Глава 3

Исследование нелинейных процессов

§ 1. Представление о некоторых нелинейных процессах

1. Степенные функции и их графики

Без сомнения, тесные связи с физической реальностью важных разделов математики... вдохновляют и стимулируют математическую мысль.

Рихард Курант (1888–1972),
немецкий и американский математик и педагог

Наблюдая за различными величинами и на уроках, и в жизни, мы замечаем, что изменение одной из величин влечет определенное изменение другой. Это говорит о существовании зависимости между этими величинами. Мы уже знакомились с линейными зависимостями, однако многие величины связывает более сложная, нелинейная зависимость.

Рассмотрим, например, зависимость площади квадрата S, выраженной в квадратных сантиметрах, от длины его стороны a, выраженной в сантиметрах. Опишем, как изменяется площадь квадрата при увеличении длины его стороны в таблице, воспользовавшись формулой $S = a^2$.

a	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
S	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25

В верхней строке таблицы мы выписали лишь некоторые возможные значения длины стороны a, однако она может принимать любые положительные значения. Таким образом, знакомая нам формула $S = a^2$ каждому положительному числу a ставит в соответствие *единственное* число S. Поэтому мы можем говорить о существовании *функциональной зависимости*, которая в более привычных обозначениях имеет вид: $y = x^2$, где x – независимая переменная, а y – зависимая переменная.

Конечно, сторона квадрата не может быть отрицательной и лишь условно можно считать, что она может быть равна 0. Тем не менее мы можем расширить область определения функции $y = x^2$ до множества всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$. Построим ее график для общего случая, используя приведенную выше таблицу и равенства $(-x)^2 = x^2$ и $0^2 = 0$.

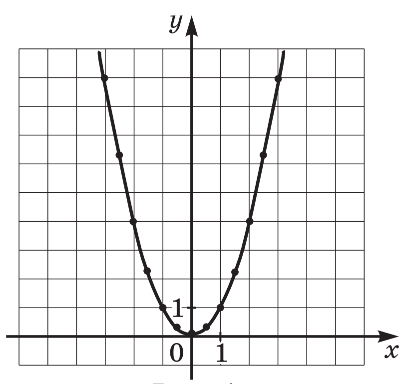


Рис. 1

Соединим отмеченные точки плавной кривой, которая и представляет собой график функции $y = x^2$, где x – любое число (рис. 1). Эта кривая располагается в первой и второй координатных четвертях ($y \geqslant 0$ при любом значении x) и называется ***параболой***, а ее точка (0; 0) называется ***вершиной параболы***.

Сформулируем **свойства функции $y = x^2$ и ее графика.** Заметим, например, что при увеличении x по модулю значение y, оставаясь положительным, возрастает значительно «быстрее», чем x. Так, при увеличении $|x|$ от 1 до 10 значение y увеличивается с 1 до 100. При уменьшении по модулю числа x число y, оставаясь положительным, наоборот, уменьшается значительно «быстрее», чем x. Если $x = 0{,}1$, то $y = 0{,}01$; если $x = 0{,}01$, то $y = 0{,}0001$ и т.д.

Из этого следует, что при удалении от начала координат ветви параболы резко поднимаются вверх и, выбрав единичный отрезок в 1 см, уже при $x = 6$ мы не сможем отметить значение функции $y = x^2$ на стандартном листе А4. И, наоборот, приближаясь к вершине, парабола все ближе «прижимается» к оси абсцисс (в отличие от графика $y = |x|$, который имеет в точке (0; 0) «уголок»).

Свойство 1. При удалении от начала координат график функции $y = x^2$ круто поднимается вверх, а приближаясь к вершине, «прижимается» к оси абсцисс.

* * *

Определение. *Касательной* к параболе $y = x^2$ называется прямая, не параллельная оси ординат и имеющая с параболой ровно одну общую точку.

Ось абсцисс имеет с параболой $y = x^2$ единственную общую точку – начало координат; ось абсцисс не параллельна оси ординат. Поэтому ось абсцисс – касательная к параболе $y = x^2$ в ее вершине.

Свойство 2. График $y = x^2$ касается оси абсцисс в начале координат.

Если провести карандашом по графику $y = x^2$ слева направо, то до начала координат мы как бы «спускаемся с горы», а после начала координат мы «пойдем в гору». То есть на промежутке $(-\infty; 0]$ с увеличением значений x значения функции уменьшаются (говорят, что функция на этом промежутке ***убывает***). А на промежутке $[0; +\infty)$, наоборот, с увеличением значений x значения функции тоже увеличиваются (говорят, что функция на этом промежутке ***возрастает***).

Свойство 3. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = x^2$ убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ – возрастает.

При противоположных значениях аргумента функция принимает одинаковые значения. Поэтому график данной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 1). Такие функции называют *четными* функциями.

Свойство 4. Функция $y = x^2$ является четной, ее график симметричен относительно оси ординат.

* * *

Определение. Функция называется четной, если при замене знака ее аргумента значение функции не меняется.

$$\forall\, x \in X\colon f(-x) = f(x), \text{ где } X - \text{область определения функции}$$

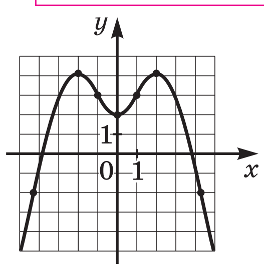


Рис. 2

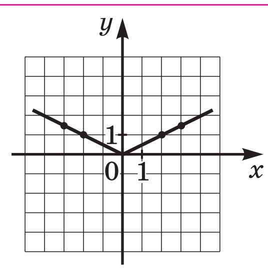


Рис. 3

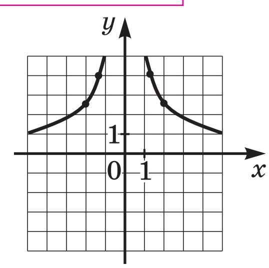


Рис. 4

Если график четной функции содержит точку плоскости с координатами $(x; y)$, то он содержит и точку $(-x; y)$. Это означает, что график любой четной функции симметричен относительно оси ординат. Примеры графиков четных функций приведены на рис. 2–4.

Анализируя зависимость объема куба V от длины его ребра a, перейдем к рассмотрению функции $y = x^3$, распространив область определения, как и в предыдущем случае, на множество всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$.

Заполним таблицу, учитывая, что $(-x)^3 = -x^3$.

x	0	± 0,5	± 1	± 1,5	± 2	± 3
y	0	± 0,125	± 1	± 3,375	± 8	± 27

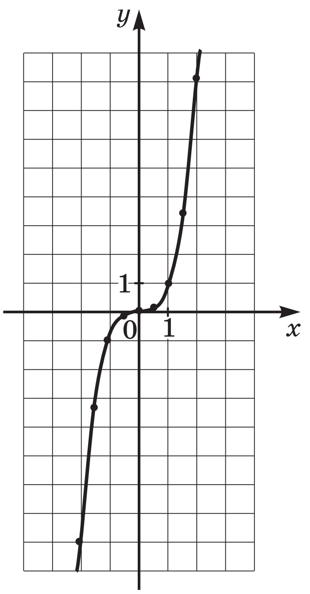


Рис. 5

Отметим на рисунке точки, указанные в таблице, и соединим их плавной кривой. Получим график функции $y = x^3$, который мы будем называть ***кубической параболой*** (рис. 5). Кубическая парабола располагается в I и III координатных четвертях (знак y всегда совпадает со знаком x).

Сформулируем **свойства функции $y = x^3$ и ее графика**. Заметим вначале, что при неограниченном увеличении $|x|$ значение $|y|$ возрастает еще «быстрее», чем у параболы. Так, при увеличении $|x|$ от 1 до 10 значение $|y|$ увеличивается с 1 до 1000 (у параболы с 1 до 100). А уже при $x = 3$ на рисунке не умещается значение $y = 27$.

Аналогично при уменьшении $|x|$ значение $|y|$ уменьшается значительно «быстрее», чем у параболы. Например, если $x = 0,1$, то $y = 0,001$; если $x = 0,01$, то $y = 0,000001$. В силу этого ветви кубической параболы еще более крутые, чем у параболы, а при приближении к началу координат кривая $y = x^3$ еще более тесно «прижимается» к оси абсцисс, чем парабола $y = x^2$.

Свойство 1. При удалении от начала координат кубическая парабола поднимается вверх еще круче, а при приближении к началу координат – «прижимается» к оси абсцисс еще ближе, чем обычная парабола.

В этом случае также говорят, что график касается оси абсцисс в начале координат, но здесь касание происходит более хитро: касательная протыкает график (одна часть графика лежит по одну сторону от касательной, другая – по другую сторону). Как говорят, график имеет в начале координат ***перегиб*** относительно оси абсцисс. Следует отметить, что такое определение касательной, с которым мы сталкивались раньше, годится только для некоторых очень простых кривых линий (окружность, парабола). С определением касательной для более сложных случаев мы сможем познакомиться позже, нам оно пока недоступно. Отметим лишь, что касательная к графику $y = x^3$ может, помимо точки касания, иметь и другую общую точку с графиком, в которой она пересекает его.

Свойство 2. Кубическая парабола имеет перегиб в начале координат.

Если двигаться по графику $y = x^3$ слева направо, мы «пойдем в гору»: с увеличением значений x значения функции $y = x^3$ увеличиваются. Другими словами, функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения. Такие функции называются ***возрастающими***. Функции, которые убывают на всей области определения, называются ***убывающими***.

Свойство 3. Функция $y = x^3$ является возрастающей на всей области определения $X = (-\infty; +\infty)$.

При противоположных значениях аргумента значения функции также противоположны, так как $(-x)^3 = -x^3$. Поэтому график данной функции симметричен относительно начала координат (рис. 7). Такие функции называют *нечетными* функциями.

Свойство 4. Функция $y = x^3$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат

* * *

Определение. Функция называется нечетной, если при замене знака ее аргумента значение функции изменяет свой знак.

$$\forall\, x \in X\colon f(-x) = -f(x), \text{ где } X \text{ – область определения функции}$$

Если график нечетной функции содержит точку плоскости с координатами $(x; y)$, то он содержит и точку $(-x; -y)$. Это означает, что график любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры графиков нечетных функций приведены на рис. 6–9.

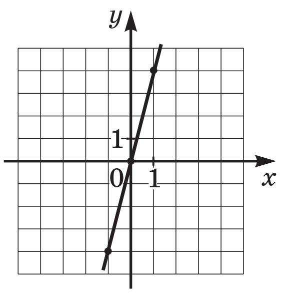


Рис. 6

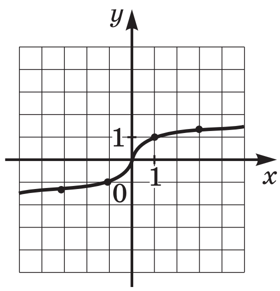


Рис. 7

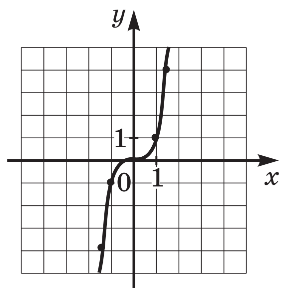


Рис. 8

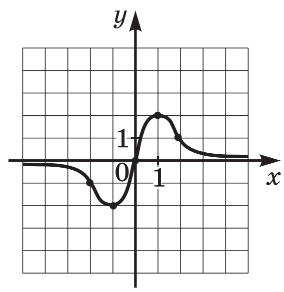


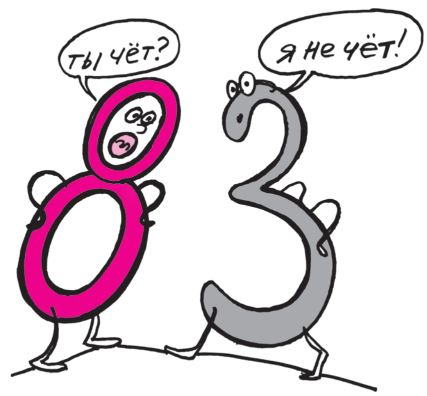
Рис. 9

Обратим внимание на то, что функция $y = x^2$ – четная, а функция $y = x^3$ – нечетная. Связано ли это с тем, что 2 – четное число, а 3 – нечетное? Оказывается, связано! Попробуем установить эту взаимосвязь, рассмотрев обобщенную *степенную* функцию $y = x^n$, где n – произвольное натуральное число.

Определение. Функцию вида $y = x^n$, где $n \in N$, называют **степенной функцией с натуральным показателем**. (Далее для простоты такие функции мы будем называть просто степенными функциями.)

Четные степени противоположных чисел равны: $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^6 = x^6$ и т.д. Поэтому функция $y = x^n$ с любым четным коэффициентом $n = 2, 4, 6$ и т.д., подобно функции $y = x^2$, четная.

Напротив, нечетные степени противоположных чисел противоположны: $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$, $(-x)^7 = -x^7$ и т.д. Значит, функция $y = x^n$ с любым нечетным коэффициентом $n = 3, 5, 7$ и т.д., подобно функции $y = x^3$, нечетная (при $n = 1$ функция $y = x^1$ или $y = x$, также нечетна).



Именно отсюда и произошли термины «четная функция» и «нечетная функция». Однако свойством четности или нечетности обладают и функции, которые не являются степенными. Так, известная нам функция $y = |x|$ является четной, хотя она не содержит никакой четной степени. Существуют также функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Примером такой функции служит линейная функция $y = kx + b$, где $k, b \neq 0$.

* * *

Какими же еще свойствами обладают степенные функции и их графики?

Все графики функций $y = x^n$ при четном n имеют примерно такой же вид, как парабола $y = x^2$, а при нечетном – как кубическая парабола $y = x^3$, но при этом существенно отличаются от них.

Действительно, с увеличением показателя n при неограниченном увеличении $|x|$ соответствующие значения $|y|$ возрастают еще более резко, чем для функций $y = x^2$ и $y = x^3$. И, наоборот, при неограниченном уменьшении $|x|$ соответствующие значения $|y|$ уменьшаются значительно быстрее, чем для функций $y = x^2$ и $y = x^3$. Поэтому чем больше n, тем «круче» становятся ветви графика и тем «теснее прижимается» он к оси абсцисс в начале координат.

Если n четное, то функции $y = x^n$ подобно функции $y = x^2$ убывают при $x \in (-\infty; 0]$, возрастают при $x \in [0; +\infty)$ и касаются оси абсцисс в начале координат. А если n нечетное, то функции $y = x^n$, как и $y = x^3$, являются возрастающими на всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$ и имеют в начале координат перегиб.

Графики всех степенных функций проходят через начало координат (0; 0) и точку (1; 1). Их симметричность зависит от четности показателя.

Построим для примера график функции $y = x^4$. Функция четная, поэтому достаточно составить таблицу для неотрицательных значений x и воспользоваться симметрией графика относительно оси ординат.

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,0625	1	5,0625	16

Отметим на графике точки и соединим их плавной линией. Мы видим, что график по форме напоминает параболу со всеми ее свойствами, но это – не парабола: у данного графика более «сжатый» и «приплюснутый» вид (рис. 10).

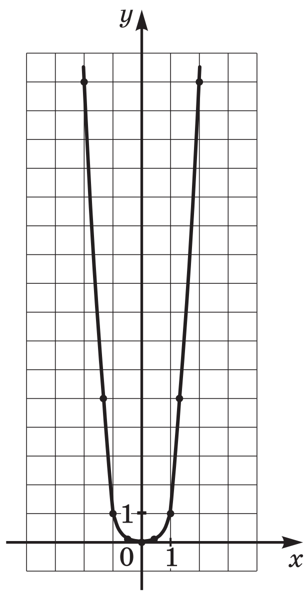


Рис. 10

Анализируя шаги, предпринятые нами для построения графиков степенных функций и свойства этих функций, можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм построения графика функции $y = x^n$, $n \in N$

1. Заполнить таблицу, задав несколько положительных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y = x^n$.

x	0	1			
y	0	1			

2. Отметить точки с координатами $(x; y)$, полученными в таблице.
3. Для четного n построить точки, симметричные отмеченным относительно оси ординат, они имеют координаты $(-x; y)$. Для нечетного n построить точки, симметричные отмеченным относительно начала координат $(-x; -y)$.
4. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что чем больше n, тем теснее «прижимается» график к оси абсцисс в начале координат.

К **1** Найдите значение выражения (устно):

а) a^2, если $a = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 7, -7$;

б) b^3, если $b = 0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, -1, 4, -4$.

2 Расположите положительные значения выражений в порядке возрастания. Что означает понятие, полученное в ответе?

У	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	В	$(-4)^3$	К	2^3	Ф	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	Ц	$(-3)^2$	Я	5^4
		И	$(-5)^2$	Н	2^2			А	$(-2)^3$	Д	-1^8

3 1) Запишите формулу зависимости площади квадрата S в см^2 от длины стороны a в см.
2) Если задуманное число b умножить на само себя, то получится число r. Запишите формулу зависимости числа r от b.
3) Участок перед домом имеет форму квадрата. Длина участка равна h метров. Площадь готового рулонного газона для этого участка составила G м^2. Запишите формулу зависимости площади газона G в м^2 от длины участка h м.
4) Запишите формулу, с помощью которой можно вычислить квадрат целого числа, обозначив это число буквой z, а его квадрат – c.
5) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их всех с помощью одной формулы. Является ли эта зависимость функциональной?
6) Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,5	−0,5	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
y											

Нужно ли, вычислив значение функции от числа x, вычислять значения функции от $-x$?
7) Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком, изображенным на стр. 3 учебника. Прочитайте в учебнике, как называется полученная кривая.
8) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 4 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

4 1) Запишите формулу зависимости объема куба V в м^3 от длины стороны a в м.
2) Если задуманное число b дважды умножить на само себя, то получится число r. Запишите формулу зависимости числа r от b.
3) Аквариум имеет форму куба. Высота аквариума равна h дециметрам. Запишите формулу зависимости объема аквариума G в литрах от высоты аквариума h в дм.
4) Запишите формулу, с помощью которой можно вычислить куб целого числа, обозначив число буквой z, а его куб – c.
5) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их всех с помощью одной формулы. Является ли эта зависимость функциональной?
6) Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,5	−0,5	1	−1	1,5	−1,5	2	−2	3	−3
y											

Нужно ли, вычислив значение функции от числа x, вычислять значения функции от $-x$?

7) Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком, изображенным на стр. 5 учебника. Прочитайте в учебнике, как называется полученная кривая.

8) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 5–6 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

5 Функция задана формулой $f(x) = x^8$. Сравните:

а) $f(5)$ и $f(3)$; в) $f(-5)$ и $f(-3)$; д) $f(-2,5)$ и $f(2,5)$; ж) $f(-\frac{1}{3})$ и $f(\frac{1}{4})$;

б) $f(-5)$ и $f(3)$; г) $f(0)$ и $f(-6,3)$; е) $f(0,4)$ и $f(1)$; з) $f(-31,2)$ и $f(32)$.

6 Функция задана формулой $f(x) = x^{11}$. Сравните:

а) $f(6,6)$ и $f(8)$; в) $f(-15,4)$ и $f(-10,1)$; д) $f(3,2)$ и $f(-3,2)$; ж) $f(\frac{1}{8})$ и $f(\frac{1}{10})$;

б) $f(6)$ и $f(-8,5)$; г) $f(-3)$ и $f(0)$; е) $f(0,2)$ и $f(0,7)$; з) $f(-0,3)$ и $f(-1)$.

7 Изобразите схематически график функции $y = x^4$. Как вы думаете, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезке:

а) $[-1; 1]$; б) $[-3;3]$; в) $[0; 2]$?

8 Изобразите схематически график функции $y = x^7$. Как вы думаете, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезке:

а) $[-1; 1]$; б) $[0; 2]$; в) $[-2;1]$?

Укажите, на каких промежутках из области определения функция положительна, отрицательна.

9 Первая координатная четверть представлена на листе формата А4 в масштабе 1 единица в 1 см. Оцените, при каком наибольшем натуральном n на листе поместится точка графика $y = x^n$: а) с абсциссой 1,5; б) с абсциссой 1,2.

10 Приведите пример четной функции, пример нечетной функции. Может ли функция быть одновременно и четной, и нечетной?

11 Какие из указанных функций являются четными, какие нечетными, а какие ни теми, ни другими?

а) $y = x^2$; д) $y = 13x^4 - x^{10}$; и) $y = |x|$;
б) $y = x^5$; е) $y = x^3 - x$; к) $y = x^2 - 5x + 6$;
в) $y = 2x^2 + 5x^6$; ж) $y = x^7 - 7$; л) $y = -x$;
г) $y = x^8 + 5$; з) $y = -3x + 3$; м) $y = 0,2x^9 + 0,8x^{11}$.

Заполните таблицу:

Четные функции	Нечетные функции	Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными

12 Изобразите схематически графики функций с заданной областью определения. Исследуйте эти функции на четность.

а) $y = x^2$, $x \in [-4; 4]$; д) $y = x$, $x \in (-3;3]$;
б) $y = x^4$, $x \in [-2; 2]$; е) $y = x^3$, $x \in [-2; 0]$;

в) $y = x^6$; $x \in (-3;3)$;

г) $y = x^8$; $x \in [-1; 1)$;

ж) $y = x^5$, $x \in [0; +\infty)$;

з) $y = x^7$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Проанализируйте результаты своей работы, обращая внимание на симметричность области определения данных функций. Предположите, каким свойством должна обладать область определения четной или нечетной функции?

13 Среди функций с заданной областью определения укажите четные функции, а затем нечетные функции. Функции с какой областью определения целесообразно проверять? Сделайте вывод.

а) $y = x^{10}$, $x \in [-1; 1]$;

б) $y = x^{12}$, $x \in (-\infty; 1]$;

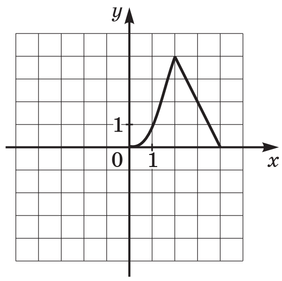
в) $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

г) $y = x^9$, $x \in [-3; -1]$;

д) $y = x^{11}$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

е) $y = |x|$, $x \in [-2; 3]$.

14 На рисунке построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения: $[-4; 4]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – четная функция.

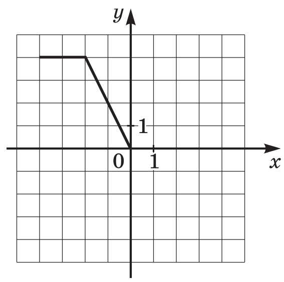


1) Найдите $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция возрастает.

3) Укажите, при каких значениях x функция возрастает.

15 На рисунке построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения $[-4; 4]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – нечетная функция.



1) Найдите $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция убывает.

3) Укажите, при каких значениях x функция убывает.

4) Выделите зеленым цветом часть кривой, на которой функция постоянна. Укажите, при каких значениях x функция постоянна.

16 Постройте графики функции $y = x^2$ и $y = x^3$.
«Прочитайте» каждый график по следующему плану:

1) Укажите область определения функции: $D(y)$.

2) Если возможно, укажите область значений функции: $E(y)$.

3) Пользуясь симметрией области определения функции, выясните, может ли функция являться четной или нечетной. Если может, докажите ее четность либо нечетность.

4) Укажите, на каких промежутках из области определения функция равна 0, положительна, отрицательна.

5) Укажите, на каких промежутках из области определения функция возрастает (убывает, постоянна).

6) Если возможно, укажите наибольшее, наименьшее значение функции.

17 Постройте график функции с заданной областью определения. «Прочитайте» график по плану.

а) $y = x^{14}$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

д) $y = x^{11}$, $x \in (-1; 1]$;

б) $y = x^6$, $x \in (-1; 1)$;

в) $y = x^4$, $x \in [1; 2)$;

г) $y = x^2$, $x \in [-3; 1]$;

е) $y = x^5$, $x \in [-1; +\infty)$;

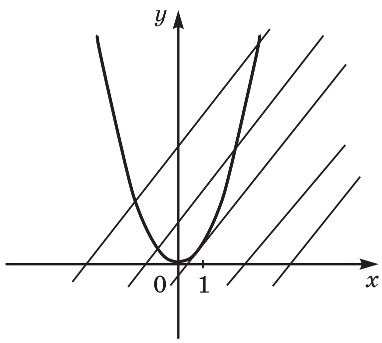
ж) $y = x^9$, $x \in (-\infty; -1]$;

з) $y = x^3$, $x \in [-2; -1) \cup [1; 2)$.

18 Постройте графики $y = x^2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $y = 0$, $y = 3$, $y = -5$, $y = 5x$ и ответьте на вопросы.

а) Сколько общих точек имеют эти прямые с параболой?
б) Какие из прямых имеют с параболой только одну общую точку? Все ли из них являются касательными?

Докажите, что любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает параболу ровно в одной точке.



19 Проанализируйте рисунок и ответьте на вопросы.

а) На какие группы можно разбить эти прямые?
б) Какая из этих прямых является касательной к параболе?

Сравните определение касательной к параболе и касательной к окружности, известное из курса геометрии. Чем они отличаются?

20 Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $y = x^3$ и $y = 0$; б) $y = x^3$ и $y = 8$; в) $y = x^3$ и $y = -8$?

21 Может ли прямая:

а) пересечь график функции $y = x^3$ в трех различных точках;
б) пересечь график функции $y = x^3$ ровно в одной точке?

22 Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

а) $y = x^2$ и $y = 1$; б) $y = x^2$ и $y = x$; в) $y = x^2$ и $y = 2x - 1$.

Сколько общих точек имеют графики функций? Укажите, при каком значении аргумента значения функций совпадают.

23 Воспользовавшись результатами выполнения предыдущего задания, решите уравнение:

а) $x^2 = 1$; б) $x^2 = x$; в) $x^2 = 2x - 1$.

24 Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -1$; б) $x^2 = 4x - 3$; в) $x^5 = x$; г) $x^6 = |x|$.

25 Докажите, что при всех значениях x: а) $|x|^2 = x^2$; б) $|x|^3 = |x^3|$.

26 Докажите, что:

а) сумма и произведение четных функций – четные функции;
б) сумма нечетных функций – нечетная функция;
в) произведение нечетных функций – четная функция.

Можно отметить связь этих утверждений с теми фактами, что сумма двух четных или двух нечетных чисел – четное число. Попробуйте отразить на языке четности или нечетности функций те факты, что произведение двух четных чисел – четное число, а произведение двух нечетных чисел – нечетное число.

27 Без помощи калькулятора сравните рациональные числа:

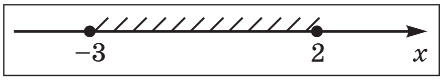
а) $0{,}59$ и $\frac{7}{12}$; в) $0{,}(76)$ и $0{,}767$; д) $0{,}(62)$ и $\frac{13}{21}$;

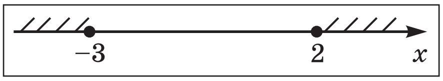
б) $-\frac{7}{15}$ и $-0{,}(45)$; г) $-0{,}384$ и $-0{,}(38)$; е) $-0{,}1(7)$ и $-\frac{1}{6}$.

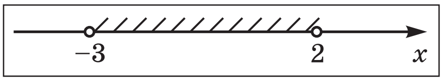
28 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

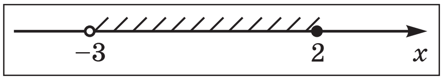
а) $-\frac{1}{x}$; б) $\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}$; в) $\frac{2mn}{(2n-5)}:\frac{(m+1)}{3mn}$.

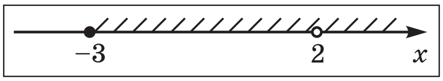
29 Установите соответствие между изображением числового промежутка на числовой прямой и его аналитической записью.

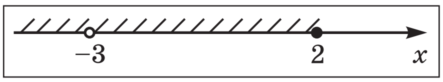
а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

1) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2]$

2) $(-3; 2]$

3) $[-3; 2]$

4) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$

5) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$

6) $(-3; 2)$

30 Постройте график функции $y = -2x + 3$. С помощью графика найдите значения, при которых точки графика лежат:

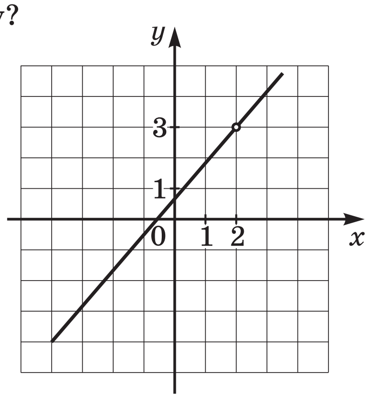
а) выше оси абсцисс; в) выше прямой $y = 1$;

б) ниже оси абсцисс; г) ниже прямой $y = 3$.

Проверьте полученные вами результаты, составив и решив соответствующие неравенства.

31 Решите неравенство $4(-2x + 1) + 4x < 16$. Из множества решений данного неравенства удалите все целые числа, значения которых больше 0, но меньше 4. Проиллюстрируйте полученное множество на числовой прямой. Каким образом вы отметили, что числа 1, 2, 3 не принадлежат данному множеству?

32 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. На графике «выколота» точка с координатами (2; 3).



Вспомните смысл «выколотой точки» на схеме, изображающей множество решений неравенства, и ответьте на вопросы:

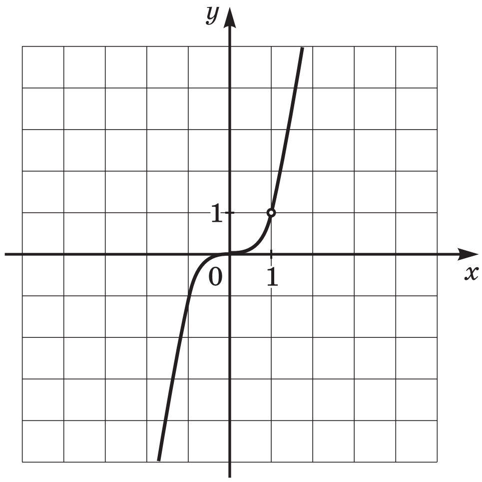
1) Входит ли $x = 2$ в область определения данной функции?

2) Входит ли $y = 3$ в область значений данной функции?

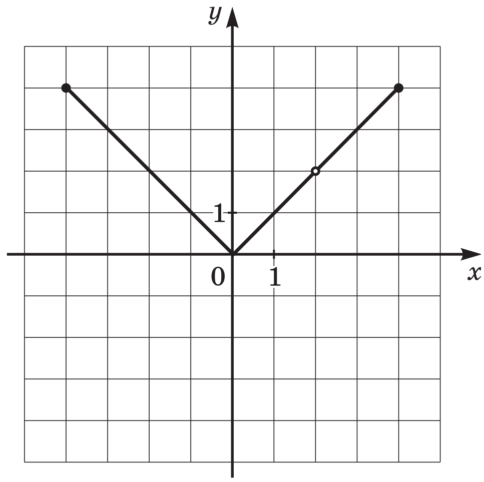
3) Какова область определения и область значений данной функции?

33 Найдите область определения функций, графики которых изображены на рисунках а–г.

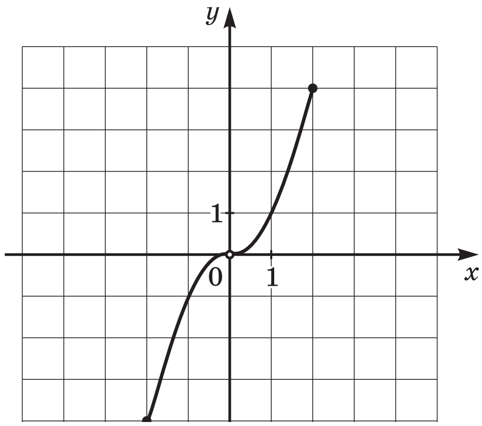
а)



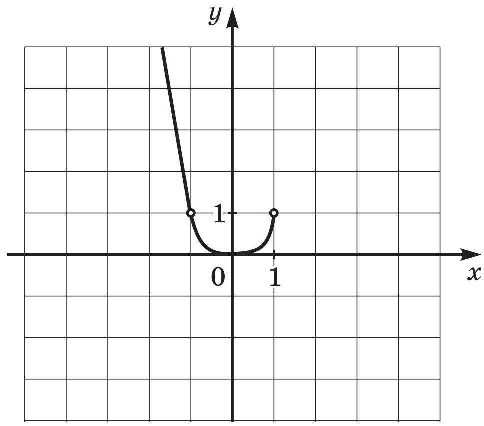
в)



б)



г)



Д **34** Функция задана формулой $f(x) = x^2$. Постройте график данной функции и «прочитайте» его по плану. Как называется построенная кривая?

35 Функция задана формулой $f(x) = x^2$. Сравните:

а) $f(0{,}005)$ и $f(-0{,}005)$; в) $f(0)$ и $f(-3{,}0008)$;

б) $f(200)$ и $f(-500)$; г) $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $f\left(\frac{1}{8}\right)$.

Целесообразно ли использовать для сравнения график функции?

36 Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(-3)$ и $f(2)$; б) $f(3{,}7)$ и $f(7{,}3)$; в) $f(-1)$ и $f(0)$; г) $f\left(-\frac{1}{28}\right)$ и $f\left(\frac{1}{28}\right)$.

Постройте график данной функции и «прочитайте» его. Как называется построенная кривая?

37 Изобразите схематически график функции $y = x^8$. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-2; 1]$.

38 Изобразите схематически график функции $y = x^5$. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-1; 2]$.

39 Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $y = x^3$ и $y = x^4$; б) $y = x^4$ и $y = x^6$; в) $y = x^5$ и $y = x^6$?

40 Решите графически уравнение:

а) $x^2 = -3x - 2$; б) $x^3 = -x$; в) $x^8 = 1$; г) $x^5 = -|x|$.

41 Может ли прямая: а) пересечь график функции $y = x^5$ в трех различных точках; б) пересечь график функции $y = x^5$ в двух различных точках?

42 Разбейте функции на группы и заполните таблицу:

а) $y = x^4$; д) $y = 8x^6 - x^3$; и) $y = -|x|$;

б) $y = x^4 + 3$; е) $y = x^5 - x^3$; к) $y = x^4 - 5x^2 + 6$;

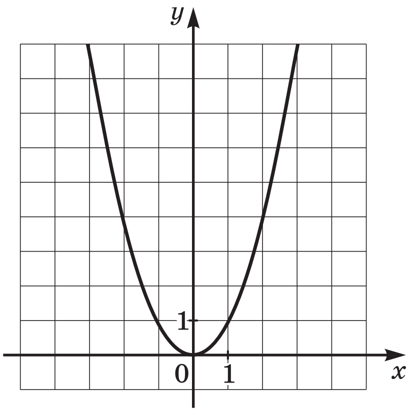
в) $y = 10{,}2x^6 - 3x^2$; ж) $y = x^9 - 3$; л) $y = x$;

г) $y = (x + 5)^8$; з) $y = -5x$; м) $y = 2x^7 - x^3 + x$.

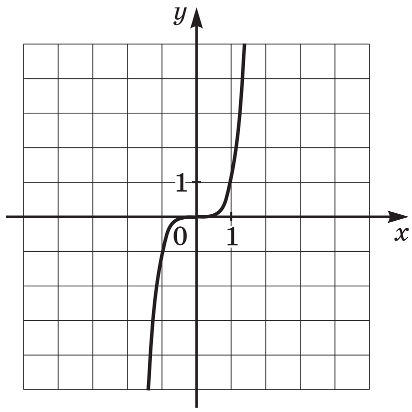
Четные функции	Нечетные функции	Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными

43 Даны графики нескольких степенных функций вида $y = x^k$, где k – натуральное число. Укажите для каждой из них четность показателя k.

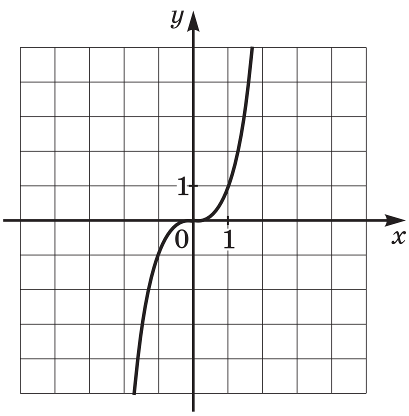
а)



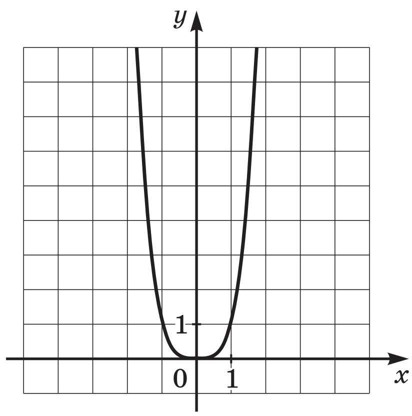
в)



б)



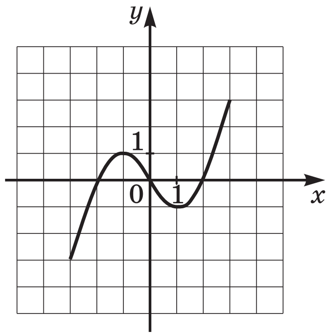
г)

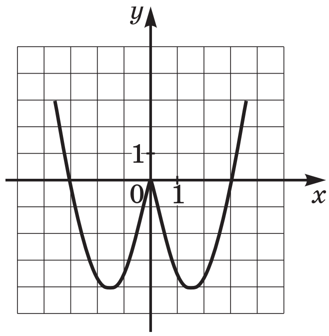


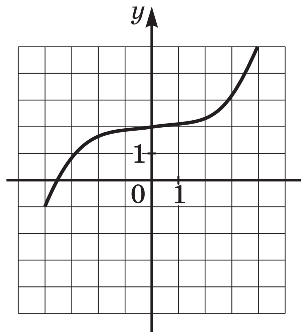
44 Докажите, что модуль четной функции и модуль нечетной функции являются четными функциями.

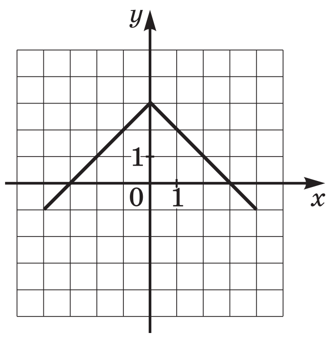
45 Какие из графиков функций, изображенных на рис. а–е, являются графиками:

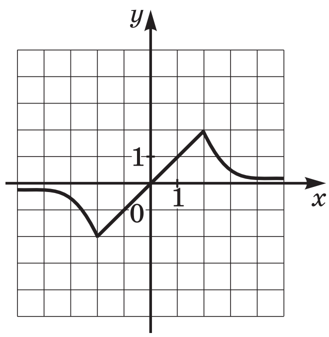
1) четных функций;
2) нечетных функций;
3) функций, не являющихся ни четными, ни нечетными?

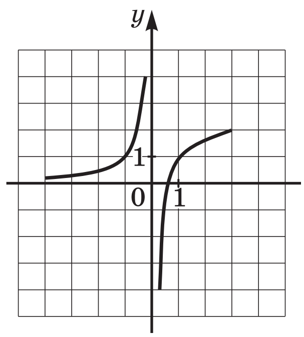
а)


б)


в)


г)


д)


е)


46 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\dfrac{1}{2a \cdot 5b}$;

б) $\dfrac{x+1}{2}$;

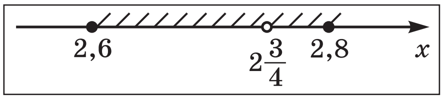
в) $\dfrac{2}{x+1}$;

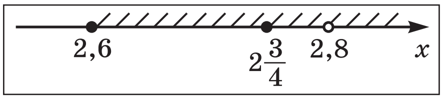
г) $\dfrac{3}{a(2a-1)}$;

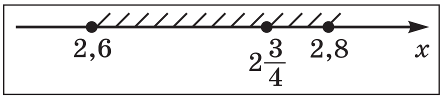
д) $\dfrac{1}{(2-y)(y+1)}$;

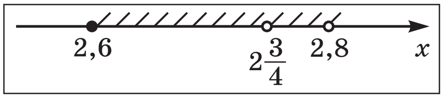
е) $\dfrac{1}{5x^2y^5} - \dfrac{1}{(x-2)(y+3)}$.

47 Установите соответствие между изображением числового промежутка на числовой прямой и его аналитической записью.

а)


б)


в)


г)


1) $\left[2{,}6; 2\frac{3}{4}\right) \cup \left(2\frac{3}{4}; 2{,}8\right)$

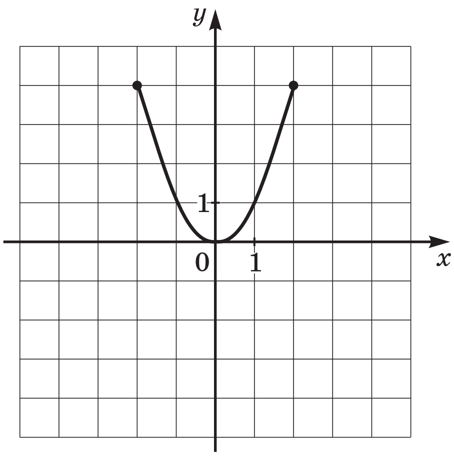
2) $[2{,}6; 2{,}8) \cup (2{,}8; +\infty)$

3) $[2{,}6; 2{,}8]$

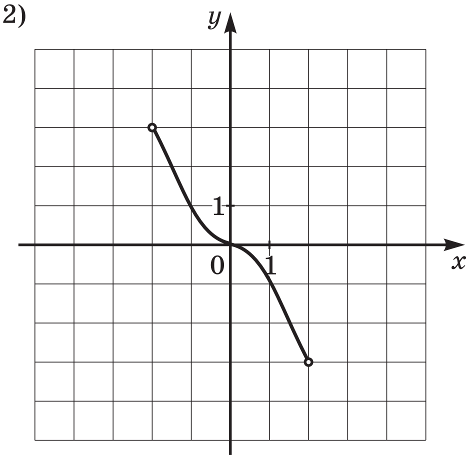
4) $\left[2{,}6; 2\frac{3}{4}\right) \cup \left(2\frac{3}{4}; 2{,}8\right]$

48 Установите соответствие между графиками функции $y = f(x)$, изображенными ниже, и указанными областями определения.

1)



2)

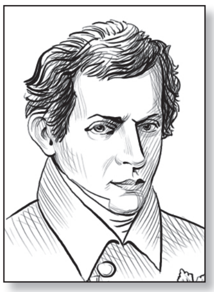


а) $(-2; 2)$;

б) $[-2; 2]$.

C **49*** Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ является составным.

2. Обратная пропорциональность и ее график



Понятия приобретаются чувствами, врожденным – не должно верить.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856), русский математик

В предыдущем пункте мы описали зависимости между величинами, которые можно обнаружить на практике, измеряя длину, площадь и объем реальных фигур. Описав их в общем виде, мы выявили свойства полученных функций, что позволило нам не только обобщить и систематизировать способы решения множества практических задач, связанных зависимостью подобного рода, но и познакомиться с другими функциями, обладающими аналогичными свойствами.

Рассматривая эти функции, мы абстрагировались от практической их стороны и основное внимание уделили исследованию связей между переменными. Тем самым мы начинаем осваивать новый метод познания – *абстракция*. Суть его заключается в познании реальных процессов путем выделения основных, наиболее существенных их сторон в отвлечении от всего внешнего, второстепенного, случайного, несущественного. Часто результатом применения абстракции является вывод новых законов. Именно таким способом были сделаны многие научные открытия, например, революционная для начала XIX века неевклидова геометрия Н. И. Лобачевского. Открытие Лобачевского не было признано его современниками, однако ни стена непонимания, ни насмешки не остановили великого русского математика. Опередив свое время, его теория нашла свое практическое применение только во второй половине XX века, став одним из необходимых условий, например, полета человека в космос.

Ранее посредством обобщения закономерностей таких процессов, как движение, покупка товаров, работа и пр., мы вывели формулу произведения $a = bc$, дающую общее описание формул движения $s = vt$, стоимости $C = an$, работы $A = wt$ и пр. В результате абстрагирования от практики нами была исследована функция $y = kx$ – прямая пропорциональность, описывающая зависимость y от x при одном постоянном множителе в формуле $a = bc$ (множителе b или c, который мы обозначили k). Благодаря этому, мы установили для всех без исключения процессов данного вида различные свойства их протекания, которые мы смогли затем использовать при решении практических задач: например, то, что при увеличении (уменьшении) одной величины в несколько раз, другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Однако взаимосвязь между величинами вида $a = bc$ в случае постоянного значения произведения a осталась без подобного обобщенного исследования. В данном пункте мы заполним этот пробел.

Пусть величина a принимает постоянное значение – например:

✓ на одном и том же участке пути объекты движутся с разной скоростью;

✓ на фиксированную сумму денег покупается товар по разной цене;

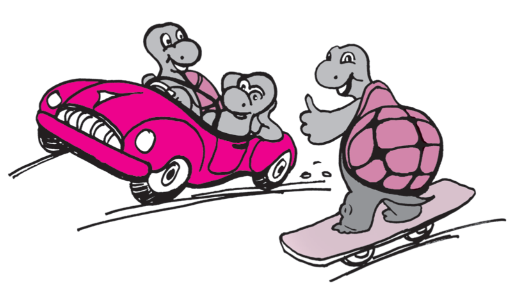
✓ заданный объем работы выполняется с разной производительностью.

Если в каждом подобном процессе значение постоянной величины a обозначить буквой k, а значения двух других величин – x и y, то зависимость y от x можно записать в виде $y = \frac{k}{x}$. Данная зависимость, как мы уже знаем, называется *обратной пропорциональностью*, а число k называется *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Очевидно, что величины, связанные обратной пропорциональностью, не могут принимать нулевые значения ($k = x \cdot y \neq 0$). Действительно, на практике никакое движение не может осуществляться на нулевом расстоянии и нельзя произвести покупку на 0 рублей.

Само название «обратная пропорциональность» связано с тем, что, в соответствии с равенством $x \cdot y = k$, если $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k$, то $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$ («обратная пропорция»).

Из полученной пропорции, в частности, следует известное нам свойство величин, связанных обратной пропорциональной зависимостью: с увеличением (уменьшением) значений одной величины в несколько раз значения другой величины соответственно уменьшаются (увеличиваются) во столько же раз. Например, если скорость автомобиля в 10 раз *больше* скорости пешехода, то на путь s он потратит в 10 раз *меньше* времени, чем пешеход; а если скорость пешехода в 3 раза *меньше* скорости велосипедиста, то на путь s он потратит в 3 раза *больше* времени, чем велосипедист.



Нетрудно убедиться, что обратная пропорциональность является функциональной зависимостью: каждому значению x, не равному нулю, соответствует единственное значение y. Ясно, что значения величин во всех рассмотренных процессах принимают лишь положительные значения. Однако существуют величины, значения которых могут быть и отрицательными. Поэтому естественно, как и в случае степенной функции, абстрагироваться от реальных процессов и рассмотреть данную функцию на множестве всех допустимых значений переменной.

Уточним определение обратной пропорциональности и исследуем ее свойства.

Определение. Функцию вида $y=\frac{k}{x}$, где k – некоторое не равное нулю число, называют **обратной пропорциональностью.** Число k называется **коэффициентом** обратной пропорциональности.

Так как делить на нуль нельзя, то областью определения X функции $y=\frac{k}{x}$ являются все числа, отличные от нуля: $X = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

При изменении знака аргумента x на противоположный значение функции также меняется на противоположное:

$$f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$$

Следовательно, данная функция нечетна, и ее график симметричен относительно начала координат.

Свойство 1. Обратная пропорциональность является нечетной функцией; график обратной пропорциональности симметричен относительно начала координат.

Построим график функции $y=\frac{k}{x}$, при $k = 2$. Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y для положительных значений x.

x	0,4	0,5	0,8	1	2	2,5	4	5
y	5	4	2,5	2	1	0,8	0,5	0,4

Отметим полученные точки на координатной плоскости Oxy и соединим их плавной линией, а затем симметрично отобразим построенную кривую относительно начала координат.

Мы видим, что график функции $y=\frac{2}{x}$ состоит из двух ветвей. Одна ветвь лежит в I координатной четверти (для ее точек $x > 0$, $y > 0$); другая ветвь лежит в III координатной четверти (для ее точек $x < 0$, $y < 0$) (рис. 1). Эта кривая линия на плоскости, состоящая из двух ветвей, называется **гиперболой**.

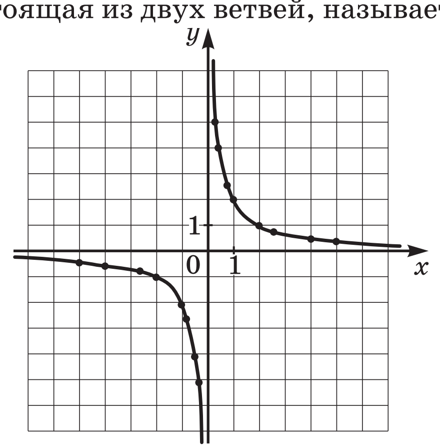


Рис. 1

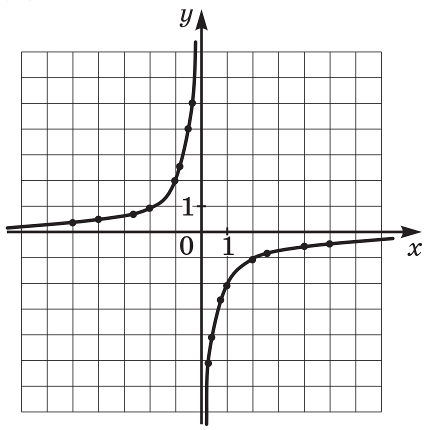


Рис. 2

Ясно, что такой же (расположенной в I и III координатных четвертях) гиперболой будет являться график функции $y=\frac{k}{x}$ при любом положительном значении k.

Если же $k<0$, то координаты любой точки $(x;\ y)$, лежащей на графике, имеют разные знаки: если $x>0$, то $y<0$; если $x<0$, то $y>0$. Поэтому графиком функции $y=\frac{k}{x}$ при любом отрицательном значении k является гипербола, лежащая во II и IV четвертях. На рис. 2 показан график функции $y=-\frac{2}{x}$.

Свойство 2. График $y=\frac{k}{x}$ состоит из двух ветвей. При $k>0$ они расположены в I и III координатных четвертях, а при $k<0$ – во II и IV координатных четвертях.

При очень малых значениях $|x|$ соответствующие значения $|y|$ будут очень велики, и наоборот. Например, для функции $y=\frac{2}{x}$, при $x=0{,}01$ значение $y=200$, при $x=0{,}001$, $y=2000$ и т.д. Наоборот, при $x=100$ значение $y=0{,}02$, при $x=1000$, $y=0{,}002$ и т.д. При противоположных значениях x значения y противоположны.

Это означает, что при малых по модулю значениях x график $y=\frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси ординат, но никогда к ней не прикасается и не пересекает ее ($x\neq 0$, $y\neq 0$). Если же значения модуля x неограниченно увеличиваются, то график $y=\frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси абсцисс. Такие прямые, к которым график функции неограниченно приближается, являются *асимптотами* данного графика.

Свойство 3. Ось ординат является вертикальной асимптотой графика $y=\frac{k}{x}$, а ось абсцисс – его горизонтальной асимптотой.

Если $k>0$, то каждая ветвь гиперболы идет вниз (с увеличением значений x значения y уменьшаются), а при $k<0$ – вверх (с увеличением x значения y увеличиваются). Значит, функция $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, а при $k<0$ – возрастает.

Свойство 4. На промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ функция $y=\frac{k}{x}$ убывает при $k>0$ и возрастает при $k<0$.

В отличие от прямой пропорциональности, для построения которой достаточно знать положение двух ее точек, гипербола является более сложной линией, и для ее построения нужно изобразить как можно больше точек графика. Выявленные общие свойства позволяют сократить трудоемкость этого процесса и вместе с тем выполнить самопроверку построенного графика. Приведем пример.

Пример.

На рис. 3 восьмиклассник Саша проиллюстрировал, как изменяется длина y стороны прямоугольника площадью в 5 м^2 при увеличении другой его стороны x в несколько раз. Верно ли Саша построил график?

Рис. 3

Решение. Описанная зависимость $y(x)$ является обратной пропорциональностью $y=\frac{5}{x}$, поэтому ее график должен являться ветвью гиперболы, расположенной в I координатной четверти.

Однако кривая на рис. 3 имеет общую точку с осью абсцисс, что противоречит свойству 3. Этого достаточно, чтобы сделать вывод, что график построен неверно.

* * *

Отметим еще одно важное свойство обратной пропорциональности, которое помогает быстрее построить ее график и одновременно – проверить правильность своих построений.

Заметим, что если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y=\frac{k}{x}$, то этому графику принадлежит и точка $(y; x)$:

$$y=\frac{k}{x} \Leftrightarrow x=\frac{k}{y}.$$

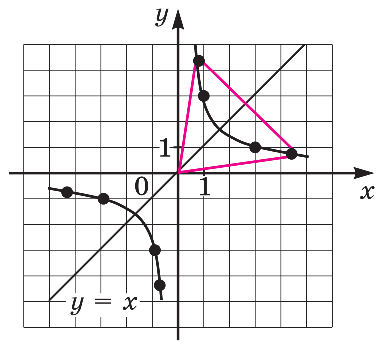


Рис. 4

Легко видеть, что треугольник, образованный точками $(x; y)$, $(y; x)$ и началом координат $(0; 0)$, равнобедренный. Значит, его биссектриса – прямая $y = x$ – является одновременно и его осью симметрии. Поэтому любые две точки $(x; y)$ и $(y; x)$ гиперболы (и, следовательно, сама гипербола) симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 4).

Аналогично можно доказать, что гипербола симметрична и относительно биссектрисы II и IV координатных углов – прямой $y = -x$.

Свойство 5. Гипербола симметрична относительно прямых $y = x$ и $y = -x$.

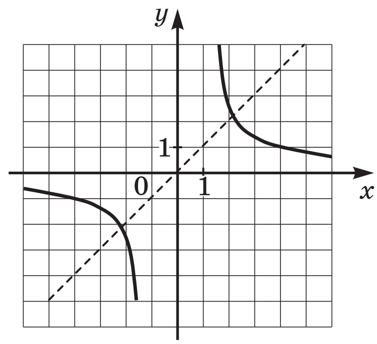


Рис. 5

Пользуясь этим свойством легко, установить, что, например, график, изображенный на рис. 5, не является графиком обратной пропорциональности, так как он не симметричен относительно прямой $y = x$.

Анализируя выявленные свойства гиперболы, можем записать следующий алгоритм построения графика функции $y=\frac{k}{x}$.

Алгоритм построения графика функции $y=\frac{k}{x}$

1. Заполнить таблицу, задав несколько положительных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y=\frac{k}{x}$.
2. Отметить на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, полученными в таблице.
3. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что оси координат являются асимптотами данного графика.
4. По точкам с координатами $(-x; -y)$ построить вторую ветвь гиперболы, симметричную первой относительно начала координат.

* * *

В завершение построения графика полезно проверить его симметричность относительно прямых $y = x$ и $y = -x$.

К **50** Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности. Для выбранных функций постройте графики.

а) $y = 5x$; в) $y = x : 5$; д) $y = 5x - 5$; ж) $y = (-0,5)^2x$;

б) $y = 5x^2$; г) $y = 0,5x$; е) $y = -1,5$; з) $y = x \cdot (-5)$.

Приведите примеры величин, связанных прямой пропорциональностью.

51 1) Запишите формулу зависимости времени движения в часах, затраченного на 2 км, от скорости движения в км/ч. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

2) Запишите формулу зависимости количества яблок в кг, купленных на 150 рублей, от их цены в рублях. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Какой единой обобщенной формулой можно записать две предыдущие зависимости? Как называется эта зависимость? Какое ее свойство вам известно? Докажите, что эта зависимость является функцией.

4) Постройте график функции, описанной под цифрой 1, заполнив таблицу. Сравните его с графиком, изображенным на рисунке 1 стр. 18 учебника. Прочитайте, как называется полученная кривая.

5) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 18–19 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

52 Обратная пропорциональность задана формулой $y = \dfrac{12}{x}$.

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 0,04; 0,12; 0,6; 30; 200; 2400.

Определите, принадлежит ли графику функции точка A (–2; 6); B (–0,5; –24); C ($\frac{3}{4}$;16); D ($\frac{6}{7}$; –14); F (–0,05; –240).

53 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график функции проходит через точку:

а) M (1; –2); б) P (–3; –18); в) K ($\frac{1}{8}$; 200); г) Q (–10; 14); д) R ($\frac{4}{9}$; $-2\frac{1}{4}$).

54 Можно ли указать обратную пропорциональность, график которой проходит через следующие две точки плоскости:

а) A (1; 3), B (–2; 1); в) A (1; 3), B (–3; 1); д) A (–2; –2), B (–4; 1);

б) A (1; 3), B (3; 1); г) A (2; 2), B (4; 1); е) A (2; –2), B (4; 1)?

55 Постройте графики функций в одной системе координат и сделайте вывод об их взаимном расположении:

а) $y = \dfrac{4}{x}$ и $y = -\dfrac{4}{x}$; б) $y = \dfrac{6}{x}$ и $y = -\dfrac{6}{x}$.

56 Не строя графика зависимости $y = \dfrac{k}{x}$, определите, в каких координатных четвертях он расположен, если

а) $k = 2$; б) $k = -5$; в) $k = -0,5$; г) $k = 10$.

57 Функции заданы формулами $y=\frac{k_1}{x}$ и $y=\frac{k_2}{x}$, где k_1 и k_2 – положительные числа, причем $k_1 > k_2$. Какой из графиков расположен ближе к началу координат?

58 С помощью графика функции $y=-\frac{8}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:

а) больше 2; г) меньше 1;
б) больше 0; д) меньше 0;
в) больше –4; е) меньше –8.

59 Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значение функции $y=\frac{3}{x}$ на отрезке:

а) $[-3; -\frac{1}{3}]$; б) $[3; 9]$?

60 Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значение функции $y=-\frac{3}{x}$ на отрезке:

а) $[-9; -1]$; б) $[0,3; 0,6]$?

61 Исследуйте функцию с заданной областью определения на четность:

а) $y=\frac{2}{x}$ при $x \in (-20; 0) \cup (0; 20)$; в) $y=\frac{10}{x}$ при $x \in [-100; 0,01]$;

б) $y=-\frac{1,5}{x}$ при $x \in (-0,3; 0) \cup (0; 0,3]$; г) $y=-\frac{1,4}{x}$ при $x \in [-7; 0,7]$.

62 Какие из следующих функций являются: а) четными; б) нечетными?

а) $y=-\frac{1}{x}$; б) $y=x+\frac{1}{x}$; в) $y=x^3-\frac{1}{x}$; г) $y=\frac{3}{|x|}$; д) $y=\frac{5}{x^2}$.

Будут ли указанные вами функции четными (нечетными), если ограничить их область определения до множества положительных чисел?

63 Дана функция $f(x) = \frac{0,2}{x}$. Найдите:

а) $f(\frac{1}{5})$; б) $f(2)$; в) $f(-0,04)$; г) $f(-\frac{6}{25})$; д) $10 \cdot f(-0,001)$; е) $f(a)$.

64 Дана функция $f(x) = \frac{2}{x}$. Найдите:

а) $f(-0,5b)$; б) $0,5f(d^2)$; в) $f(m+2)$; г) $\frac{2}{f(t+10)}$.

65 Дана функция $f(x) = \frac{5}{x}$. Докажите, что

а) $\frac{1}{f(x-1)}+\frac{1}{f(x+1)}=\frac{2}{f(x)}$; б) $\frac{1}{f(x-1)}\cdot\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{5f(x^2-1)}$.

66 Решите графически уравнение:

а) $-\frac{3}{x}=3$; в) $\frac{5}{x}=-2$; д) $-\frac{6}{x}=0$; ж) $-\frac{1}{x}=1,5x+2,5$;

б) $\frac{1}{x}=x$; г) $\frac{5}{x}=5x$; е) $-\frac{7}{x}=3x$; з) $\frac{4}{x}=-x-4$.

67 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\frac{0,5}{x} \\ y=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y=\frac{6}{x} \\ y=\frac{2}{3}x \end{cases}$; д) $\begin{cases} y=\frac{8}{x} \\ y=-x+6 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=x^4 \end{cases}$; и) $\begin{cases} y=-\frac{4}{x} \\ y=|x| \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=-\dfrac{2,5}{x}; \\ y=-5 \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=-\dfrac{6}{x}; \\ y=-2x-4 \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x}; \\ y=2x+5 \end{cases}$ з) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x}; \\ y=x^5 \end{cases}$ к) $\begin{cases} y=\dfrac{2}{x}. \\ y=-|x| \end{cases}$

68 Определите количество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{1,5}{x}; \\ y=x^{10} \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=-\dfrac{5}{x}; \\ y=x^{11} \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=\dfrac{16}{x}. \\ y=x^9 \end{cases}$

69 Касательная к гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$ определяется как прямая, не параллельная ни оси абсцисс, ни оси ординат, и имеющая с гиперболой ровно одну общую точку. Докажите, что прямая $y = 2 - x$ является касательной к гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$ в точке A (1;1). Постройте на одном рисунке графики функций $y=\dfrac{1}{x}$ и $y = 2 - x$.

70 Постройте таблицу (для положительных значений x) и графики (для всех значений x из области определения) функций $y=\dfrac{1}{x^2}$ и $y=\dfrac{1}{x^3}$. Докажите, что функция $y=\dfrac{1}{x^2}$ является четной, а функция $y=\dfrac{1}{x^3}$ – нечетной.

71 Закон Ома для участка цепи постоянного тока задается формулой $I=\dfrac{U}{R}$, где I – сила тока в амперах (А), U – напряжение на участке в вольтах (В), R – сопротивление участка (Ом).

а) Докажите, что если напряжение на участке постоянно, то сила тока обратно пропорциональна сопротивлению участка.

б) Постройте таблицу и график для этой зависимости, если $U = 10$ В.

в) Коротким замыканием называется процесс в цепи, когда сопротивление участка внезапно становится очень малым. Что при этом происходит?

72 Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 20 см^2. Докажите, что длины сторон AB и AD связаны обратной пропорциональностью. Может ли длина стороны AB:

а) быть меньше 1 мм?

б) быть меньше 1 нм (1 мм = 1 000 000 нм)?

в) равняться нулю?

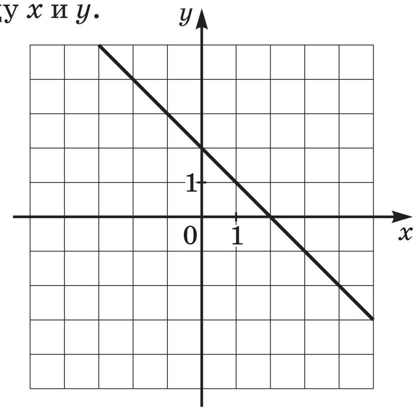
г) равняться 1 км?

73 Два отрезка с длинами a и b являются сторонами прямоугольника, площадь которого равна 1 см^2. Отрезок b является радиусом круга. Постройте график зависимости площади круга S (см^2) от длины отрезка a. Длины отрезков измеряются в см, площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$, где $\pi \approx 3,14$.

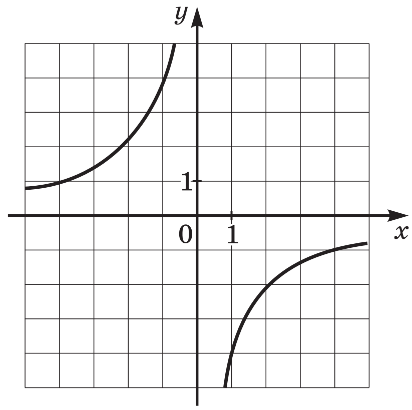
74 Докажите, что площадь прямоугольника, одна из вершин которого лежит на гиперболе $y=\dfrac{k}{x}$, а две стороны, не выходящие из этой вершины, на осях координат, – постоянная величина (не зависит от координатного расположения прямоугольника). Выразите эту величину через коэффициент k.

75 На рисунках а–з приведены графики, изображающие некоторые зависимости между x и y.

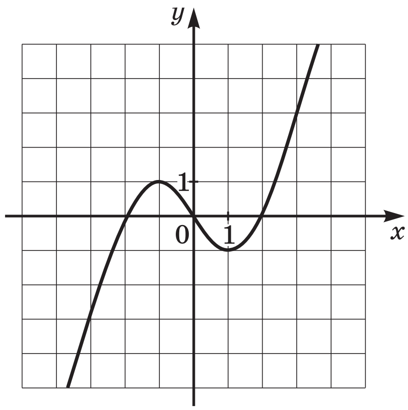
а)



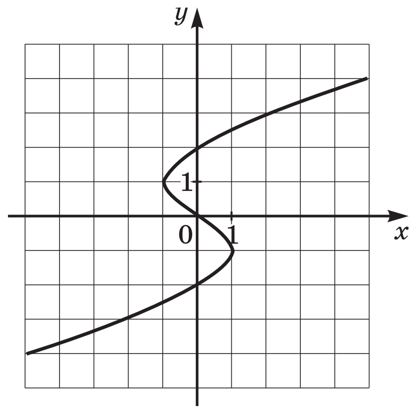
б)



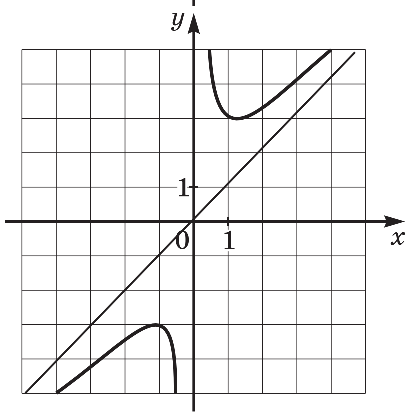
в)



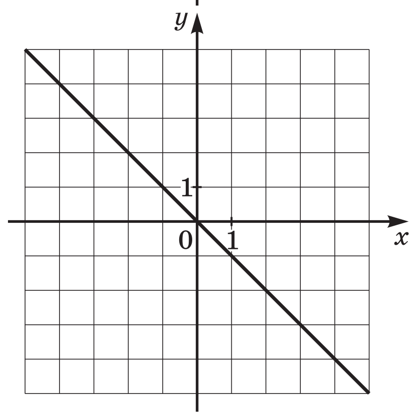
г)



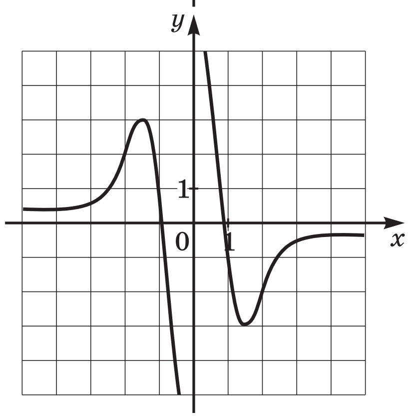
д)



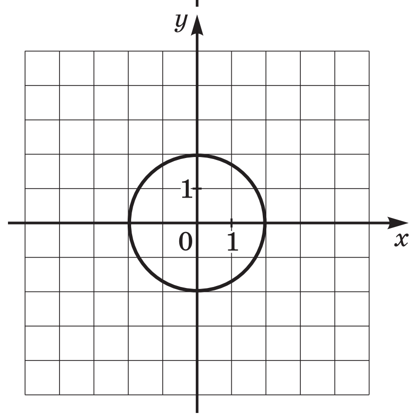
е)



ж)



з)



Для каких из них: 1) зависимость является функцией y от x; 2) зависимость является прямой пропорциональностью; 3) зависимость является обратной пропорциональностью; 4) начало координат является центром симметрии; 5) график является графиком нечетной функции; 6) график симметричен относительно прямой $y = x$?

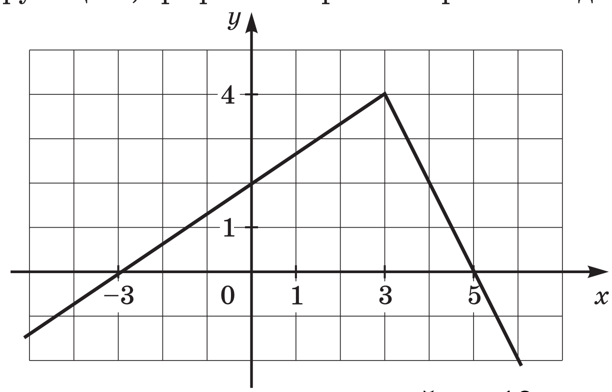
76 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\dfrac{m}{m(m-3)}$; б) $\dfrac{t+4}{t^2+16}$; в) $\dfrac{5}{(a+12)a^4}$; г) $\dfrac{p}{|p|-5}$; д) $\dfrac{10}{|z|+10}$.

77 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} x-1, \text{ если } x\,l \geqslant 0; \\ -x+1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 4, \text{ если } x \geqslant 2; \\ 2x, \text{ если } x < 2 \end{cases}$

78 Задайте формулой функцию, график которой изображен на данном рисунке.



79 Запишите число в виде периодической дроби: а) $\dfrac{5}{9}$; б) $\dfrac{13}{15}$; в) $-5\dfrac{4}{22}$; г) $3\dfrac{17}{34}$.

80 Обратите периодическую дробь в обыкновенную:

а) 0,(61); б) 0,(39); в) 0,2(7); г) −0,3(1); д) 5,1(45); е) −4,3(73).

81 Сравните:

а) 0,11(13) и 0,1113; в) $-1\dfrac{2}{3}$ и −1,65; д) $\dfrac{1}{12}$ и 0,0(83);

б) 0,(23) и 0,233; г) $-\dfrac{10}{7}$ и −1,428572; е) $\dfrac{5}{16}$ и 0,312(5).

82 Обратная пропорциональность задана таблицей. Используя таблицу, определите коэффициент обратной пропорциональности k и заполните таблицу:

а)

x	−3		−1	−0,5		2	
y		1,5		−6	6		1

б)

x	2	3	−10			12	
y		−6		−12	3		−3

83 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график проходит через точку:

а) N (0,7; −5); б) F (−1,4; −5); в) $P(2\dfrac{3}{8}; \dfrac{4}{19})$; г) S (−13; 0,4).

84 Можно ли указать обратную пропорциональность, график которой проходит через следующие две точки плоскости:

а) M (0,2; 5), R (−0,5; −2); б) D (4; −1), F (1; −4); в) Q (5; 2,5), K (2; 5).

85 Постройте график функции $y=\frac{k}{x}$ при условии, что он проходит через точку $S(-1{,}6;\ 5)$.

86 Не строя графика зависимости $y=\frac{k}{x}$, определите, в каких координатных четвертях он расположен, если

а) $k=11$; б) $k=-10$; в) $k=-0{,}3$; г) $k=8$.

87 Определите коэффициент обратной пропорциональности для графика функции $y=\frac{k}{x}$, проходящего через точку A. В каких координатных четвертях этот график расположен?

а) $A(2;\ 3)$; б) $A(-2;\ 10)$; в) $A(-3;\ 21)$; г) $A(20;\ -1)$.

88 С помощью графика функции $y=\frac{18}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:

а) больше 9;
б) больше 0, но меньше 2;
в) больше −6;
г) больше −3, но меньше 0.

89 Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y=-\frac{16}{x}$ на отрезке

а) $[-8;\ -2]$; б) $[-4;-1]$.

90 Исследуйте функцию на четность:

а) $y=\frac{1}{x}$ при $x\in[-100;\ 0)\cup(0;\ 100]$; б) $y=\frac{0{,}8}{x}$ при $x\in[0{,}08;\ 8]$.

91 Дана функция $f(x)=\frac{90}{x}$. Найдите:

а) $f(-5)$; б) $f(0{,}01)$; в) $f(d+12)$; г) $\frac{1}{9}\cdot f(a)$; д) $f(-10q)$.

92 Решите графически уравнение:

а) $\frac{5}{x}=2{,}5$;
б) $\frac{2}{x}=-x+3$;
в) $-\frac{6}{x}=-1$;
г) $\frac{-3}{x}=x-4$;
д) $\frac{5}{x}=0$;
е) $-\frac{11}{x}=x$.

93 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\frac{4}{x}\\ y=4 \end{cases}$;
б) $\begin{cases} y=-\frac{8}{x}\\ y=-2x \end{cases}$;
в) $\begin{cases} y=\frac{8}{x}\\ y=x^2 \end{cases}$;
г) $\begin{cases} y=\frac{16}{x}\\ y=x^3 \end{cases}$;
д) $\begin{cases} y=-\frac{5}{x}\\ y=x+6 \end{cases}$;
е) $\begin{cases} y=\frac{2}{x}\\ y=-2x+4 \end{cases}$;
ж) $\begin{cases} y=\frac{3}{x}\\ y=-\frac{1}{3}x \end{cases}$;
з) $\begin{cases} y=-\frac{3}{x}\\ y=3x \end{cases}$.

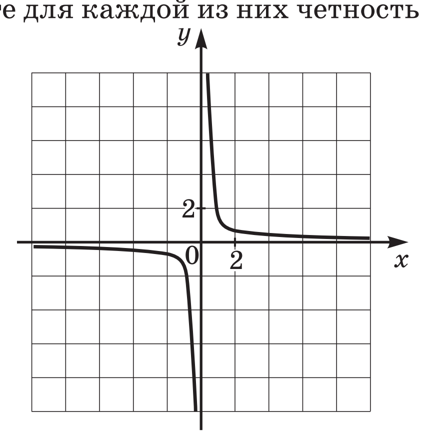
94 Изобразите схематически графики функций $y=\frac{k}{x}$ и $y=bx+m$ так, чтобы они пересекались в одной точке, в двух точках, в трех точках.

95 В цепи постоянного тока силой 5 А рассматриваются различные участки. Какой будет зависимость напряжения на участке цепи от сопротивления этого участка? Постройте таблицу и график для этой зависимости.

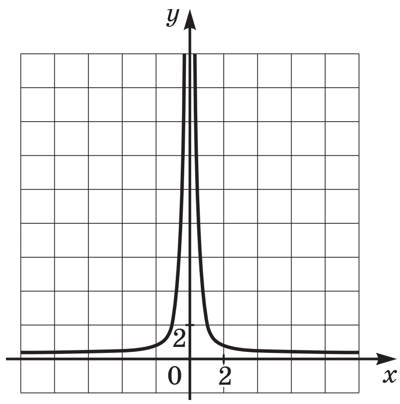
96 Сила взаимодействия между двумя электрическими зарядами в системе СИ вычисляется по формуле $F=k\frac{q_1q_2}{r^2}$, где F измеряется в ньютонах, расстояние r между зарядами – в метрах, величины зарядов q_1 и q_2 – в кулонах (единица заряда в системе СИ), $k = 9 \cdot 10^9$ (в единицах системы СИ). Постройте таблицу и график зависимости силы притяжения между двумя зарядами разного знака в 1 кулон от расстояния между ними, если расстояние меняется от 0,5 м до 1 м с шагом 0,05 м. На оси абсцисс выберите масштаб 0,1 м в 1 см, на оси ординат – 10^{10} ньютонов в 1 см.

97 Даны графики нескольких функций вида $y = \dfrac{1}{x^k}$, где k – целое ненулевое число. Укажите для каждой из них четность показателя k.

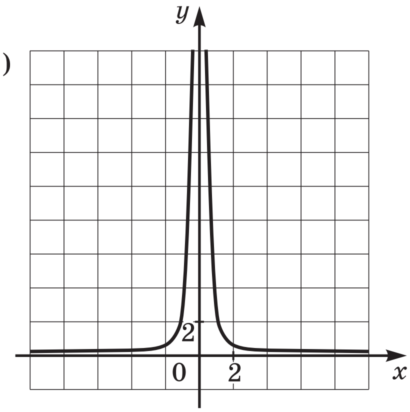
а)



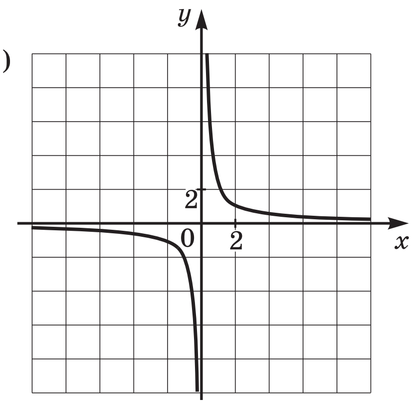
б)



в)



г)



98 Какие из следующих функций являются: а) четными; б) нечетными?

а) $y = \dfrac{14}{x}$; б) $y = -\dfrac{7}{x} + 7$ в) $y = \dfrac{13}{|x|}$; г) $y = \dfrac{9}{x^2}$; д) $y = -\dfrac{5}{x^3}$.

99 Постройте график функции: а) $y = \dfrac{5}{x^2}$; б) $y = -\dfrac{12}{x^3}$.

100 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ -2x+1, \text{ если } x < 1 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \geqslant 3; \\ 3, \text{ если } x < 3. \end{cases}$

101 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\dfrac{n}{n+8}$; б) $\dfrac{3}{q^8+1}$; в) $\dfrac{r}{r^2-9}$; г) $\dfrac{d}{d(d+5)}$; д) $\dfrac{4h}{|h|-4}$.

102 Сравните:

а) 0,22(15) и 0, 2215; в) $-1\dfrac{5}{9}$ и $-1{,}55$; д) $\dfrac{1}{15}$ и 0,(6);

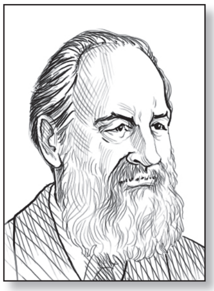
б) 0,1(9) и 0,(2); г) $-\dfrac{3}{11}$ и $-0{,} 271$; е) $\dfrac{4}{30}$ и 0,1(31).

С **103*** Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ равняться 20 202 (n – натуральное число)?

104* Докажите, что $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{999}{1000!}<1$.

105* На доске написаны четыре числа. Разрешается выбрать любые два из них, прибавить к ним по единице и записать полученные числа вместо выбранных. Можно ли с помощью нескольких таких операций из чисел 1, 3, 5, 10 получить четыре равных числа?

3. Кусочно-заданные функции

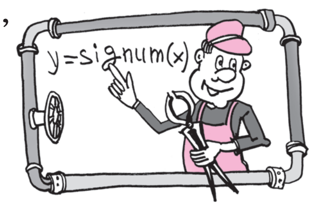


Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945),
русский и советский кораблестроитель,
механик, математик

Бывает, что на практике важно отследить не значение некоторой величины, а только ее знак. Так, для работы компаний мобильной связи в некоторых случаях достаточно отслеживать не значение текущей суммы на счете пользователя, а лишь знак его баланса. Весной для спасения саженцев от ночных заморозков садовода часто волнует лишь плюсовая температура. Чтобы автоматизировать процессы предоставления услуг связи, включения отопления и пр., возникает необходимость описать на математическом языке правило, которое каждому числу ставит в соответствие его знак.

Функция, которая удовлетворяет этому требованию, была введена еще в конце XIX века немецким математиком Леопольдом Кронекером. Областью определения этой функции является множество всех чисел, для обозначения положительных чисел выбрано число (+1), для обозначения отрицательных чисел – число (–1), а нулю соответствует 0:



$$y=\begin{cases}1, \text{ если } x > 0;\\ 0, \text{ если } x = 0;\\ -1, \text{ если } x < 0\end{cases}$$

Эту функцию обозначают $y = sign(x)$, читают: «сигнум икс» (от латинского «signum» – «знак»). В наши дни функция сигнум используется в самых разных разделах математики, например, в математической статистике.

Областью определения данной функции является множество $X = (-\infty; +\infty)$, которое разбивается на три попарно непересекающихся подмножества $X_1 = (-\infty; 0)$, $X_2 = \{0\}$ и $X_3 = (0; +\infty)$:

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X;\ X_1 \cap X_2 = \varnothing;\ X_1 \cap X_3 = \varnothing;\ X_2 \cap X_3 = \varnothing$$

График функции сигнум состоит из двух лучей $y = 1$ и $y = -1$, а также отдельно расположенной точки (0; 0) (рис. 1). Начало каждого из этих лучей не принадлежит

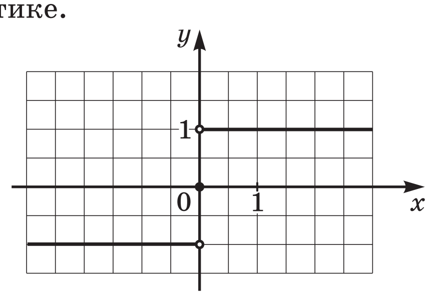


Рис. 1

графику, поэтому эти точки изображены «выколотыми» (иногда точки, не принадлежащие графику, обозначают стрелками).

Функция $y = sign(x)$ напоминает изученные нами в 7 классе кусочно-линейные функции. Однако, в отличие от них, у функции сигнум один из числовых промежутков, составляющих область определения, «сжался» в точку. Поэтому нам необходимо обобщить понятие кусочно-линейной функции и дополнить его случаями, когда в некоторых точках функция принимает «отдельные» значения. При таком понимании функция $y = sign(x)$ является кусочно-линейной. Попробуйте сами сформулировать новое, обобщенное определение этого понятия.

Вместе с тем в предыдущих пунктах мы выяснили, что многие реальные процессы могут описываться и нелинейными функциями. Поэтому нам необходимо продолжить обобщение понятия кусочно-линейной функции и ввести новую, так называемую *кусочно-заданную* функцию, где на каждом из промежутков функция может быть задана не только формулой $y = kx + b$, но и другими формулами самых разных видов – например, $y = x^n$, $y = \dfrac{1}{x}$ и т.д.

Ясно, что кусочно-линейные функции также являются кусочно-заданными (а вот обратное верно не всегда!). Поэтому начнем знакомство с кусочно-заданными функциями с уточнения особенностей более простого их случая кусочно-линейных функций.

Пример 1.

Вспомним одну из простейших кусочно-линейных функций $y = |x|$. Используя определение модуля, ее можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

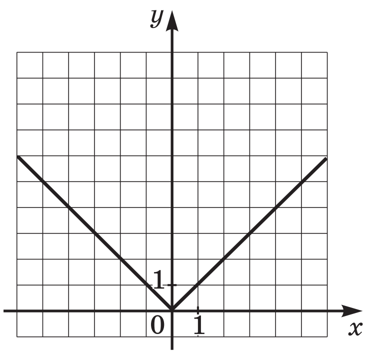


Рис. 2

График этой функции изображен на рис. 2. Ее область определения разбита на два промежутка $X_1 = (-\infty; 0)$ и $X_2 = [0; +\infty)$, где $X_1 \cup X_2 = (-\infty; +\infty)$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Оба промежутка X_1 и X_2 имеют «общий конец» – точку 0, который принадлежит правому промежутку, но не принадлежит левому. При этом в точке 0 происходит «стыковка» значений функций, ведь по какой бы из формул мы бы ни вычисляли значение функции, для нее оно будет одним и тем же.

Однако подобная «стыковка» значений функций, заданных на разных промежутках, происходит далеко не всегда.

Пример 2.

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

Область определения этой функции $X = (-\infty; +\infty)$ разбита на промежутки $X_1 = (-\infty; 0)$ и $X_2 = [0; +\infty)$. Правый конец X_1 совпадает с левым концом X_2 (точка 0), но значения функций на обоих промежутках в точке 0 не совпадают: при $x = 0$ значение $x + 1 = 0 + 1 = 1$, а значение $-x = -0 = 0$ $(1 \neq 0)$.

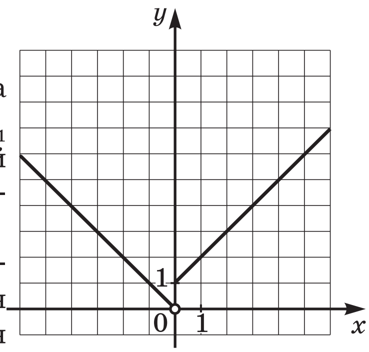


Рис. 3

График данной функции приведен на рис. 3. На левом участке графика точка 0 изображена «выколотой», так как концевая точка этому участку графика не принадлежит. Из-за отсутствия «стыковки» график *не соединяется в единую ломаную*.

Если определить функцию немного иначе:

$$y=\begin{cases} x+1, \text{ если } x > 0; \\ -x, \text{ если } x \leqslant 0 \end{cases},$$

то «выколотой» точкой будет отмечен уже не левый, а правый участок графика (рис. 4).

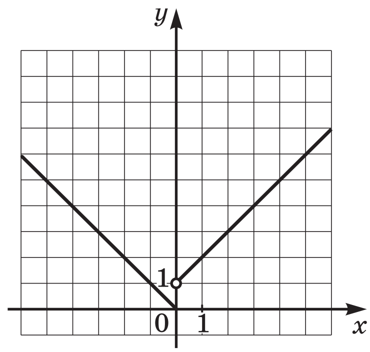


Рис. 4

Во всех рассмотренных нами примерах область определения функции совпадала с числовой прямой $X = (-\infty; +\infty)$. Однако кусочно-заданные функции (и, в том числе, кусочно-линейные) могут быть заданы на любом объединении числовых промежутков.

Пример 3.

Рассмотрим функцию $y=\begin{cases} x+1, \text{ если } x \leqslant -1; \\ x-1, \text{ если } x \geqslant 1 \end{cases}$

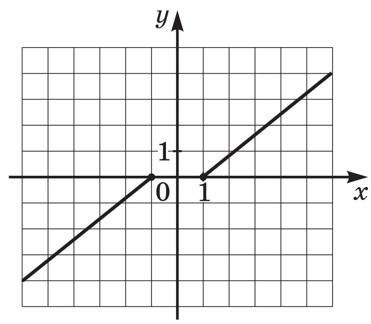


Рис. 5

Эта функция также является не только кусочно-заданной, но и кусочно-линейной. Ее график изображен на рис. 5.

Область определения данной функции является объединением двух лучей: $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = (-\infty; -1]$, $X_2 \in [1; +\infty)$. При этом правый конец X_1 (точка -1) не совпадает с левым концом X_2 (точка 1), поэтому область определения этой функции не является числовым промежутком. Во всех точках интервала $(-1; 1)$ функция не определена.

Рассмотрим теперь кусочно-заданные функции более сложного вида.

Пример 4.

Построить график функции: $y=\begin{cases} 5, \text{ если } x > 1; \\ x, \text{ если } -1 < x \leqslant 1; \\ 2, \text{ если } x = -1; \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < -1 \end{cases}$

Решение:

Для построения графика кусочно-заданной функции воспользуемся алгоритмом построения кусочно-линейной функции с той лишь разницей, что на каждом из промежутков может быть получена часть не прямой, а кривой линии.

Область определения функции $X = (-\infty; +\infty)$ разбита на четыре непересекающихся части. Пронумеруем их по мере движения по числовой прямой слева направо: $X_1 = (-\infty; -1)$; $X_2 = \{-1\}$; $X_3 = (-1; 1]$; $X_4 = (1; +\infty)$.

На каждом из выделенных промежутков и в точке $x = -1$ построим график, который задан соответствующей формулой.

Полученный график изображен на рис. 6. Он состоит из куска ветви гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$, при $x < -1$; точки $(-1; 2)$; прямолинейного отрезка $y = x$, при $-1 < x \leqslant 1$; горизонтального луча $y = 5$, при $x > 1$. Концевые точки частей графика, не принадлежащие им, отмечены «выколотыми» точками.

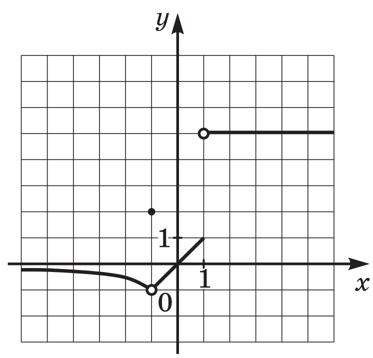
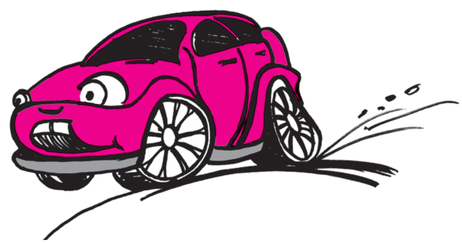


Рис. 6

* * *



Приведем примеры реальных ситуаций, которые описываются кусочно-заданными функциями.

Мы привыкли решать задачи на движение, упрощая реальный процесс. Для простоты мы обычно считаем, что объект сразу движется с постоянной скоростью, указанной в задаче. Однако в жизни это происходит иначе: сначала объект должен «набрать» эту заданную скорость. Попробуем описать прямолинейное движение объекта без подобных «математических» упрощений, используя законы, известные из курса физики.

Задача.

Автомобиль движется из состояния покоя (в момент $t = 0$) с ускорением $a = 0{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через 3 минуты движения он достигает некоторой скорости v_0, после чего продолжает равномерно двигаться с этой скоростью. Какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 минуту после начала движения? Через 2 минуты, 3 минуты, 5 минут, 10 минут? Постройте график зависимости $s\,(t)$, где время t от начала движения измеряется в минутах, s – в километрах.

Решение:

Если при прямолинейном движении скорость объекта прямо пропорционально зависит от времени ($v = at$, где коэффициент пропорциональности a называется *ускорением*), то путь, пройденный из точки начала движения ($t = 0$, $v = 0$), вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$.

1. Выразим ускорение в требуемых единицах измерения:

$$a = 0{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}1\frac{\text{км}/1000}{(\text{мин}/60)^2} = 0{,}1\cdot\frac{3600}{1000}\frac{\text{км}}{\text{мин}^2} = 0{,}36\frac{\text{км}}{\text{мин}^2}.$$

2. Промежуток времени, за которое автомобиль наберет скорость v_0, обозначим t_0, а путь, который автомобиль пройдет за это время, – s_0. По условию $t_0 = 3$ мин. Выясним, до какой скорости разгонится автомобиль за эти 3 минуты.

$$v_0 = a\cdot t_0 = 0{,}36\,\frac{\text{км}}{\text{мин}^2}\cdot 3\text{ мин} = 1{,}08\,\frac{\text{км}}{\text{мин}}$$

3. Найдем зависимость $s\,(t)$, где t – время от начала движения, s – путь, пройденный с момента начала движения.

3.1. Если $t \leqslant 3$, то пройденный путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$. Подставим в нее соответствующее значение a:

$$s\,(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}36\cdot t^2 = 0{,}18t^2$$

Таким образом, при $t \leqslant 3$ функция $s\,(t)$ является нелинейной функцией от t, графиком ее будет часть параболы.

3.2. При $t > 3$, пройдя путь s_0, автомобиль далее двигался равномерно со скоростью $v_0 = 1{,}08\,\frac{\text{км}}{\text{мин}}$ в течение времени $(t - 3)$ мин. Значит, зависимость $s\,(t)$ на этом участке задается формулой:

$$s\,(t) = s_0 + v_0\,(t - 3) = 0{,}18\cdot 3^2 + 1{,}08\cdot\,(t - 3) = 1{,}62 + 1{,}08t - 3{,}24 = 1{,}08t - 1{,}62$$

Таким образом, при $t > 3$ пройденный с начала движения путь является линейной функцией от t, графиком этой функции будет открытый луч.

4. Итак,

$$s(t) = \begin{cases} 0{,}18t^2, \text{ если } t \leqslant 3; \\ 1{,}08t - 1{,}62, \text{ если } t > 3 \end{cases}$$

Пройденный путь $s(t)$ – кусочно-заданная функция с областью определения $X = [0; +\infty)$. Эта область определения разбивается на два непересекающихся промежутка $X_1 = [0; 3]$ и $X_2 = (3; +\infty)$.

5. Пользуясь полученной формулой, вычислим, какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 мин, 2 мин, 3 мин, 5 мин, 10 мин после начала движения.

Если $t = 1$ мин, $s = 0{,}18 \cdot 1^2 = 0{,}18$ км;
если $t = 2$ мин, $s = 0{,}18 \cdot 2^2 = 0{,}72$ км;
если $t = 3$ мин, $s = 0{,}18 \cdot 3^2 = 1{,}62$ км.

Здесь же проверим, состыкуются ли концевые точки частей графика, вычислив $s(3)$ по другой формуле:

$s(3) = 1{,}08t - 1{,}62 = 1{,}08 \cdot 3 - 1{,}62 = 1{,}62.$

Значения одинаковые, значит, части графика состыкуются.

Если $t = 5$ мин, $s = 1{,}08 \cdot 5 - 1{,}62 = 3{,}78$ км;
если $t = 10$ мин, $s = 1{,}08 \cdot 10 - 1{,}62 = 9{,}18$ км.

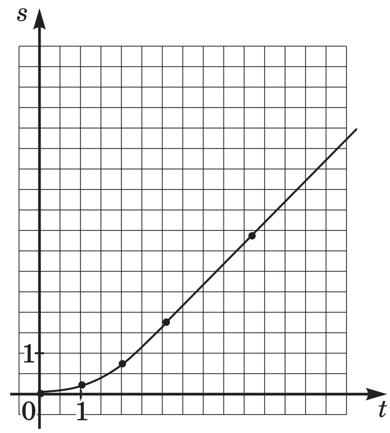


Рис. 7

Построим теперь график функции $s(t)$, используя полученные координаты точек $(t; s)$ и учитывая, что $s(0) = 0$.

График изображен на рис. 7. Первый участок графика – часть параболы, отличающейся от параболы $s = t^2$ лишь постоянным коэффициентом 0,18. Вторая часть графика – участок прямой, для построения которой достаточно значений функции в двух точках (например, $t = 3$ и $t = 5$).

К **106** Турист в течение первых 3 часов шел со скоростью 4 км/ч. После этого он отдыхал в течение получаса. Следующие 2 часа он шел со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s от времени движения t в часах.

Как называется полученная функция? Постройте ее график на координатной плоскости Ost.

107 1) Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \geqslant 2; \\ -x + 2, \text{ если } x < 2 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x + 2, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

Чем отличаются эти функции? Какой из построенных графиков не является ломаной? На последнем графике найдите луч, начало которого не принадлежит графику функции.

2) Постройте график функции $y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x > 0; \\ 1, \text{ если } x = 0; \\ -x + 2, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

Чем отличается эта функция от предыдущей? Найдите на графике этой функции лучи, начало которых не принадлежит графику.

3) Предложите, каким способом можно показать, что начало луча не принадлежит графику. Сравните свой способ с общепринятым способом, познакомившись с еще одним примером кусочно-линейной функции на стр. 28 учебника.

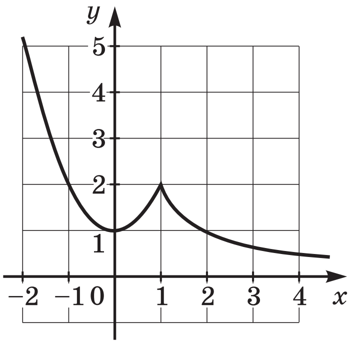
4) Перечислите новые особенности кусочно-линейных функций, которые вы выявили с помощью этого задания.

108 1) Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant 1; \\ x, \text{ если } x < 1 \end{cases}$. Является ли эта функция кусочно-линейной?

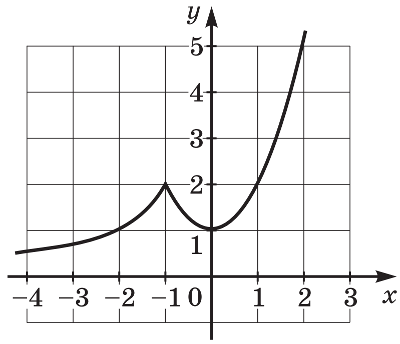
2) Предложите название для этой функции. Сравните его с общепринятым названием, указанным на стр. 29 учебника. Приведите пример величин, связанных аналогичной зависимостью.

109 Укажите, какой из графиков задается функцией $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1;\\ x^2, \text{ если } x<1\end{cases}$

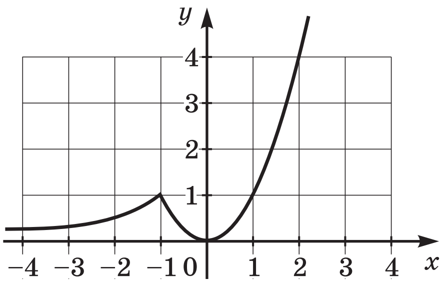
1)



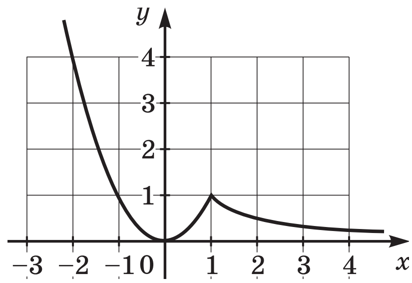
3)



2)



4)



110 Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y=\begin{cases}2x-3, \text{ если } x>4;\\ -x+9, \text{ если } x\leqslant 4\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}2x-3, \text{ если } x>-1;\\ -x+9, \text{ если } x\leqslant -1\end{cases}$

111 Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y=\begin{cases}2x-3, \text{ если } x>1;\\ 1, \text{ если } x=1;\\ -2x+1, \text{ если } x<1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}3x-2, \text{ если } x>0;\\ 1, \text{ если } x=0;\\ x+2, \text{ если } x<0\end{cases}$

112 Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y=\begin{cases}2x-1, \text{ если } x>1;\\ 1, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 1;\\ -2x-1, \text{ если } x<-1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}3x+1, \text{ если } x>2;\\ 1, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 2;\\ -x+1, \text{ если } x<0\end{cases}$

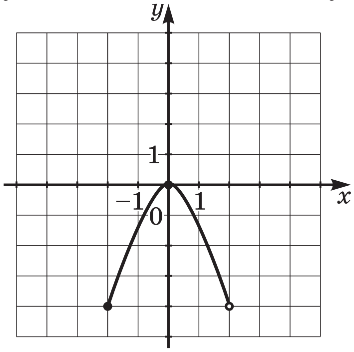
113 Постройте графики функций:

а) $y=\begin{cases}3x-4, \text{ если } x>2;\\ x, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 2;\\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x<-1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\geqslant 1;\\ 2x, \text{ если } 0\leqslant x<1;\\ -x+3, \text{ если } x<0\end{cases}$

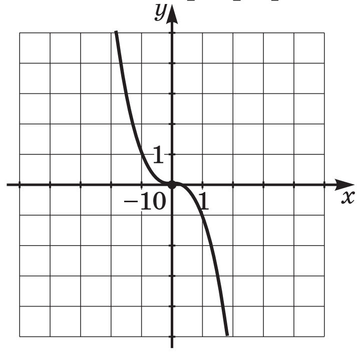
114 Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{24}{|x|}$; б) $y=-\dfrac{8}{|x|}$.

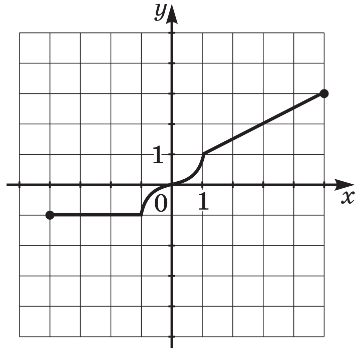
115 На рисунках изображены графики функций. Прочитайте каждый график, используя план, введенный в пункте 1 этого параграфа:



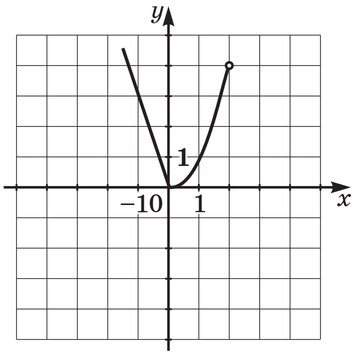
а)



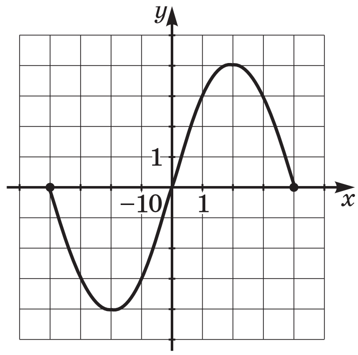
б)



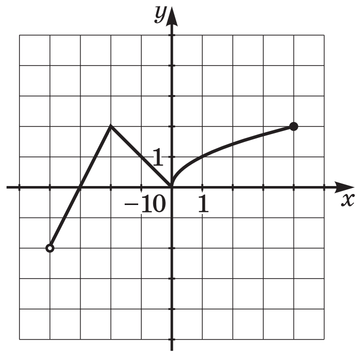
в)



г)



д)



е)

116 Постройте график функции с заданной областью определения и «прочитайте» его:

а) $y=\begin{cases} x^2, \text{ если } 0 \leqslant x < 3; \\ -x^2, \text{ если } -3 < x < 0 \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} x, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 5; \\ x^6, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

117 Дана функция $y=\begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant -2; \\ \dfrac{2}{x}, \text{ если } x < -2 \end{cases}$

Найдите $y\ (-8)$, $y\ (-4)$, $y\ (-1)$, $y\ (-\frac{1}{2})$, $y\ (0)$, $y\ (24)$. Постройте график функции и «прочитайте» его.

118 Дана функция $y=\begin{cases} -2x+2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ -\dfrac{12}{x}, \text{ если } -6 \leqslant x < -2 \end{cases}$

Найдите $y\ (-12)$, $y\ (-3)$, $y\ (-2)$, $y\ (-0{,}6)$, $y\ (0)$, $y\ (4)$.
Постройте график функции $y\ (x)$ и «прочитайте» его.

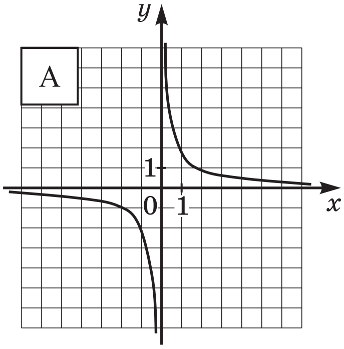
119 Постройте графики кусочно-заданных функций:

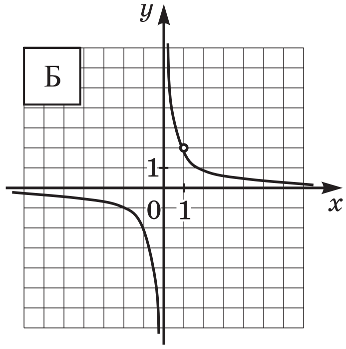
а) $y=\begin{cases} -x+4, \text{ если } x \geqslant 2; \\ \dfrac{4}{x}, \text{ если } \dfrac{1}{2} \leqslant x < 2; \\ 8, \text{ если } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} 5, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 5; \\ -\dfrac{5}{x}, \text{ если } -5 \leqslant x < -1; \\ -x-4, \text{ если } -6 < x < -5 \end{cases}$

120 Постройте график функции и исследуйте ее на четность:

$$f(x)=\begin{cases}1+x, \text{ если } x\geqslant 0;\\ -x+1, \text{ если } x<0\end{cases}$$

121 На рисунке А изображен график функции $y=\dfrac{2}{x}$. Чем отличается от него график, изображенный на рисунке Б?





Укажите область определения для каждой из функций.
Какой из этих графиков совпадет с графиком функции $y=\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)}$?
Объясните, как построить график функции $y=\dfrac{2x-2}{x^2-x}$.

122 Постройте график функции $y=\dfrac{2x^2-2}{x+1}$.

П **123** Представьте каждое из чисел в виде отношения целого числа к натуральному:
$2\dfrac{3}{5}$; -6; $0{,}37$; 0; $-\dfrac{4}{7}$; $0{,}06$; $-15\dfrac{1}{6}$

124 Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби числа:
а) $\dfrac{3}{9}$; б) $\dfrac{8}{37}$; в) $\dfrac{7}{15}$; г) 3; д) $-15{,}15$; е) $\dfrac{22}{9}$; ж) $-6\dfrac{5}{12}$; з) $\dfrac{89}{11}$.

125 Представьте в виде обыкновенной дроби:
а) $12{,}(3)$; б) $1{,}(23)$; в) $15{,}3(1)$; г) $-14{,}0(14)$; д) $8{,}14(8)$.

126 Назовите три числа, заключенных между числами:
а) $2{,}002$ и $2{,}011$; б) $-3{,}009$ и $-3{,}09$; в) $-1\dfrac{3}{4}$ и $-1{,}7(5)$; г) $\dfrac{1}{9}$ и $0{,}(2)$.

127 Решите неравенство $2|x-3|+x\geqslant 3$.

128 Решите систему неравенств: $\begin{cases}2x+5\geqslant 0\\ 7-5x\leqslant 0\\ 2x-3<0\end{cases}$.

Д **129** Как называются данные функции? Постройте их графики.

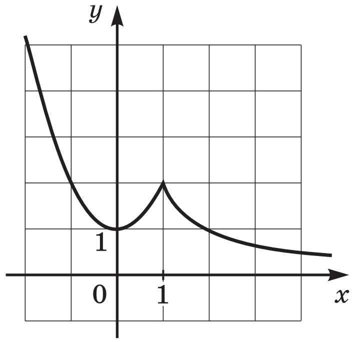
а) $y=\begin{cases}0{,}5x+0{,}5, \text{ если } x\geqslant 1;\\ x^8, \text{ если } -1\leqslant x<1;\\ -0{,}5x+0{,}5, \text{ если } x<-1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}x, \text{ если } x\geqslant 1;\\ x^5, \text{ если } -1\leqslant x<1;\\ -x-2, \text{ если } x<-1\end{cases}$

130 Дана функция $y=\begin{cases}\dfrac{3}{x}, \text{ если } x>0;\\ \dfrac{-3}{x}, \text{ если } x<0\end{cases}$

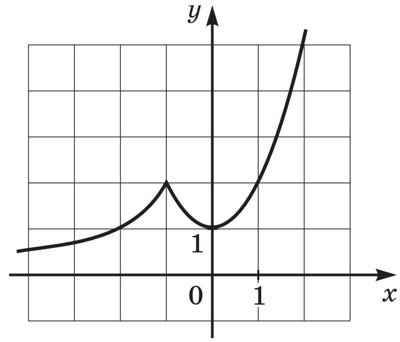
Найдите $y(-9)$, $y(-6)$, $y(-1)$, $y(-\dfrac{3}{5})$, $y(0)$, $y(15)$, $y(30)$. Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.

131 Укажите, какой из графиков задается функцией $y=\begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant -1; \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x < -1. \end{cases}$

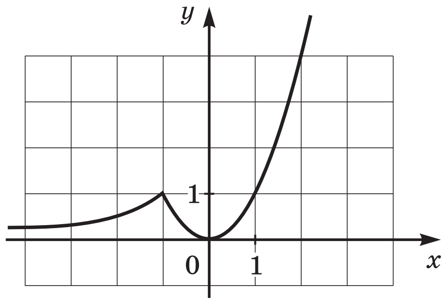
1)



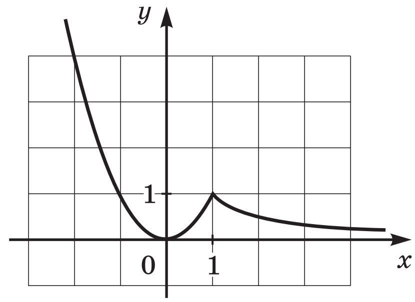
3)



2)



4)



132 Дана функция $y=\begin{cases} -9x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{-9}{x}, \text{ если } x < -1 \end{cases}$

Найдите $y\,(-9)$, $y\,(-4{,}5)$, $y\,(-1)$, $y\,(0)$, $y\,(0{,}5)$, $y\,(3)$. Постройте график функции $y\,(x)$ и «прочитайте» его.

133 Постройте график функции $y=\dfrac{x+1}{x^2+x}$.

134 Назовите пять целых чисел из интервала $(-1{,}6;\ 3{,}2)$.

135 Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби числа:

а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{2}{9}$; в) $\dfrac{22}{6}$; г) $8{,}09$; д) $-\dfrac{5}{3}$; е) $-8\dfrac{7}{11}$.

136 Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) $1{,}(1)$; б) $2{,}0(9)$; в) $-6{,}(12)$; г) $9{,}8(76)$; д) $-0{,}13(52)$.

137 Решите неравенство $|5-x|+x \leqslant 5$.

138 Решите систему неравенств: $\begin{cases} 7-48x \leqslant -5 \\ 15x-1 \geqslant 2 \\ 3x < 1 \end{cases}$.

C **139*** Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2002. Может ли их сумма равняться 9999?

140* В компании 100 акционеров, и любые 66 из них владеют не менее чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?