднений провести и фронтально (тогда проверка проводится по каждому шагу алгоритма и учащиеся параллельно фиксируют место и причину затруднения).

— Какие эталоны использовали при выполнении первого задания?

— У кого возникли затруднения при чтении условия (не внимательно прочитал)? При определении известных и неизвестных величин? При фиксировании неизвестной величины?

— В чём причина возникшего затруднения?

— Пометьте, какой именно шаг алгоритма не умеете применять.

— Обобщим, у кого возникли затруднения в первом задании? Какой этап моделирования вызвал у вас трудности? (Составление математической модели.)

Аналогичные вопросы задаются по второму заданию (решению модели). После чего, уточняется.

— С какой именно моделью, вы не умеете работать? (С моделью, состоящей из нескольких соотношений, которые выполняются одновременно.)

— У кого работа выполнена правильно?

— Какой вывод вы можете сделать?

4. Постановка цели коррекционной деятельности (1 мин)

Цель:

Организовать постановку учащимися индивидуальных целей своей деятельности.

Организация учебного процесса на этапе 4:

— Что дальше будут делать те, кто выяснил, что затруднений нет? (Мы будем работать с дополнительными заданиями.)

Учащимся раздаются карточки с дополнительными заданиями (Р-6).

— Посмотрите на задания и сформулируйте цель своей деятельности.

— Сформулируйте цель своей дальнейшей работы, те, у кого затруднения зафиксированы.

— Что вам будет помогать при работе над ошибками? (Алгоритм исправления ошибок.)

5. Коррекция выявленных затруднений (4—5 мин)

Цель:

- для учащихся, допустивших ошибки:
    1) Организовать исправление ошибок с помощью с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий.
    2) Организовать самопроверку выполненных заданий.
- для учащихся, не допустивших ошибки:

  Организовать выполнение заданий более высокого уровня сложности по изучаемой теме или заданий творческого уровня (требующих построения новых методов решения).

Организация учебного процесса на этапе 5:

Можно объединить учащихся в группы, и они продолжат работать над ошибками в соответствии с алгоритмом исправления ошибок. Для выполнения тренировочных задании учащимся предлагаются карточки для тренинга (Р-7).

— Ребята, которые ошиблись, в одном из шагов на этапе построения математической модели, можете ли вы отработать только этот шаг, без выполнения всех предыдущих? Можете ли вы утверждать, что, составив верную математическую модель, вы ее правильно решите?

(Нам придется выполнить не только те шаги, в которых допустили ошибку, но и все предыдущие и последующие шаги.)

— Какое это задание? (Задание №1.)

— Для кого, подготовлено задание №2? (Для тех, кто правильно составил математическую модель, но ошибся при работе с математической моделью.)

В конце работы подводится результат.

— Кому удалось выполнить тренировочные задания без ошибок?

6. Обобщение затруднений во внешней речи.

Цель:

1) организовать обсуждение типовых затруднений в группах;
2) организовать проговаривание формулировок способов действий, которые вызвали затруднение.

Организация учебного процесса на этапе 5:

— В каких местах были допущены ошибки?

— На какие эталоны были допущены ошибки?

Эталоны (шаги алгоритма), при использовании которых были допущены ошибки, озвучиваются.

7. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.

Цель:

- для учащихся, допустивших ошибки:
    1) организовать выполнение с. р. № 2, аналогичной с. р. № 1 (учащиеся выбирают задания только на способы действий, в которых были допущены ошибки);

2) организовать самопроверку учащимися своих работ по эталону для самопроверки и знаковую фиксацию результатов;
3) организовать фиксацию преодоления возникшего ранее затруднения;

- для учащихся, не допустивших ошибки:
  организовать самопроверку учащимися заданий требующих построения новых методов решения или заданий пропедевтического характера по подробному образцу.

Организация учебного процесса на этапе 6:

— Кто будет выполнять вторую самостоятельную работу? (Те, кто допустил ошибки в первой самостоятельной работе.)

— Как вы будете работать со второй самостоятельной работой? (Мы выполним только те задания, которые выполнили неправильно.)

Учащимся раздаются карточки со второй самостоятельной работой (Р-8). На работу отводится 7 минут. После выполнения работы учащиеся сопоставляют свои работы с эталоном для самопроверки (Р-9), фиксируют результаты в таблице (Р-5).

— Кто справился с затруднениями в задании 1?

— Кому удалось исправить ошибки в задании 2?

— С какими заданиями справились те, кто работал с дополнительными заданиями?

— В каких заданиях вы столкнулись с затруднениями?

— Вы смогли справиться с затруднениями, что вам в этом помогло?

8. Включение в систему знаний и повторение.

Цель:

Повторить понятие высказывания и определения, понятия разности, среднего арифметического, переменной величины, степени с натуральным показателем.

Организация учебного процесса на этапе 7:

— А теперь я предлагаю поработать с высказываниями.

№ 7

Задание выполняется устно, учащиеся фронтально показывают истинность или ложность данных высказываний на планшетках (можно **прав**ой рукой сигнализировать **прав**ильность, **л**евой **л**ожность). Для обоснования ложности высказывания одним из учащихся приводится верное определение.

Возможный вариант выполнения задания:

Общим для данных высказываний является, то в них объясняется значение нового слова, т.е. все они являются определениями.

а) Истинное;

б) Ложное, т. к. средним арифметическим называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

в) Истинное;

г) Ложное, т. к. Натуральной степенью n числа a называется число an ,равное произведению n множителей, каждый из которых равен a.

9. Рефлексия деятельности на уроке.

Цель:

1) организовать фиксацию степени соответствия поставленной цели и результатов деятельности;
2) организовать вербальную фиксацию причин (алгоритмов, правил, понятий и т.д.) возникших на уроке затруднений;

3) организовать вербальную фиксацию способа исправления возникших ошибок (алгоритм исправления ошибок);
4) организовать фиксацию неразрешенных на уроке затруднений как направление будущей деятельности;
5) организовать оценивание учащимися собственной работы на уроке;
6) организовать обсуждение и запись домашнего задания.

Организация учебного процесса на этапе 8:

— Что необходимо сделать в конце урока?

На доску вывешивается карточка с вопросами (Д-8).

— Обсудите в группах следующие вопросы:

- Какие цели ставили в начале урока?
- Смогли реализовать поставленные цели?
- Каковы причины возникших затруднений?
- С какими затруднениями не смогли справиться?

— А теперь каждый проанализируйте свою работу на уроке.

Учащиеся работают с карточками рефлексии (Р-10).

Домашнее задание:

Всем: Выберите на стр. 42 те номера, которые относятся к теме, которую вы изучаете и решите одно из этих заданий на выбор.

Те ребята, которые выполнили не все дополнительные задания, дорешайте оставшиеся задания дома под буквой (а).

Те, кто справился со всеми дополнительными заданиями, могут по желанию выполнить № 52*

Тип урока: ОРК[17]
Тема: «Контрольная работа на повторение»
Основные цели:

1) формировать способность учащихся к осуществлению процедуры контроля;
2) формировать способность учащихся к выявлению причин затруднений собственной деятельности;
3) контроль знаний, умений, навыков по программе 5—6 класса и теме: «Построение математической теории».

Оборудование
Демонстрационный материал:

1) алгоритм решения задач методом математического моделирования (из урока № 2, Д-5);
2) алгоритм доказательства методом от противного (из урока № 6, Д–7);
3) алгоритм доказательства методом проб и ошибок (из урока № 6, Д–3);
4) известные способы решения уравнения (из урока № 8, Д-3);
5) понятие степени с натуральным показателем (из урока № 8, Д-5);
6) алгоритмы действий с рациональными числами (эталоны 5—6 класса);
7) образец выполнения контрольной работы:

[17] Урок обучающего и развивающего контроля.

Вариант 1

Обязательная часть.

1. – 0,05.

2. *Ответ:* {–5}

3. 1410; 4410; 7410; 2415; 5415; 8415.

4. Можно доказать утверждение как прямым методом, так и методом от противного.

5. *Ответ:* нет решения.

Дополнительная часть.

1. 0,9*bx*.

2. *Ответ:* 5,5 часов

3. а) вывод верный;
б) вывод неверный.

Вариант 2

Обязательная часть.

1. –5

2. *Ответ:* {–0,8}

3. 340 560; 349 560; 344 565.

4. Можно доказать утверждение методом от противного.

5. *Ответ:* нет решения.

Дополнительная часть.

1. $30ax^2$

2. *Ответ:* за 20,25 часа

3. а) вывод верный;
б) вывод неверный.

8) критерии оценивания контрольной работы:

Обязательная часть

1. 7 баллов;
2. 7 баллов;
3. 7 баллов;
4. 9 баллов;
5. 10 баллов.

Дополнительная часть

1. 8 баллов;
2. 9 баллов;
3. 10 баллов.

К выполнению дополнительной части можно приступать после выполнения обязательных заданий.

«5» — 40 и выше баллов;

«4» — 31—39 баллов;

«3» — 21—30 баллов.

Раздаточный материал

1) контрольная работа:

Вариант 1.

Обязательная часть.

1. Вычислите: $-1{,}114 + \frac{2}{3} \cdot (1{,}134 : 0{,}28 - 4{,}254) + 1\frac{32}{49} : (4\frac{15}{49} - 2\frac{13}{14})$

2. Решите уравнение: $5{,}37 + 3{,}58 \cdot (0{,}16x - 0{,}7) = 0$

3. К числу 41 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы оно делилось на 15.

4. Докажите, что равенство $2m(m + 1) = 77\,494$ неверно для любого натурального числа m.

5. Решите задачу:

«Первый угол в треугольнике на 25° больше второго, а второй — в 2 раза больше третьего. Найти величину первого угла этого треугольника, если сумма его второго и третьего углов равна 120°».

Дополнительная часть.

1. Упростите выражение, считая значения всех букв не равными нулю:

$$\frac{6ax^2}{25b^2y} : \frac{4ax}{15b^3y}$$

2. Решите задачу:

«Две газонокосилки, работая вместе, скосили газон за 3 часа. Производительность первой газонокосилки составляет 120% от производительности второй. Определить, сколько часов потребовалось бы первой газонокосилке, чтобы самостоятельно скосить этот газон? Считать, что газонокосилки работают с постоянной производительностью».

3. Проверьте истинность следующих выводов с помощью диаграмм Эйлера—Венна:

а) Все балерины любят танцевать. Настя — балерина. Значит, Настя любит танцевать.

б) Все балерины любят танцевать. Ольга не балерина. Значит, Ольга не любит танцевать.

Вариант 2.

Обязательная часть.

1. Вычислите: $-2{,}5 + (1{,}295 + 1{,}936 : 3\frac{1}{3}) \cdot 1\frac{16}{19} + 4\frac{5}{9} : (2\frac{14}{27} - 3\frac{5}{18})$

2. Решите уравнение: $(2{,}5x + 0{,}5) \cdot 0{,}094 = 0{,}259 - 0{,}4$

3. Замените звездочки в записи числа 34*56* так, чтобы оно делилось на 45.

4. Докажите, что не существует наибольшего натурального числа, которое при делении на 7 дает остаток 3.

5. Решите задачу:

«Расстояние AD между началом и концом ломаной $ABCD$ равно 92 см. Известно, что длина второго звена ломаной в 3 раза больше, чем первого, но в 2 раза меньше, чем третьего. Найти длину ломаной $ABCD$, если известно, что сумма первого и третьего ее звеньев равна 56 см».

Дополнительная часть.

1. Упростите выражение, считая значения всех букв не равными нулю:

$$\frac{100a^2b}{9x} : \frac{10ab}{27x^3}$$

2. Решите задачу:

«Два эскалатора, работая вместе, перевезли за 9 ч некоторое количество пассажиров. Первый эскалатор перевозил в час 80% от количества пассажиров, перевозимых за час вторым эскалатором. Определить, за сколько часов первый эскалатор перевез бы это же количество пассажиров, если бы работал самостоятельно? Считать, что эскалаторы перевозят пассажиров с постоянной производительностью».

3. Проверьте истинность следующих выводов с помощью диаграмм Эйлера—Венна:

а) Все дайверы видели китовую акулу. Саша — дайвер. Значит, Саша видел китовую акулу.

б) Все дайверы видели китовую акулу. Игорь — не дайвер. Значит, Игорь не видел китовую акулу.

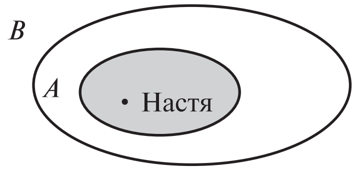
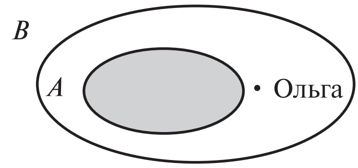
2) эталон для самопроверки контрольной работы:

Вариант 1. Обязательная часть	
1. $-1{,}114 + \frac{2}{3} \cdot (1{,}134 : 0{,}28 - 4{,}254) + 1\frac{32}{49} : (4\frac{15}{49} - 2\frac{13}{42})$	
1) $1{,}134 : 0{,}28 = 113{,}4 : 28 = 4{,}05$	Алгоритм деления десятичных дробей.
2) $4{,}05 - 4{,}254 = -0{,}204$	Алгоритм чисел с разными числами и вычитания десятичных дробей.
3) $\frac{2}{3} \cdot (-0{,}204) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{204}{1000} =$ $= -\frac{2 \cdot 204}{3 \cdot 1000} = -\frac{136}{1000} = -0{,}136$	Алгоритм совместных действий обыкновенных и десятичных дробей и алгоритм умножения чисел с разными знаками.
4) $4\frac{15}{49} - 2\frac{13}{14} = 4\frac{30}{98} - 2\frac{91}{98} =$ $=3\frac{128}{98} - 2\frac{91}{98} =1\frac{37}{98}$	Алгоритм вычитания смешанных чисел.
5) $1\frac{32}{49} : 1\frac{37}{98} = \frac{81}{49} : \frac{135}{98} = \frac{81 \cdot 98}{49 \cdot 135} =$ $= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1{,}2$	Алгоритм деления смешанных чисел.
6) $-1{,}114 + (-0{,}136) = -1{,}25$	Алгоритм сложения отрицательных чисел и алгоритм десятичных дробей.
7) $-1{,}25 + 1{,}2 = -0{,}05$	Алгоритм сложения чисел с разными знаками и алгоритм вычитания десятичных дробей.

2. $5{,}37 + 3{,}58 \cdot (0{,}16x - 0{,}7) = 0$	
$537 + 358 \cdot (0{,}16x - 0{,}7) = 0;$ $358 \cdot (0{,}16x - 0{,}7) = -537;$ $0{,}16x - 0{,}7 = -1{,}5;$ $0{,}16x = -1{,}5 + 0{,}7;$ $0{,}16x = -0{,}8;$ $x = -0{,}8 : 0{,}16;$ $x = -5$ *Ответ:* $\{-5\}$	Умножить обе части уравнения на 100, применяя распределительное свойство умножения. Правило нахождения неизвестного слагаемого. Правило нахождения неизвестного множителя. Правило нахождения неизвестного уменьшаемого. Правило нахождения неизвестного множителя.
3. К числу 41 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы оно делилось на 15.	
41 — число должно делиться на 15, значит, оно должно делиться на 3 и на 5. Последняя цифра может быть 0 или 5: *410 или *415. Сумма цифр должна делиться на 3: $* + 4 + 1 + 0 = 3k;$ $* + 5 = 3k$ Вместо * могут стоять цифры: 1; 4; 7 $* + 4 + 1 + 5 = 3n;$ $* + 10 = 3n$ Вместо * могут стоять цифры: 2; 5; 8 *Ответ:* 1410; 4410; 7410; 2415; 5415; 8414.	Признак делимости на 5. Признак делимости на 3.
4. Докажите, что равенство $2m(m + 1) = 77\,494$ неверно для любого натурального числа m.	
1 способ: доказательство прямым методом: $2m(m + 1) = 77\,494 \Leftrightarrow m(m + 1) = 38\,747$ Методом проб и ошибок выходим на пару чисел 196 и 197. Если $n = 196$, то $n(n + 1) = 196 \cdot 197 = 38\,612$, меньше 38 747. Если $n = 197$, то $n(n + 1) = 197 \cdot 198 = 39\,006$, больше 38 747. При $n \leqslant 196$, то $n(n + 1) < 38\,747$, при $n > 187$, $n(n + 1) > 38\,747$, значит, такого $n \in N$ не существует.	1) Подобрать конкретные объекты, которые могут обладать заданными свойствами. 2) Показать, что ни эти конкретные объекты, ни любые другие объекты, не удовлетворяют этим свойствам.

2 способ: доказательство методом от противного: 1) Предположим, что существует такое натуральное число, при котором верно $2m(m + 1) = 77\,494$. 2) Разделим обе части равенства на 2. Получим $m(m + 1) = 38\,747$. При этом m и $m + 1$ два последовательных числа, значит, одно из них четно, а другое нечетно. Тогда произведение $m(m + 1)$ четное число, а число 38 747 нечетно. *Можно найти и другое противоречие:* m и $m + 1$ два последовательных числа, значит, одно из них четно, а другое нечетно. $m(m + 1)$ произведение четно, тогда в равенстве левая часть $2m(m + 1)$ делится на 4, а правая часть 77 494 на 4 не делится (94 не делится на 4). 3) Полученное противоречие, показывает, что предположение неверно. Значит, равенство $2m(m + 1) = 77\,494$ неверно при любом натуральном m.	1) Предположить, что доказываемое утверждение (A) неверно, т. е. ($\neg A$) верно. 2) Исходя из этого предположения, либо получить противоречие, либо прийти к выводу об истинности заведомо ложного утверждения. 3) Сделать вывод о том, что предположение ($\neg A$) неверно, а значит, верно доказываемое утверждение (A).
5. Решите задачу: «Расстояние AD между началом и концом ломаной $ABCD$ равно 92 см. Известно, что длина второго звена ломаной в 3 раза больше, чем первого, но в 2 раза меньше, чем третьего. Найти длину ломаной $ABCD$, если известно, что сумма первого и третьего ее звеньев равна 56 см».	
Пусть $x°$ — величина третьего угла, $0 < x < 180$. Тогда 2-ой угол равен $(2x)°$, а первый угол равен $(2x + 25)°$. По свойству углов любого треугольника их сумма $x + 2x + (2x + 25)°$ равна 180°. По условию сумма второго и третьего угла равна 120°. Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину: $\begin{cases} 0 < x < 180 \\ 2x + x = 120 \\ x + 2x + (2x + 25) = 180 \end{cases} \rightarrow \boxed{2x + 25 = ?}$ $2x + x = 120$ $3x = 120$ $\underline{x = 40}$	1) Внимательно прочитать задачу. 2) Определить, какие величины известны, и какие надо найти. 3) Проверить соответствие единиц измерения величин. 4) Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой. 5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины. 6) Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта) 7) Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их. 8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.

<table>
<tr><td>Если $x = 40$,
то $40 + 2 \cdot 40 + (2 \cdot 40 + 25) = 180$ (Л.).
Данная математическая модель не имеет решения, т. к. искомое значение x должно удовлетворять каждому из соотношений.
Ответ: нет решения.</td><td>9) Зафиксировать искомую величину.
10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.
11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дополнительная часть</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Упростите выражение, считая значения всех букв не равными нулю:
$\frac{6ax^2}{25b^2y} : \frac{4ax}{15b^3y}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{6ax^2}{25b^2y} : \frac{4ax}{15b^3y} = \frac{6ax^2 \cdot 15b^3y}{25b^2y \cdot 4ax} = \frac{3x \cdot 3b}{5 \cdot 2} =$
$= \frac{9xb}{10} = 0{,}9xb$</td><td>Алгоритм деления обыкновенных дробей, определение степени чисел, способы сокращения дробей.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Решите задачу:
«Две газонокосилки, работая вместе, скосили газон за 3 часа. Производительность первой газонокосилки составляет 120% от производительности второй. Определить, сколько часов потребовалось бы первой газонокосилке, чтобы самостоятельно скосить этот газон? Считать, что газонокосилки работают с постоянной производительностью».</td></tr>
<tr><td>Пусть производительность второй газонокосилки x, $x > 0$.
Тогда производительность первой — $1{,}28x$.
Общая производительность эскалаторов равна $x + 0{,}8x$.
Из условия задачи следует, что их общая производительность равна $\frac{1}{3}$.
Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:
$\begin{cases} x > 0 \\ x + 1{,}2x = \frac{1}{3}; \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{1}{1{,}2x} = ?}$
$2{,}2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} : 2{,}2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{33}$
$\frac{5}{33} > 0$
$\frac{1}{1{,}2 \cdot \frac{5}{33}} = 5{,}5$
$\frac{5}{33} \cdot 1{,}2 = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$
$1 : \frac{2}{11} = \frac{11}{2} = 5{,}5$
Ответ: за 5,5 часов.</td><td>1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны, и какие надо найти.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.
5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6) Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта).
7) Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.
8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.
9) Зафиксировать искомую величину.
10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.
11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.</td></tr>
</table>

3. Проверьте истинность следующих выводов с помощью диаграмм Эйлера—Венна: а) Все балерины любят танцевать. Настя — балерина. Значит, Настя любит танцевать. б) Все балерины любят танцевать. Ольга не балерина. Значит, Ольга не любит танцевать.	
A — множество балерин; B — множество людей, которые любят танцевать	
а)  Вывод верный.	б)  Вывод неверный.
Вариант 2. Обязательная часть	
1. Вычислите: $-2{,}5 + (1{,}295 + 1{,}936 : 3\frac{1}{5}) \cdot 1\frac{16}{19} + 4\frac{5}{9} : (2\frac{14}{27} - 3\frac{5}{18})$	
1) $1{,}936 : 3\frac{1}{5} = 1{,}936 : 3{,}2 =$ $= 19{,}36 : 32 = 0{,}605$	Алгоритм выполнения совместных действий десятичных и обыкновенных дробей, алгоритм деления десятичных дробей.
2) $1{,}295 + 0{,}605 = 1{,}9;$	Алгоритм сложения десятичных дробей.
3) $1{,}9 \cdot 1\frac{16}{19} = \frac{19}{16} \cdot \frac{35}{19} = 3{,}5;$	Алгоритм выполнения совместных действий десятичных и обыкновенных дробей, алгоритм умножения обыкновенных дробей.
4) $2\frac{14}{27} - 3\frac{5}{18} = -(3\frac{5}{18} - 2\frac{14}{27}) =$ $-(3\frac{15}{54} - 2\frac{28}{54}) = -(2\frac{69}{54} - 2\frac{28}{54}) =$ $= -\frac{41}{54}$	Алгоритм нахождения разности рациональных чисел и алгоритм нахождения разности смешанных чисел.
5) $4\frac{5}{9} : (-\frac{41}{54}) = \frac{41}{9} : (-\frac{41}{54}) =$ $= -\frac{41 \cdot 54}{9 \cdot 41} = -6;$	Алгоритм деления чисел с разными знаками и алгоритм деления смешанных чисел.
6) $-2{,}5 + 3{,}5 = 1;$	Алгоритм сложения чисел с разными знаками, алгоритм вычитания десятичных дробей.
7) $1 + (-6) = -5$	Алгоритм сложения чисел с разными знаками.

<table>
<tr><td colspan="2">2. $(2{,}5x + 0{,}5) \cdot 0{,}094 = 0{,}259 - 0{,}4$</td></tr>
<tr><td>$(2{,}5x + 0{,}5) \cdot 0{,}094 = -0{,}141;$
$2{,}5x + 0{,}5 = -0{,}141 : 0{,}094;$
$2{,}5x + 0{,}5 = -1{,}5;$
$2{,}5x = -1{,}5 - 0{,}5;$
$2{,}5x = -2;$
$x = -2 : 2{,}5;$
$x = -0{,}8$
Ответ: $\{-0{,}8\}$</td><td>Правило нахождения неизвестного множителя.
Правило нахождения неизвестного слагаемого.
Правило нахождения неизвестного множителя.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Замените звездочки в записи числа 34*56* так, чтобы оно делилось на 45.</td></tr>
<tr><td>34*56* должно делиться на 45, значит, оно должно делиться на 5 и на 9.
Последняя цифра может быть 0 или 5 : 34*560 или 34*565.
Сумма цифр числа должна делиться на 9:
$3 + 4 + * + 5 + 6 + 0 = 9n$
$18 + * = 9n$
0; 9
$3 + 4 + * + 5 + 6 + 5 = 9m$
$23 + * = 9m$
4
Ответ: 340 560; 349 560; 344 565</td><td>Признак делимости на 5.
Признак делимости на 9.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Докажите, что не существует наибольшего натурального числа, которое при делении на 7 дает остаток 3.</td></tr>
<tr><td>Доказательство (методом от противного):
1) Предположим, что существует наибольшее натуральное число k, которое при делении на 7 дает остаток 3, это число имеет вид $7n + 3$, где $n \in N$.
2) Однако, прибавив к этому числу 7, получим $7n + 3 + 7 = 7(n + 1) + 3$, где $n + 1 \in N$.
Обозначив $n + 1$ за m, получим число вида $7m + 3$, где $m \in N$, большее, чем k. Что противоречит предположению о том, что k наибольшее.
3. Следовательно, наше предположение не верно, а, значит, не существует наибольшего натурального числа, которое при делении на 7 дает остаток 3.
Ч. т. д.</td><td>1) Предположить, что доказываемое утверждение (A) неверно, т. е. ($\neg A$) верно.
2) Исходя из этого предположения, либо получить противоречие, либо прийти к выводу об истинности заведомо ложного утверждения.
3) Сделать вывод о том, что предположение ($\neg A$) неверно, а значит, верно доказываемое утверждение (A).</td></tr>
</table>

5. Решите задачу: «Расстояние *AD* между началом и концом ломаной *ABCD* равно 92 см. Известно, что длина второго звена ломаной в 3 раза больше, чем первого, но в 2 раза меньше, чем третьего. Найти длину ломаной *ABCD*, если известно, что сумма первого и третьего ее звеньев равна 56 см».	
Пусть длина звена $AB = x$ см, $x > 0$. Длина звена $BC = 3x$ см, а длина звена $CD = 6x$ см. По условию сумма длин звеньев *AB* и *CD* равна 56 см. Известно, что длина любой ломаной больше расстояния между ее началом и концом, т. е. $x + 3x + 6x$ больше 92. Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину: $\begin{cases} x > 0 \\ x + 6x = 56 \\ x + 3x + 6x > 92 \end{cases} \quad \to \; x + 3x + 6x — ?$ $7x = 56$; $x = 8$ Если $x = 8$, то $8 + 3 \cdot 8 + 6 \cdot 8 > 92$ (Л.) Данная математическая модель не имеет решения, т. к. искомое значение x должно удовлетворять каждому из соотношений. *Ответ:* нет решения.	1) Внимательно прочитать задачу. 2) Определить, какие величины известны, и какие надо найти. 3) Проверить соответствие единиц измерения величин. 4) Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой. 5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины. 6) Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта) 7) Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их. 8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением. 9) Зафиксировать искомую величину. 10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели. 11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи. 12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.
Дополнительная часть	
1. Упростите выражение, считая значения всех букв не равными нулю: $\frac{100a^2b}{9x} : \frac{10ab}{27x^3}$	
$\frac{100a^2b}{9x} : \frac{10ab}{27x^3} = \frac{100a^2b \cdot 27x^3}{9x \cdot 10ab} =$ $= \frac{10a \cdot 3x^2}{1 \cdot 1} = 30ax^2$	Алгоритм деления обыкновенных дробей, определение степени чисел, способы сокращения дробей.
2. Решите задачу: «Два эскалатора, работая вместе, перевезли за 9 ч некоторое количество пассажиров. Первый эскалатор перевозил в час 80% от количества пассажиров, перевозимых за час вторым эскалатором. Определить, за сколько часов первый эскалатор перевез бы это же количество пассажиров, если бы работал самостоятельно? Считать, что эскалаторы перевозят пассажиров с постоянной производительностью».	

Пусть производительность второго эскалатора x, $x > 0$.

Тогда производительность первого эскалатора $0{,}8x$.

Общая производительность эскалаторов равна $x + 0{,}8x$.

Из условия задачи следует, что их общая производительность равна .

Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину $\frac{1}{9}$:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 0{,}8x = \frac{1}{9}; \end{cases} \quad \to \quad \boxed{\frac{1}{0{,}8x} = ?}$$

$$1{,}8x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} : 1{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \cdot 10}{9 \cdot 18} \Leftrightarrow x = \frac{5}{81}$$

$$\frac{1}{0{,}8 \cdot \frac{5}{81}} = 15{,}25$$

$$0{,}8 \cdot \frac{5}{81} = \frac{8 \cdot 5}{10 \cdot 81}$$

$$1 : \frac{4}{81} = \frac{81}{4} = 20{,}25 \text{ (ч)}$$

Ответ: за 20,25 часов.

1) Внимательно прочитать задачу.

2) Определить, какие величины известны, и какие надо найти.

3) Проверить соответствие единиц измерения величин.

4) Выбрать неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.

5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

6) Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта).

7) Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.

8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.

9) Зафиксировать искомую величину.

10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.

12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

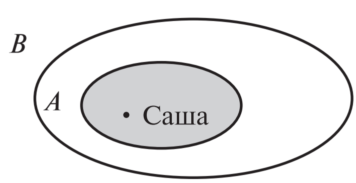
3. Проверьте истинность следующих выводов с помощью диаграмм Эйлера—Венна:

а) Все дайверы видели китовую акулу. Саша — дайвер. Значит, Саша видел китовую акулу.

б) Все дайверы видели китовую акулу. Игорь — не дайвер. Значит, Игорь не видел китовую акулу.

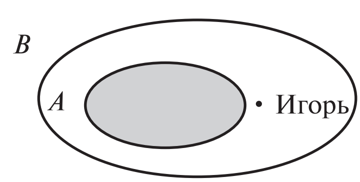
A — множество дайверов; B — множество людей, которые видели акулу.

а)



Вывод верный.

б)



Вывод неверный.

4) карточка для этапа рефлексии:

Темы	Знаю	Умею
Нахождение значений числовых выражений		
Решение уравнений		
Признаки делимости		
Доказательство утверждений		
Решение задач методом математического моделирования		
Упрощение буквенных выражений, содержащих степени		
Проверка правильности логического вывода с помощью диаграмм Эйлера—Венна*		

Ход уроков

Урок 1

1. Мотивация к контролирующей деятельности.

Цель:

1) организовать деятельность учащихся по установке тематических рамок: моделирование и повторение изученного в 5—6 классе;
2) сформулировать основную образовательную цель урока: проконтролировать знания и умения по программе 5—6 класса и материала первой главы;
3) создать условия для возникновения у ученика внутренней потребности включения в контролирующую деятельность.

Организация учебного процесса на этапе 1:

— Какой урок вы проводили накануне? (Мы готовились к контрольной работе.)

— По какой теме вы готовились?

— Какую цель вы ставите перед собой сегодня?

— Сегодня вы не только будете проверять себя, но сами будете оценивать свои работы. Для того, чтобы грамотно оценить свою работы вам предлагается критерий оценивания.

На доску вывешивается карточка: Д-8.

— На этом уроке вы напишите контрольную работу, в конце урока получите образцы выполнения заданий и в соответствии с данными критериями вы поставите себе отметку.

— На прошлых уроках у вас всё получалось и я уверена, что сегодня с контрольной работой вы то же все справитесь. Для успешной работы вспомним основные моменты данных тем.

2. Актуализация знаний и фиксация затруднения в индивидуальной деятельности.

Цель:

1) актуализировать знания, необходимые для написания контрольной работы;
2) организовать фиксацию актуализированных способов действий в речи (название способов действий);
3) организовать фиксацию актуализированных способов действий в знаках (эталоны)[18];
4) мотивировать учащихся к написанию контрольной работы;
5) организовать выполнение контрольной работы;

[18]Все эталоны для 1-6 классов представлены в методическом пособии Л. Г. Петерсон, Л. А. Грушевской, М. А. Кубышевой «Построй свою математику». – М.: УМЦ «Школа 2000...», 2007.

6) организовать самопроверку учащимися своих работ по образцу и фиксацию полученных результатов (без исправления ошибок);
7) оценить свою работу.

Организация учебного процесса на этапе 2:

На доске все эталоны (Д-1—Д-6).

— Какие эталоны вы видите?

— Я вам даю 1 минуту на просмотр данных эталонов.

— Что вы сейчас будете делать? (Напишем контрольную работу.)

— С какой целью вы будете писать контрольную работу?

Каждому ученику раздаётся вариант контрольной работы (Р-1). Эталоны убираются с доски. Учащиеся выполняют контрольную работу.

За 2 минуты до конца урока на доску вывешивается образец выполнения контрольной работы (Д-7).

— Проверяя работы, вы проверяете ответы, и если ответ совпал, рядом с заданием вы ставите соответствующее количество балов, если ответ не совпал — рядом ставите « − ». После проверки, вы считаете, набранные баллы и выставляете себе соответствующую отметку.

После самопроверки работы сдаются учителю, который проверяет их и выставляет свою отметку.

Урок 2

3. Локализация индивидуальных затруднений.

Цель:

1) поставить цель деятельности;
2) мотивировать учащихся к сопоставлению своих работ по эталону для самопроверки;
3) организовать сопоставление работ по эталону для самопроверки с целью:
   а) организовать выявление учащимися места затруднения;
   б) организовать выявление учащимися причины затруднения;
   в) организовать фиксацию отсутствия затруднений в ходе решения и его обосновании.

Организация учебного процесса на этапе 3:

— Сегодня вы сможете проанализировать правильность самопроверки работ, правильность самооценки, сможете поработать над своими ошибками.

— Вы уже проверили свои работы по образцу и уже знаете, с какими заданиями вы не справились, что дальше надо сделать? (Надо сопоставить свои работы с эталоном для самопроверки.)

— С какой целью вы будете сопоставлять работы с эталоном для самопроверки?

— Сегодня выполнять эту работу будете самостоятельно, а затем мы все вместе выясним в каких заданиях и почему возникли затруднения, и у кого затруднений нет.

Учащиеся получают свои работы и эталоны для самопроверки (Р-2), анализируют правильность самопроверки работы по образцу.

При необходимости проводится согласование отметок.

— У кого возникли затруднения при выполнении обязательной части?

— В каких заданиях обязательной части возникли затруднения?

— Почему возникли затруднения?

— Кто выполнял задания дополнительной части?

— У кого возникли затруднения при выполнении заданий дополнительной части?

— В каких заданиях дополнительной части возникли затруднения?

— Почему возникли затруднения?

— У кого все задания обязательной части выполнены правильно, что вы можете сказать?

4. Постановка цели коррекционной деятельности (1 мин)

Цель: организовать постановку учащимися индивидуальных целей своей деятельности.

Организация учебного процесса на этапе 4:

— Сформулируйте цель те, кто выяснил, что затруднений нет. (Мы будем выполнять дополнительные задания.)

— В качестве дополнительных заданий вы продолжаете работать с заданиями из дополнительной части контрольной работы. Приступайте к работе.

— Сформулируйте цель своей дальнейшей деятельности те, кто выяснил, что затруднения есть. (Исправить свои ошибки, используя эталоны для самопроверки, потренироваться в решении аналогичных заданий.)

— Что вам поможет при работе над ошибками? (Алгоритм работы над ошибками.)

5. Коррекция выявленных затруднений (4—5 мин)

Цель:

• для учащихся, допустивших ошибки:

1) Организовать исправление ошибок с помощью с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий.
2) Организовать самопроверку выполненных заданий.

• для учащихся, не допустивших ошибки:

организовать выполнение заданий более высокого уровня сложности по изучаемой теме или заданий творческого уровня (требующих построения новых методов решения). Эти задания они выполняют вплоть до этапа повторения.

Организация учебного процесса на этапе 5:

Алгоритм работы над ошибками должен быть у каждого на столе.

Учащиеся самостоятельно выполняют работу над ошибками. Для тренинга предлагаются номера из учебника: №№ 110 (в), 112 (а), 113 (а), 122 (в), 126 (а). Для самопроверки предлагаются карточки с образцами (Р-3).

6. Обобщение затруднений во внешней речи.

Цель:

1) организовать обсуждение типовых затруднений;
2) организовать проговаривание формулировок способов действий, которые вызвали затруднение.

Организация учебного процесса на этапе 5:

После выполнения работы над ошибками проговариваются ошибки, допущенные в работе, так же проговариваются формулировки способов действий, которые вызвали затруднение.

7. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.

Цель:

• для учащихся, допустивших ошибки:

1) организовать выполнение самостоятельной работы (другой вариант контрольной работы, учащиеся выбирают задания только на те способы действий, в которых были допущены ошибки);
2) организовать самопроверку учащимися своих работ по эталону для самопроверки и знаковую фиксацию результатов;
3) организовать фиксацию преодоления возникшего ранее затруднения;

• для учащихся, не допустивших ошибки:

организовать самопроверку учащимися заданий требующих построения новых методов решения или заданий пропедевтического характера по подробному образцу.

Организация учебного процесса на этапе 6:

— Что сейчас вы должны сделать? (Решить аналогичные задания из другого варианта.)

Учащимся предлагается аналогичная работа (может быть другой вариант), из которой они должны выполнить только те задания, которые вызвали затруднения лично у них и проверить свою работу по эталону для самопроверки, фиксируя знаково результаты. Учащиеся, которые работали с дополнительными заданиями, проводят самопроверку.

— Кому удалось справиться с затруднениями?

— Кому удалось правильно выполнить дополнительные задания?

8. Включение в систему знаний и повторение.

Цель:

организовать выполнение заданий на повторение: тренировать умение строить математические модели и работать с ними.

Организация учебного процесса на этапе 7:

№ 124 (а)

Задание выполняется у доски с комментарием.

Возможный вариант решения:

Пусть искомые числа — x и y. По условию $x \in N$, $y \in N$. Их сумма равна 33. По формуле деления с остатком х = $12a + 4$ и $y = 12b + 5$. Составим математическую модель и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x + y = 33,\ x \in N,\ y \in N \\ x = 12a + 4,\ a \in N \\ y = 12b + 5,\ b \in N \end{cases} \rightarrow \boxed{x, y — ?}$$

$(12a + 4) + (12b + 5) = 33$

$12(a + b) = 24$

$a + b = 2$

$a = b = 1$ (т. к. $a, b \in N$)

$x = 12 + 4 = 16$

$y = 12 + 5 = 17$

17 и 16 удовлетворяют смыслу задачи: являются натуральными (при ненатуральных решениях задача о делимости теряет смысл).

Ответ: 16 и 17.

9. Рефлексия деятельности на уроке.

Цель:

1) организовать фиксацию степени соответствия поставленной цели и результатов деятельности;
2) организовать вербальную фиксацию причин (алгоритмов, правил, понятий и т. д.) возникших на уроке затруднений;
3) организовать вербальную фиксацию способа исправления возникших ошибок (алгоритм исправления ошибок);
4) организовать фиксацию неразрешенных на уроке затруднений как направление будущей деятельности;
5) организовать оценивание учащимися собственной работы на уроке;
6) организовать обсуждение и запись домашнего задания.

Организация учебного процесса на этапе 8:

– Над какой темой вы работали на уроках?

– Какую цель вы ставили в начале работы?

– Что вызвало затруднение при выполнении работы?

– Оцените свою работу на уроках контроля (Р-4).

Домашнее задание:

№№ 110 (г); 112 (г); 114 (б); 124 (б)*

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок