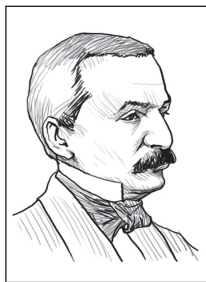


Глава 1

Развитие математической теории

§ 1. Теория множеств

1. Основные понятия теории множеств. Числовые множества



*Бог создал натуральные числа; все остальное —
дело рук человеческих.*

Леопольд Кронекер (1823–1891),
немецкий математик

Любая наука в своем развитии стремится к обобщению и систематизации знаний. Одним из наиболее общих математических понятий, позволяющих выявить общие свойства объектов из самых разных областей знаний – математики и физики, химии и биологии, экономики, лингвистики и др., является понятие *множества*.

С начальными представлениями о множествах мы познакомились еще в младших классах школы, а затем работали с множествами чисел, функций и геометрических фигур, слов и предложений, растений и животных и др. Мы использовали отношения и операции над множествами для обоснования суждений, решения логических задач, выявления аналогии свойств объектов различной природы. Для дальнейшего движения вперед уточним свои представления о теоретико-множественных понятиях и познакомимся с новыми.

Сформулируем основные понятия теории множеств, начиная с уточнения понятия множества. В современной математике **множеством** называют любую совокупность произвольных объектов. Эти объекты называют **элементами множества**.

Приведем примеры различных множеств:

- 1) B – множество всех учеников класса; его элементы – все ученики данного класса;
- 2) C – множество всех книг в школьной библиотеке; его элементы – все книги библиотеки;
- 3) N – множество натуральных чисел; его элементы – все натуральные числа;
- 4) A – множество всех треугольников на плоскости; его элементы – все треугольники на плоскости.

Для обозначения того факта, что объект a является или не является элементом множества A , мы применяем запись $a \in A$ или $a \notin A$. Например, для множества натуральных чисел верно: $3 \in N$; $\frac{1}{2} \notin N$. Такую же запись можно использовать и для нечисловых множеств. Так, если A – множество произведений А.С. Пушкина, a – роман «Евгений Онегин», b – роман «Война и мир», то $a \in A$, $b \notin A$.

Один или несколько элементов, принадлежащих множеству, можно рассматривать как еще одно множество, тогда оно будет подмножеством исходного множества.

Определение 1. Множество A называется **подмножеством** множества B , если каждый элемент A является также элементом B .

Мы обозначаем это следующим образом: $A \subset B$, а читаем «множество A содержится в множестве B » или «множество B включает множество A » и т.п.

Приведем примеры подмножеств различных множеств.

1) $Q \subset R$, где Q – множество рациональных чисел; R – множество действительных чисел;

2) $B \subset A$, где A – множество точек некоторого прямоугольника; B – множество вершин этого прямоугольника;

3) $B \subset C$, где C – множество учеников данного класса; B – множество учеников данного класса с фамилией Иванов.

В случае, если в классе нет учеников с фамилией Иванов, B будет являться примером пустого множества.

Определение 2. Множество называется **пустым**, если оно не содержит ни одного элемента (обозначаем знаком $\emptyset$).

Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества. Кроме того, любое множество можно считать своим же подмножеством. Зафиксируем эти факты в виде свойства.

Свойство 1. Любое множество A (кроме пустого) имеет хотя бы два подмножества: пустое множество $\emptyset$ и само себя – A .

$$\forall A: \emptyset \subset A, A \subset A.$$

Для множеств и их подмножеств выполняется еще одно свойство (транзитивность включения множеств).

Свойство 2. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Доказательство:

Пусть элемент $a \in A$. Так как $A \subset B$, то $a \in B$; так как $B \subset C$, то $a \in C$. Итак, любой элемент множества A является также элементом C ; значит $A \subset C$. ■

Отношения между множествами мы иллюстрируем диаграммами Эйлера–Венна. Только что доказанное свойство 2 становится очевидным из рисунка 1.

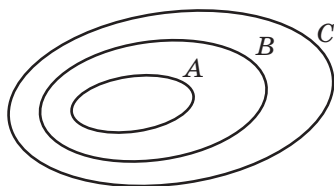


Рис. 1

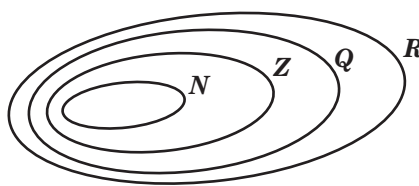


Рис. 2

Подобное отношение связывает известные нам *числовые* множества, которые мы постепенно открывали для себя, расширяя понятие числа (от натуральных чисел к целым, от целых к рациональным, от рациональных к действительным). Их диаграмма изображена на рисунке 2.

Пример 1.

Опишите, как на диаграмме, изображенной на рис. 2, расположены числа: 2; $\frac{77}{11}$; -4 ; $\frac{1}{2}$; 3,(01); $\sqrt{100}$; $\sqrt{6}$; $\frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{5}$; 0,123456789101112... (после запятой выписаны подряд все натуральные числа).

Решение:

1) $2 \in \mathbb{N}$.

2) $\frac{77}{11} = 7, \frac{77}{11} \in \mathbb{N}$.

3) $-4 \notin \mathbb{N}, -4 \in \mathbb{Z}$.

4) $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}; \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

5) Мы знаем, что любая бесконечная периодическая дробь может быть записана в виде рационального числа, поэтому $3,(01) \in \mathbb{Q}$. При этом $3,(01) \notin \mathbb{Z}$.

6) $\sqrt{100} = 10, \sqrt{100} \in \mathbb{N}$.

7) $\sqrt{6}$ – иррациональное – не принадлежит $\mathbb{Q}$; $\sqrt{6} \in \mathbb{R}$.

8) $\frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{5} = \frac{3 - 1}{5} = 0,4$, значит, $\frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{5} \in \mathbb{Q}$. При этом это

число не принадлежит множеству целых чисел.

9) Эта дробь не является периодической. Значит, это число не является рациональным и $0,123456789101112... \in \mathbb{R}$.

Теперь уточним еще одно определение, касающееся отношений между несколькими множествами.

Определение 3. Два множества A и B называются **равными**, если $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$ (то есть каждый элемент A является также элементом B и каждый элемент B является также элементом A ; иными словами это означает, что A и B – это одно и то же множество).

Для обозначения равенства множеств применяется естественная запись $A = B$. Рассмотрим пример применения данного определения.

Пример 2.

Даны два множества $A = \{1,(09); 0,11(2); 0,55; 1,775\}$ и $B = \{\frac{12}{11}, \frac{101}{900}, \frac{11}{20}, \frac{71}{40}\}$. Являются ли эти множества равными?

Решение:

1) Представим десятичные дроби множества A в виде обыкновенных.

• Пусть $x = 1,(09)$, тогда $100x = 109,(09)$.

$$\text{Значит, } 100x - x = 109,09... - 1,09... \Leftrightarrow 99x = 108 \Leftrightarrow x = \frac{108}{99} = \frac{12}{11}.$$

Получили $1,(09) = \frac{12}{11}$ и является элементом множества B .

• Пусть $x = 0,11(2)$, тогда $100x = 11,(2)$ и $10 \cdot 100x = 112,(2)$.

$$\text{Значит, } 1000x - 100x = 112,2... - 11,2... \Leftrightarrow 900x = 101 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{101}{900}; 0,11(2) \in B.$$

• $0,55 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}; 0,55 \in B.$

• $1,775 = \frac{1575}{1000} = \frac{355}{200} = \frac{71}{40}; 1,775 \in B.$

2) Так как каждый элемент A является также элементом B и каждый элемент B является также элементом A , эти множества равны.

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 11} \\ 11 \overline{) 1,0909...} \\ \underline{100} \\ 99 \\ \underline{99} \\ 100 \\ \underline{99} \\ 1... \end{array}$$

Отметим, что для доказательства равенства мы могли обыкновенные дроби из множества B записывать в виде десятичных. Так, например, разделив числитель на знаменатель дроби $\frac{12}{11}$, получили бы, что $\frac{12}{11} = 1,(\text{09})$.

Ответ: $A = B$.

Теперь зафиксируем еще несколько свойств множеств, связанных с их равенством.

Свойство 3. Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Свойство 4. Если $A \subset B$ и $B = C$, то $A \subset C$.

Свойство 3 верно, так как из первых двух равенств следует, что все множества совпадают и поэтому $A = C$. Свойство 4 вытекает из свойства 2 (так как равенство множеств является частным случаем их включения).

Перейдем к важнейшему понятию теории множеств – **соответствию между множествами** (закону или правилу, по которому некоторым элементам множества A ставится в соответствие один или несколько элементов множества B).

Для примера рассмотрим соответствие между множеством учеников школы (A) и множеством билетов, заказанных школой на один из театральных спектаклей (B). Ситуацию, когда какие-то из учеников школы (возможно, и не все) приобрели один или несколько билетов, можно рассматривать как задание соответствия между множествами A и B .

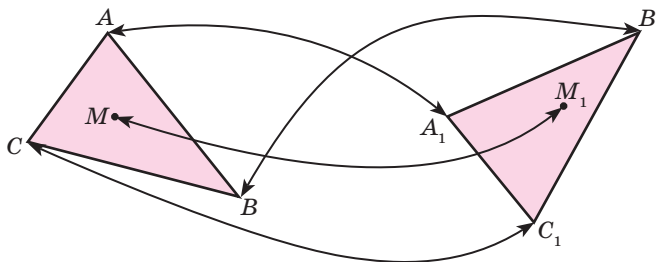
Если же каждый ученик приобрел ровно один билет и все билеты, заказанные школой, оказались раскуплены учениками, можно говорить о взаимно однозначном соответствии между множеством A и B .

Определение 4. Соответствие между множествами A и B называется **взаимно однозначным**, если *каждому* элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества B , и обратно, каждому элементу множества B при этом соответствует ровно один элемент множества A .

Рассмотрим примеры соответствий между множествами и установим, какие из них будут взаимно однозначными.

1) Пусть A – множество учеников данного класса, N – множество натуральных чисел. Соответствие между A и N , при котором каждому ученику класса ставится в соответствие год его рождения, не является взаимно однозначным. Действительно, каждому элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества N , а вот *обратное* не верно. Во-первых, потому, что не все элементы множества N при этом задействованы, а, во-вторых, потому, что многие ученики класса имеют один и тот же год рождения.

2) Соответствие между точками двух равных треугольников на плоскости, осуществляемое при соответствующем движении плоскости, переводящем один треугольник в другой, является взаимно однозначным.



3) Соответствие между множеством N натуральных чисел и множеством четных натуральных чисел, осуществляемое по правилу $n \rightarrow 2n$ (то есть каждому числу n соответствует число $2n$, а именно $1 \rightarrow 2$; $2 \rightarrow 4$; $3 \rightarrow 6$ и т.д.) и обратно $2n \rightarrow n$, является взаимно однозначным.

Понятие взаимно однозначного соответствия дает нам возможность сравнивать множества.

Определение 5. Два множества A и B называются **эквивалентными** (равномощными), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Ясно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов. С бесконечными множествами дело обстоит более сложно. Так, рассмотренный нами выше пример соответствия между множеством N и множеством четных натуральных чисел говорит о том, что эти множества эквивалентны, но при этом, как это ни странно, одно из них является подмножеством другого.

Рассмотрим еще один подобный пример.

Пример 3.

Являются ли множество натуральных чисел и множество целых чисел эквивалентными?

Решение:

Поставим в соответствие каждому натуральному числу n число $z_n = \frac{(-1)^n}{2} \left(n - \frac{1 - (-1)^n}{2} \right)$.

Если n – четное, то $z_n = \frac{n}{2}$; если n – нечетное, то $z_n = -\frac{1}{2}(n - 1)$.

Итак, $1 \rightarrow 0$; $2 \rightarrow 1$; $3 \rightarrow -1$; $4 \rightarrow 2$; $5 \rightarrow -2$; $6 \rightarrow 3$; $7 \rightarrow -3$ и т.д. Ясно, что введенная нами формула ставит в соответствие каждому натуральному числу n целое число z_n , причем каждое из целых чисел получается по этой формуле – ровно один раз. При этом обратное тоже будет верно. Нами построено взаимно однозначное соответствие между множествами, значит, они эквивалентны.

Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда в них одинаковое количество элементов. Поэтому естественно считать, что если одно бесконечное множество эквивалентно другому, то в нем «столько же» элементов. Однако не следует думать, что все бесконечные множества эквивалентны. Отметим, что множество R не является равномощным множеству Q . Можно сказать, что действительных чисел в каком-то смысле «больше», чем рациональных. Примем пока это утверждение без доказательства. Мы сможем разобраться, почему это так, чуть позже, в пункте «Счетные и несчетные множества».

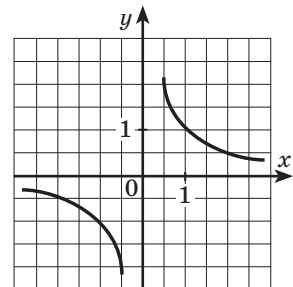
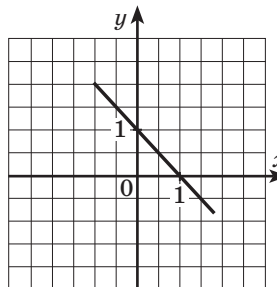
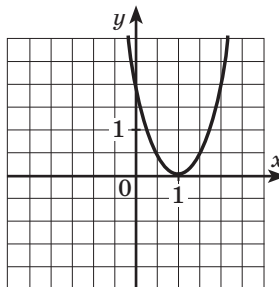
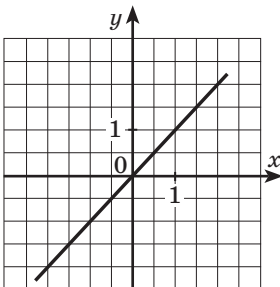
К

1

Дано множество $M = \{\frac{1}{4}; 6\frac{3}{8}; 7\frac{23}{25}; 8\frac{3}{6}\}$. Запишите множество N , состоящее из элементов множества M , представленных в виде десятичных дробей.

2

Даны множества функций G и F . G – множество функций, заданных следующими графиками:



F – множество функций, заданных следующими формулами:

$$F = \{y = 2(x - 1)^2; y = x; y = -x + 1; y = \frac{1}{x}\}.$$

Сопоставьте функции, заданные графиками, и функции, заданные формулами. Что интересного вы наблюдаете?

3 Даны два множества $A = \{2,5; 3,01; 4,1; 5,0125\}$ и $B = \{3\frac{1}{100}; 5\frac{1}{80}; 2\frac{1}{2}; 4\frac{1}{10}\}$.

Сопоставьте элементы множества A и множества B . Что вы замечаете?

4 1) Предположите, как можно назвать множества G и F , множества A и B из предыдущих заданий.

2) Опираясь на то, что множество A равно множеству B , а множество G равно множеству F , сформулируйте свой вариант определения равных множеств. Сравните его с определением равных множеств на стр. 5.

5 1) а) Покажите, что дробь $\frac{2}{5}$ помимо своего естественного представления в виде конечной десятичной дроби $\frac{2}{5} = 0,4$, имеет еще одно представление в виде периодической дроби с девяткой в периоде: $\frac{2}{5} = 0,3999... = 0,3(9)$.

б) Запишите обыкновенные дроби $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{25}$ в виде десятичной дроби двумя способами.

в) Сделайте вывод о вариантах представления конечной десятичной дроби в виде периодической дроби.

2) Даны множества $A = \{3,(7); 2,1(34); 0,2(348); 0,7(9)\}$ и $B = \{\frac{34}{9}; \frac{789}{1665}; \frac{2113}{990}; \frac{4}{5}\}$. Являются ли эти множества равными?

6 Какие из элементов множества $A = \{3; \frac{72}{3}; -6; \frac{1}{8}; -2,(02); \sqrt{144}; \sqrt{15}; \frac{(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1)}{5}; 0,24681012...\}$ (после запятой в последнем числе выписаны подряд все четные натуральные числа) принадлежат: а) множеству натуральных чисел; б) множеству целых чисел; в) множеству рациональных чисел?

7 Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $B = \{-1; -2; -3; -4; -5; -6\}$;

б) $A = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ...\}$ и $B = \{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; ...\}$;

в) множество натуральных чисел и множество натуральных чисел, кратных пяти?

8 Назовите два способа, которыми можно установить, что каждому из гостей хватит стульев, чтобы сесть за стол. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

9 1) Представьте, что существует гостиница с бесконечным числом номеров и все ее номера заняты постояльцами. Ответьте на следующие вопросы:

а) Можно ли переселить каждого ее постояльца в следующий по порядку номер, как показано на схеме:



б) Можно ли поселить в нее еще одного постояльца?

в) Как поселить в эту гостиницу еще 1000000 постояльцев?

2) Докажите, что если к множеству, которое эквивалентно множеству натуральных чисел, добавить еще один элемент, получится множество, которое снова эквивалентно множеству натуральных чисел.

3) Докажите, что если к множеству, которое эквивалентно множеству натуральных чисел, добавить конечное множество элементов, получится множество, которое также эквивалентно множеству натуральных чисел.

π

10 Решите уравнения:

а) $1,5x - 1,7 = 1,3$;

в) $x + 7,6 = 0,2x + 6$;

б) $6,4x - 1,4 = 1,8$;

г) $0,5x + 3,1 = -x + 2,5$.

11

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 3y = -11 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ |x - 3| - y = 3 \end{cases}$.

12

Решите уравнения:

а) $12,5x^2 = 2$;

в) $x^2 + 6,5x - 3,5 = 0$;

б) $8x^2 - 0,5 = 0$;

г) $0,5x^2 = 9 - 1,5x$.

13

Решите задачу:

Два автомобиля, работая вместе, могут перевезти груз за 15 ч. Один автомобиль работал на 6 ч меньше, чем второй, и перевез 40% груза, а второй – оставшийся груз. Сколько часов работал каждый автомобиль?

14

Решите уравнение: $(x^2 + 6x)^2 = -10x^2 - 60x - 16$.

Д

15 1) Запишите целые числа, кратные 9 и принадлежащие промежутку $[3; 53]$. Обозначьте полученное множество A .

2) Запишите целые числа, кратные 3 и принадлежащие промежутку $[4; 46]$. Обозначьте полученное множество B .

3) Выпишите из множества B числа, кратные 9. Обозначьте полученное множество C .

4) Что вы можете сказать о множествах B и C ? Запишите ответ на математическом языке. Что вы можете сказать о множествах A и C ? Запишите ответ на математическом языке.

16

Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $B = \{-1; -2; -3; -4\}$;

б) $A = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \dots\}$ и $B = \{\frac{2}{3}; \frac{2}{4}; \frac{2}{5} \dots\}$;

в) множество целых чисел и множество целых чисел, кратных трем?

17

Назовите два способа, которыми можно установить, что число накрытых приборов соответствует числу пришедших гостей. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

18

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 5y = -12 \\ x + 4y = -6 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |x - 2| - 2y = 2 \\ x - y = -3 \end{cases}$.

19 Решите уравнения:

а) $x^2 + 3,5x - 7,5 = 0$;

б) $0,3x^2 = 12 + 1,8x$.

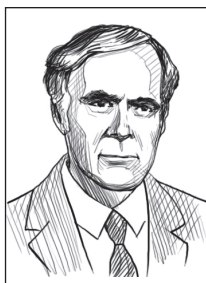
20 Решите задачу:

На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Одна из них может убрать всю улицу за один час, а другая за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 минут, после чего первая машина прекратила работу. Сколько нужно времени, чтобы одна вторая машина закончила работу?

21* Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом часовая и минутная стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько времени продолжалась Колина прогулка?

22* Каких треугольников с целочисленными сторонами больше: имеющих периметр 1997 или имеющих периметр 2000?

2. Операции над множествами

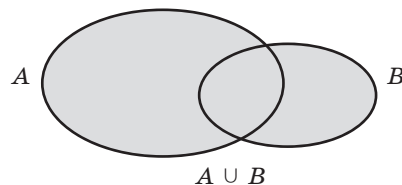


Подобно другим естественным наукам, математика представляет собой игру, в которую мы играем с окружающим миром... Самые лучшие математики и самые хорошие преподаватели – это, очевидно, люди, которые прекрасно разбираются в ее правилах, а также получают удовольствие от самого процесса игры.

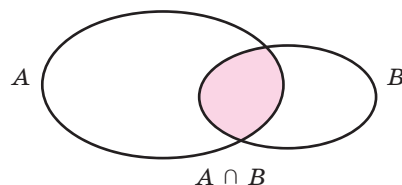
Мартин Гарднер (1914–2010), американский специалист в области занимательной математики

В предыдущем пункте мы уточнили основные понятия теории множеств, в этом пункте мы вспомним, какие операции над множествами нам известны и для чего они нужны. Кроме того, мы познакомимся и с новыми операциями над множествами и выясним область их применения.

Определение 1. Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат либо A , либо B , либо и тому, и другому множеству одновременно (обозначаем $A \cup B$).



Определение 2. Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и A , и B (обозначаем $A \cap B$).

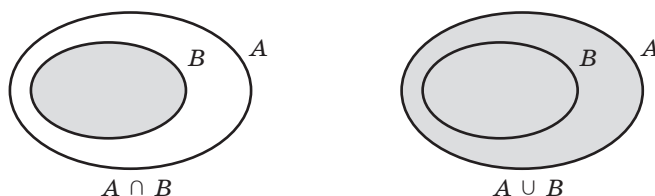


Объединение и пересечение множеств на диаграммах Эйлера–Венна мы иллюстрируем штриховкой.

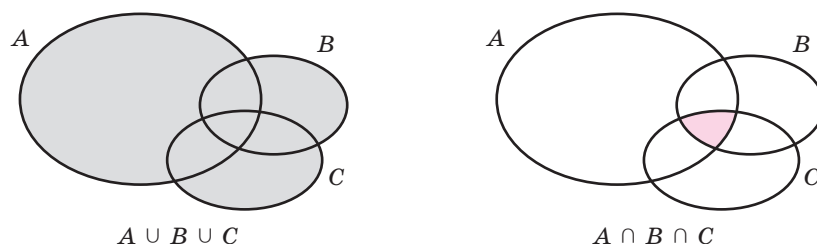
Приведем примеры объединения и пересечения множеств в таблице.

множество A	множество B	$A \cap B$	$B \cup A$
ученики 9 ^А класса	мальчики из 9 ^А и 9 ^В	мальчики из 9 ^А	все 9 ^А и мальчики 9 ^В
натуральные числа, кратные 3	четные натуральные числа	натуральные числа, кратные 6	натуральные числа, дающие при делении на 6 остатки 0, 2, 3, 4
прямоугольники на плоскости	ромбы на плоскости	квадраты на плоскости	параллелограммы, у которых углы и/или стороны равны

Легко видеть, что если $B \subset A$, то $A \cap B = B$; $A \cup B = A$:



Можно найти объединение и пересечение более двух множеств:



Теперь, когда мы уточнили свои представления о пересечении и объединении множеств, вспомним, в каких ситуациях мы использовали эти операции.

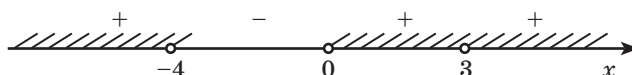
Мы применяли операцию объединения множеств, например, при решении неравенств методом интервалов.

Пример 1.

Решить неравенство $x(x - 3)^2(x + 4) > 0$.

Решение.

Отметив на числовой прямой точки, при которых произведение $x(x - 3)^2(x + 4)$ равно нулю, и расставив знаки этого произведения на полученных интервалах, получим:



Множество решений неравенства состоит из тех и только тех чисел, которые принадлежат одному из промежутков $(-\infty; -4)$, $(0; 3)$ и $(3; +\infty)$, то есть их объединению. Для записи ответа используем знак $\cup$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

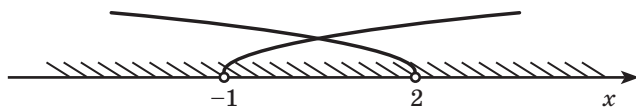
Также операцию объединения множеств мы применяли при решении совокупности неравенств.

Пример 2.

$$\text{Решить } \begin{cases} 3x - 6 < 0 \\ 2x + 2 > 0 \end{cases}.$$

Решение.

Решением первого неравенства является луч $(-\infty; 2)$, второго – луч $(-1; +\infty)$, а их объединением является множество $(-\infty; +\infty)$.



$$(-\infty; 2) \cup (-1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

При решении совокупности неравенств мы находили объединение решений каждого из них. Ясно, что решением совокупности, например, уравнения и неравенства, также будет объединение их решений.

Пример 3.

$$\text{Решить совокупность } \begin{cases} 3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Решение.

$$\begin{cases} 3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 21 = 4x - 11 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x > 0 \end{cases}$$



Решением уравнения является множество $\{-10\}$, решением неравенства – открытый луч $(0; +\infty)$, а их объединение запишем следующим образом: $\{-10\} \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $\{-10\} \cup (0; +\infty)$.

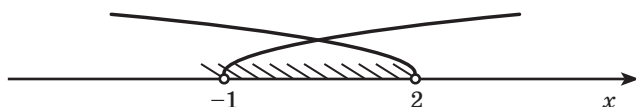
Операцию *пересечения множеств* мы применяли при решении систем.

Пример 4.

$$\text{Решить систему неравенств } \begin{cases} 3x - 6 < 0 \\ 2x + 2 > 0 \end{cases}.$$

Решение.

Решением первого неравенства системы является открытый луч $(-\infty; 2)$, второго – открытый луч $(-1; +\infty)$, а их пересечением является множество $(-1; 2)$.



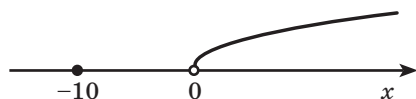
$$(-\infty; 2) \cap (-1; +\infty) = (-1; 2)$$

Ответ: $(-1; 2)$.**Пример 5.**

$$\text{Найти множество } x, \text{ удовлетворяющих системе } \begin{cases} 3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Решение.

$$\begin{cases} 3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 21 = 4x - 11 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x > 0 \end{cases}$$



Решением уравнения является множество $\{-10\}$, решением неравенства – открытый луч $(0; +\infty)$, а их пересечением является пустое множество.

Ответ: $\emptyset$.

Теперь введем несколько новых операций для множеств.

Определение 3. Пусть имеется некоторое множество X . **Дополнением множества A** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат X , но не принадлежат A (обозначается $\bar{A}$).

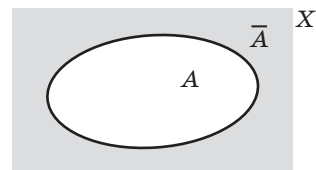


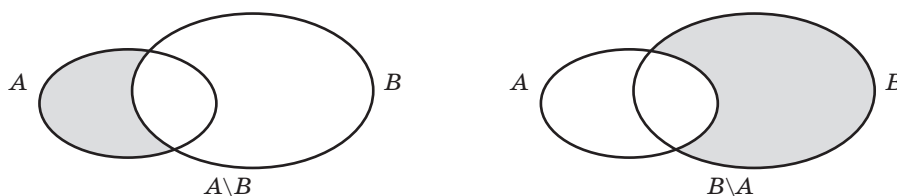
Рис. 1

На диаграмме Эйлера–Венна $\bar{A}$ – это множество точек, не попавших в множество A (рис. 1).

Очевидно, что $\overline{\bar{A}} = A$. Аналогичное равенство мы уже составляли для отрицания высказываний.

В дальнейшем множество X определяется из смысла задачи. Например, если в задаче рассматриваются множества на числовой прямой, то X – это вся числовая прямая.

Определение 4. **Разностью множеств A и B** называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат A , но не принадлежат B (обозначается $A \setminus B$).



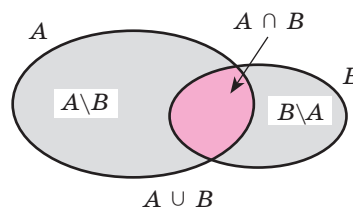
Как мы видим $A \setminus B$ и $B \setminus A$ – это разные, причем непересекающиеся множества. Приведем примеры разностей различных множеств.

множество A	множество B	$A \setminus B$	$B \setminus A$
ученики 9 ^А класса	мальчики из 9 ^А и 9 ^В	девочки из 9 ^А	мальчики из 9 ^В
натуральные числа, кратные 3	четные натуральные числа	натуральные числа, дающие при делении на 6 остаток 3	натуральные числа, дающие при делении на 6 остатки 2 или 4

Отметим, что объединение множеств $A \cup B$ содержит три непересекающихся множества: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Из этого же рисунка очевидна справедливость еще одного свойства разности множеств A и B :

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$



Эта новая для нас операция разности тоже имеет свое применение. Например, ее можно использовать при нахождении области допустимых значений алгебраической дроби, а, значит, и при решении дробно-рациональных уравнений.

Как мы помним, область определения алгебраической дроби – это множество, из которого исключают все значения переменных, обращающих ее знаменатель в ноль. Так в случае дроби с одной переменной мы находим разность множества $\mathbf{R}$ и множества чисел, обращающих знаменатель алгебраической дроби в ноль.

Пример 6.

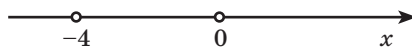
Найти область определения алгебраической дроби $\frac{x}{x^2 + 4x}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

Этот ответ можно получить, рассуждая следующим образом. Найдем значения x , при которых знаменатель дроби обращается в нуль:

$$x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; -4\}.$$

Теперь найдем разность множества $\mathbf{R}$ и полученного множества $\{0; -4\}$.



$$\mathbf{R} \setminus \{0; -4\} = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty).$$

При записи ответа можно использовать как привычный нам знак объединения, так и новый знак разности.

K

23 Покажите на числовой прямой множества:

а) $(-3; 0)$; б) $[-3; 0]$; в) $\{-3; 0\}$.

Найдите $(-3; 0) \cup [-3; 0]$; $(-3; 0) \cap [-3; 0]$; $(-3; 0) \cup \{-3; 0\}$; $(-3; 0) \cap \{-3; 0\}$.

24

Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

- а) $(-\infty; -5] \cup (-3; 0)$; г) $[0; 3] \cap (1; 5)$;
 б) $[-10; -5] \cup (-3; 1] \cup \{5\}$; д) $(0; 3) \cap (1; +\infty)$;
 в) $(-\infty; -5] \cap (-3; 0)$; е) $(0; 3) \cup (1; +\infty)$.

25

Укажите на числовой прямой множество значений x , таких что:

- а) $10 - 1,5(x - 5) < 9,5 - 3,5x$; в) $\frac{(x + 3)(5 - x)}{2x - 5} > 0$;
 б) $(1,5x + 0,3)(x - 6) < 0$; г) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

26

Найдите множество корней уравнения, переходя к совокупности линейных уравнений:

- а) $(x - 2)(2x + 7) = 0$; б) $(2x - 2)(x + 7)(3x - 1,2) = 0$.

27

Укажите на числовой прямой множество значений x , для которых выполняется неравенство:

- а) $|x^2 - 5x| < 6$; б) $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20$.

28

Найдите множество значений x :

- а) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ -x^2 + 2x + 8 > 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 - 9x + 20 \leq x - 1 \\ x - 1 \leq x^2 - 13 \end{cases}$;
 б) $\begin{cases} \frac{3 - 2x}{5} < \frac{1 - x}{2} \\ 2 - 3x > x \end{cases}$; г) $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases}$.

29

Множество A – все люди, живущие на Земле, множество B – люди, которые носят очки.

- а) Какая из диаграмм соответствует данному условию?
 б) Опишите множество, элементы которого принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

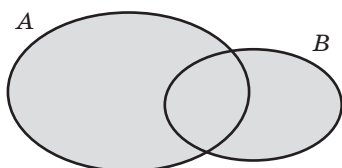


Рис. 1

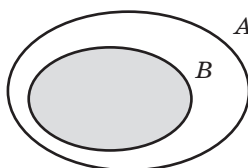


Рис. 2

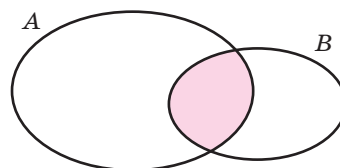


Рис. 3

в) Опишите множество, элементы которого не принадлежат множеству A .

г) Предположите, как называется множество, состоящее из тех элементов, которые не принадлежат множеству A . Сравните свои предположения с определением 3 на стр. 13.

30 Даны множества $A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$, $B = \{10; 20; 30\}$, $C = \{5; 15; 25\}$. Выполните для этих множеств следующие задания:

а) Сопоставьте элементы данных множеств. Что вы замечаете?

б) Предположите, какая операция была выполнена с множествами A и B , если в ее результате получили множество C .

в) Опираясь на то, что множество C является *разностью* множеств A и B , сформулируйте свой вариант определения разности множеств. Сравните его с определением разности множеств на стр. 13.

31 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty; 1] \setminus (-3; 0)$; б) $[-1; 5] \setminus \{2\}$.

32 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $\bar{A}$, если $A = [0; 3]$; б) $\bar{A}$, если $A = \{0; 5; 7\}$.

33 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\frac{x}{3x-9}$; б) $\frac{n}{n^2-4}$; в) $\frac{2}{x^2+13x+30}$; г) $\frac{6a}{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}$.

Запишите ответ двумя способами.

34 Операции объединения и пересечения множеств обладают следующими свойствами.

Коммутативное свойство	Ассоциативное свойство	Дистрибутивное свойство
$A \cup B = B \cup A$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$A \cap B = B \cap A$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Докажите эти свойства, используя диаграммы Эйлера–Венна.

35 Операции объединения, пересечения и дополнения множеств обладают следующими свойствами, которые называют формулами де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Докажите эти свойства. Сравните их с изученными в 8 классе формулами де Моргана для высказываний

36 Докажите следующие свойства операций над множествами:

I. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

II. $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

37 Докажите, что $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

38 В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой увлекаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?

39 В первом пенале лежат лиловая ручка, зеленый карандаш и красный ластик; во втором – синяя ручка, зеленый карандаш и желтый ластик; в третьем – лиловая ручка, оранжевый карандаш и желтый ластик. Содержимое этих пеналов характеризуется такой закономерностью: в каждом из них ровно одна пара предметов совпадает и по цвету, и по назначению. Что должно лежать в четвертом пенале, чтобы эта закономерность сохранилась?

40 Среди математиков каждый седьмой – философ, а среди философов каждый девятый – математик. Кого больше: философов или математиков?

41 В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», остальных – «НЯ». Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 20 детей, слово «НЯНЯ» – 30 детей, а слово «МАНЯ» – 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

π

42 Найдите значение выражения:

а) $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$; б) $3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$; в) $18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$.

43 Упростите выражения:

а) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \frac{a-b-c}{abc}$;

б) $\left(\frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6}\right)^2 \cdot \frac{(a-3)^2 + 12a}{2}$.

44 Один из корней уравнения $4x^2 - x + 3m = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

45 Не решая уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$, найдите сумму кубов его корней.

46 Решите задачи:

а) Из города A в город B , расстояние между которыми 30 км, выехал грузовик, а через 10 мин вслед за ним отправился легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузовика. Найдите скорость легкового автомобиля, если известно, что он приехал в город B на 5 мин раньше грузовика.

б) Из пунктов A и B , расстояние между которыми 38 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились в 20 км от пункта B , причем турист, шедший из пункта A , сделал в пути часовой привал. Найдите скорость туриста, вышедшего из B , если известно, что он шел со скоростью на 1 км/ч меньше, чем другой турист.

$\mathcal{D}$

47 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty; 0] \setminus (-7; -6)$;

в) $\bar{A}$, если $A = [1; 5)$;

б) $[-100; -75] \setminus \{-75\}$;

г) $\bar{A}$, если $A = \{0\}$.

48 Найдите множество значений x :

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2 > 0 \\ -2x + 7 \geq 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{2x - 3,5}{5} < \frac{1 - 4x}{2} \\ 12 - 5x > x \end{cases}.$$

49 Найдите множество значений x , удовлетворяющих системе:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 8x + 7 \leq 0 \end{cases}; & \text{в) } & \begin{cases} 3\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2x - 1 \\ |x - 1| + |x - 2| < 3 - x \end{cases}; \\ \text{б) } & \begin{cases} 2 + x - x^2 \leq -1 - x \\ x^2 + 1 \geq 8x - 6 \end{cases}; & \text{г) } & \begin{cases} \frac{2x + 1}{2} - \frac{2 - x}{7} > 1 \\ -4x - 1 < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

50 Найдите область определения алгебраической дроби:

$$\text{а) } \frac{x}{3 - 9x}; \quad \text{б) } \frac{n}{11 - n^2}; \quad \text{в) } \frac{2}{x^2 + 13x + 12}; \quad \text{г) } \frac{a^2}{a^4 - 16}.$$

Запишите ответ двумя способами.

51 Докажите, что $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

52 Решите задачу:

В 9 часов самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B , 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась обратно и прибыла в пункт A в 19 ч 20 мин того же дня. Течение реки 3 км/ч. Определить, в каком часу баржа прибыла в пункт B . Расстояние между пунктами A и B – 60 км.

53 Упростите выражение: $\left(\frac{m}{m^2 - 49} - \frac{m + 7}{m^2 - 5m - 14}\right) \cdot \frac{m^2 + 9m + 14}{-12m - 49}$.

С

54* Прочитайте определение еще одной операции над множествами.

Определение. Объединение множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ называется **симметрической разностью** множеств A и B (обозначается $A \triangle B$).

Пользуясь этим определением:

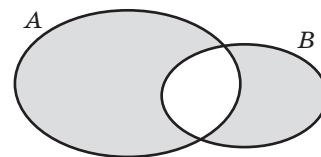
а) Приведите примеры симметрической разности двух множеств.

б) Докажите, что $(A \triangle C) \cap (B \triangle C) \subset (A \cap B) \triangle C$.

Примечание: обратите внимание, что здесь не равенство, а включение. Равенства

$$(A \triangle C) \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle C$$

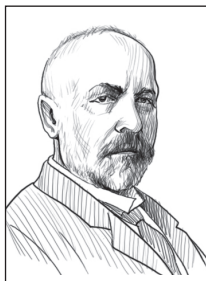
может и не быть. Например, если A – множество четных натуральных чисел; B – множество натуральных чисел, делящихся на 3; C – множество натуральных чисел, делящихся на 5).



$A \triangle B$ закрашено

55* Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех – Аня, меньше всех – Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него дается 1 очко, у одного игрока – 2 очка, слова, общие у всех трех игроков, вычеркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех – Аня?

3*. Счетные и несчетные множества



Моя теория как скала; всякая стрела, направленная в эту скалу, тотчас же отскакивает от нее и устремляется к выпустившему ее. Уверен я в этом потому, что изучил ее со всех сторон за многие годы, ...я исследовал ее корни, так сказать, до первой подлинной причины всего сотворенного.

Георг Кантор (1845–1918),
немецкий математик, основатель теории множеств

Говоря об известных нам числовых множествах в пункте 1.1.1, мы указали на то, что рациональных чисел «не очень много» – в некотором смысле столько же, сколько и натуральных чисел, а вот действительных чисел «значительно больше».

Впервые идею о том, что бесконечные множества имеют неодинаковую мощность, а потому их можно сравнивать друг с другом высказал немецкий математик Георг Кантор во второй половине XIX века. Идеи Кантора оказались столь неожиданными и противоречащими интуиции, что вызвали множество нападок его современников. Учитель Кантора, один из авторитетных математиков того времени, называл своего ученика «шарлатаном». Сейчас открытия Кантора не вызывают сомнений, а его самого считают основоположником теории множеств.

Попытаемся разобраться с вопросом сравнимости бесконечных множеств и мы. Сначала введем определение.

Определение. Множество A называется **счетным**, если можно установить взаимно однозначное соответствие между A и множеством натуральных чисел.

Иными словами, множество называется счетным, если оно бесконечно и все его элементы можно занумеровать натуральными числами: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Исходя из примеров, разобранных нами в пункте 1.1.1, счетными являются множество четных натуральных чисел, а также множество целых чисел. Оказывается, множество рациональных чисел также является счетным. Чтобы показать это, предварительно докажем три вспомогательных утверждения.

Теорема 1.

Любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество.

Доказательство.

Выберем некоторый элемент $a_1 \in A$. Так как множество A бесконечное, то можно выбрать элемент a_2 среди оставшихся элементов A , элемент a_3 среди элементов, оставшихся после выбора a_1 и a_2 , и т.д. Построенное множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ счетно и принадлежит A (возможно совпадает с A). ■

Теорема 2.

Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Доказательство.

Пусть A – счетное, B – бесконечное подмножество, $B \subset A$. Докажем, что B – счетное множество. Занумеруем элементы A : $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Выберем первый из номеров (n_1) такой, что $a_{n_1} \in B$. Из оставшихся номеров $n > n_1$ выберем первый (n_2) такой, что $a_{n_2} \in B$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Из оставшихся номеров $n > n_2$ выберем первый (n_3) такой, что $a_{n_3} \in B$; ясно, что $n_3 > n_2 > n_1$, и т.д. Так как A – счетное

множество, то все элементы B будут сюда включены: $a_{n_1} = b_1$, $a_{n_2} = b_2$, $a_{n_3} = b_3$ и т.д. Каждый из элементов B имеется среди $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, и через конечное число шагов он будет обозначен: $a_{n_k} = b_k$. Таким образом, все элементы B занумерованы: $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k, \dots\}$, то есть B – счетное множество. ■

Теорема 3.

Объединение конечного и счетного множеств, объединение двух счетных множеств – счетные.

Доказательство.

1. Пусть A – счетное, B – конечное множество. Тогда $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (свойство разности из п.1.1.2). Так как $B \setminus A \subset B$, то $B \setminus A = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ – конечное множество (может быть, даже пустое). Если $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, то занумеруем множество $A \cup B$: $\{b_1, \dots, b_k, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Итак, $A \cup B$ – счетное множество.

2. Пусть A и B счетны. Тогда $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Если множество $B \setminus A$ конечно, то осталось применить первую часть теоремы. Если $B \setminus A$ бесконечно, то $B \setminus A$ – счетно (по теореме 2). Тогда $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B \setminus A = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$. Множество $A \cup B$ можно занумеровать так: $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\}$. Итак, $A \cup B$ – счетное множество. ■

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать **теорему о счетности множества рациональных чисел**.

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ – счетное.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что множество положительных рациональных чисел счетное (обозначим его $\mathbb{Q}_+$).

Выпишем положительные дроби, как показано на рисунке 1. Ясно, что при этом в каждой строке бесконечно много дробей и количество строк также бесконечно.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \dots & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \dots & & \\
 \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \dots & & \\
 \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \dots & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & &
 \end{array}$$

Рис. 1

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \dots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
 \frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \dots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
 \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & \rightarrow & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \dots \\
 & & & & \downarrow & & & \\
 \frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{2}{4} & \leftarrow & \frac{3}{4} & \leftarrow & \frac{4}{4} & \dots \\
 & & \downarrow & & & & & \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
 \end{array}$$

Рис. 2

Пронумеруем элементы этого множества, как показано на рисунке 2. Таким «хитрым» способом мы выстроили в последовательность все положительные рациональные числа, причем с повторениями ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$ и т.д.) Полученное счетное множество будет содержать бесконечное подмножество $\mathbb{Q}_+$ (в котором элементы уже не повторяются); и по теореме 2 множество $\mathbb{Q}_+$ будет счетным.

Множество отрицательных рациональных чисел Q_- эквивалентно Q_+ (взаимно однозначное соответствие переводит положительное рациональное число r в отрицательное рациональное число $-r$), поэтому Q_- – также счетно.

2. Тогда так как множество рациональных чисел является объединением двух счетных и одного конечного множества ($Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$), то по теореме 3 оно является счетным. ■

Говоря о множестве действительных чисел можно утверждать, что оно, наоборот, несчетное.

Множество действительных чисел R не является счетным.

Для доказательства этого утверждения показывают, что несчетно множество чисел, принадлежащих полуинтервалу $[0; 1)$. Отсюда следует и несчетность R , так как если бы R было счетно, то и его бесконечное подмножество $[0; 1)$ по теореме 2 также было бы счетным.

* * *

Докажем несчетность полуинтервала $[0; 1)$ методом от противного.

1. Пусть $[0; 1)$ – счетное множество. Тогда все числа полуинтервала $[0; 1)$, записанные как бесконечные десятичные дроби, можно занумеровать:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} \dots \alpha_k^{(1)} \dots \\ a_2 &= 0, \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(2)} \dots \alpha_k^{(2)} \dots \\ a_3 &= 0, \alpha_1^{(3)} \alpha_2^{(3)} \alpha_3^{(3)} \dots \alpha_k^{(3)} \dots \\ &\dots \\ a_n &= 0, \alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} \alpha_3^{(n)} \dots \alpha_k^{(n)} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

В написанных десятичных дробях верхний индекс, взятый в скобки, обозначает номер числа в занумерованной последовательности; нижний индекс означает номер десятичного разряда в десятичной записи числа.

2. Рассмотрим число $a = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_k \dots$ такое, что $\beta_1 \neq \alpha_1^{(1)}$, $\beta_2 \neq \alpha_2^{(2)}$, $\beta_3 \neq \alpha_3^{(3)}$, ..., $\beta_k \neq \alpha_k^{(k)}$ и т.д., причем все цифры $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$ отличны от 0 и 9 (последнее условие нужно для того, чтобы число a единственным образом представлялось в виде бесконечной десятичной дроби). Ясно, что число a отлично от всех чисел $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$.

3. Мы получили противоречие тому, что все числа полуинтервала $[0; 1)$ занумерованы. Полученное противоречие показывает, что множество $[0; 1)$ несчетно. ■

Отметим, что бесконечное множество, не являющееся счетным, по теореме 1 содержит счетное подмножество, то есть бесконечное несчетное множество «более мощно», чем множество натуральных чисел. Значит, мы можем сделать вывод о том, что **действительных чисел в каком-то смысле больше, чем рациональных.**

Используя это утверждение, нетрудно вывести, что множество иррациональных чисел также не является счетным. Предположим, что множество иррациональных чисел счетное. Тогда так как множество рациональных чисел тоже счетно, то множество действительных чисел, как объединение этих двух множеств, также было бы счетным, а это не так.

Пример 1.

Доказать, что множество чисел любого конечного интервала $(a; b)$ несчетно.

Доказательство.

Сначала уточним, что множество чисел интервала $(0; 1)$ несчетно. Если бы оно было счетным, то при добавлении к нему конечного множества $\{0\}$ получили бы счетное множество (по теореме 3). Однако выше мы показывали, что $[0; 1)$ не является счетным множеством.

Теперь установим взаимно однозначное соответствие между интервалами $(0; 1)$ и $(a; b)$ с помощью формулы $x = a + t(b - a)$, где $t \in (0; 1)$. Ясно, при $t = 0$, $x = a$, а при $t = 1$, $x = a + b - a = b$. Тогда если $0 < t < 1$, то $x > a$ и $x < b$, то есть $x \in (a; b)$.

Обратно, если $x \in (a; b)$, то $t = \frac{x - a}{b - a} \in (0; 1)$. Значит, $(a; b)$ – несчетное множество.

К

56 Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные?

- а) множество учеников школы;
- б) множество жителей нашей планеты;
- в) множество чисел, использованных для нумерации страниц учебника;
- г) множество натуральных чисел.

57

Назовите два способа, которыми можно установить, что каждому из гостей найдется пара для танцев. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

58

1) Представьте, что существует гостиница с бесконечным числом номеров, и все ее номера заняты постояльцами. Ответьте на следующие вопросы:

а) Можно ли переселить каждого постояльца гостиницы в комнату, номер которой вдвое превосходит исходный номер, как это показано на схеме?



б) Можно ли поселить в эту гостиницу столько же постояльцев, сколько в ней уже живет? Объясните, как это сделать.

2) Докажите, что при объединении двух множеств, каждое из которых эквивалентно N , вновь получается множество, эквивалентное N .

59

Докажите, что счетным является:

- а) множество целых чисел, дающих при делении на 4 остаток 1;
- б) множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны.

60

Докажите, что несчетным является:

- а) множество точек луча $(a; +\infty)$; б) множество $[a; b] \cup [c; d]$, где $a < b < c < d$.

П

61 Сократите дробь:

а) $\frac{3m^4 - 15m^3}{24m^3 - 120m^2}$; б) $\frac{a^2 + 3a + 9}{a^3 - 27}$; в) $\frac{b^2 - 36}{b^2 + 2b - 24}$.

62

Решите уравнения:

а) $\frac{2}{3-x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x(3-x)}$;

г) $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$;

б) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+6}{x+3} + \frac{x+10}{x+5} = 6$;

д) $\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{12}$;

в) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$;

е) $\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6$.

63 Решите задачу:

По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют скорый и пассажирский поезд, скорости равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 800 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

64 При каком целом значении p уравнения $3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имеют общий корень? Найдите этот корень.

65 Даны высказывания A и B .

A : натуральное число a делится на 3;

B : натуральное число a оканчивается на 3.

Сформулируйте высказывание $A \vee B$, придайте ему «более красивый» вид и постройте отрицание этого сложного предложения $\overline{A \vee B}$.

66 Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные?

а) множество цветов на клумбе;

б) множество цветов, растущих на нашей планете;

в) множество чисел, использованных для написания цен в супермаркете;

г) множество целых чисел, оканчивающихся нулем.

67 Докажите, что множество корней квадратных уравнений с рациональными коэффициентами является счетным.

68 Сократите дробь:

а) $\frac{2a^3 + 6a^2}{18a^5 + 54a^4}$; б) $\frac{c^2 + 8c + 16}{c^3 + 64}$; в) $\frac{d^2 - 7d - 30}{d^2 - 100}$.

69 Решите уравнения:

а) $\frac{1}{2-x} + \frac{1}{4} = -\frac{4}{x(2-x)}$;

б) $\frac{7}{x^2 + 3x - 9} + x^2 + 3x = 1$.

70 Решите задачу:

Железнодорожный состав длиной 1 км прошел бы мимо столба за 2 мин., а через туннель (от входа локомотива до выхода последнего вагона) при той же скорости за 4 мин. Какова длина туннеля (в км)?

71 Даны высказывания A и B .

A : натуральное число m делится на 5;

B : натуральное число m делится на 9.

Сформулируйте высказывание $A \vee B$, придайте ему «более красивый» вид и постройте отрицание этого сложного предложения $\overline{A \vee B}$.

72* (Новогодний парадокс) У Деда Мороза в мешке бесконечное число конфет, пронумерованных натуральными числами. За минуту до Нового года он начинает дарить детям конфеты. Сначала он дарит детям конфету с номером 1. За полминуты до Нового года он дарит 2 конфеты с номерами 2 и 3, а конфету с номером 1 отбирает, за 15 секунд до Нового года он дарит 4 конфеты с номерами 4, 5, 6, 7, а 2 конфеты с номерами 2 и 3 отбирает, и т.д., за $\frac{1}{2^n}$ долю минуты до Нового года Дед Мороз дарит 2^n конфет с номерами от 2^n до $2^{n+1} - 1$ и отбирает 2^{n-1} конфет с номерами от 2^{n-1} до $2^n - 1$. Сколько конфет будет у Деда Мороза и у детей в момент встречи Нового года?

4. Применение понятий теории множеств.



На свете существует очень много наук, и все науки тесно связаны друг с другом. ...Но есть одна наука без которой невозможна никакая другая. Это – математика. Ее понятия, представления и символы служат тем языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки...

Сергей Львович Соболев (1908–1989),
русский математик

Как мы видели, понятия теории множеств применяются во многих изученных нами вопросах математики. Однако область применения этих понятий намного шире, чем та, которую мы выявили в предыдущих пунктах. Так, например, понятие взаимно однозначного соответствия между множествами неразрывно связано с уже знакомым нам понятием функции. В этом пункте мы рассмотрим связь понятий теории множеств с другими разделами математики.

Ключевым понятием математики является понятие функции. Вспомним, как звучит ее определение.

Определение. **Функцией** называется правило (закон), по которому каждому элементу некоторого множества X – области определения функции, ставится в соответствие единственный элемент другого множества Y – области значений функции.

При формулировке этого определения мы использовали понятия теории множеств («множество» и «соответствие между множествами»). Новый взгляд на это определение позволит нам расширить свои представления о функции.

На данный момент более привычными для нас являются *числовые функции*, то есть функции, у которых как область определения, так и область значений являются числовыми множествами. И, если это не было оговорено отдельно, под термином функция мы понимали именно числовую функцию.

Однако, как мы теперь понимаем, функция может устанавливать соответствие и между нечисловыми множествами.

Рассмотрим **примеры функций**.

1. Пусть A – множество высказываний, каждое из которых либо истинно, либо ложно, а B – множество из двух слов: «истинно», «ложно». Тогда функцией с областью определения A и множеством значений B является постановка в соответствие каждому высказыванию из множества A одного из слов множества B , указывающего на истинность или ложность этого высказывания.

Эта функция может быть задана таблицей.

Элемент множества A	Элемент множества B
Все слоны зеленого цвета	ложно
Поганки – съедобные грибы	ложно
Все слоны – не птицы	истинно
Мухоморы не выращивают в теплицах	истинно
В баскетбол играют на льду	ложно
В хоккей на льду играют клюшками	истинно

2. Функцией множества костюмов, продаваемых в магазине, является указанная на каждом элементе этого множества (костюме) его цена.

3. Функцией каждого дня года в определенном регионе является установившаяся в этот день минимальная температура воздуха. Эту функцию также можно задать таблицей.

Дата	Минимальная температура, °C
1 января	–13,6
2 января	– 14,2
3 января	– 16,1
...	...
30 декабря	– 9,3
31 декабря	– 8,7

Числовые функции мы чаще всего задаем аналитически (то есть в виде формулы, описывающей, как вычислить значения функции по значениям ее аргументов – чисел из области определения), иногда – графически или таблично, гораздо реже – словесным описанием. Приведем пример числовой функции заданной аналитически.

4. Линейная функция $y = 3x - 1$. Эта функция, например, числу 3 из области определения ставит в соответствие число 8 из множества значений, а числу –5 из области определения – число –16 из множества значений, так как $3 \cdot 3 - 1 = 8$ и $3 \cdot (-5) - 1 = -16$.

Рассмотрим взаимосвязь понятий «взаимно однозначное соответствие» и «функция». Ясно, что любое взаимно однозначное соответствие между множествами задает две функции (при этом как прямое, так обратное соответствие будут являться функциями).

Функция же может и не осуществлять взаимно однозначного соответствия между множествами. Так, в первом примере, рассмотренном нами выше, функция задает соответствие $A \rightarrow B$, при котором каждому элементу A соответствует единственный элемент B , а вот обратным соответствием $B \rightarrow A$ каждому элементу из B ставится сразу несколько высказываний. Функция из последнего примера осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами. Соответствие $X \rightarrow Y$ задается формулой $y = 3x - 1$, а соответствие $Y \rightarrow X$ задается обратной функцией $x = \frac{y + 1}{3}$.

Как мы видели, в определении функции используются понятия теории множеств. Оказывается, язык теории множеств позволяет формулировать определения не только в теории функций, но и в других разделах математики, например, в теории вероятностей.

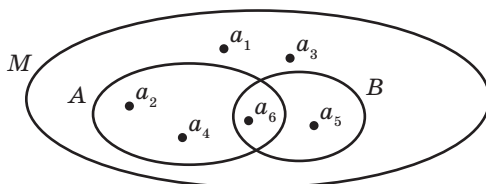
В 8 классе мы формулировали определение вероятности в классическом его варианте. Это определение звучало практически так же, как в работах французского математика Пьера Симона Лапласа еще в начале XIX века. Современный же его вариант формулируется на языке теории множеств.

Познакомимся с этим вариантом, но сначала введем несколько вспомогательных понятий.

Пусть некоторое испытание может иметь ровно n различных исходов, и все они попарно несовместны и равновероятны. Такие исходы называются **элементарными событиями**, а множество M , состоящее из всех элементарных событий, – **простран-**

ством элементарных событий. Тогда каждое непустое его подмножество $A \subset M$ – это **событие**, состоящее из нескольких элементарных событий, которые называются **благоприятствующими** событию A .

Так при одном бросании игральной кости пространство элементарных событий состоит из исходов: «выпало 1 очко», «выпало 2 очка», ..., «выпало 6 очков». Его подмножества являются, например, события: A = «выпало четное число очков», состоящее из трех элементарных событий («выпало 2 очка», «выпало 4 очка», «выпало 6 очков»), а также событие B = «выпало больше 4 очков», состоящее из двух элементарных событий («выпало 5 очков», «выпало 6 очков»). Как мы видим, подмножества пространства элементарных событий могут пересекаться, или, иначе, одно элементарное событие (в данном примере – «выпало 6 очков») может благоприятствовать двум разным событиям.



Как мы видим, пространство элементарных событий определяется с помощью понятия «множество», а событие A определяется через понятие «подмножество».

Определение. Пусть n – количество элементов пространства элементарных событий M , а m – количество элементарных событий, благоприятствующих событию A , $A \subset M$. Тогда число $p(A) = \frac{m}{n}$ называют **вероятностью события** A .

Решим задачу на расчет вероятности события, используя новое определение.

Пример 1.

Бросают две игральные кости. Найдите вероятность выпадения дубля (то есть выпадения на обеих костях одинакового количества очков).

Решение.

Найдем количество элементов пространства элементарных событий M :

$$n = 6 \cdot 6 = 36.$$

Отметим штриховкой элементарные события, благоприятствующие событию A = «на обеих костях выпало одинаковое количество очков» в таблице. Количество m элементарных событий, благоприятствующих событию A , равно шести.

$$\text{Отсюда } p(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

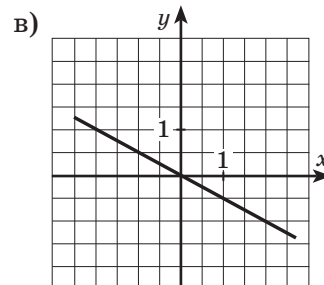
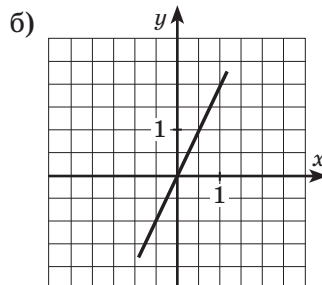
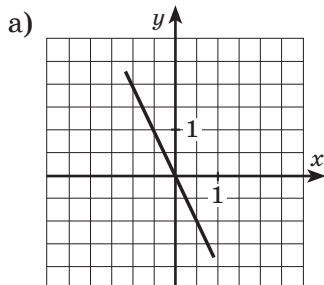
Итак, понятия теории множеств служат своеобразным фундаментом многих разделов математики, так как позволяют ввести их основные понятия.

		очки на первой кости					
очки на второй кости		1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

К

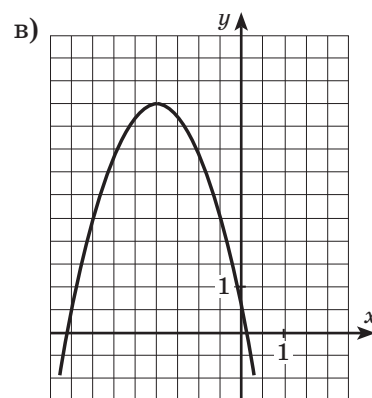
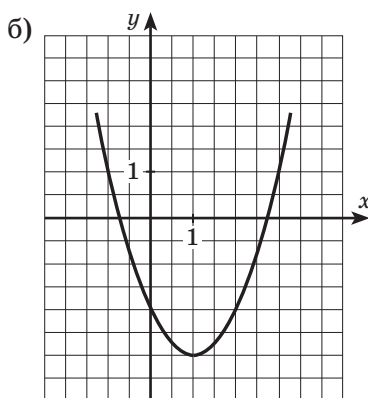
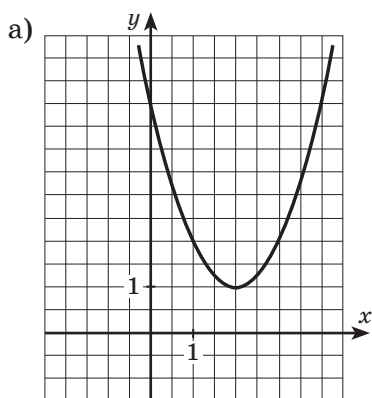
73

На рисунке изображены графики функций, задаваемых формулами вида $y = kx$. Укажите для каждого графика соответствующую ему формулу.



74

На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Укажите знаки коэффициентов a и c для каждого из графиков.



75

Укажите область определения функции и постройте ее график.

а) $y = \frac{x+4}{x^2+4x}$; б) $y = \frac{x^2+x-12}{x+4}$; в) $y = \frac{x^4-13x^2+36}{(x+2)(x-3)}$.

76

Линейная функция $y = \frac{1}{3}x + 1$ задана на области определения $[0; 3]$. Между какими множествами она задает соответствие?

Найдите значение x , при котором $y = 1$; $y = 1,4$; $y = 2$; $y = 4$. Как можно преобразовать формулу $y = \frac{1}{3}x + 1$, чтобы быстрее ответить на эти вопросы?

77

1) Линейная функция $y = 2x$ задана на области определения $[0; 10]$. Между какими множествами она задает соответствие?

2) Заполните таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	$6\frac{1}{3}$	8,5	10
y									

3) Рассмотрите соответствие, которое ставит всем полученным вами значениям функции $y = 2x$ в нижней строке значения из верхней строки. Задайте его формулой. Является ли оно функцией?

4) Осуществляет ли функция $y = 2x$ взаимно однозначное соответствие?

78 Любая ли функция осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами? Проверьте свое предположение, рассмотрев функцию $y = x^2$ и формулу, которая задает обратное ей соответствие.

79 Сформулируйте определение функции. Какие понятия используются в этом определении? Приведите примеры нечисловых функций.

80 1) Игральный кубик бросают дважды.

а) Сколько элементов в множестве исходов этого испытания?

б) Сколько элементов в множестве исходов, благоприятствующих событию $A = \text{«хотя бы один раз выпало число, меньшее 3»}$?

в) Найдите вероятность события A .

2) Какое событие соответствует подмножеству исходов, отмеченных в таблице? Найдите вероятность этого события.

3) Предположите, как сформулировать основные понятия теории вероятностей, используя понятия «множество», «подмножество». Сопоставьте свои предположения с определением вероятности на стр. 25.

		очки на первой кости					
		1	2	3	4	5	6
очки на второй кости	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

81 Из 1400 новых карт памяти в среднем 56 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная карта памяти исправна?

82 Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 30 до 54 делится на 2?

83 Какова вероятность того, что при бросании трех игральных кубиков выпадут числа, сумма которых делится на 9?

84 В мешке лежит сто шаров. На них написаны различные натуральные числа от 1 до 100. Наугад из мешка вытаскивают один шар. Найдите вероятность того, что число на этом шаре:

а) не делится на 9; б) делится на 9 или на 2; в) не делится ни на 9, ни на 2.

π 85 При каких значениях x трехчлен $x^2 + 11x + 24$:

1) обращается в нуль;

2) принимает значение, равное 14;

3) принимает значение, равное -14 ;

4) принимает значение, равное значению двучлена $10 + 2x$?

86 При каком значении p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4 ?

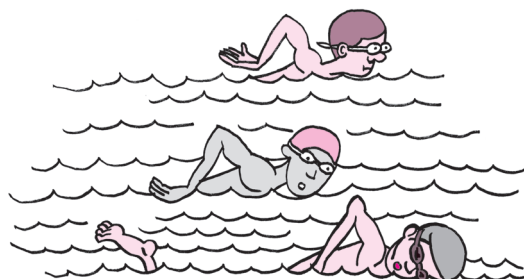
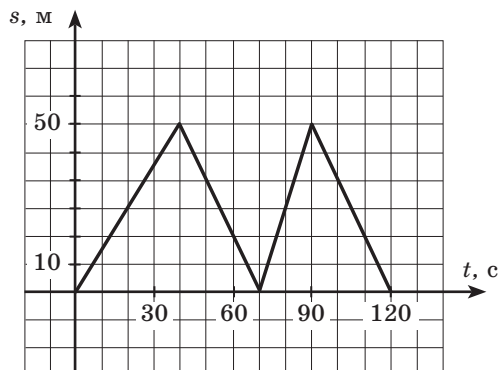
87 Решите уравнение: $\left(x - \frac{8}{x}\right)^2 + 7 = 8x - \frac{64}{x}$.

88 Решите задачу:

Теплоход, собственная скорость которого равна 30 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 3 ч, а в исходный пункт теплоход возвращается через 18 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

89

Команда пловцов участвовала в эстафетном заплыве 4×50 м. На рисунке изображен график, показывающий зависимость расстояния s (в метрах) между пловцом и местом старта от времени движения t (в секундах). Какое из следующих утверждений неверно?



- 1) Пловец, плывший на первом этапе, проплыл свой этап за 40 с.
- 2) Команда проплыла дистанцию за 2 мин.
- 3) Средняя скорость пловца, плывшего на втором этапе, выше средней скорости пловца, плывшего на третьем этапе.
- 4) Вторую половину дистанции команда преодолела быстрее, чем первую.

Д

90

Укажите область определения функции и постройте ее график.

а) $y = \frac{x+1}{x^2+x}$;

б) $y = \frac{x^2+x-12}{x+4}$;

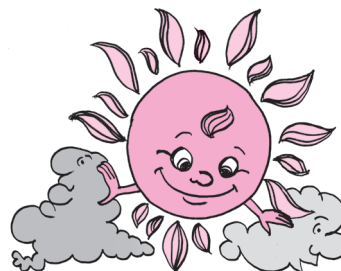
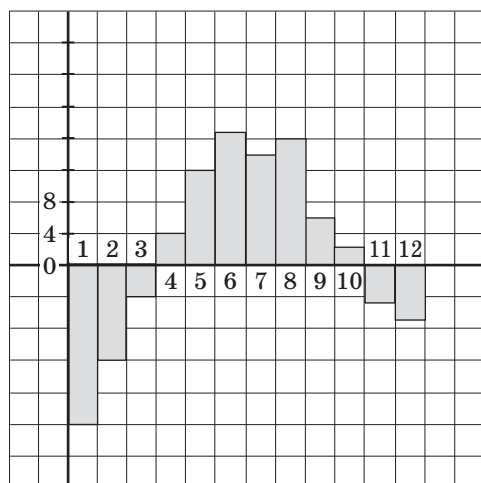
в) $y = \frac{x^2-x-12}{x+3}$.

91

В сборнике билетов по геометрии всего 35 билетов, в 14 из них встречается вопрос о прямоугольном треугольнике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос с прямоугольным треугольником.

92

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в одном из городов России за каждый месяц 1975 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Сколько месяцев среднемесячная температура была: а) ниже -8°C ? б) выше 10°C ?



93

В мешке лежит двести шаров. На них написаны различные натуральные числа от 1 до 200. Наугад из мешка вытаскивают один шар. Найдите вероятность того, что число на этом шаре делится на 11, но не делится на 3.

94

Решите задачу:

Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние проедет второй турист, прежде чем он догонит первого?

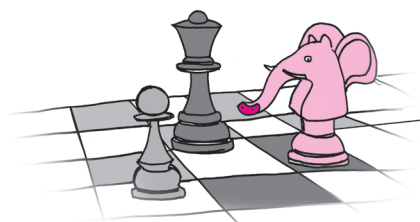
с

95*

В классе больше 20, но меньше 30 учеников, дни рождения у всех различны. Петя сказал: «Тех, кто старше меня в классе, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня в классе, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько учеников в классе?

96

Назовем слонопотамом такую шахматную фигуру, которая может ходить и как слон, и как конь, причем если слонопотам сделал ход как конь, то следующим ходом он должен пойти как слон; если же он сделал ход как слон, то следующим ходом он должен пойти как конь. Может ли слонопотам обойти клетки доски 5×5 , побывав на каждой клетке ровно по одному разу, и при этом закончить обход на клетке, соседней по стороне с клеткой начала обхода?



Друзья!

В этом году вы сможете продолжить самостоятельно определять уровень усвоения материала с помощью **экспресс-тестов**. Напоминаем, как подсчитать итоговую сумму баллов. За каждое верно выполненное задание (части А или части В) выставляйте себе по одному баллу. За каждое верно выполненное задание с развернутым ответом (часть С) – от 1 до 3 баллов в зависимости от правильности метода решения, формы записи и наличия вычислительных ошибок:

3 балла	решение верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ
2 балла	решение в целом верное, получен верный ответ, однако решение нерациональное или обосновано недостаточно
1 балл	решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка

Для проверки в конце теста представлен образец выполнения теста. Для оценки – *шкала успешности*. Важно помнить, что свой результат можно повысить, если разобраться, где и почему допущены ошибки, и потренироваться в выполнении аналогичных заданий.

Желаем вам высоких результатов!

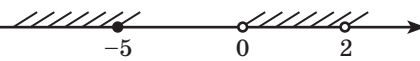
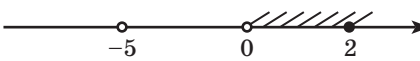
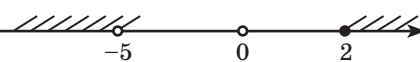
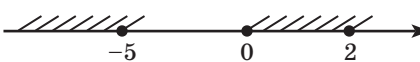
Экспресс-тест № 1

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

- | | |
|------------|---|
| № 1 | № 1. Решите уравнение $3x^2 + 8x - 3 = 0$. |
| | А) $-\frac{1}{3}; 3$; Б) $-3; \frac{1}{3}$; В) $-9; 1$; Г) $-1; 9$. |
| № 2 | № 2. Упростите выражение $\frac{x+y}{y} : \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy^2}$. |
| | А) $\frac{(x+y)^3}{xy^3}$; Б) $\frac{x}{x+y}$; В) $\frac{xy}{x+y}$; Г) $\frac{x+y}{xy}$. |
| № 3 | № 3. Решите уравнение $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+4} = 1$. |
| | А) $-6; 2$; Б) $-3; 1$; В) $-2; 6$; Г) $-1; 3$. |
| № 4 | № 4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 10x - 1 \geq 2 \\ 4 - x \geq 2x + 1 \end{cases}$. |
| | А) $(0,3; 1)$; Б) $[1; +\infty)$; В) $[0,3; 1]$; Г) $(-\infty; 0,3]$. |
| № 5 | № 5. Найдите область определения дроби $\frac{x-4}{x^2-4x}$. |
| | А) $(-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$; Б) $(-\infty; 0)$; В) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. |

Часть В

- | | |
|------------|---|
| № 6 | № 6. Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой множество: $(-\infty; 2] \setminus (-5; 0)$. |
| | <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <p>А) </p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>В) </p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <p>Б) </p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Г) </p> </div> </div> |
| № 7 | № 7. Решите неравенство $-2x^2 + 3x + 5 < 0$. |
| | <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div>А) $(-\infty; -1] \cup [2,5; +\infty)$;</div> <div>Б) $(-1; 2,5)$;</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div>В) $(-\infty; -1) \cup (2,5; +\infty)$;</div> <div>Г) $[-1; 2,5]$.</div> </div> |
| № 8 | № 8. Упростите выражение $\left(\frac{3}{x-4} + \frac{4x^2-6}{x^2-3x-4} + \frac{2x}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2x-3}$. |
| | А) $-\frac{3}{x-4}$; Б) $\frac{x}{x+4}$; В) $\frac{x}{x-4}$. |

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 9. При каком значении a квадратное уравнение $ax^2 - 5x + \frac{1}{4}a = 0$ имеет два корня?

№ 10. Решите задачу:

Два пешехода выходят навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то он встретит второго пешехода через 4,5 ч после своего выхода. Если второй выйдет на 2 ч раньше первого, то он встретит первого пешехода через 5 ч после своего выхода. С какой скоростью идет каждый пешеход?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
Б	В	А	В	А	Г	Б	В
№ 9							
Квадратное уравнение имеет два корня, если его дискриминант положителен. $5^2 - 4 \cdot a \cdot \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow 25 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (5 - a)(5 + a) > 0 \Leftrightarrow (a - 5)(5 + a) < 0$ Решим полученное неравенство: $\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & \\ \hline & -5 & & 5 & & a \end{array}$ Ответ: при $a \in (-5; 5)$.							
№ 10							
Пусть скорость первого пешехода x км/ч, а скорость второго y км/ч. Составим математическую модель задачи: $\begin{cases} (x + y) \cdot 2,5 = 30 - 2x \\ (x + y) \cdot 3 = 30 - 2y \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{ l} x - ? \\ y - ? \end{array}$ $\begin{cases} 4,5x + 2,5y = 30 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -9x - 5y = -60 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x = -30 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 3 \cdot 5 + 5y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ $x = 5, y = 3$ – удовлетворяют неравенствам математической модели. Ответ: скорости пешеходов 5 км/ч и 3 км/ч.							

Шкала успешности:

13 – 14 баллов – <i>отлично</i>
9 – 12 баллов – <i>хорошо</i>
6 – 8 баллов – <i>удовлетворительно</i>

§ 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

1. Перестановки с повторениями



*Кто повторяет старое и узнает новое,
тот может быть предводителем.*

Конфуций (551 – 479 г. до н.э.),
китайский философ

В 8 классе мы познакомились с разделом математики, который изучает общие законы комбинирования различных объектов, – *комбинаторикой*. Мы вывели одну из формул комбинаторики, которая позволяет найти количество перестановок элементов некоторого множества без их непосредственного перебора. Вспомним, как можно использовать эту формулу на следующем примере.

Найдем количество всех различных вариантов орнамента, который получается путем перестановки трех элементов: черного и красного квадратов и звездочки.



Мы могли нарисовать все возможные комбинации элементов, последовательно изменяя их порядок:



Быстрее этот результат мы получим, применяя способы, известные нам из 7 класса: правило произведения $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ либо формулу количества перестановок $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

А что если наш орнамент может быть использован только в черно-белом варианте? Тогда среди элементов орнамента будет два одинаковых квадрата:



В этом случае различных вариантов орнамента будет только три – остальные дублируют ранее выписанные варианты. Вычеркнем их.



Таким образом, при повторениях элементов формула $P_3 = 3!$ не работает, так как она включает в себя все перестановки, в том числе и дубли. Значит, рассчитывать число подобных перестановок нужно как-то иначе. В данном пункте мы найдем общий способ подсчета количества перестановок элементов множества, учитывающий возможность их *повторений*.

Для этого сравним решения двух аналогичных задач на «старый» и «новый» случаи, чтобы определить, как должен измениться уже известный нам способ для нахождения количества *перестановок с повторениями*.

Задача 1.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи мы должны узнать, сколькими способами можно переставить элементы множества из шести элементов. Используя формулу количества перестановок $P_n = n!$, известную нам из 7 класса, получим:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ: 720 шестизначных чисел.

Задача 2.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры 1, 2, 3 встречаются в числе один раз, а цифра 4 – три раза?

Решение.

В отличие от предыдущей задачи, в наборе цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, с помощью которых мы записываем шестизначные числа, есть повторения – цифры 4, при перестановке которых число меняться не будет. Значит, количество полученных чисел будет меньше, чем в задаче 1. Чтобы его найти, попробуем свести решение нашей новой задачи к уже известному случаю.

Предположим, все цифры 4 разные – например, одна из них красная, другая серая, третья черная. Тогда числа, например,

$$123 \text{ 444}, 123 \text{ 444}, 123 \text{ 444}, 123 \text{ 444}, 123 \text{ 444}, 123 \text{ 444}, -$$

разные, и количество всех «разноцветных» чисел, как и в предыдущем случае, будет равно 720.

Но наши числа – одного цвета, поэтому в действительности все перечисленные выше случаи являются одним и тем же числом 123 444. Следовательно, каждому шестизначному числу, составленному из цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, соответствует столько «разноцветных» чисел, сколько существует различных перестановок из трех элементов – а именно, $3! = 6$. Поэтому нужных нам чисел в 6 раз меньше, чем общее количество «разноцветных» чисел. Значит, таких чисел $720 : 6 = 120$.

Ответ: 120 чисел.

Для ответа на вопрос второй задачи мы узнали, что количество перестановок 6-элементного множества с 3 повторяющимися элементами равно $\frac{6!}{3!}$. Обобщая способ, использованный нами для подсчета вариантов в этой задаче, получаем следующее правило.

Количество перестановок n элементов, среди которых k одинаковых, равно

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k!}.$$

Применим полученное правило к задаче с одноцветным орнаментом. В нем 3 элемента, два из которых повторяются. Поэтому число различных вариантов орнамента равно $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$. Это же число мы получили и при непосредственном пересчете.

* * *

Теперь выведем формулу решения задач на перестановки с повторениями, принятую в комбинаторике. Для этого сформулируем задачу в общем виде.

Общая постановка задачи.

Сколькими способами можно упорядочить элементы множества из n элементов, в котором:

- ✓ элементы a_1 встречаются k_1 раз (то есть в этом множестве k_1 элементов, равных a_1);
- ✓ элементы a_2 встречаются k_2 раз;

...

- ✓ элементы a_m встречаются k_m раз?

При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, и $1 \leq k_1 \leq n$, $1 \leq k_2 \leq n$, ..., $1 \leq k_m \leq n$.

Таким образом, некоторые из чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$ могут равняться 1, то есть элементы могут не повторяться.

Докажем, что число перестановок с повторениями равно $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$ (если какие-то элементы не повторяются, то соответствующие множители $k!$ в знаменателе равны 1).

Доказательство.

«Раскрасим» все одинаковые элементы в разные цвета так, чтобы все элементы множества можно было считать различными. Тогда перестановок множества «разноцветных» элементов будет всего $n!$

Так как k_1 «разноцветных» элементов, равных a_1 , можно представить $k_1!$ способами, k_2 «разноцветных» элементов, равных a_2 , $k_2!$ способами и т.д., то всего таких «разноцветных» перестановок будет $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!$

Для получения ответа нужно общее количество «разноцветных» перестановок, то есть $n!$, разделить на $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!$, что и требовалось доказать. ■

Подчеркнем еще раз, что полученная формула верна и для перестановок без повторений. В этом случае $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$ и формула сводится к известному с 7 класса виду: $P_n = n!$. Поэтому ее можно считать универсальной для поиска количества перестановок.

Итак, для подсчета количества перестановок n элементов некоторого конечного множества будем применять следующую общую формулу.

Общая формула количества перестановок из n элементов

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}, \text{ где } k_1, k_2, \dots, k_m - \text{количества повторяющихся элементов.}$$

Рассмотрим примеры применения этой формулы.

Пример 1.

Сколько шестизначных паролей можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, где цифры 1, 2 встречаются ровно один раз, а цифры 3, 4 – ровно два раза?

Решение.

По условию шестизначный пароль составляется из набора цифр 1, 2, 3, 3, 4, 4, где имеется два элемента 3 и 4, которые повторяются по 2 раза.

По общей формуле количества перестановок таких паролей будет:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$$

(два множителя, равных 1!, соответствующих цифрам 1 и 2, мы не записываем, так как они не влияют на произведение в знаменателе).

Ответ: 180 паролей.

Пример 2.

Сколько различных слов можно написать, переставляя буквы в слове «МАТЕМАТИКА» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

Решение.

В слове «МАТЕМАТИКА» всего 10 букв, буква А встречается 3 раза, буква М – 2 раза, буква Т – 2 раза, буквы Е, И, К – по одному разу.

По общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$.

Ответ: 151 200 «слов».

К

97

Для оформления титульного листа своего доклада Саша использовала три рамки фиолетового, темно-синего и темно-зеленого цвета. Чтобы выбрать оптимальный вариант оформления, она меняла местами эти рамки всеми возможными способами и распечатывала все полученные варианты. Сравнив их, она сделала свой выбор. Сколько различных вариантов титульного листа она напечатала? Сколько различных вариантов титульного листа она получила бы, если б по ошибке распечатала их в черно-белом формате? Почему?

98

1) Чем отличаются следующие задачи?

а) Какие различные четырехзначные коды можно получить, переставляя карточки с цифрами 2, 4, 6, 8? Сколько их?

б) Какие различные четырехзначные коды можно получить, переставляя местами карточки с цифрами 2, 2, 2, 8 (цифра 2 написана на трех карточках)? Сколько их?

2) Решите первую задачу известным вам способом. Для нового случая сделайте карточки и проведите перебор. В какой задаче получено меньшее количество вариантов? Почему? В результате каких перестановок полученный числовой код не менялся?

3) Можно ли свести решение новой задачи к уже известному случаю? Что изменится в ходе ее решения? Можно ли применить способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех аналогичных задач? Сравните свои выводы о количестве перестановок с повторениями с правилом на стр. 33.

99

Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «УРАВНЕНИЕ» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

100

Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «ПАРАБОЛА»?

101

Сколько различных «слов» можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

π

102 Докажите неравенство $\frac{p}{d} + \frac{d}{p} + \frac{q}{t} + \frac{t}{p} + \frac{a}{s} + \frac{s}{v} + \frac{v}{k} + \frac{k}{a} \geq 8$, где числа a, d, k, p, q, s, v, t – положительные.

103

Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{16}{x}$ при $x > 0$.

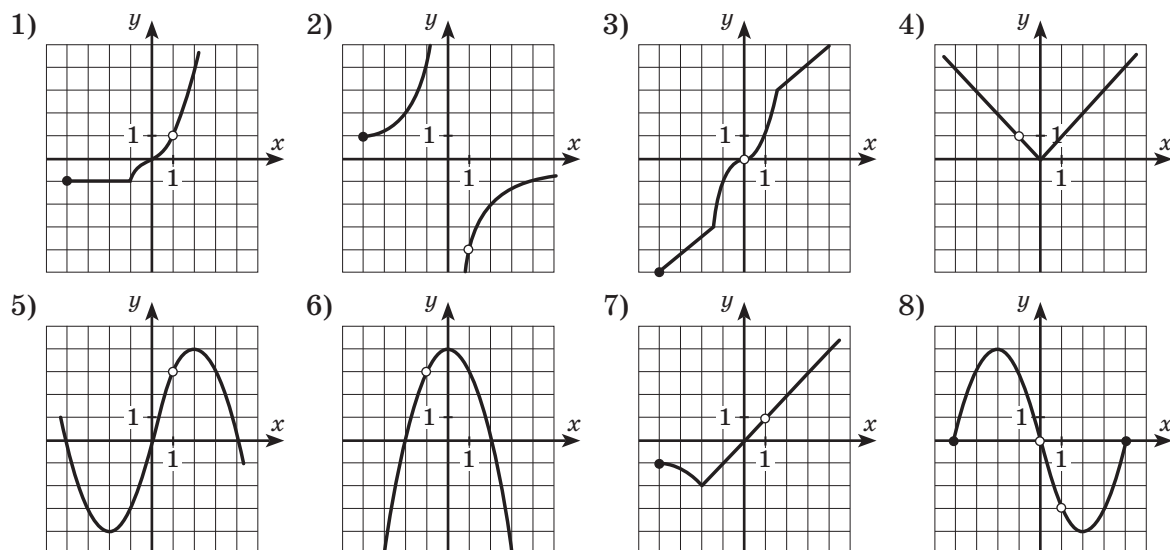
104

Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{(x+4)(x+5)}{x}$ при $x > 0$.

105

Этот современный японский прозаик известен тем, что увлекается марафонским бегом и триатлоном, очень любит джаз. ...Он считает, чтобы чего-то достичь,

важно научиться ставить перед собой цель. А вы как считаете? Установив соответствие между графиками функций и областью определения функции, узнайте его имя.



У $[-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$

И $[-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4]$

К $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

А $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

М $[-4; 1) \cup (1; +\infty)$

Р $[-4; 0) \cup (0; +\infty)$

106 Решите графически уравнение:

а) $-4x - 4 = x^2$;

в) $-x^2 - 4x = 3x + 10$;

д) $\frac{0,5}{x} = -5x$;

б) $x^2 - 1 = x + 1$;

г) $x^3 = x$;

е) $4x + 12 = -\frac{8}{x}$.

107 Постройте графики функций:

а) $y = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, & \text{если } x \geq 1; \\ x^3, & \text{если } -1 < x < 1; \\ -x - 2, & \text{если } x \leq -1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{если } x > 2; \\ |x|, & \text{если } x \leq 2 \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{если } |x| \geq 2; \\ x, & \text{если } |x| < 2 \end{cases}$

Какие из построенных вами графиков имеют разрывы?

108 Боря точно помнит, что в формуле серной кислоты подряд идут буквы Н, S, О и что есть два нижних индекса 2 и 4. Но вот у каких букв стоят эти индексы, он не помнит. У него есть возможность использовать программу, которая по введенной формуле отражает название кислоты. Нарисуйте схему, с помощью которой он переберет все возможные варианты формулы. Сколько вариантов ему придется ввести в программу, чтобы определить нужную формулу в «худшем» случае? Можно ли ответить на этот вопрос без схемы?

109 Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

110 Постройте график функции $y = \frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$ и найдите все значения k , при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

- 111** Бабушка, живущая в Белгороде, отправила 1 сентября четыре посылки своим внукам, живущим в разных городах России. В таблице дано контрольное время в сутках, установленное для пересылки посылок наземным транспортом (без учета дня приема) между некоторыми города России.

Пункт отправления	Пункт назначения				
	Владимир	Омск	Петрозаводск	Белгород	Сочи
Владимир		9	12	7	10
Омск	9		11	8	8
Петрозаводск	12	11		11	12
Белгород	8	8	13		9
Сочи	10	9	14	9	

Какая из данных посылок не была доставлена вовремя:

- 1) пункт назначения – Сочи, посылка доставлена 10 сентября;
- 2) пункт назначения – Омск, посылка доставлена 9 сентября;
- 3) пункт назначения – Петрозаводск, посылка доставлена 14 сентября;
- 4) пункт назначения – Владимир, посылка доставлена 11 сентября?

D

- 112** Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в словах «СЕМЬЯ», «КОМАНДА» («словом» считать даже бессмысленный набор букв, противоречащий правилам грамматики)?

- 113** Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{4}{x}$ при $x > 0$.

- 114** Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -6x + 7$; б) $(x + 2)^2 = -1,25x + 4$; в) $\frac{3}{x} = x + 2$.

- 115** Постройте график функции и «прочитайте» его по известному плану:

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x \geq 2; \\ \frac{1}{2}x, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ -(x + 2)^2 + 4, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

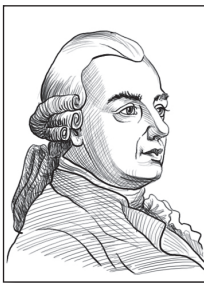
Как называется эта функция?

C

- 116*** Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10 креслами так, чтобы они чередовались?



2. Размещения



Поиск истины значительно ценнее, чем обладание ею.

Готхольд Эфраим Лессинг (1729 – 1781),
немецкий поэт, критик, философ.

В предыдущем пункте мы составляли комбинации из элементов множества, переставляя местами все его элементы. Однако на практике может потребоваться выполнить эту задачу не со всеми элементами множества, а лишь с некоторым их количеством. В данном пункте мы познакомимся с формулой, которая используется в этих случаях.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в записи числа не повторяются?

Решение.

Ясно, что комбинировать мы будем не все цифры, а только четыре из шести. Первую из четырех цифр числа можно выбрать 6 способами; если первая цифра фиксирована, то вторую можно выбрать 5 способами; если первые две цифры фиксированы, то третью можно выбрать 4 способами; и, наконец, если первые три цифры фиксированы, то четвертую можно выбрать 3 способами.

Следовательно, искомое количество будет равно: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Ответ: 360 чисел.

Итак, для ответа на вопрос задачи 1 мы искали, сколькими способами можно разместить четыре из шести элементов множества в определенном порядке. Для этого нам потребовалось составить произведение чисел от 6 до 3.

Обобщив способ подсчета вариантов в задаче, получаем следующее правило.

Чтобы найти количество вариантов **выбора в определенном порядке k элементов из n ($k \leq n$)**, нужно найти произведение k множителей. Первый множитель равен n , а каждый последующий получается уменьшением предыдущего на единицу:

$$\underbrace{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ множителей}}$$

Заметим, что при $k = n$ эта задача сводится к задаче определения количества перестановок множества из k элементов, а произведение приобретает известный нам вид: $n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

Выведем теперь общую формулу для решения задач на выбор k элементов, взятых *в определенном порядке* из n -элементного множества. Такие наборы элементов в комбинаторике называются **размещениями**.

Определение 1. Упорядоченный набор k элементов из n -элементного множества, где $1 \leq k \leq n$, называется **размещением из n по k** .

Количество размещений из n по k обозначается A_n^k (от первой буквы французского слова «arrangement» – расположение, размещение).

Сформулируем и решим задачу поиска A_n^k в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно выбрать из этого множества упорядоченный набор из k различных элементов, где $1 \leq k \leq n$. Другими словами, сколько существует размещений из n по k .

Докажем, что количество размещений $A_n^k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство.

Первый элемент произведения можно выбрать n способами. При фиксированном первом элементе второй можно выбрать $(n-1)$ способом и т.д. Наконец, если первые $(k-1)$ элементов фиксированы, то последний k элемент можно выбрать $(n-(k-1)) = (n-k+1)$ способами. Таким образом, общее число размещений из n элементов по k равно $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, что и требовалось доказать. ■

Итак, для подсчета количества размещений по k элементов из n элементов некоторого конечного множества можно применять формулу.

Формула количества размещений из n элементов по k

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1.

В восьмом классе изучается 13 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на учебный день, если в этот день должно быть 7 уроков по различным предметам?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи нужно разместить всеми возможными способами в определенном порядке по 7 предметов из 13.

Значит, искомое число способов равно числу размещений по 7 элементов из 13:

$$A_{13}^7 = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 8\,648\,640.$$

Ответ: расписание на учебный день можно составить 8 648 640 способами.

Пример 2.

В классе 28 учеников. Сколькими способами можно назначить учащихся на 3 должности: староста, ответственный за участие в спортивных соревнованиях (физорг) и ответственный за организацию развлекательных мероприятий (культорг)?

Решение.

Мы составляем комбинации по 3 фамилии из 28. На первом месте будем писать фамилию старосты, на втором – физорга, а на третьем – культорга. Так как назначение Иванова старостой, а Петрова физоргом, и наоборот, Иванова физоргом, а Петрова старостой – это разные назначения, то порядок выбора фамилий существенен. Значит, нам нужно разместить всеми возможными способами в определенном порядке три фамилии из 28. По формуле количества размещений из 28 элементов по 3 искомое число способов равно $A_{28}^3 = 28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.

Ответ: назначить учащихся на 3 должности можно 19 656 способами.

Произведение $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ можно записать с помощью понятия факториала. Для этого умножим и разделим произведение $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ на множители, дополняющие это произведение до $n!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Поскольку при $k = n$ в знаменателе формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ появляется выражение $0!$, которое пока не определено, нам необходимо придать выражению значение, при котором не возникнет противоречий с имеющимися у нас результатами.

Мы знаем, что при $k = n$ число размещений равно числу перестановок, значит:

$$A_n^n = P_n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k)!} = n! \Leftrightarrow \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} \Leftrightarrow 0! = 1$$

Следовательно, чтобы установленная нами формула $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ работала при $k = n$, необходимо считать $0! = 1$. Это же значение $0!$ можно вывести и из других соотношений. Так, равенство $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, верное при всех натуральных $n = 1, 2, \dots$, при $n = 0$ приобретает вид $1! = 1 \cdot 0!$, откуда $0! = 1$.

Поэтому здесь и далее мы будем считать, что $0!$ равен единице.

Определение 2. $0! = 1$.

Заметим, что при $n = 0$ (пустое множество) равенство $P_n = n!$ имеет вид $P_0 = 0! = 1$. Значит, чтобы формулы, содержащие факториалы, оставались верными при $n = 0$, нам надо договориться считать, что число перестановок пустого множества равно 1. При этом также $A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$.

Итак, если принять, что $0! = 1$, то для подсчета количества размещений по k элементов, взятых из n элементов некоторого конечного множества, можно применять также следующую формулу:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Эту формулу легче запомнить, но ее практическое использование требует умения переходить от знака факториала к произведению удобных множителей. Так, в рассмотренных выше примерах 1 и 2 можно выполнить следующие преобразования:

$$A_{13}^7 = \frac{13!}{6!} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}}! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{\underset{1}{\cancel{6}}!} = 8\,648\,640.$$

$$A_{28}^3 = \frac{28!}{25!} = \frac{\overset{1}{\cancel{25}}! \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28}{\underset{1}{\cancel{25}}!} = 19\,656.$$

К

117 1) Чем отличаются эти задачи?

а) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

2) Решите первую задачу двумя известными вам способами. Какой из них подойдет для решения второй задачи? Что изменится в ходе ее решения? Подойдет ли способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех подобных задач?

3) Как найти количество вариантов выбора в определенном порядке k элементов из n элементов ($k \leq n$), сравните свой ответ с правилом на стр. 39.

118 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 (цифры в записи числа не повторяются)? Сколько трехзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных?

119 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8 (цифры в записи числа не повторяются)? Сколько трехзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных?

120 В какой из задач необходимо найти количество перестановок элементов множества $\{A, B, C, D\}$:

а) Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D ?

б) Сколькими способами можно обозначить три точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D ?

в) Сколькими способами можно обозначить две точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D ?

Как называются комбинации, которые следует пересчитать в двух последних задачах? Познакомьтесь с их названием и выводом общего способа решения подобных комбинаторных задач на стр. 39.

121 На странице фотоальбома 3 свободных места для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 6 фотографий, 8 фотографий?

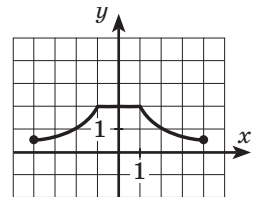
122 На странице фотоальбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 2 фотографии, 4 фотографии?

123 Регистрационный знак российского автомобиля состоит из трех букв, которые обозначают серию знака, трех цифр регистрационного номера и цифрового кода региона. Для обозначения серии используются всего 12 букв кириллицы, которые имеют аналоги в латинском алфавите, — А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х. Посчитайте, сколько регистрационных знаков может быть выдано в каждом субъекте России.

π

124 Сколько различных орнаментов может составить программа для дизайна, выстраивая в ряд 10 элементов, среди которых: а) пять одинаковых элементов; б) восемь одинаковых элементов?

125 Задайте формулой функцию, график которой изображен на данном рисунке. Докажите, что она является четной функцией.



126 Какие из следующих функций являются четными, а какие нечетными?

а) $y = 0,5x^4 - x^2$; в) $y = x^3 - 2x$;

б) $y = -\frac{3}{x} + x$; г) $y = x^2 + |x| - 2$.

127 а) Для функции $f(x) = x^2$ найдите $f(\frac{1}{4})$; $f(-a)$; $f(a + 5)$.

б) Для функции $f(x) = -x^3$ найдите $f(-2)$; $f(-a)$; $0,2 \cdot f(a^2)$.

в) Для функции $f(x) = \frac{1}{x^3}$ найдите $f(0)$; $f(0,1a)$; $\frac{1}{f(a^3)}$.

г) Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите $f(-4)$; $f(0)$; $f(100)$; $f((a-1)^2)$.

128 Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают ровно 11 часов?

129 Оценив значения выражений, выпишите их в порядке убывания и прочитайте высказывание великого русского писателя Л.Н. Толстого. Как вы понимаете эти слова?

$(0,1\sqrt{2})^2$	ВАЖНО
-------------------	-------

$\sqrt{3}(\sqrt{108} - \sqrt{75})$	ОШИБОЧНО
------------------------------------	----------

$-\sqrt{3,61} + \sqrt{2,89}$	КОЛИЧЕСТВО
------------------------------	------------

$\sqrt{1\frac{155}{169}} : \frac{9}{13}$	ЧТО
--	-----

$(\sqrt{5} - 1)^2 - 6 + 3\sqrt{5}$	ДУМАТЬ
------------------------------------	--------

$\sqrt{(7 + \sqrt{2})^2 - (1 + \sqrt{6})^2}$	ЗНАНИЯ
--	--------

$\frac{2}{\sqrt{3} + 1}$	ЕСТЬ
--------------------------	------

$\sqrt{0,1 \cdot 0,001^3}$	НЕ
----------------------------	----

$5\sqrt{2} - 4\sqrt{32} + 2\sqrt{50}$	А
---------------------------------------	---

$\sqrt{45} - \sqrt{80}$	КАЧЕСТВО
-------------------------	----------

$\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$	МНОГОЗНАНИЕ
---	-------------

$0,01\sqrt{3,6 \cdot 2,5}$	ДОСТОИНСТВО
----------------------------	-------------

130 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{5}{x} \\ y = -5x - 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = (x+2)^2 - 2 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$; г) $\begin{cases} y = \sqrt{-x} \\ y = -\frac{1}{6}x + 1\frac{1}{3} \end{cases}$.

131 Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D, E, F ?

132 Сколькими способами могут быть распределены первый, второй и третий призы между 15 участниками конкурса?

133 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -x + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -(x-1)^2 + 4 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$.

134 Расположите числа в порядке возрастания: $3\sqrt{2}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

135* Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник – по два урока, ..., в каждую пятницу – по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни – учебными. В сентябре 30 дней.)