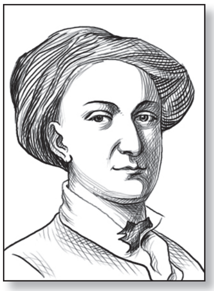
Глава 5

Рациональные уравнения и неравенства

§ 1. Рациональные уравнения

1. Алгебраические дроби и их свойства



... имея возможность обратиться к математическому обоснованию, большой глупостью было бы искать какое-либо другое, – это все равно, что идти на ощупь в темноте, когда рядом стоит свеча.

Джон Арбетнот (1667–1735),
английский физик

Как мы знаем, дроби возникли еще в глубокой древности в связи с практическими потребностями людей. Мы начали изучать обыкновенные дроби в начальной школе. Позже мы научились решать задачи на дроби. Так, например, при нахождении части, которую одно число составляет от другого, мы делили первое число на второе и записывали ответ в виде дроби. В наше время, например для проведения аналитической деятельности предприятия, приходится решать подобные задачи не с числовыми, а с буквенными данными. Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 1.

Ежемесячно компания тратит на оплату звонков по городу x тысяч рублей. Траты на междугородние звонки по России составляют a тысяч рублей, а на международные звонки на b тысяч рублей меньше. Какую часть потраченных на связь денег составили в этом месяце затраты на международные звонки?

Решение.

На междугородние звонки потрачено $a - b$ тыс. руб. Всего на связь было потрачено: $a + a - b + x = 2a - b + x$ тыс. руб. Найдем, какую часть составили затраты на международные звонки от суммы всех затрат на связь:

$$\frac{a-b}{2a-b+x}.$$

Ответ: $\frac{a-b}{2a-b+x}$.

В ответе к этой задаче мы получили выражение, которое является отношением двух многочленов $a - b$ и $2a - b + x$. Подобные выражения часто встречаются в математике и имеют специальное название.

***Определение* 1.** Выражение, являющееся отношением двух многочленов A и B называется **алгебраической дробью** $\frac{A}{B}$. При этом многочлен A называют **числителем** алгебраической дроби, а многочлен B – ее **знаменателем**.

Алгебраическими дробями являются, например, следующие выражения:

$$1)\ \frac{2}{3};\ 2)\ \frac{11m-27}{1};\ 3)\ \frac{x-2}{x-3};\ 4)\ \frac{ax^2-bx+1}{a^3+b-x}.$$

Где,

Алгебраическая дробь	Числитель дроби	Знаменатель дроби
$\frac{2}{3}$	2 – многочлен 0-й степени	3 – многочлен 0-й степени
$\frac{11m-27}{1}$	$11m-27$ – многочлен 1-й степени	1 – многочлен 0-й степени
$\frac{x-2}{x-3}$	$x-2$ – многочлен 1-й степени	$x-3$ – многочлен 1-й степени
$\frac{ax^2-bx+1}{a^3+b-x}$	ax^2-bx+1 многочлен 2-й степени	a^3+b-x– многочлен 3-й степени

Как мы видим, обыкновенная дробь $\frac{2}{3}$ и многочлен $11m-27$ также являются алгебраическими дробями. Свойства подобных выражений и правила действий с ними мы уже изучали. А вот о последних двух алгебраических дробях этого сказать нельзя. Расширим свои знания об алгебраических дробях.

Ясно, что алгебраические дроби могут принимать различные числовые значения, в зависимости от значений, входящих в них переменных. Так, алгебраическая дробь $\frac{x-2}{x-3}$ при $x=5$ равна $\frac{5-2}{5-3}=\frac{3}{2}=1{,}5$. При $x=2$ она равна $\frac{2-2}{2-3}=\frac{0}{-1}=0$.

Если бы мы придали переменной x значение 3, то знаменатель дроби обратился бы в ноль: при $x=3$ дробь $\frac{x-2}{x-3}$ не имеет смысла. Поэтому значение алгебраической дроби можно рассматривать только на так называемой *области определения* (или *множестве допустимых значений переменной*) – это множество, из которого исключают все значения переменных, обращающих ее знаменатель в ноль.

***Определение* 2. Областью определения** алгебраической дроби является множество тех и только тех значений переменных, при которых ее знаменатель не обращается в ноль.

Пример 1.

Найти области определения алгебраических дробей:

а) $\frac{x-2}{x-3}$; б) $\frac{x^2-2x}{x^2-3x}$; в) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$.

Решение:

а) Областью определения дроби является множество чисел x таких, что

$$x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3.$$

Ответ: $x\in(-\infty;\,3)\cup(3;\,+\infty)$.

б) Областью определения дроби является множество чисел x таких, что:

$$x^2-3x\neq 0 \Leftrightarrow x\,(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ и } x\neq 3.$$

Ответ: $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,3)\cup(3;\,+\infty)$.

в) Аналогично, $x^2-4x+4\neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Ответ: $x\in(-\infty;\,2)\cup(2;\,+\infty)$.

В связи с тем что значения алгебраических дробей мы рассматриваем только на их *области определения*, нам необходимо уточнить понятие равенства алгебраических дробей.

Определение **3. Две алгебраические дроби** будем называть **равными**, если их числовые значения совпадают при всех значениях переменных, допустимых для обеих дробей.

Работая с обыкновенными дробями, мы часто пользовались *основным свойством дроби*. Так как в алгебраической дроби переменными обозначены некоторые числа, то аналогичное свойство будет справедливо и для алгебраических дробей.

Основное свойство алгебраической дроби

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится алгебраическая дробь, равная данной.

$$\frac{A}{B} = \frac{AX}{BX}, \text{ где } X \neq 0,\ B \neq 0$$

Указанное свойство позволяет проводить преобразования алгебраических дробей: их сокращение, домножение числителя и знаменателя на один и тот же многочлен, приведение к общему знаменателю и др.

Сократим, например, алгебраические дроби из рассмотренного выше примера 1.

а) Числитель и знаменатель дроби $\frac{x-2}{x-3}$ не имеют общих множителей. Дробь несократима.

б) Проведем равносильные преобразования данной дроби и сократим ее на x, представив дробь в более простом виде:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-3x} = \frac{x(x-2)}{x(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Заметим, что в процессе этого преобразования область определения исходной дроби расширилась на значение $x = 0$.

в) Аналогично,

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x-3}{x-2}.$$

В данном случае при сокращении алгебраической дроби ее область определения не расширилась.

Прочитаем равенства, полученные в случаях *б* и *в*, справа налево. Теперь эти равенства служат примерами домножения числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же ненулевой многочлен. При этом, в отличие от сокращения алгебраических дробей, область определения дроби в случае *б* сузилась.

С помощью умножения числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же ненулевой многочлен можно привести алгебраическую дробь к новому знаменателю.

Пример 2.

Представьте дробь $\frac{7}{3r+8s}$ как дробь со знаменателем $9r^2 - 64s^2$.

Решение:

Приведем дробь к новому знаменателю по аналогии с обыкновенными дробями. Чтобы понять, на какой многочлен нужно домножить числитель и знаменатель дроби, разложим новый знаменатель на множители. По формуле разности квадратов:

$9r^2-64s^2=(3r+8s)(3r-8s)$. Отсюда ясно, что для получения нового знаменателя числитель и знаменатель дроби надо домножить на $3r-8s$, значит:

$$\frac{7}{3r+8s}=\frac{7(3r-8s)}{(3r+8s)(3r-8s)}=\frac{7(3r-8s)}{9r^2-64s^2}.$$

Теперь можно перейти к приведению нескольких дробей к общему знаменателю. Ясно, что общий знаменатель должен делиться на каждый из знаменателей исходных дробей, и в самом общем случае им может быть произведение знаменателей исходных дробей.

Пример 3[1].

Приведите дроби $\frac{2}{a+c}$, $\frac{3}{a-c}$ к общему знаменателю.

Решение:

Общий знаменатель дробей равен произведению: $(a+c)(a-c)$.

$$\frac{2}{a+c}=\frac{2(a-c)}{(a+c)(a-c)},\qquad \frac{3}{a-c}=\frac{3(a+c)}{(a+c)(a-c)}.$$

Часто для двух дробей можно найти более простой общий знаменатель, чем произведение их знаменателей. Чтобы избежать громоздких преобразований будем стремиться к поиску *простейшего* общего знаменателя. Для этого воспользуемся известным правилом: домножим один из знаменателей дробей на недостающие множители из знаменателей других дробей.

Пример 4.

Приведите дроби $\frac{3b-2}{7a^2+7ac}$, $\frac{2b-3}{a^2-ac}$ к общему знаменателю.

Решение:

Сначала разложим знаменатели дробей на множители:

$$7a^2+7ac=7a(a+c),\qquad a^2-ac=a(a-c)$$

Найдем простейший общий знаменатель. Для этого выпишем знаменатель одной из дробей $7a(a+c)$ и допишем недостающий множитель $a-c$ из знаменателя второй дроби. Получим, что общий знаменатель дробей равен произведению $7a(a+c)(a-c)$.

Найдем дополнительные множители для дробей, разделив общий знаменатель на каждый из знаменателей исходных дробей:

$$\frac{7a(a+c)(a-c)}{7a(a+c)}=a-c,\qquad \frac{7a(a+c)(a-c)}{a(a-c)}=7(a+c).$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{3b-2}{7a^2+7ac}=\frac{3b-2}{7a(a+c)}=\frac{(3b-2)(a-c)}{7a(a+c)(a-c)};\qquad \frac{2b-3}{a^2-ac}=\frac{2b-3}{a(a-c)}=\frac{7(2b-3)(a+c)}{7a(a+c)(a-c)}.$$

Итак, преобразования алгебраических дробей выполняются аналогично преобразованиям обыкновенных дробей, но имеют *важные особенности*:

- для проведения преобразований на множители раскладываются не только числовые множители, но и многочлены;

---

[1] Примечание: Если в условии задачи не требуется искать области определения алгебраических дробей, то вряд ли это стоит делать по собственной инициативе. В результате нахождения области определения часто получается очень громоздкий ответ, и в случае нескольких переменных он не несет никакой полезной информации. Договоримся, если в условии задачи не требуется искать области определения дробей, то делать мы этого не будем.

• преобразование алгебраической дроби может привести к изменению ее области определения (при сокращении дроби – к расширению, а при домножении – к сужению на корни многочлена X).

Таким образом, алгоритмы преобразования алгебраических дробей совпадают (с учетом указанных особенностей) с соответствующими алгоритмами преобразования обыкновенных дробей. Например, *алгоритм сокращения алгебраических дробей* выглядит следующим образом.

Алгоритм сокращения алгебраических дробей

1. Разложить числитель и знаменатель дроби на множители.
2. Найти общие множители.
3. Разделить числитель и знаменатель на общие множители.

Аналогичным образом можно вывести *алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю* (*ОЗ*).

Алгоритм приведения алгебраических дробей к ОЗ

1. Если возможно, разложить знаменатели всех дробей на множители.
2. Найти ОЗ, домножив один из знаменателей дробей на недостающие множители из знаменателей других дробей.
3. Найти дополнительные множители.
4. Привести дроби к ОЗ.

В завершение заметим, что из основного свойства алгебраической дроби непосредственно вытекают два следующих важных **свойства:**

1. Если числитель и знаменатель алгебраической дроби заменить на противоположные многочлены, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$$

2. Числитель или знаменатель алгебраической дроби можно заменить на противоположный многочлен, поставив минус перед дробью:

$$\frac{A}{B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$$

Эти свойства часто используются в самых разных преобразованиях, например при сокращении дробей. Так, мы можем записать, что

$$\frac{2x-2y}{y-x}=\frac{2(x-y)}{y-x}=-\frac{2(y-x)}{y-x}=-2.$$

1 Какую из этих дробей можно считать «лишней»? Обоснуйте свой ответ.

$$\frac{-3}{-101};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{8};\ -\frac{5}{16};\ \frac{7}{2};\ \frac{89}{100};\ \frac{a}{c};\ \frac{3}{-7};\ \frac{99}{1};\ \frac{18}{36}.$$

2 Решите задачи:

а) Скорость гоночных автомобилей достигает 400 км/ч, а скорость пикирования орла – 320 км/ч. Какую часть скорость орла составляет от скорости гоночного автомобиля?

б) Самостоятельная работа длилась n минут, а ее проверка на 5 минут меньше. Какую часть заняла самостоятельная работа с самопроверкой от всего урока (урок длится 40 минут)?

в) На занятии по карате разминка продолжалась c минут, а отработка техники – на 10 минут дольше. После этого в течение d минут ребята выполняли упражнения с партнером, затем занятие закончилось. Какая часть занятия ушла на отработку техники, если ребята приступили к разминке через 5 минут после начала занятия?

Чем похожи ответы к задачам, чем они отличаются? Как бы вы назвали две последние дроби? Сопоставьте свой вариант с определением, предложенным на стр. 3. Можно ли первую дробь назвать так же?

3 Найдите значение алгебраической дроби $\dfrac{2x+1}{x-4}$ при данных значениях переменной: $x = 2; -5; 104; 0{,}5$. Удастся ли найти значение этой алгебраической дроби при $x = 4$? Почему?

На каком множестве можно рассматривать значение алгебраической дроби? Как бы вы назвали это множество? Сопоставьте свое предположение с определением на стр. 4.

4 Найти области определения алгебраических дробей:

а) $\dfrac{x+1}{x-1}$ в) $\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$; д) $\dfrac{x^3-x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$;

б) $\dfrac{x-2}{x-3}$; г) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$; е) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-7x+12}$.

5 а) Сократите дробь $\dfrac{33}{88}$, а затем приведите ее к знаменателю 24. На основании какого свойства вы выполнили данные преобразования?

б) Сократите алгебраическую дробь $\dfrac{ab}{bc}$, а затем приведите ее к знаменателю $3c^2$. Предположите на основании какого свойства можно выполнить эти преобразования. Сформулируйте это свойство и сравните его со свойством на стр. 5.

6 а) Сократите дроби:

$\dfrac{3m}{2m}$; $\dfrac{3c}{2c^2}$; $\dfrac{a(a-5)}{5a}$; $\dfrac{2-d}{(2-d)(2+d)}$; $\dfrac{1-3x}{(1-3x)^3}$.

б) Найдите область определения исходных дробей и дробей, полученных в результате сокращения. Что вы наблюдаете?

в) Можно ли обобщить результат этих наблюдений? Сформулируйте вывод об изменении области определения при сокращении дробей.

г) Изменится ли область определения алгебраической дроби после умножения ее числителя и знаменателя на один и тот же ненулевой многочлен?

д) Сравните свои выводы о влиянии преобразования алгебраической дроби на область ее определения с выводами в учебнике.

7 Сократите алгебраические дроби:

а) $-\dfrac{15}{3n}$; $\dfrac{-4m}{-16m}$; $\dfrac{3m}{m^2}$; $\dfrac{-m^3n}{n^2m}$; $\dfrac{7km^6n}{7^2k^2m^5n^3}$;

б) $\dfrac{15-3c}{3c}$; $\dfrac{5c-3c^2}{c}$; $\dfrac{5c-5a}{c-a}$; $\dfrac{-(a-c)}{a-c}$; $\dfrac{-c-a}{a+c}$; $\dfrac{4c-4a}{a-c}$;

в) $\dfrac{4a-a^2}{ab+a}$; $\dfrac{4b-a}{4b^2-ab}$; $\dfrac{b-a}{b^2-a^2}$; $\dfrac{a-b}{b^2-a^2}$; $\dfrac{a-b}{(a-b)^2}$; $\dfrac{a-b}{(b-a)^2}$; $\dfrac{(a-b)^3}{b-a}$;

г) $\dfrac{25-y^2}{25+5y}$; $\dfrac{25-y^2}{(5+y)^2}$; $\dfrac{x^2-16}{(x-4)^2}$; $\dfrac{(x-4)^2}{16-x^2}$.

8 Сократите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$; б) $\dfrac{x^2+5xy-6y^2}{x^2-4xy+3y^2}$.

9 Сократите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{x^2-15x+50}{x-5}$; в) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$;

б) $\dfrac{x+6}{x^2+14x+48}$; г) $\dfrac{x^2+x-6}{3x^2-4x-4}$.

10 Сократите алгебраическую дробь и вычислите ее значение при $x = x_0$. Расположив ответы в порядке возрастания, прочитайте слово. Как вы его понимаете?

а) $\dfrac{x^2-13x+42}{2x^2-14x}$, $x_0 = 4$ **А**

б) $\dfrac{-x^2+11x-30}{x^2-36}$, $x_0 = 9$ **П**

в) $\dfrac{3x^2-11x-34}{17-3x}$, $x_0 = -5$ **З**

г) $\dfrac{-\frac{5}{3}x^2+x+12}{9-6x+x^2}$, $x_0 = 0{,}6$ **Т**

д) $\dfrac{x^2+13x+12}{-2x^2+x+3}$, $x_0 = 0{,}5$ **М**

е) $\dfrac{7x^2-2x-24}{7x^2+12x}$, $x_0 = -1\frac{1}{4}$ **И**

ж) $\dfrac{-2x^2-3x+2}{4x^2-1}$, $x_0 = -2$ **Т**

з) $\dfrac{-15x^2+13x-2}{10-15x}$, $x_0 = \dfrac{24}{35}$ **И**

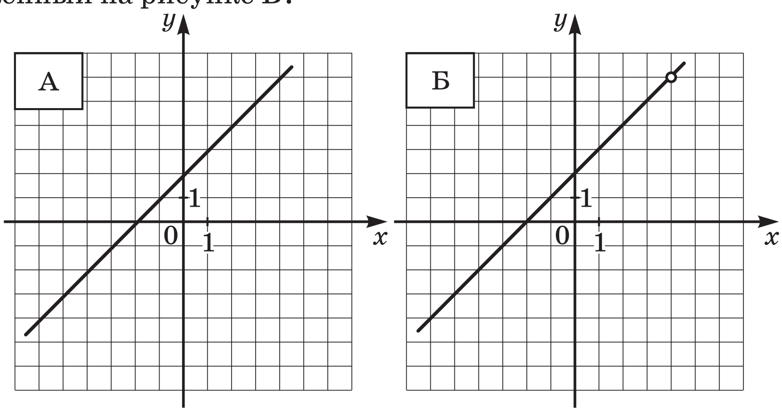
и) $\dfrac{-3x^2+6x+24}{-x^2-3x+28}$, $x_0 = -1\frac{1}{6}$ **Р**

к) $\dfrac{11x-2x^2-12}{(2x-3)(x^2-16)}$, $x_0 = -5\frac{3}{4}$ **О**

11 Сократите дробь:

$$\frac{x^8-y^8}{(x^4+y^4)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}.$$

12 На рисунке А изображен график функции $y = x + 2$. Чем отличается от него график, изображенный на рисунке Б?



Укажите область определения для каждой из функций.

Какой из этих графиков является графиком функции $y = \dfrac{(x+2)(x-4)}{x-4}$?

Объясните, как построить график функции $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$?

13 Постройте график функции

а) $y = \dfrac{x^2+x-30}{x-5}$; б) $y = \dfrac{x^2+3x-18}{x+6}$; в) $y = \dfrac{x^3-8}{x-2}$;

г) $y=\dfrac{x^3+27}{x+3}$; д) $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-2)(x-3)}$; е) $y=\dfrac{x^4-17x^2+16}{(x+4)(x+1)}$.

14 Приведите дробь:

а) $\dfrac{m}{n}$ к знаменателю $3n$, $-n$, mn, n^2, $2n^3$;

б) $\dfrac{a-b}{ab}$ к знаменателю ab^2, a^2b^2, $-a^2b$, $5ab^3$;

в) $\dfrac{b}{a+b}$ к знаменателю $a(a+b)$, $b^2(a+b)$, $(a-b)(a+b)$, $(a+b)^2$, a^3+b^3.

15 Приведите дроби к знаменателю x^4-y^4:

а) $\dfrac{2x+y}{x^2-y^2}$; в) $\dfrac{3x+1}{x-y}$; д) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$;

б) $\dfrac{x-2y}{x^2+y^2}$; г) $\dfrac{1-3y}{x+y}$; е) $\dfrac{2x+2y}{x^2+2xy+y^2}$.

16 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{2}{y}$ и $\dfrac{x}{3y}$; б) $\dfrac{1}{xy}$ и $\dfrac{x^2}{y}$; в) $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$; г) $\dfrac{2}{x^2y}$ и $\dfrac{3}{xy^2}$.

17 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{1}{a+b}$ и $\dfrac{1}{a}$; б) $\dfrac{b}{a+b}$ и $\dfrac{a}{a-b}$; в) $\dfrac{a}{a+b}$ и $\dfrac{b}{(a+b)^2}$; г) $\dfrac{1}{a-b}$ и $\dfrac{a}{b-a}$.

18 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{a}{a+b}$, $\dfrac{b}{a^2-b^2}$; в) $\dfrac{b}{a+b}$, $\dfrac{a-b}{a^4-b^4}$;

б) $\dfrac{a}{a+b}$, $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}$; г) $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, $\dfrac{b}{a^3-b^3}$.

П **19** При каких значениях переменных выражения теряют смысл:

а) $6:x$; б) $\dfrac{1}{m}$; в) $-\dfrac{2}{6-2m}$; г) $\dfrac{25}{m^2-25}$; д) $-\dfrac{1}{4m^2-4m+1}$.

20 1) Приведите дробь к знаменателю 48:

а) $\dfrac{3}{4}$; б) $\dfrac{5}{12}$; в) $\dfrac{11}{16}$; г) $\dfrac{84}{96}$; д) $\dfrac{33}{144}$.

2) Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\dfrac{1}{12}$ и $\dfrac{5}{6}$; б) $\dfrac{2}{7}$ и $\dfrac{3}{5}$; в) $\dfrac{3}{8}$ и $\dfrac{13}{20}$; г) $\dfrac{7}{15}$ и $\dfrac{6}{25}$.

3) Сократите обыкновенную дробь:

а) $\dfrac{12}{32}$; б) $\dfrac{21}{35}$; в) $\dfrac{51}{68}$; г) $\dfrac{65}{91}$; д) $\dfrac{90}{126}$.

Какое свойство дроби позволило выполнить эти преобразования?

21 Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{1}{36}+\dfrac{7}{9}$; в) $\dfrac{17}{18}-\dfrac{5}{12}$; г) $\dfrac{21}{22}-\dfrac{3}{4}$; д) $\dfrac{7}{30}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{4}{15}$.

22 Найдите число, обратное сумме чисел $\dfrac{4}{21}$ и $\dfrac{9}{14}$.

23 Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{3}{7}$; б) $\dfrac{1}{63}:\dfrac{1}{7}$; в) $-\dfrac{8}{30}\cdot\dfrac{15}{24}$; г) $\dfrac{12}{25}:6$; д) $\dfrac{9}{15}\cdot\dfrac{1}{81}:\dfrac{1}{5}$.

24 Найдите часть от числа, выраженную дробью:

а) $\frac{5}{7}$ от 98; б) $\frac{9}{11}$ от $\frac{22}{45}$.

25 Найдите число a по его части, выраженной дробью:

а) если $\frac{1}{3}$ числа a равна 3; б) если $\frac{5}{8}$ числа a равны $\frac{5}{32}$.

26 Какую часть первое число составляет от второго:

а) 14 от 98; б) $\frac{45}{121}$ от $\frac{9}{11}$.

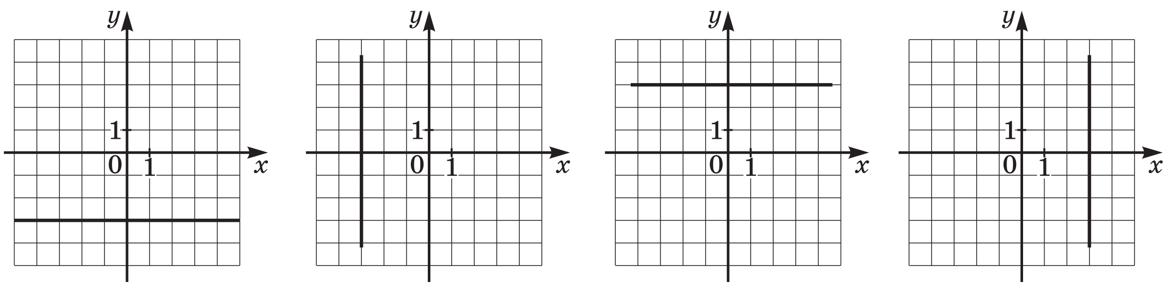
27 Найдите значение числового выражения $2\frac{1}{7}\cdot 2\frac{4}{5}-2{,}4-1\frac{1}{8}:\frac{3}{4}$.

28 Разложите многочлен на множители:

а) $16x^2-1$; в) $x^2-8x-65$;

б) $9x+27x^2$; г) $5x^2-16x+3$.

29 На каком рисунке изображен график уравнения $y-3=0$?



а) б) в) г)

30 Известно, что пара чисел (1; 3) является решением уравнения $5x+by-8=0$. Найдите b.

31 Какие из точек A (–10; 0,5), B (0; 3) и C (–4; 4) принадлежат графику уравнения $x-4y=-12$?

32 Постройте график уравнения:

а) $2x-y=1$; б) $x+y-3=0$.

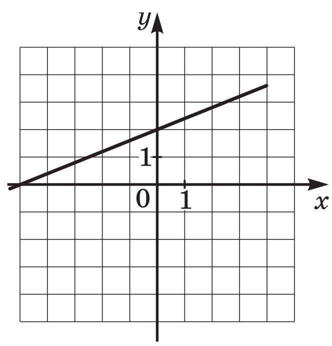
33 Постройте график уравнения:

а) $2x+0y=-5$; б) $0x-3y=-9$.

34 График какого из данных уравнений изображен на рисунке:

1) $-2x-5y+10=0$; 3) $-2x+5y+10=0$;

2) $2x-5y-10=0$; 4) $2x-5y+10=0$?



35 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+ax+3\leqslant 0$ не имеет решений?

Д **36** Найдите значение алгебраической дроби $\frac{1-3x}{x+5}$ при данных значениях переменной: $x=1;\ -3;\ -4{,}5;\ 10;\ \frac{1}{3}$.

37 Найдите области определения алгебраических дробей:

а) $\dfrac{x-5}{x+3}$; в) $\dfrac{x^2-2x}{x^2+x}$; д) $\dfrac{3x^3-2x^2+13}{x^2+5x+6}$;

б) $\dfrac{x+1}{x-31}$; г) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; е) $\dfrac{x^2-8}{x^2-5x+3}$.

38 а) Сократите дробь $\dfrac{25}{75}$, а затем приведите ее к знаменателю 111.

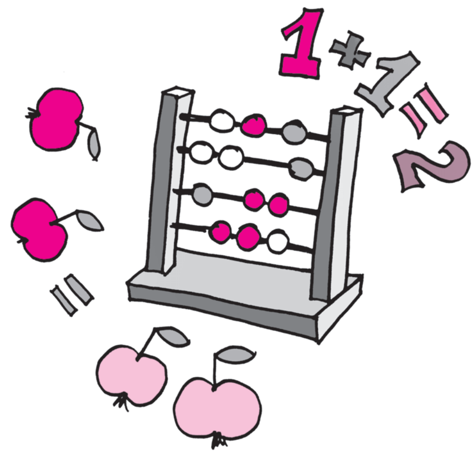
б) Сократите алгебраическую дробь $\dfrac{a^2b}{b^2c}$, а затем приведите ее к знаменателю $7a^2bc^2$.

39 Приведите дроби к знаменателю x^4-y^4:

а) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; г) $\dfrac{2y-1}{x+y}$;

б) $\dfrac{2x-y}{x^2-y^2}$; д) $\dfrac{x-y}{x^2-2xy+y}$;

в) $\dfrac{x+y}{x-y}$; е) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$.



40 Сократите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{a^2-9b^2}{a^2+6ab+9b^2}$; в) $\dfrac{x^2+15x+50}{x+10}$;

б) $\dfrac{x^2-2xy-3y^2}{x^2+3xy+2y^2}$; г) $\dfrac{2x^2-3x-5}{2x^2+x-1}$.

41 Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; б) $y=\dfrac{x^4-26x^2+25}{(x-1)(x+5)}$.

42 Разложите многочлен на множители:

а) $5x-85x^2$; в) $x^2+23x+132$;

б) x^2-3; г) $2x^2-9{,}4x-3$.

43 Найдите значение числового выражения:

а) $\dfrac{5}{14}+\dfrac{6}{7}-2\dfrac{5}{28}$; б) $\dfrac{12}{77}\cdot\dfrac{55}{54}:1\dfrac{7}{18}$.

44 Какая из точек $S\,(0; -2)$, $P\,(-10; 0)$ принадлежит графику уравнения $-x+5y=10$?

45 Постройте график уравнения:

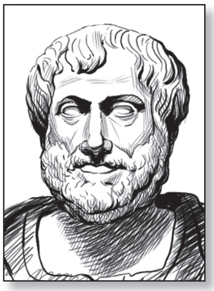
а) $x+y=2$; в) $2x-y=0$;

б) $-x-2y=6$; г) $0x-3y=-6$.

С **46*** Сократите дробь $\dfrac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$.

47* Разложите на множители a^4+4b^4.

2. Действия с алгебраическими дробями



Деяние есть живое единство теории и практики

Аристотель (384 до н.э.– 322 до н.э.),
древнегреческий философ и ученый

Разобравшись с определением и основным свойством алгебраических дробей, естественно научиться выполнять с ними арифметические действия. Мы знаем, что подставив в алгебраические дроби вместо переменных какие-либо их численные значения, мы получим обыкновенные дроби, для которых выполняются изученные ранее правила действий с дробями. Значит, те же правила будут справедливы и для алгебраических дробей.

Рассмотрим сначала сложение алгебраических дробей с *одинаковыми* знаменателями. Для сложения и вычитания алгебраических дробей $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ будут верными следующие правила:

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C};\ \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

Правило сложения (вычитания) алгебраических дробей с *одинаковыми* знаменателями

Чтобы сложить (вычесть) две алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, можно записать дробь, числитель которой равен сумме (разности) числителей исходных дробей, а знаменатель равен их общему знаменателю.

Пример 1.

Выполните действия: а) $\frac{9a-5b}{4c}+\frac{4b-7a}{4c}$; б) $\frac{3x-11y}{5xy-3}-\frac{8x+3y}{5xy-3}$.

Решение:

В обоих случаях знаменатели дробей, над которыми выполняются действия, равны. Поэтому на основании правил сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями имеем:

а) $\frac{9a-5b}{4c}+\frac{4b-7a}{4c}=\frac{(9a-5b)+(4b-7a)}{4c}=\frac{9a-5b+4b-7a}{4c}=\frac{2a-b}{4c}$;

б) $\frac{3x-11y}{5xy-3}-\frac{8x+3y}{5xy-3}=\frac{(3x-11y)-(8x+3y)}{5xy-3}=\frac{3x-11y-8x-3y}{5xy-3}=\frac{-5x-14y}{5xy-3}$.

Опираясь на правило сложения и вычитания алгебраических дробей, мы можем складывать и вычитать несколько дробей.

Пример 2.

Представьте алгебраическую сумму дробей в виде дроби:

$$\frac{5a-4c}{a+b}+\frac{2b-3c}{a+b}-\frac{4c}{a+b}-\frac{6a-2c+3b}{a+b}.$$

Решение:

$$\frac{5a-4c}{a+b}+\frac{2b-3c}{a+b}-\frac{4c}{a+b}-\frac{6a-2c+3b}{a+b}=\frac{(5a-4c)+(2b-3c)-(4c)-(6a-2c+3b)}{a+b}=$$
$$=\frac{5a-4c+2b-3c-4c-6a+2c-3b}{a+b}=\frac{-a-b-9c}{a+b}$$

Теперь перейдем к сложению и вычитанию алгебраических дробей с *разными* знаменателями. Будем опираться на установленные выше правила и опыт действий с обыкновенными дробями. Ясно, что для того чтобы использовать правило сложения алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями, нужно сначала привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}\pm\frac{CB}{DB}=\frac{AD\pm CB}{BD}$$

Как и для действий с числами, чтобы избежать лишних преобразований, лучше приводить дроби к *простейшему* общему знаменателю (ОЗ). Это делать мы уже умеем. Итак,

Алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей с *разными* знаменателями

1. Привести алгебраические дроби к простейшему ОЗ.
2. Сложить (вычесть) полученные алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 3.
Вычислите разность алгебраических дробей: $\frac{y}{2x}-\frac{1}{xy}$.

Решение:
Сначала приведем дроби к общему знаменателю, а затем выполним вычитание:

$$\frac{y^{(y}}{2x}-\frac{1^{(2}}{xy}=\frac{y^2}{2xy}-\frac{2}{2xy}=\frac{y^2-2}{2xy}$$

Перейдем к умножению и делению алгебраических дробей. Для умножения алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ будет верным следующее правило:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

Правило умножения алгебраических дробей

Чтобы умножить две алгебраические дроби, можно записать дробь, числитель которой равен произведению числителей исходных дробей, а знаменатель равен произведению знаменателей.

Если при этом в полученной дроби числитель и знаменатель имеют общие множители, отличные от нуля, то дробь можно сократить.

Пример 4.
Умножьте дроби $\frac{3x-7y}{5a-3b}$ и $\frac{5a-3b}{7abc}$.

Решение:
Умножим числители и знаменатели исходных дробей:

$$\frac{3x-7y}{5a-3b}\cdot\frac{5a-3b}{7abc}=\frac{(3x-7y)(5a-3b)}{7abc(5a-3b)}.$$

Полученную дробь можно сократить:

$$\frac{(3x-7y)(5a-3b)}{7abc(5a-3b)}=\frac{3x-7y}{7abc}.$$

Прежде чем перейти к делению алгебраических дробей, введем понятие алгебраической дроби, *обратной* данной.

***Определение* 1**. Алгебраическая дробь $\frac{B}{A}$ называется **обратной** к алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ (где $A \neq 0$, $B \neq 0$).

Очевидно, что если первая дробь обратна второй, то вторая дробь – обратна первой. Поэтому дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ называют ***взаимно обратными***.

Заметим, что произведение взаимно обратных алгебраических дробей равно 1. Действительно,

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=\frac{AB}{BA}=1$$

Для деления алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ верно следующее правило:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC}$$

Правило деления алгебраических дробей

Чтобы разделить первую дробь на вторую, можно первую дробь умножить на дробь, обратную ко второй.

Пример 5.

Разделите дробь $\frac{4x+2y}{9ab-1}$ на дробь $\frac{2x+y}{7a-5b}$.

Решение:

Чтобы разделить дроби, умножим первую дробь на дробь обратную второй, и упростим полученную дробь:

$$\frac{4x+2y}{9ab-1}:\frac{2x+y}{7a-5b}=\frac{4x+2y}{9ab-1}\cdot\frac{7a-5b}{2x+y}=\frac{2(2x+y)(7a-5b)}{(9ab-1)(2x+y)}=\frac{2(7a-5b)}{9ab-1}.$$

В завершение выясним, как возвести алгебраическую дробь в натуральную степень.

Операция возведения в натуральную степень является, по сути, многократной операцией умножения, поэтому мы можем действовать в этом случае согласно правилу умножения алгебраических дробей.

Рассмотрим дробь $\frac{A}{B}$ и возведем ее в натуральную степень n:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{B}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{B}}_{n\ \textit{множителей}}=\frac{\overbrace{A\cdot\ldots\cdot A}^{n\ \textit{множителей}}}{\underbrace{B\cdot\ldots\cdot B}_{n\ \textit{множителей}}}=\frac{A^n}{B^n}.$$

Таким образом, получаем правило возведения алгебраической дроби в степень.

Правило возведения алгебраической дроби в степень n, $n \in N$

Для того чтобы возвести алгебраическую дробь в натуральную степень n, можно возвести в эту степень числитель и знаменатель данной дроби.

Пример 6.

Запишите выражение $\left(\dfrac{4a-b}{5a+2b}\right)^2$ в виде алгебраической дроби.

Решение:

$$\left(\frac{4a-b}{5a+2b}\right)^2=\frac{(4a-b)^2}{(5a+2b)^2}=\frac{16a^2-8ab+b^2}{25a^2+20ab+4b^2}.$$

Рассмотрим пример, где выполняются сразу нескольких действий с алгебраическими дробями.

Пример 7.

Выполните действия: $\left(\dfrac{x}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+8}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{2}{2-x}\right)$.

Решение:

При преобразовании таких громоздких выражений бывает полезно упрощать отдельные блоки в этих выражениях, а затем производить окончательное упрощение.

1) $$\frac{x^{(x-2}}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+8^{(1}}{(x-2)(x^2+2x+4)}-\frac{1^{(x^2+2x+4}}{x-2}=\frac{x(x-2)+x^2+8-(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$
$$=\frac{x^2-2x+x^2+8-x^2-2x-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{x-2}{x^2+2x+4};$$

2) $$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\left(-\frac{2}{x-2}\right)=\frac{x^{2(1}}{(x-2)(x+2)}+\frac{2^{(x+2}}{x-2}=\frac{x^2+2(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)};$$

3) $$\frac{x-2}{x^2+2x+4}\cdot\frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+2}$.

Выражения, составленные из переменных величин и чисел при помощи арифметических операций, называют *рациональными алгебраическими выражениями*. Все рациональные выражения данного пункта содержали операцию деления на выражение с переменной, их принято называть *дробно-рациональными*. В противопоставление этому названию, рациональные выражения, не содержащие переменной в знаменателе, обычно называют *целыми рациональными* выражениями.

К **48** На какие группы можно разбить эти выражения:

$\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{9}$; $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{2}{a}+\dfrac{5}{a}$; $\dfrac{1}{15}+\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{b}{c}+\dfrac{2}{b}$; $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{x}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известные вам правила сложения и вычитания обыкновенных дробей. Будут ли справедливы эти правила для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенными в учебнике правилами и выполните действия.

49 Выполните действия:

а) $\dfrac{2a-3b}{ab}+\dfrac{2b-2a}{ab}$; б) $\dfrac{xz+y^2}{xy-yz}-\dfrac{2x^2+y^2}{xy-yz}$.

50 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{a}+\frac{b-a}{b}$; в) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}$; д) $\frac{b}{a+b}+\frac{a-b}{a^4-b^4}$;

б) $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$; г) $\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a^2-b^2}$; е) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}-\frac{b}{a^3-b^3}$.

51 Выполните действия:

а) $\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x^2+4x-12}$; б) $\frac{2}{2x+3}+\frac{x}{2x^2+x-3}-\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{x-2}{x+4}-\frac{x^2}{x^2+2x-8}$.

52 Выполните действия: $\frac{yx^2+16}{(y-1)(x-4)}-\frac{16y+x^2}{xy-x-4y+4}$ и сократите получившуюся алгебраическую дробь.

53 На какие группы можно разбить эти выражения:

$\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{9}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}$; $\frac{2}{a}\cdot\frac{5}{a}$; $\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{2}$; $\frac{b}{c}\cdot\frac{2}{b}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известное вам правило умножения обыкновенных дробей. Будет ли справедливо это правило для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенным в учебнике правилом и выполните действия.

54 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{a}\cdot\frac{b+a}{b}$; в) $\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{3x}{x^2-y^2}$; д) $\frac{x^2-4x-12}{x}\cdot\frac{x}{x-6}$;

б) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a-b}$; г) $\frac{2xy}{x-y}\cdot\frac{x^3-y^3}{4x^2}$; е) $\frac{4}{2x+1}\cdot\frac{2x^2+5x+2}{2x}$.

55 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\frac{a-b}{2a+b}\right)^2$; б) $\left(\frac{x-y}{2x+3y}\right)^3$.

56 Выберите пары дробей, произведение которых равно 1:

$\frac{2}{9}$; $\frac{7+c}{c-8}$; $\frac{b}{a}$; $\frac{18}{1}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{c-8}{7+c}$.

Из выбранных пар найдите пару, составленную из обыкновенных дробей. Как называются эти обыкновенные дроби?

Предположите, как будут называться алгебраические дроби в каждой из выбранных вами пар. Сопоставьте свое предположение с определением на стр. 15.

57 Запишите алгебраическую дробь, обратную к данной:

а) $\frac{2x+3y}{5x^2-y}$; б) bc; в) $\left(\frac{x+y}{2x-y}\right)^2$.

58 На какие группы можно разбить эти выражения:

$\frac{2}{9}:\frac{5}{9}$; $\frac{2}{3}:\frac{3}{7}$; $\frac{2}{a}:\frac{5}{a}$; $\frac{4}{15}:\frac{3}{2}$; $\frac{b}{c}:\frac{2}{b}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известное вам правило деления обыкновенных дробей. Будет ли справедливо это правило для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенным в учебнике правилом и выполните действия.

59 Выполните действия:

а) $\dfrac{5a-b}{a}:\dfrac{b-a}{a}$; в) $\dfrac{x-y}{xy+x}:\dfrac{x^2-y^2}{2x^2+xy}$; д) $\dfrac{x^2+5x+6}{x}:\dfrac{x+3}{x}$;

б) $\dfrac{a^2}{a+b}:\dfrac{a^2-ab}{a+b}$; г) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}:\dfrac{x^3-y^3}{x^2}$; е) $\dfrac{x^4-5x^2+6}{x^2}:\dfrac{x^2-2}{x^4}$.

60 Упростите выражение:

а) $\dfrac{x+12}{x^3-9x}:\left(\dfrac{x-3}{2x^2+5x-3}-\dfrac{9}{9-x^2}\right)$; б) $\left(\dfrac{4}{5a^2+a-4}-\dfrac{1+a}{9(5a-4)}\right)\cdot\dfrac{5a-4}{a+7}$.

61 Докажите, что выражение равно нулю при допустимых значениях переменной:

а) $\dfrac{6x^2-5x-6}{2x-3}+\dfrac{4-9x^2}{3x-2}$; б) $\dfrac{4x^2-4x-3}{2x+1}+\dfrac{9-4x^2}{2x+3}$.

62 Выполните действия:

$$\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b-c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-c}}\cdot\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{b-a-c}{abc}.$$

63 Проанализируйте таблицу и попытайтесь составить определение дробно-рациональных и целых выражений, сопоставьте свой вариант с определениями, приведенными в учебнике.

Рациональные выражения	
Целые выражения	Дробно-рациональные выражения
$2x-7$; $\dfrac{1}{2}x-5+x:4$; $x^2-2x+0{,}75$; $\left(\dfrac{x-1}{5}+3\right)\cdot\dfrac{x+5}{2}$.	$\dfrac{1}{x+1}$; $\dfrac{2}{x}-5-3x$; $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x(x-2)}$; $\left(\dfrac{x+1}{x-4}+\dfrac{9}{x^2-16}\right):\dfrac{x}{2x+8}$.

64 Найдите области определения алгебраических дробей:

а) $\dfrac{5-x}{9+x}$; б) $\dfrac{18+2x}{81x-x^3}$; в) $\dfrac{x}{x^2-x-12}$.

65 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\dfrac{15a^3b^7}{65a^6b^4}$; б) $\dfrac{(m-7)^2}{14-2m}$; в) $\dfrac{16-d^2}{d^2+8d+16}$; г) $\dfrac{y^2-9y+20}{y^2+y-30}$; д) $\dfrac{5-5n+5n^2}{n^3+1}$.

66 Сократите, разложив на множители числитель и знаменатель дроби:

а) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; б) $\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-y}$; в) $\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-2\sqrt{xy}+y}$.

67 Представьте дробь $\dfrac{t}{t-5}$ в виде дроби со знаменателем t^2-25.

68 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{a-7m}{2am}$ и $\frac{1+m}{4a}$; в) $\frac{1}{x^2+xq}$ и $\frac{x+q}{5x^2-5xq}$;

б) $\frac{b-1}{t-3}$ и $\frac{b}{6-2t}$; г) $\frac{n^2+n+1}{(1+n)^2}$ и $\frac{n}{n^2-1}$.

69 Неизвестный многочлен, обозначили буквой A.

а) $A\cdot(-2m^3) = 2m^{11} - 12m^9 + 8m^3$;

б) $A\cdot 3ab = 18a^3b^3 + 9a^3b^2 - 3a^2b^3$;

в) $A\cdot(d+7) = 3d + 21$;

г) $A\cdot(t+5) = t^2 - 25$;

д) $A\cdot(2z+5) = 20z^2 + 100z + 125$.

Найдите многочлен A.

70 Русский инженер Глеб Котельников изобрел ранцевый парашют в XX веке. Первая конструкция парашюта была разработана итальянским ученым Леонардо да Винчи на несколько веков раньше. Выполнив деление с остатком 79 551 на 647, вы сможете узнать, сколько лет разделяют эти изобретения. Для этого выпишите из полученного при делении «столбика» второе неполное делимое (примерный год изобретения парашюта Леонардо да Винчи) и третье неполное делимое (год изобретения парашюта Котельниковым).

71 Найдите остаток при делении:

а) 109 на 9; б) 200 на18; в) 360 на 12; г) 190 на 15; д) 23 на 25.

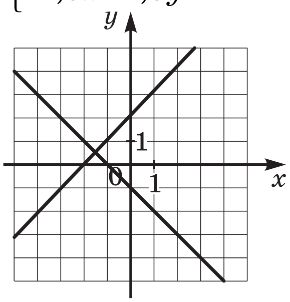
72 Представьте неправильные дроби в виде смешанных чисел:

а) $\frac{11}{6}$; б) $\frac{63}{8}$; в) $\frac{93}{73}$; г) $\frac{256}{15}$; д) $\frac{100}{2}$.

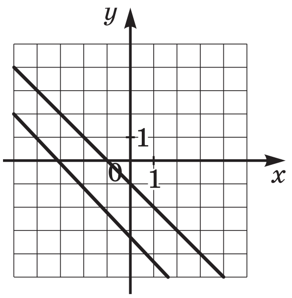
73 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases}2x+y=4\\x-y=2\end{cases}$; б) $\begin{cases}0{,}5x-y=-3{,}5\\-3x-y=0\end{cases}$; в) $\begin{cases}\frac{1}{3}x+y=-4\\-\frac{1}{3}x+y=-2\end{cases}$.

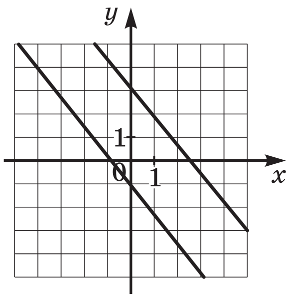
74 Укажите рисунок, на котором изображено графическое решение системы уравнений $\begin{cases}5x+5y=-2\\-2{,}5x-2{,}5y=1\end{cases}$.



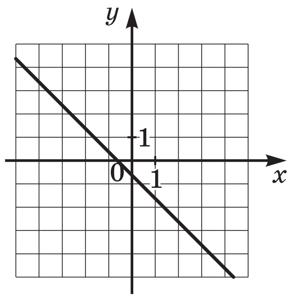
а)



б)



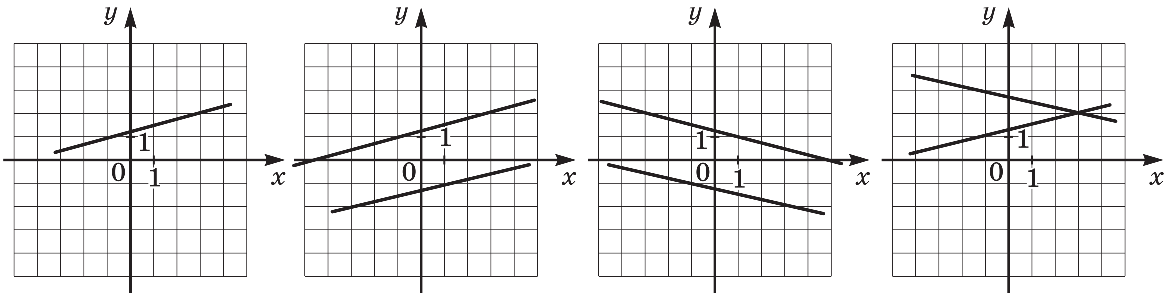
в)



г)

75 Укажите рисунок, на котором изображено графическое решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x-12y=-15 \\ x-4y=5 \end{cases}$$



а) б) в) г)

76 Решите систему, используя теорему о целочисленных точках графика уравнения для решения систем:

$$\begin{cases} 2x-5y=0 \\ x+5y=15 \end{cases}.$$

Д **77** Выполните действия:

а) $\dfrac{2a^2+3b^2}{a+b}+\dfrac{b^2-6a^2}{a+b}$; б) $\dfrac{xy+2y^2}{xy+yz}-\dfrac{xy-y^2}{xy+yz}$.

78 Выполните действия:

а) $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}$; б) $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}$; в) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^4-b^4}$; г) $\dfrac{a-b}{a^2+ab+b^2}-\dfrac{b^2}{a^3-b^3}$.

79 Выполните умножение:

а) $\dfrac{a+b}{a^2}\cdot\dfrac{b-a}{b^2}$; б) $\dfrac{b}{a-b}\cdot\dfrac{a-b}{a+2b}$; в) $\dfrac{x-y}{3xy}\cdot\dfrac{5y^2}{x^2-y^2}$; г) $\dfrac{3y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{6xy}$.

80 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\dfrac{a+b}{3a-b}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{x+y}{5x+y}\right)^3$.

81 Запишите алгебраическую дробь, обратную к данной:

а) $\dfrac{x-3y}{2x+y^2}$; б) $x + y$; в) $\left(\dfrac{x-y}{x+3y}\right)^2$.

82 Выполните деление:

а) $\dfrac{3a+b}{b^2}:\dfrac{b+2a}{b}$; б) $\dfrac{ab}{a-b}:\dfrac{3a^2+ab}{ab-b^2}$; в) $\dfrac{x+y}{2xy-x}:\dfrac{x^2-y^2}{2y^2-y}$; г) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}:\dfrac{x^3+y^3}{xy}$.

83 Выполните действия: $\dfrac{x^3}{2x^2+x-3}:\dfrac{x^2}{x-1}\cdot(2x+3)$.

84 Выполните действия:

$$\left(\frac{a^6+b^6}{a^4-b^4}+\frac{a^2b^4-a^4b^2}{a^4+b^4-2a^2b^2}\right):(a-b)-b.$$

85 Найдите области определения алгебраических дробей:

а) $\dfrac{x}{x-3}$; б) $\dfrac{5}{15x^2+3x}$; в) $\dfrac{4+x}{x^2-2x-24}$.

86 Сократите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{14s^5r^7p^5q}{98s^7r^5p}$; б) $\dfrac{(8+a)^2}{24+3a}$; в) $\dfrac{m^2-6m+9}{m^2-9}$; г) $\dfrac{t^2+t-110}{t^2-12t+20}$; д) $\dfrac{3+3b+3b^2}{b^3-1}$.

87 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{s-1}{5s}$ и $\dfrac{5+d}{2sd}$; в) $\dfrac{2}{m^2-mp}$ и $\dfrac{p}{9m^2+9mp}$;

б) $\dfrac{1}{5-10k}$ и $\dfrac{k}{2k-1}$; г) $\dfrac{a^2-a+4}{(a-2)^2}$ и $\dfrac{a}{a^2-4}$.

88 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases}5{,}5x+y=6\\-x+y=-7\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-y=5\\-0{,}4x+0{,}2y=-1\end{cases}$; в) $\begin{cases}0{,}25x+0{,}25y=0{,}5\\3x+3y=-3\end{cases}$.

C **89*** Можно ли разделить поровну 13 одинаковых прямоугольных пирожных среди шести ребят так, чтобы каждое пирожное либо не разрезалось вовсе, либо разрезалось на две равные части, либо разрезалось на три равные части?

90* Числа a и b удовлетворяют равенству $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}=2$. Найдите все возможные значения выражения $\dfrac{3a-b}{a+5b}$.

3.* Алгебраические дроби и деление многочленов

За легкое дело берись как за трудное, а за трудное – как за легкое. В первом случае, дабы уверенность не перешла в беспечность; во втором – неуверенность в робость.

Грасиан-и-Моралес Бальтасар (1601–1658),
испанский писатель и философ

В этом пункте мы будем рассматривать многочлены *только от одной переменной*. Эту переменную будем обозначать x, а многочлены от одной переменной будем обозначать как $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ...

Алгебраические дроби, с которыми мы познакомились в пункте 5.1.1, представляют собой отношение двух многочленов A и B, стоящих в числителе и знаменателе дроби. Иногда это отношение может быть равно некоторому многочлену C. Например, алгебраическая дробь $\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ при $x \neq \pm 1$ равна многочлену x^2+1. В таких случаях, аналогично делимости целых чисел, говорят, что многочлен A *делится* на многочлен B, где $B \neq 0$.

Но чаще всего многочлен A не делится на многочлен B. В этом случае для многочленов, как и для целых чисел, вводится понятие *деления с остатком*.

Мы уже изучали в 7-м классе операции сложения, вычитания и умножения многочленов. В этом пункте мы познакомимся с операцией деления многочленов и ее применением для преобразования алгебраических дробей.

***Определение* 1. Разделить многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$ с остатком** при $B(x) \neq 0$, значит, представить многочлен $A(x)$ в виде:

$$A(x) = B(x) \times C(x) + R(x),$$

где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$ или $R(x) = 0$.

В данном равенстве многочлен $A(x)$ называют **делимым**, $B(x)$ – **делителем,** $C(x)$ – **неполным частным**, а $R(x)$ – **остатком** от деления многочленов $A(x)$ на $B(x)$. Значит, разделить $A(x)$ на $B(x)$ – это значит, фактически, указать частное $C(x)$ и остаток $R(x)$.

Например, чтобы разделить многочлен $x^4 + 1$ на многочлен $x^2 - 1$ с остатком, достаточно составить равенство:

$$x^4 + 1 = (x^4 - 1) + 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2$$

Здесь $C(x) = x^2 + 1$ – неполное частное, $R(x) = 2$ – остаток, причем степень остатка меньше степени делителя: $0 < 2$. Таким образом, мы получили требуемое представление многочлена $x^4 + 1$, а значит, произвели его деление с остатком на многочлен $x^2 - 1$.

***Примечание*.** В случае $R(x) = 0$, наше определение означает, что многочлен $A(x)$ **делится** на многочлен $B(x)$, где $B(x) \neq 0$.

Разберем несколько примеров, которые помогут нам вывести алгоритм деления многочленов. Вначале рассмотрим более простой случай деления – деление многочлена на одночлен. Разделим с остатком, например многочлен $6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2$ на одночлен $2x^3$.

Чтобы выполнить деление, нам надо представить делимое в виде:

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot C(x) + R(x),$$

где либо $R(x) = 0$, либо $R(x)$ – многочлен степени меньше 3. Сгруппируем члены многочлена, степень которых больше или равна 3:

$$(6x^7 - 2x^6 + 4x^5) + x^2 + 2$$

Вынося за скобки $2x^3$, получим:

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot (3x^4 - x^3 + 2x^2) + x^2 + 2.$$

Значит, неполное частное $C(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2$, а остаток $R(x) = x^2 + 2$, где степень остатка меньше степени делителя: $2 < 3$.

При решении примера 1 мы использовали способ подбора. Как и любой подбор, он не является общим способом. Вместе с тем полученный результат мы можем использовать для вывода алгоритма деления с остатком любых многочленов. Для этого будем действовать аналогично делению целых чисел «в столбик»:

Деление чисел

$$
\begin{array}{l|l}
-6241 & 2 \\ \cline{2-2}
\;\underline{6} & 3120 \\
\;\;-2 & \\
\;\;\;\underline{2} & \\
\;\;\;\;-4 & \\
\;\;\;\;\;\underline{4} & \\
\;\;\;\;\;\;1\ (\text{ост.}) &
\end{array}
$$

$$6241 = 2 \cdot 3120 + 1.$$

Деление многочлена на одночлен

$$
\begin{array}{l|l}
-6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 & 2x^3 \\ \cline{2-2}
\;\underline{6x^7} & 3x^4 - x^3 + 2x^2 = C(x) \\
\;\;-\;-2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 & \\
\;\;\;\underline{-2x^6} & \\
\;\;\;\;-\;+4x^5 + x^2 + 2 & \\
\;\;\;\;\;\underline{+4x^5} & \\
\;\;\;\;\;\;+x^2 + 2 = R(x) &
\end{array}
$$

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot (3x^4 - x^3 + 2x^2) + x^2 + 2.$$

Таким образом, мы получили тот же самый результат. Вначале мы определили, на какой одночлен надо умножить $2x^3$, чтобы получить старший член делимого $6x^7$, нашли первый член частного $3x^4$. Вычли выражение $6x^7$ из делимого и выписали полученную разность: $-2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2$. А затем еще 2 раза последовательно применили ту же самую процедуру к полученным после вычитания выражениям.

Теперь рассмотрим случай деления с остатком двух многочленов, например многочлена $4x^3 + x - 3 + x^4$ на многочлен $x - 2$. Запишем многочлены в стандартном виде. По определению, чтобы выполнить указанное деление, нам надо представить многочлен $x^4 - 4x^3 + x - 3$ в виде:

$$x^4 - 4x^3 + x - 3 = (x - 2)\,C(x) + R(x),$$

где либо $R(x) = 0$, либо $R(x)$ – многочлен, степень которого меньше степени двучлена $x - 2$, то есть меньше 1.

Как и в первом примере, разделим многочлены «в столбик» по аналогии с целыми числами:

$$\begin{array}{l|l}
-\,15013 & 12 \\
\underline{12} & 1251 \\
\;-\,30 & \\
\;\;\underline{24} & \\
\;\;-\,61 & \\
\;\;\;\underline{60} & \\
\;\;\;-\,13 & \\
\;\;\;\;\underline{12} & \\
\;\;\;\;\;1\ (\text{ост.}) &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
-\,x^4 - 4x^3 \qquad\quad + x - 3 & x - 2 \\
\underline{x^4 - 2x^3} & x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = C(x) \\
\quad -\,-2x^3 \qquad + x - 3 & \\
\quad\;\; \underline{-2x^3 + 4x^2} & \\
\qquad -\,-4x^2 + x - 3 & \\
\qquad\;\; \underline{-4x^2 + 8x} & \\
\qquad\qquad -\,-7x - 3 & \\
\qquad\qquad\;\; \underline{-7x + 14} & \\
\qquad\qquad\quad -17 = R(x) &
\end{array}$$

$15\,013 = 12 \cdot 1251 + 1;$ $\qquad x^4 - 4x^3 + x - 3 = (x - 2)\,(x^3 - 2x^2 - 4x - 7) - 17.$

Будем подбирать каждый член частного так, чтобы при умножении его на делитель получать старший член делимого. Тогда на каждом шаге степень делимого будет последовательно уменьшаться.

Первый член частного равен $x^4 : x = x^3$. Умножим x^3 на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-2x^3 + x - 3$.

Второй член частного равен $-2x^3 : x = -2x^2$. Умножим $-2x^2$ на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-4x^2 + x - 3$.

Третий член частного равен $-4x^2 : x = -4x$. Умножим $-4x$ на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-7x - 3$.

Четвертый член частного равен $-7x : x = -7$. Умножим -7 на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим в остатке многочлен -17 степени 0, $0 < 1$. Деление закончено.

Значит, $C(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$, $R(x) = -17$. Этот результат можно проверить непосредственным преобразованием правой части.

$(x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 7) - 17 = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 7x - 2x^3 + 4x^2 + 8x + 14 - 17 =$
$= x^4 - 4x^3 + x - 3.$

Итак, для того чтобы выполнить деление многочленов мы сначала приводим их к стандартному виду, а затем выполняем деление многочленов «в столбик» аналогично делению чисел. При этом неполное частное и остаток при делении многочленов «в столбик» находятся на тех местах, на которых находятся неполное частное и остаток при обычном делении чисел «в столбик».

В итоге, мы можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм деления многочлена на многочлен

1. Записать оба многочлена в стандартном виде.
2. Записать делимое и делитель как при делении чисел «в столбик».
3. Найти первый член частного: одночлен, при умножении которого на старший член делителя получается старший член делимого.
4. Умножить найденный член частного на делитель и подписать под делимым так, чтобы одночлены одинаковых степеней стояли друг под другом.
5. Вычесть из делителя найденное произведение.
6. Если степень полученной разности меньше степени делителя, то закончить деление и перейти к пункту 8.
7. Если степень разности больше или равна степени делителя, то считая разность делимым, найти следующий член частного и повторить пункты 4–6.
8. Записать результат деления многочленов.

Операция деления многочленов «в столбик» часто применяется при работе с алгебраическими дробями. Так, деление без остатка многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ может использоваться для сокращения дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$.

Пример 1.

Сократите дробь $\frac{4x^3-2x^2+6x+4}{x^2-x+2}$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl}
-\,\begin{array}{r} 4x^3-2x^2+6x+4 \\ \underline{4x^3-4x^2+8x\phantom{{}+4}} \end{array} & \begin{array}{|l} \underline{x^2-x+2\phantom{{}=C(x)}} \\ 4x^2+2=C(x) \end{array} \\
-\,\begin{array}{r} 2x^2-2x+4 \\ \underline{2x^2-2x+4} \\ 0 \end{array} &
\end{array}
$$

Значит, $\frac{4x^3-2x^2+6x+4}{x^2-x+2}=4x+2$.

Чтобы понять, как при работе с алгебраическими дробями используется деление с остатком, введем следующее определение.

***Определение* 2.** Алгебраическая дробь $\frac{A(x)}{B(x)}$, где степень числителя равна m, а степень знаменателя n, называется **правильной**, если $m < n$, и **неправильной**, если $m \geqslant n$ ($m, n \in N_0$).

Например,

а) дробь $\frac{x^2-3x+5}{x^3+6x+1}$ – правильная, так как $m = 2$, $n = 3$ и $2 < 3$;

б) дробь $\frac{x^6-2x^3+x}{x^4-x^2+1}$ – неправильная, так как $m = 6$, $n = 4$ и $6 > 4$;

в) дробь $\frac{x^3-3x-1}{(x^2+x)^2-(x^2-x)^2}$ – неправильная, так как $m = 3$, $n = 3$ (знаменатель преобразуется к виду $x^4 + 2x^3 + x^2 - x^4 + 2x^3 - x^2 = 4x^3$) и $3 = 3$.

Легко заметить, что введенное нами определение напоминает определение правильной и неправильной числовой дроби.

Как мы помним, числовая неправильная дробь может быть представлена в виде смешанного числа (суммы целого числа и правильной дроби, где знак «+» обычно опускается), например, $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$.

Чтобы представить неправильную дробь в виде смешанного числа, мы выполняли деление с остатком числителя на знаменатель. Так, в приведенном примере при делении с остатком 7 на 3 получается $7 = 3 \cdot 2 + 1$, откуда следует вывод, что $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$. Данное преобразование мы называли *выделением целой части* из неправильной дроби.

Аналогичное преобразование можно выполнить и для алгебраической дроби, исходя из формулы ее деления с остатком:

$$A(x)=B(x)\cdot C(x)+R(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{B(x)}, \text{ где } B(x)\neq 0.$$

Следовательно, любую неправильную алгебраическую дробь можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной алгебраической дроби, то есть *выделить из нее целую часть*.

***Определение* 3. Выделить целую часть** из алгебраической дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$, где $B(x)\neq 0$, значит представить ее в виде суммы некоторого многочлена $C(x)$ и правильной дроби $\frac{R(x)}{B(x)}$ т. е.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{B(x)}, \text{ где } B(x)\neq 0.$$

Значит, **чтобы выделить из алгебраической дроби целую часть, нужно многочлен, стоящий в числителе, разделить с остатком на многочлен, стоящий в знаменателе**. Тогда неполное частное будет целой частью алгебраической дроби, а остаток – числителем дробной части.

Вернемся к рассмотренному нами выше примеру деления многочленов. При делении многочлена x^4-4x^3+x-3 на $x-2$ мы получили неполное частное $C(x)=x^3-2x^2-4x-7$ и остаток $R(x)=-17$, значит,

$$\frac{x^4-4x^3+x-3}{x-2}=x^3-2x^2-4x-7-\frac{17}{x-2}.$$

Выделение целой части из алгебраической дроби бывает весьма полезным при решении самых разнообразных задач.

Пример 2.

При каких значениях k, где $k \in \boldsymbol{Z}$ алгебраическая дробь $\frac{k^3+k^2-2k+7}{k-1}$ является целым числом?

Решение:

Выделим целую часть данной дроби при $k\neq 1$. Для этого разделим «в столбик» многочлен k^3+k^2-2k+7 на многочлен $k-1$.

$$\begin{array}{l|l}
-\,k^3+k^2-2k+7 & \underline{\;k-1\;} \\
\quad\underline{k^3-k^2} & k^2+2k=C(x) \\
\qquad -\,2k^2-2k+7 & \\
\qquad\quad \underline{2k^2-2k} & \\
\qquad\qquad\qquad 7=R(x) &
\end{array}$$

Значит, $\frac{k^3+k^2-2k+7}{k-1}=k^2+2k+\frac{7}{k-1}$.

При всех целых значениях k выражение $k^2 + 2k$ будет целым числом. Значит, для того чтобы исходная алгебраическая дробь была целым числом необходимо, чтобы $\frac{7}{k-1}$ было целым числом. Это возможно только в тех случаях, когда знаменатель является делителем числа 7.

Делителями 7 являются четыре целых числа: –1; 1; –7; 7. Значит, исходная алгебраическая дробь будет целым числом только при следующих значениях k:

$k - 1 = -1 \Leftrightarrow k = 0$ $\qquad$ $k - 1 = -7 \Leftrightarrow k = -6$

$k - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$ $\qquad$ $k - 1 = 7 \Leftrightarrow k = 8$

Все полученные значения k принадлежат области определения данной дроби $k \neq 1$. Значит, они и составляют множество решений нашей задачи.

Ответ: $\{-6; 0; 2; 8\}$.

К **91** Выполните деление многозначных чисел:

а) 9984 : 39; $\qquad$ б) 56095 : 123.

Проверьте результат с помощью умножения. Какие случаи деления вы вспомнили?

92 Выполните вычитание многочленов «в столбик»:

а) $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ и $2x^3 - x^2$;

б) $4x^2 + 4x - 3$ и $4x^2 - 2x$.

Сравните степени уменьшаемого многочлена и многочлена, полученного в результате вычитания.

93 Выполните умножение многочлена $x^2 + 2x + 3$ на многочлен $2x - 1$.

Пользуясь результатами выполнения этого задания, ответьте на вопросы:

1) На какой многочлен нужно умножить многочлен $2x - 1$, чтобы получить многочлен $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$?

2) Какой результат получится после сокращения дроби $\frac{2x^3+3x^2+4x-3}{x^2+2x+3}$?

3) Какой результат получится при делении многочлена $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ на многочлен $2x - 1$?

4) Предложите способ выполнения деления многочлена $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ на многочлен $2x - 1$.

94 Выполните деление многочленов и проведите проверку с помощью умножения.

а) Разделите многочлен $3x^6 + 12x^4 - 21$ на одночлен $3x^3$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на однозначное.

б) Разделите многочлен $18x^2 - 27x + 10$ на двучлен $3x - 2$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на многозначное.

в) Разделите многочлен $x^5 + 6x^4 - 19x^3 + x^2 + 8x + 4$ на многочлен $x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на многозначное.

Пользуясь результатами выполнения деления, сформулируйте алгоритм деления многочлена на многочлен и сравните его с алгоритмом на стр.24.

95 Замените дробь равным ей целым выражением, разделив ее числитель на знаменатель:

а) $\dfrac{x^3-13x-12}{x+1}$; в) $\dfrac{x^3-13x-12}{x-4}$; д) $\dfrac{x^3-13x-12}{x^2-3x-4}$;

б) $\dfrac{x^3-13x-12}{x+3}$; г) $\dfrac{x^3-13x-12}{x^2-x-12}$; е) $\dfrac{x^3-13x-12}{x^2+4x+3}$.

96 Найдите остаток от деления многочлена $3x^4+13x^3+17x^2+6x+5$ на $x+2$.

97 Найдите остаток от деления многочлена x^3+x^2 на многочлен x^2-1.

98 На какие подмножества можно разбить дроби из множества:

$$A=\left\{\frac{5}{6};\ \frac{7}{3};\ \frac{8}{99};\ \frac{44}{21};\ \frac{16}{2}\right\}.$$

Каким определением вы воспользовались?

Можно ли разбить дроби из множества B аналогичным способом?

$$B=\left\{\frac{5a}{a^4-1};\ \frac{b-1}{b^2};\ \frac{x-3}{x^2+4};\ \frac{d^8}{8};\ \frac{n-4}{(n+4)^2}\right\}?$$

Проверьте свою версию, прочитав определение на стр. 24.

99 Выделите целую часть из алгебраической дроби:

а) $\dfrac{3x^4+13x^3+17x^2+6x+5}{x+2}$; б) $\dfrac{x^3+x^2}{x^2-1}$.

Результаты выполнения каких предыдущих заданий помогут вам сделать это быстрее?

100 Выделите целую часть из алгебраической дроби:

а) $\dfrac{3x-1}{x-2}$; б) $\dfrac{4x^2+x-6}{x+5}$; в) $\dfrac{y^3+0,5y^2}{2y^2+y-4}$.

π **101** Выполните действия:

а) $\dfrac{3m+2p}{5a}+\dfrac{8p-13m}{5a}$; в) $\dfrac{x-y}{xy^2}-\dfrac{x-y}{x^2y}$;

б) $\dfrac{b+1}{b}-\dfrac{3b+2}{3b}$; г) $\dfrac{2}{a^2-4}+\dfrac{1}{a^2-2a}$.

102 Выполните действия:

а) $\dfrac{9a^3}{6b^2}\cdot\dfrac{4b^3}{3a^4}$; в) $\dfrac{d^2-q^2}{3x-3z}:\dfrac{dq+q^2}{x-z}$;

б) $\dfrac{c-5}{c}\cdot\dfrac{7c^2}{c^2-25}$; г) $\dfrac{p^2-2pt+t^2}{p^3+t^3}:\dfrac{p-t}{p^2-pt+t^2}$.

103 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\dfrac{k^2}{s^3}\right)^5$; б) $\left(-\dfrac{4dt^3}{h^2}\right)^3$; в) $\left(\dfrac{2ax^4}{v^3}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{v^3}{5a^4x}\right)^2$.

104 Выполните действия: $\dfrac{3(a-3)}{a+3}+\left(\dfrac{5a}{a+3}-\dfrac{14a}{a^2+6a+9}\right):\dfrac{5a+1}{a^2-9}$.

105 Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{2}{x-y}$; б) $\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-2\sqrt{xy}+y}\cdot\dfrac{1}{x}$.

106 Решите уравнение:

а) $\frac{x-1}{2}-\frac{4+2x}{3}=0$; б) $\frac{x}{15}-\frac{1}{5}=\frac{x-1}{25}$.

107 Найдите неизвестный член пропорции:

а) $5 : x = 7 : 21$; б) $x : 3,3 = 0,2 : 0,6$; в) $\frac{5}{6}=\frac{2x}{3}$; г) $\frac{5x}{6}=\frac{x+1}{3}$.

В каком случае вы использовали основное свойство пропорции? Сформулируйте это свойство.

108 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=0,5 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x-4y=-5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2(3x-y)+5=4(0,5x+y) \\ 19y+8(0,15x-1)=-1,8x \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{10}=0,1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} \frac{x-y}{6}=1 \\ \frac{x+1}{3}-\frac{1-2y}{4}=-\frac{5}{12} \end{cases}$; е) $\begin{cases} \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{2} \\ \frac{3x-y}{5}=\frac{5x-4y}{6} \end{cases}$.

Д **109** Замените дробь равным ей целым выражением:

а) $\frac{x^3-11x^2+10}{x-1}$; в) $\frac{x^3-10x+3}{x-3}$; д) $\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$;

б) $\frac{x^3-5x-2}{x+2}$; г) $\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2+x+1}$; е) $\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}$.

110 Найдите остаток от деления многочлена $x^4-x^3+x^2-x+5$ на $x+3$.

111 Найдите остаток от деления многочлена $2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$ на $x-2$.

112 Найдите остаток от деления многочлена $3x^3+2x^2+x$ на многочлен x^2-1.

113 Выделите целую часть алгебраической дроби:

а) $\frac{3x+2}{x-3}$; б) $\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+x}$.

114 Выполните действия: $\left(\frac{5d}{d+1}-\frac{3d}{d^2+2d+1}\right):\frac{5d+2}{d^2-1}+\frac{d-1}{d+1}$.

115 Решите систему уравнений:

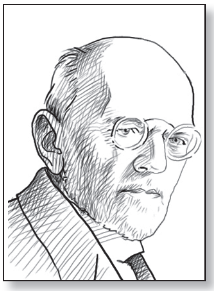
а) $\begin{cases} x+y-4=6(y-2,5x) \\ 13x-5(x+1)=-y-0,2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x+y}{6}-\frac{x}{5}=0,1 \\ \frac{y}{3}+\frac{x-y}{2}=-0,5 \end{cases}$.

116 Решите уравнение: $\frac{x-3}{4}+\frac{x}{22}=\frac{x+3}{8}$.

С **117*** В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

118* На доске записаны числа 4, 14, 24, ..., 94, 104. Можно ли стереть одно число, затем из оставшихся еще два, затем еще три и, наконец, еще четыре числа так, чтобы после каждого вычеркивания сумма оставшихся чисел делилась на одиннадцать?

4. Дробно-рациональные уравнения



Тот, кто ищет методы, не имея в виду какой-либо конкретной задачи, в большинстве случаев терпит неудачу.

Дэвид Гильберт (1862–1943),
немецкий математик

Теория алгебраических дробей, с которой мы познакомились в предыдущих пунктах, расширяет наши возможности при решении практических задач. В данном пункте мы научимся решать задачи, математические модели которых содержат алгебраические дроби. Раньше такие задачи нам уже встречались, но решить мы могли лишь некоторые из них и достаточно громоздкими способами – методом перебора, методом проб и ошибок. Теперь мы можем вывести удобный общий алгоритм их решения.

Рассмотрим вначале следующую задачу.

Задача.

Длина стороны первого квадрата на 3 см больше, чем длина стороны второго квадрата. Если площадь первого квадрата уменьшить на 7 см^2 и разделить на длину стороны второго квадрата, то результат окажется на 12 см больше, чем результат от деления площади некоторой фигуры, равной 2 см^2, на длину стороны второго квадрата. Найти площадь второго квадрата.

Решение:

Пусть длина стороны первого квадрата равна x, тогда длина стороны второго квадрата равна $x - 3$. Так как обе длины – величины положительные, то $x > 3$.

Математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{x-3} = \dfrac{2}{x-3} + 12 \\ x > 3 \end{cases} \longrightarrow \boxed{(x-3)^2 = ?}$$

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, нам надо найти корни полученного уравнения. Общего способа его решения у нас нет, так как оно содержит дробно-рациональные выражения. Вместе с тем такие уравнения встречаются достаточно часто, поэтому нам надо научиться их решать.

Сначала введем определение уравнений нового типа.

***Определение* 1.** Уравнение, одна из частей которого является целым рациональным выражением, а другая дробно-рациональным или обе части которого являются дробно-рациональными выражениями, называется **дробно-рациональным уравнением**.

Например, дробно-рациональными являются следующие уравнения:

$$\frac{x-2}{x+3} = 0; \qquad 5y = \frac{2+4y}{3y-7} + 14; \qquad \frac{6x+5y}{11xy} = \frac{xy}{2x+12y}.$$

При этом в первых двух уравнениях используется только одна переменная. Поэтому их называют *дробно-рациональными уравнениями с одним неизвестным*. Именно такие уравнения мы и рассмотрим в данном пункте.

Уравнение нового типа отличается от известных нам уравнений – в нем содержатся дробно-рациональные выражения, которые теряют смысл при значении неизвестного, обращающего знаменатель в ноль. Поэтому, решая дробно-рациональное уравнение, нужно следить за тем, чтобы среди его корней таких значений не оказалось. Для построения нового алгоритма нам необходимо ввести понятие *области допустимых значений* уравнения.

Определение **2. Областью допустимых значений** (ОДЗ) уравнения называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл все выражения, входящие в уравнение.

Из этого определения следует, что для нахождения ОДЗ дробно-рационального уравнения, надо найти пересечение областей определения всех алгебраических дробей, стоящих в его левой и правой частях. Так, ОДЗ уравнения $\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12$, полученного в задаче, представляет собой множество всех чисел, не равных 3: $x \neq 3$.

Чтобы понять, как решать уравнения нового типа, вспомним, как решаются уже известные нам аналогичные уравнения с дробями, знаменатели которых не содержали неизвестного, например:

$$\frac{x-7^{(3}}{6}=\frac{2^{(6}}{3}+\frac{2x^{(2}}{9} \Leftrightarrow \frac{3(x-7)}{18}=\frac{12}{18}+\frac{4x}{18} \Leftrightarrow 3x-21=12+4x \Leftrightarrow x=-33.$$

Мы умножили обе части уравнения на наименьший общий знаменатель данных дробей, равный 18, привели уравнение к целым коэффициентам, а затем нашли x.

Попробуем теперь решить уравнение нового типа, применяя тот же способ *на области его допустимых значений*: $x \neq 3$.

Приведем все слагаемые к общему знаменателю $x - 3$:

$$\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12 \Leftrightarrow \frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2+12(x-3)}{x-3}.$$

Домножая обе части уравнения на общий знаменатель, получим:

$$x^2-7=2+12\,(x-3) \Leftrightarrow x^2-12x+27=0.$$

Найдем корни квадратного уравнения по теореме, обратной теореме Виета:

$$x = 3 \text{ или } x = 9.$$

Проверим, что полученные корни принадлежат ОДЗ уравнения ($x \neq 3$). Корень $x = 3$ не принадлежит ОДЗ и его нужно исключить из множества решений. Такие корни называют **посторонними корнями**. Корень $x = 9$ принадлежит ОДЗ. Именно он и будет решением исходного уравнения.

Мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений

1. Найти ОДЗ уравнения.
2. Привести обе части уравнения к общему знаменателю.
3. Домножить обе части уравнения на общий знаменатель.
4. Найти корни полученного уравнения.
5. Проверить, принадлежат ли найденные корни ОДЗ.
6. Записать в ответе те из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ.

Теперь вернемся к задаче, рассмотренной в начале пункта. Чтобы завершить ее решение, нам осталось проверить, что найденный нами корень 9 удовлетворяет второму неравенству из математической модели: $9 > 3$ (истинно).

Найдем требуемую в условии задачи величину: $(x-3)^2=(9-3)^2=36$.

Ответ: площадь второго квадрата равна 36 см^2.

Для решения задачи мы вывели общий алгоритм решения дробно-рациональных уравнений, основанный на преобразовании дробно-рациональных выражений к целым на ОДЗ уравнения. Однако в ряде случаев дробно-рациональное уравнение удобнее решать, пользуясь *условием равенства дроби нулю*:

$$\frac{A}{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$$

В соответствии с этим алгебраическая дробь равна нулю при тех, и только тех значениях переменных, при которых ее числитель равен нулю, а знаменатель нет. Значит, если дробно-рациональное уравнение удается свести к виду $\frac{A(x)}{B(x)}=0$, то мы сразу можем перейти к решению системы: целого рационального уравнения $A(x)=0$ и неравенства $B(x)\neq 0$.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$$

Поэтому чтобы решить дробно-рациональное уравнение, можно собрать все его члены в левой части, привести дроби к общему знаменателю, а затем перейти к решению системы, равносильной исходному уравнению. Например, уравнение, полученное нами выше при решении задачи, можно решить с помощью этого способа следующим образом:

$$\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-7}{x-3}-\frac{2}{x-3}-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-7-2-12(x-3)}{x-3}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-12x+27}{x-3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-12x+27=0 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

Уравнение $x^2-12x+27=0$, как мы видели, имеет два корня, поэтому система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x^2-12x+27=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \text{ или } x=9 \\ x\neq 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ x\neq 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=9 \\ x\neq 3 \end{cases}.$$

Первая система не имеет решения, а вторая – имеет решение $x=9$. Значит, мы получили тот же самый ответ, что и в предыдущем случае: исходное уравнение имеет один корень $x=9$.

Таким образом, решение дробно-рационального уравнения можно свести к решению системы посредством следующего алгоритма.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений

(с помощью условия равенства дроби нулю)

1. Перенести все слагаемые из правой части в левую, изменив их знаки на противоположные.
2. Привести все слагаемые в левой части уравнения к общему знаменателю (тем самым записать уравнение в виде $\frac{A}{B}=0$).
3. Составить систему $\begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$.
4. Решить первое уравнение системы и проверить удовлетворяют ли полученные корни второму соотношению системы.
5. Записать в ответ те из найденных корней, которые удовлетворяют второму соотношению системы.

Мы получили два способа решения дробно-рациональных уравнений, основанные на преобразовании дробных выражений в целые с учетом ОДЗ и на условии равенства алгебраической дроби нулю.

Пример 1.

Решить уравнение: $\dfrac{4}{x+2}+3=\dfrac{3x^2-8}{x^2-4}$.

Решение:

<u>1 способ</u>.

$$\frac{4}{x+2}+3=\frac{3x^2-8}{x^2-4}.$$

ОДЗ: $x \neq \pm 2$.

$$\frac{4(x-2)+3(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)}$$

$4x-8+3x^2-12=3x^2-8$

$4x-12=0$

$x=3$

$3 \in$ ОДЗ.

Ответ: 3.

<u>2 способ</u>.

Перенесем все слагаемые из правой части в левую и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{4}{x+2}+3-\frac{3x^2-8}{x^2-4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4(x-2)+3(x^2-4)-(3x^2-8)}{(x-2)(x+2)}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-8+3x^2-12-3x^2+8}{(x-2)(x+2)}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x-12}{(x-2)(x+2)}=0$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 4x-12=0 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Ответ: 3.

119 1) Какие из дробно-рациональных выражений не имеют смысла при $x=3$?

а) $\dfrac{x-3}{x}$; б) $\dfrac{x}{x-3}$; в) $x-3+\dfrac{3}{10-x}$; г) $\dfrac{1}{x^2-9}$.

2) Может ли -3 являться корнем уравнения $\dfrac{x+1}{2x-6}+\dfrac{9}{x^2-9}=\dfrac{x}{2x+6}$?

3) Укажите значения x, при которых потеряют смысл дробно-рациональные выражения, входящие в уравнение $\dfrac{2x-2}{x+3}+\dfrac{18}{x^2-9}=\dfrac{x-6}{x-3}$.

4) Укажите множество значений неизвестного, при которых имеют смысл все выражения, входящие в уравнение $\dfrac{2x-2}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$.

5) Предположите, какое множество значений неизвестного называют *областью допустимых значений* уравнения. Проверьте свое предположение с помощью учебника.

120 Проанализируйте таблицу и попытайтесь составить определение дробно-рациональных уравнений, сопоставьте свой вариант с определением, приведенным в учебнике.

Рациональные уравнения	
Целые уравнения	Дробно-рациональные уравнения
$2x-7=0$ $\frac{1}{2}x-5=x-4$ $x^2-2x+0,75=0$ $\frac{x-1}{5}+3=\frac{x+5}{2}$	$\frac{1}{x+1}=0$ $\frac{2}{x}-5=3x$ $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x(x-2)}$ $\frac{x+1}{x-4}+\frac{9}{x^2-16}=\frac{x}{2x+8}$

121 а) Чем похожи и чем отличаются данные уравнения:

$$\frac{x-3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{x+5}{20} \text{ и } \frac{x-6}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x(x-4)}?$$

Укажите область допустимых значений для каждого из уравнений.

б) Решите уравнение $\frac{x-3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{x+5}{20}$ известным вам способом.

в) Решите данным способом дробно-рациональное уравнение $\frac{x-6}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x(x-4)}$?

Какие дополнительные шаги необходимо выполнить при его решении?

г) Подойдет ли способ, который вы использовали при решении этого уравнения для решения всех дробно-рациональных уравнений? Составьте алгоритм решения дробно-рациональных уравнений и сопоставьте его с алгоритмом на стр. 30.

122 1) При каких значениях переменной равна нулю дробь:

а) $\frac{a-5}{8}$; б) $\frac{x+10}{x}$; в) $\frac{2}{x-5}$; г) $\frac{2y-2}{y-1}$; д) $\frac{a}{b}$.

2) Найдите корни уравнений, используя результаты выполнения предыдущего задания:

$\frac{a-5}{8}=0$; $\frac{x+10}{x}=0$; $\frac{2}{x-5}=0$; $\frac{2y-2}{y-1}=0$.

3) Используя идею решения предыдущих уравнений, решите дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2+x-4}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=0.$$

4) Составьте еще один алгоритм решения дробно-рациональных уравнений и сопоставьте его с алгоритмом на стр. 31.

123 Решите дробно-рациональное уравнение двумя различными способами:

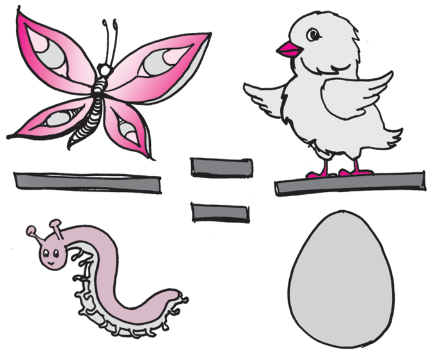
$$\frac{3}{8-5x}+\frac{5}{2-7x}=0\cdot$$

Какой из них вам больше понравился?

124 а) Рассмотрите еще один способ решения этого уравнения.

$$\frac{3}{8-5x}+\frac{5}{2-7x}=0.$$

ОДЗ: $x \neq 1{,}6$; $x \neq \frac{2}{7}$.



$$\frac{3}{8-5x}=\frac{5}{7x-2}$$

$3\,(7x-2)=5\,(8-5x)$

$21x-6=40-25x$

$46x=46$

$x=1$ принадлежит ОДЗ.

Ответ: 1.

Какое свойство лежит в основе этого решения?

б) Укажите уравнение, при решении которого удобнее использовать основное свойство пропорции:

$5x+\frac{6}{x}=11$; $\quad \frac{4}{x^2-9}+\frac{x+1}{x-3}=1$; $\quad \frac{x-4}{x+1}=\frac{x-9}{x}$; $\quad \frac{4-x}{x^2-9}=0$.

125 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{5x^2+25x}{x+1}=0$; $\quad$ в) $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}=1$; $\quad$ д) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$;

б) $\frac{x^2-4x}{x-4}=0$; $\quad$ г) $1+\frac{3}{x+4}=\frac{3}{x}$; $\quad$ е) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$.

126 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{x-1}{x^3+3x^2+x+3}+\frac{1}{x^4-1}=\frac{x+1}{x^3+3x^2-x-3}$.

Решите задачи № 127–131, составив дробно-рациональное уравнение.

127 а) Пешеход должен был пройти 6 км за определенный срок. Однако он задержался с выходом на полчаса, поэтому, чтобы прийти вовремя, он шел со скоростью, превышающей намеченную на 1 км/ч. С какой скоростью шел пешеход?

б) Поезд был задержан на станции на 20 минут. Чтобы наверстать потерянное время, машинист увеличил скорость на 10 км/ч и на отрезке пути в 100 километров ликвидировал отставание. С какой скоростью поезд шел до задержки на станции?

128 а) Катер прошел 27 км по течению реки и 42 км против течения, затратив на путь по течению на 1 ч меньше, чем на путь против течения. Какова скорость катера против течения реки, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

б) Прогулочный теплоход в 10:00 вышел вниз по течению реки из пункта A в пункт B. Пробыв в пункте B 3 часа, теплоход отправился назад и вернулся в пункт A в 22:00. Определите собственную скорость теплохода, если известно, что скорость течения реки 1,5 км/ч, а расстояние между пунктами A и B равно 32,4 км (ответ выразите в км/ч).

129 а) Завод заключил договор на выполнение 180 станков к определенному сроку. Перевыполняя запланированную дневную норму на 2 станка, завод выполнил заказ на 1 день раньше срока. За сколько дней завод выполнил заказ?

б) Через две трубы треть бассейна наполнится за 2 ч. За сколько часов каждая труба наполнит бассейн, если одной потребуется на 9 ч больше, чем другой?

130 Последовательно составьте математические модели каждой из задач и решите последнюю из них:

1) Из пунктов A и B, расстояние между которыми составляет 6 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго и поэтому он потратил на путь на 1 час меньше, чем второй. Сколько времени был в пути второй пешеход, если шли они по одной и той же дороге?

2) Железнодорожные пути между пунктами A и B проходят только по одному маршруту, длиной в 324 км. Из пункта A в пункт B выехал поезд. Через 1 ч 30 минут из пункта B в пункт A выехал второй поезд. В пункты назначения они прибыли одновременно. Найдите скорость второго поезда, если она на 5 м/с больше скорости первого (ответ выразите в км/ч).

3) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист выехал на 40 минут позже велосипедиста. Встретились они на середине пути. Скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше скорости велосипедиста. Найдите их скорости, если эти пункты соединяет только одна дорога.

131 Последовательно составьте математические модели каждой из задач и решите последнюю из них.

1) Два велосипедиста одновременно выехали из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 45 км. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в пункт B на 30 мин раньше второго. Найдите скорость второго.

2) Из города A в город B, расстояние между которыми равно 120 км, выехал автобус. Через 1 ч вслед за ним по той же дороге выехала легковая машина, скорость которой на 20 км/ч больше, чем скорость автобуса. Легковая машина прибыла в пункт B одновременно с автобусом. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.

3) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 60 км, выехал автобус. А через 20 минут вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автобус пришел в пункт B на 10 минут позже легкового автомобиля. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.

П **132** Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\dfrac{a^3}{b^4}\right)^4$; б) $\left(-\dfrac{m^2s^5}{6a^3}\right)^3$; в) $\left(-\dfrac{2a^2}{bn}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{n^3}{3a^3b}\right)^2$.

133 Упростите выражение:

а) $\dfrac{m+2}{m-3}\cdot\left(m-\dfrac{5m}{2+m}\right)$; б) $\left(\dfrac{b-2}{b+2}-\dfrac{b+2}{b-2}\right):\dfrac{b^2}{b^2-4}$.

134 Разделите многочлен на многочлен:

а) $(3x^3+2x^2-x-4):(x-1)$; б) $(x^5-3x^4-3x^2-5x+2):(x+2)$.

135 Выделите целую часть алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x+2}$; б) $\dfrac{x^5-3x^4+3x-5}{x-5}$.

136 Решите системы, используя подходящую замену неизвестных:

а) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{y}=9\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2x}+\dfrac{y-1}{3y}=1\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=-0{,}2\end{cases}$; в) $\begin{cases}\dfrac{5}{2x+y}+\dfrac{6}{y-2x}=3\\ \dfrac{1}{2x+y}-\dfrac{18}{2x-y}=-5\end{cases}$.

137 Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Сумма двух чисел равна -10. Если из большего числа вычесть меньшее, то получится 120. Найдите эти числа.

б) В билетной кассе железнодорожного вокзала в первой половине дня продали 25 взрослых и 12 детских билетов до Санкт-Петербурга, а во второй половине дня – 15 взрослых и 20 детских билетов. При этом выручка в первой половине дня оказалась на 10 080 рублей больше, чем во второй половине дня. Каковы стоимость детского и взрослого билета, если стоимость детского билета составляет 35% стоимости взрослого билета?

138 В колбе было 150 г 80%-го раствора кислоты. Лаборант отлил из колбы некоторое количество раствора и затем добавил в нее столько же воды, чтобы получить 60%-ный раствор кислоты. Сколько граммов воды добавил лаборант?

Д **139** Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\dfrac{x^2-7x}{x+7}=0$; г) $1+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{5}{x}$;

б) $\dfrac{x^2+2x}{2x+4}=0$; д) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$;

в) $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{1}{x+1}=4$; е) $\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{4}{x^2+1}=\dfrac{2}{x^4-1}$.

140 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+3}{x^2+x}-\dfrac{12}{x^2+3x}+\dfrac{1}{x}=0$; б) $\dfrac{x+2}{x^3-1}+\dfrac{3}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{x-1}$.

141 Товарный поезд был задержан в пути на 18 минут, но затем на оставшихся 60 км пути наверстал упущенное время, увеличив скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

142 Катер прошел 8 км по течению реки и 16 км против течения реки, затратив на весь путь $1\frac{1}{3}$ ч. Какова скорость катера по течению, если собственная скорость катера равна 20 км/ч?

143 Завод заключил договор на выполнение 800 запасных деталей к определенному сроку. Перевыполняя запланированную дневную норму на 20 деталей, завод выполнил заказ на 2 дня раньше срока. За сколько дней завод выполнил этот заказ?

144 Сравните условия задач. Составьте математические модели обеих задач и решите одну из них.

1) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 20 км, выехал мотоциклист. Через 6 минут вслед за ним выехал автобус, скорость которого на 10 км/ч больше скорости мотоциклиста. Найдите скорости автобуса и мотоциклиста, если автобус приехал в пункт B на 4 минуты раньше мотоциклиста.

2) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 24 км, выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость первого, который выехал на 20 минут раньше второго, на 6 км/ч меньше скорости второго. Встретились они на середине пути. Найдите их скорости.

145 Выполните действия:

а) $\dfrac{b-3a}{2ab}-\dfrac{b-a}{2ab}$;

б) $\dfrac{3-p}{12p^2}-\dfrac{3p+2}{8p^2}$;

в) $\dfrac{m-n}{mn^2}-\dfrac{n-m}{m^2n}$;

г) $\dfrac{x+2}{x^2-9}-\dfrac{2}{x^2-3x}$;

д) $\dfrac{3d^2}{2k}\cdot\dfrac{4k^4}{9d^3}$;

е) $\dfrac{c^2-1}{v^5+v^3}\cdot\dfrac{v^2+1}{c^2-c}$;

ж) $\dfrac{z^2-s^2}{5t+5k}:\dfrac{zs-s^2}{t+k}$;

з) $\dfrac{a^3-d^3}{y^2+2yr+r^2}:\dfrac{a^2+ad+d^2}{y+r}$;

и) $\dfrac{4a^2-2ab+b^2}{a^3+8b^3}:\dfrac{a^2-4b^2}{(a-2b)^2}$;

к) $\dfrac{3xy^2-12x^3}{8x^3-y^3}:\dfrac{3x^2+6xy}{4x^2+2xy+y^2}$;

л) $\dfrac{a-6}{a^2-a-30}\cdot\dfrac{a^2+10a+25}{3a^2+15a}$;

м) $\dfrac{a^4-1}{a^3-1}\cdot\dfrac{a^2+a+1}{a+1}$.

146 Выделите целую часть алгебраической дроби: $\dfrac{3x^3+x^2-x+19}{x+3}$.

147 Решите систему, используя подходящую замену неизвестных:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{y-1}=1\\[2mm] \dfrac{5}{x+2}+\dfrac{3}{y-1}=-2\end{cases}.$$

148 Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Скорость моторной лодки по течению реки составила 20 км/ч, а против течения – 15 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

б) На двух полках 64 книги. Если переставить со второй полки третью часть книг на первую, то на первой станет в три раза больше книг, чем останется на второй. Сколько книг было на каждой полке?

C **149*** При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{(x-a)(x-1)}$ не имеет решения?

150* Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.