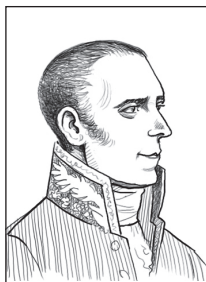


Глава 4

Решение уравнений и неравенств высших степеней

§ 1. Развитие понятия корня

1. Корни высших степеней



В самой математике главные средства достигнуть истины — индукция и аналогия.

П.С. Лаплас (1749–1827),
французский математик, физик, астроном.

В восьмом классе мы познакомились с арифметическим квадратным корнем, который определяется как *неотрицательное* число, квадрат которого равен данному *неотрицательному* числу, а также со свойствами арифметического квадратного корня.

Однако для практических нужд введения квадратного корня из числа явно недостаточно. В этом пункте мы познакомимся с новыми математическими понятиями, связанными с числами.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача.

Какие размеры должен иметь аквариум кубической формы, объем которого равен 50 литрам?

Решение.

Приведем в соответствие единицы измерения величин: 50 л = 50 дм³. Приняв длину стороны куба равной x (дм), получим уравнение $x^3 = 50$. Корнем данного уравнения является число, куб которого равен 50. Решение этого уравнения приводит нас к понятию *кубического* корня. Введем соответствующее определение.

Определение 1. Кубическим корнем из действительного числа a называется такое действительное число x , что $x^3 = a$ (обозначается $x = \sqrt[3]{a}$).

При этом неотрицательность числа a уже не требуется, так как куб действительного числа может принимать не только положительные, но и отрицательные значения.

Поэтому $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$ (так как $1^3 = 1$, $(-1)^3 = -1$); $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$, $\sqrt[3]{-0,001} = -0,1$, $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$ и т.д. Конечно же, $\sqrt[3]{0} = 0$.

Вернемся к решению задачи об аквариуме. Ответ к ней можно записать как $\sqrt[3]{50}$. Заметим, что это число не является рациональным.

Кубический корень называют иначе корнем *третьей* степени, а арифметический квадратный корень из числа — корнем *второй* степени. Аналогично можно определить и корень любой степени $n \geq 2$. При этом корни четной степени ($n = 2, 4, 6, 8, \dots$) и корни

нечетной степени ($n = 3, 5, 7, 9, \dots$) определяются по-разному (аналогично определению квадратного и кубического корней).

Определение 2. Пусть $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ — четное натуральное число. **Арифметическим корнем n -й степени из неотрицательного числа a** называется неотрицательное число x такое, что $x^n = a$ (обозначается $x = \sqrt[n]{a}$).

При записи знакомого нам арифметического корня второй степени, как мы помним, пишут не $\sqrt[2]{a}$, а просто $\sqrt{a}$, опуская двойку.

Так как любое действительное число после возведения в четную степень дает неотрицательный результат, то определять корень четной степени из отрицательного числа не имеет смысла. А вот уравнение $x^n = a$ при $a > 0$ и четном n наряду с положительным имеет и отрицательное решение. Например, уравнение $x^4 = 16$ имеет решения $x = 2$ и $x = -2$, так как $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$. Поэтому для однозначности определения корня имеет смысл ограничиться положительным значением, то есть ввести понятие *арифметического корня*. Таким образом, при определении арифметического корня четной степени все происходит так же, как при определении арифметического квадратного корня.

Приведем примеры арифметических корней четной степени: $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[6]{64} = 2$, $\sqrt[4]{1} = 1$, $\sqrt[8]{1} = 1$, $\sqrt[8]{6561} = 3$, $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Выражение $\sqrt[6]{4}$ задает действительное, не являющееся рациональным, число, шестая степень которого равна 4. А, например, выражение $\sqrt[4]{-81}$ не имеет смысла.

Определение 3. Пусть $n = 3, 5, 7, 9, \dots$ — нечетное натуральное число. **Корнем n -й степени из действительного числа a** называется действительное число x такое, что $x^n = a$ (обозначается $x = \sqrt[n]{a}$)¹.

Приведем примеры корней нечетной степени: $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[7]{-1} = -1$, $\sqrt[7]{-128} = -2$, $\sqrt[9]{512} = 2$, $\sqrt[9]{243} = 3$, $\sqrt[5]{-1024} = -4$, $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$, $\sqrt[5]{-0,00001} = -0,1$, $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$.

В дальнейшем мы не будем добавлять слово «арифметический» к корню n -й степени. Всегда будем иметь в виду, что корень четной степени из неотрицательного числа принимает неотрицательное значение, а корень нечетной степени из действительного числа принимает значение того же знака, что и само число. Существование корня n -й степени во всех этих случаях примем без доказательства (как и для квадратного корня). Отметим, что во всех этих случаях значение корня n -й степени единственно.

* * *

Докажем единственность значения корня n -й степени (аналогично тому, как доказывалась единственность квадратного корня). Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Функция $y = x^n$ строго возрастает на $[0; +\infty)$ при четном натуральном n и строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ при нечетном натуральном n .

Доказательство.

Докажем методом математической индукции, что если $x_1 > x_2 > 0$, то $x_1^n > x_2^n$ при любом натуральном n . При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано при фиксированном натуральном n ; докажем его для следующего значения $n + 1$. Пусть $x_1 > x_2 > 0$; тогда по

¹ Если $a \geq 0$, то соответствующее значение x называется арифметическим корнем n -й степени из a .

предположению индукции $x_1^n > x_2^n$. Вспомним известное свойство числовых неравенств: если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. Так как $x_1 > x_2 > 0$ и $x_1^n > x_2^n > 0$, то $x_1 \cdot x_1^n > x_2 \cdot x_2^n$, то есть $x_1^{n+1} > x_2^{n+1}$. Утверждение доказано при любом натуральном n методом математической индукции.

Ясно, что если $x > 0$, то и $x^n > 0$; если $x = 0$, то и $x^n = 0$. Поэтому если $x_1 > x_2 \geq 0$, то $x_1^n > x_2^n \geq 0$ при любом натуральном n .

Значит, функция $y = x^n$ строго возрастает на $[0; +\infty)$ при любом натуральном n ; при четном n требуемое утверждение доказано.

Пусть теперь n — нечетное, и $x_1 > x_2$. Если $x_1 > x_2 \geq 0$, то $x_1^n > x_2^n \geq 0$ (уже доказано). Если $0 \geq x_1 > x_2$, то $-x_2 > -x_1 \geq 0$. По доказанному выше, $(-x_2)^n > (-x_1)^n$, т.е. $-x_2^n > -x_1^n$, и окончательно, $x_1^n > x_2^n$. Наконец, если $x_1 > 0 > x_2$, то $x_1^n > 0$, $x_2^n < 0$, и $x_1^n > x_2^n$. При любом расположении точек x_1 и x_2 на числовой прямой при условии $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $x_1^n > x_2^n$. Значит, при нечетном натуральном n функция $y = x^n$ строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. ■

Теорема 2. Значение $\sqrt[n]{a}$ при четном натуральном n единственно для любого $a \geq 0$. Значение $\sqrt[n]{a}$ при нечетном натуральном n единственно для любого $a \in \mathbf{R}$.

Доказательство.

Пусть существуют два различных значения x_1 и x_2 для $\sqrt[n]{a}$, для определенности $x_1 > x_2$ ($x_1 > x_2 \geq 0$ для четного n ; для нечетного n знаки чисел x_1 и x_2 роли не играют). Тогда, по предыдущему утверждению, $x_1^n > x_2^n$. Но $x_1^n = x_2^n = a$; полученное противоречие доказывает, что значение $\sqrt[n]{a}$ единственно. ■

Приведем основные свойства корней.

I. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (при любых a, b , если n — нечетно; при $a, b \geq 0$, если n — четно).

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Тогда $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$ (из определения корня следует, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $(\sqrt[n]{b})^n = b$). Так как $x^n = a \cdot b$, то $x = \sqrt[n]{ab}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. ■

II. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (при любых $a, b \neq 0$, если n — нечетно; при $a \geq 0, b > 0$, если n — четно).

Доказательство.

Пусть $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Тогда $x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$. Так как $x^n = \frac{a}{b}$, то $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. ■

Свойства I и II аналогичны таким же свойствам квадратного корня. Напомним, что $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$ при любых натуральных k ; при четных k модуль можно не писать, так как $a^k \geq 0$, и $\sqrt{a^{2k}} = a^k$. Аналогичное свойство имеет место для корней произвольной степени.

III. $\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$ при нечетных натуральных n и при любых $a \in \mathbf{R}$;

$\sqrt[n]{a^{kn}} = |a^k|$ при четных натуральных n и при любых $a \in \mathbf{R}$ (в частности, $\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$ при четных k и n и при любых $a \in \mathbf{R}$).

Доказательство.

Пусть n — нечетное натуральное число, $x = a^k$. Тогда $(a^k)^n = a^{kn}$. Так как $x^n = a^{kn}$, то $x = \sqrt[n]{a^{kn}}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $a^k = \sqrt[n]{a^{kn}}$.

Пусть теперь n — четное натуральное число, $x = |a^k|$. Тогда $(|a^k|)^n = (|a|^k)^n = |a|^{kn} = a^{kn}$ (здесь учтена четность числа kn). Так как $x^n = a^{kn}$, и $x \geq 0$, то $x = \sqrt[n]{a^{kn}}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $|a^k| = \sqrt[n]{a^{kn}}$. ■

Рассмотрим примеры применения этих свойств.

Пример 1.

Упростить: а) $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt[3]{a^6}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[4]{a^{12}}$; $\sqrt[6]{a^{30}}$; б) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$; в) $\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{a^2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{a^8} = a^2$; $\sqrt[3]{a^6} = a^2$; $\sqrt[3]{a^9} = a^3$; $\sqrt[4]{a^{12}} = |a^3|$; $\sqrt[6]{a^{30}} = |a^5|$ (по III свойству);

б) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$ (по I и III свойствам);

в) $\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^6}{a^2}} = \sqrt[4]{a^4} = |a|$ (по II и III свойствам).

Извлечение корня степени m из корня степени n сводится к извлечению корня степени mn из исходного числа. Сформулируем это на математическом языке:

IV. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ для любого $a \in \mathbf{R}$, если m и n — нечетные натуральные числа. Если хотя бы одно из натуральных чисел m, n — четно, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ при всех $a \geq 0$.

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Тогда $(x^{mn}) = (x^m)^n = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$. Так как $x^{mn} = a$, то $x = \sqrt[mn]{a}$ (это следует из единственности корня). Итак, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. ■

Пример 2.

Представить в виде корня n -й степени: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}$; $\sqrt[6]{\sqrt{a}}$.

Решение.

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[18]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[20]{a}$; $\sqrt[6]{\sqrt{a}} = \sqrt[12]{a}$.

Замечание. Здесь и далее мы будем считать, что проводим преобразование при тех значениях переменной, при которых имеет смысл исходное выражение.

V. $\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{a}$, если k — нечетное натуральное число (при всех $a \in \mathbf{R}$, если n нечетно, и при $a \geq 0$, если n — четно); $\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{|a|}$, если k — четное натуральное число, при всех $a \in \mathbf{R}$.

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[kn]{a^k}$. Тогда $x^n = (\sqrt[kn]{a^k})^n = (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}})^n$ (по свойству IV). Далее, по определению корня n -й степени, $x^n = \sqrt[n]{a^k}$. Но $\sqrt[n]{a^k} = |a|$ при всех $a \in \mathbf{R}$, если k четно и, $\sqrt[n]{a^k} = a$ при всех $a \in \mathbf{R}$, если k — нечетно (это следует из свойства III, если в нем заменить k на 1, n на k). Из единственности корня следует теперь, что $x = \sqrt[n]{a}$, если k нечетно; $x = \sqrt[n]{|a|}$, если k четно. ■

Пример 3.

Представить в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[6]{a^3}$; $\sqrt[25]{a^5}$; $\sqrt[12]{a^4}$; $\sqrt[16]{a^4}$.

Решение.

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ при всех $a \geq 0$; $\sqrt[25]{a^5} = \sqrt[5]{a}$ при всех $a \in \mathbf{R}$; $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{|a|}$ при всех $a \in \mathbf{R}$; $\sqrt[16]{a^4} = \sqrt[4]{|a|}$ при всех $a \in \mathbf{R}$.

Следующее свойство обобщает свойства III и IV, оно аналогично сокращению дробей на общий множитель в числителе и знаменателе (для простоты мы будем рассматривать только случай $a \geq 0$, независимо от четности или нечетности показателей степени и корня).

$$\text{VI. } \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$. Тогда $x^n = (\sqrt[nk]{a^{mk}})^n = \sqrt[k]{a^{mk}} = a^m$ (это следует из определения корня и свойства III). Из единственности корня следует, что $x = \sqrt[n]{a^m}$. Итак, $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. ■

Пример 4.

Представить в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[21]{a^{12}}; \sqrt[16]{a^{28}}; \sqrt[30]{a^{12}}; \sqrt[18]{a^{40}}$.

Решение.

Мы фактически сокращаем показатели степени корня и степени подкоренного выражения на общий множитель:

$$\sqrt[21]{a^{12}} = \sqrt[7 \cdot 3]{a^{4 \cdot 3}} = \sqrt[7]{a^4}; \quad \sqrt[16]{a^{28}} = \sqrt[4 \cdot 4]{a^7 \cdot 4} = \sqrt[4]{a^7}; \quad \sqrt[30]{a^{12}} = \sqrt[5 \cdot 6]{a^2 \cdot 6} = \sqrt[5]{a^2}; \quad \sqrt[18]{a^{40}} = \sqrt[9 \cdot 2]{a^{20 \cdot 2}} = \sqrt[9]{a^{20}}.$$

VII. Если $x_1 > x_2$ и n — нечетное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$; если $x_1 > x_2 \geq 0$ и n — четное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$.

Пока примем это свойство без доказательства, оно будет доказано в последнем пункте этого параграфа.

Данное свойство позволяет нам сравнивать корни высших степеней.

Пример 5.

Сравните числа: а) $\sqrt[3]{13}$ и $\sqrt[3]{103}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$; в) $\sqrt[4]{0,999}$ и 1.

Решение.

а) Так как $\sqrt[3]{13} < \sqrt[3]{103}$, так как $13 < 103$ (по свойству VII корня n -й степени);

б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{6}$. Значит, $\sqrt[3]{\sqrt{5}} < \sqrt{\sqrt[3]{6}}$, так как $\sqrt[6]{5} < \sqrt[6]{6}$ (по свойствам IV и VII корня n -й степени);

в) Можем записать $1 = \sqrt[4]{1^4} = \sqrt[4]{1}$. Значит, $\sqrt[4]{0,999} < 1$, так как $0,999 < 1$ (по свойству VII корня n -й степени).

Пример 6.

Сравните числа: а) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{11}$; в) $-\sqrt[4]{3}$ и $-\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

Решение.

а) Так как $(\sqrt[3]{5})^6 = 5^2 = 25$, а $(\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$, то $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$; $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$. Так как $25 < 27$, то $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$, то есть $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$ (по свойству VII корня n -й степени);

б) Так как $(\sqrt{5})^6 = 5^3 = 125$, а $(\sqrt[3]{11})^6 = 11^2 = 121$, то $\sqrt{5} = \sqrt[6]{125}$; $\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{121}$. Но $125 > 121$, поэтому $\sqrt[6]{125} > \sqrt[6]{121}$, то есть $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$ (по свойству VII корня n -й степени);

в) $(\sqrt[4]{3})^8 = 3^2 = 9$, $(\sqrt[8]{6\sqrt{2}})^8 = 6\sqrt{2}$. Для сравнения данных чисел целесообразно возвести их в 16-ю степень: $(\sqrt[4]{3})^{16} = 9^2 = 81$, $(\sqrt[8]{6\sqrt{2}})^{16} = (6\sqrt{2})^2 = 72$. Так как $81 > 72$, то по свойству VII $\sqrt[16]{81} > \sqrt[16]{72}$, то есть $\sqrt[4]{3} > \sqrt[8]{6\sqrt{2}}$; значит, $-\sqrt[4]{3} < -\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

К

1 Какие из данных утверждений являются верными?

- а) $\sqrt{81} = 9$; в) $\sqrt{-25} = -5$; д) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = 1-\sqrt{3}$;
 б) $\sqrt{64 \cdot 16} = 32$; г) $\sqrt{9+16} = 3+4$ е) $\sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4} = a^2 - b^2$.

Что вы использовали для выполнения задания?

2

Заполните таблицу:

a	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
a^3									
a^4									

Почему во второй строке таблицы есть и положительные, и отрицательные числа, а в третьей только неотрицательные?

3

Заполните таблицу:

d								
d^3	0	-1	8	-27	64	125	-216	

4

Заполните таблицу:

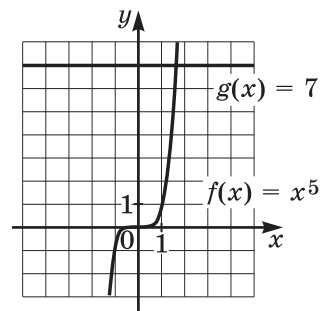
x								
x^3	-10	-9	-2	3	6	9	50	a

1) Можете ли вы записать значения переменной x ? Как вы думаете, каким образом можно устранить возникшую проблему?

2) Прочитайте на стр. 3 о кубическом корне и заполните таблицу.

5

1) Проанализируйте рисунок и ответьте на вопросы:

Сколько решений имеет уравнение $x^5 = 7$? Предположите, как можно записать корень этого уравнения.2) Сопоставьте свое предположение с определением 3 на стр. 4 учебника и примените для решения уравнения $x^7 = 3$.3) Познакомьтесь с понятием арифметического корня n -й четной степени.

6

Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{64 \cdot 8}$; $\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 16}$; $\sqrt[4]{0,0001} \cdot \sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[5]{-32 \cdot 243}$; $\sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{243}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня n -й степени из произведения и докажите ее.2) Сопоставьте свой вывод со свойством 1 на стр. 5 учебника и примените его для нахождения значения произведения $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$.

7

Вычислите:

- а) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}}$; б) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$; $\frac{\sqrt[5]{-1}}{\sqrt[5]{32}}$; в) $\sqrt[3]{2\frac{93}{125}}$; $\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{125}}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня n -й степени из частного и докажите ее.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством 2 на стр. 5 учебника и примените его для нахождения значения частного $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

8 Вычислите значения $\sqrt[8]{8^8}$, $\sqrt[6]{(-6)^6}$, $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[4]{0,0016}$, $\sqrt[6]{\frac{15625}{4096}}$.

9 Вычислите значения $\sqrt[9]{27^3}$, $\sqrt[7]{(-7)^7}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[7]{2187}$, $\sqrt[3]{-0,343}$, $\sqrt[5]{\frac{3125}{7776}}$.

10 Упростите: $\sqrt[16]{a^8}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[4]{a^{20}}$; $\sqrt[5]{a^{30}}$; $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}$; $\frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a}}$.

11 Представьте в виде корня n -й степени: $\sqrt[5]{7\sqrt{a}}$; $\sqrt[3]{4\sqrt{a}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$.

12 Представьте в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[24]{a^{18}}$; $\sqrt[16]{a^{40}}$; $\sqrt[30]{a^{20}}$; $\sqrt[15]{a^{100}}$.

13 Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{100}$ и $\sqrt[6]{1000}$; в) $\sqrt[4]{0,987}$ и $\sqrt[10]{1,234}$; д) $\sqrt{10}$ и $\sqrt[3]{30}$;
б) $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$; г) $\sqrt[3]{9}$ и $\sqrt{5}$; е) $-\sqrt[4]{5}$ и $-\sqrt[8]{10\sqrt{6}}$.

14 Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

а) $\sqrt[3]{100}$; б) $\sqrt[7]{1234}$; в) $\sqrt[4]{600}$; г) $\sqrt[5]{-463}$.

15 Вычислите значение числового выражения

$$0,5 \cdot \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}.$$

π

16 Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $4 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots$; б) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \dots (|x| > 1)$.

17 Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) $1,7(5)$; б) $2,(18)$; в) $2,(134)$.

18 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

а) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 100$;
б) $(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 100$;
в) $(|x| - 5)^2 + (|y| - 4)^2 = 100$.

19 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0$.

Д

20 Вычислите значения $\sqrt[4]{5^4}$, $\sqrt[6]{(-2)^6}$, $\sqrt[4]{0,0256}$, $\sqrt[6]{4096}$, $\sqrt[6]{64\,000\,000}$, $\sqrt[4]{0,0625}$, $\sqrt[4]{\frac{6561}{2401}}$.

21 Вычислите значения $\sqrt[3]{9^6}$, $\sqrt[5]{(-5)^5}$, $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[5]{-243}$, $\sqrt[7]{16\,384}$, $\sqrt[3]{-1,331}$, $\sqrt[5]{\frac{1024}{16\,807}}$.

22 Представьте в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[24]{a^{36}}$; $\sqrt[25]{a^{40}}$; $\sqrt[32]{a^{24}}$; $\sqrt[25]{a^{55}}$.

23 Сравните числа:

- а) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[6]{10}$; в) $-\sqrt[3]{1,1}$ и $\sqrt[5]{-1,1}$; д) $\sqrt{20}$ и $\sqrt[3]{90}$;
 б) $\sqrt[3]{\sqrt{15}}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{25}}$; г) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{5}$; е) $-\sqrt[4]{7}$ и $-\sqrt[8]{15\sqrt{10}}$.

24 Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

- а) $\sqrt[3]{1111}$; б) $\sqrt[7]{2345}$; в) $\sqrt[4]{650}$; г) $\sqrt[5]{-1000}$.

25 Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

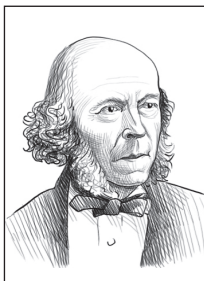
- а) $0,(3)$; б) $5,(5)$.

26 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

- а) $5x = 6 - 2y$; б) $5|x| = 6 - 2y$; в) $5|x - 1| = 6 - 2y$.

С 27* Существует ли такое число x , при котором все три числа $2x - \sqrt{x^2 + 2}$, $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 2006}$, $\sqrt{x^2 + 2006} - x$ являются целыми?

2. Преобразование выражений, содержащих корни n -й степени.



*Дороги не те знания, которые откладываются в мозг,
как жир, дороги те, которые превращаются
в умственные мышцы.*

Герберт Спенсер (1820–1903),
английский философ и социолог

Свойства корней n -й степени, с которыми мы познакомились, позволяют производить и более сложные преобразования выражений, содержащих корни. Разберем некоторые способы проведения таких преобразований с помощью следующих примеров.

1. Вынесение множителя из-под знака корня.

Аналогично случаю квадратного корня, если подкоренное выражение корня n -й степени представляется в виде произведения или частного чисел или выражений, среди которых есть точные n -е степени, то эти выражения выносятся из-под знака корня.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня:

- а) $\sqrt[4]{80}$; б) $\sqrt[5]{64}$; в) $\sqrt[3]{-16}$; г) $\sqrt[3]{\frac{128}{81}}$; д) $\sqrt[6]{\frac{512}{27}}$; е) $\sqrt[5]{-\frac{320}{243}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{5}$; б) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{32 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2} = 2\sqrt[5]{2}$;

в) $\sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{8 \cdot 2} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt[3]{\frac{128}{81}} = \sqrt[3]{\frac{2^6 \cdot 2}{3^3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

$$\text{д) } \sqrt[6]{\frac{512}{27}} = \sqrt[6]{\frac{2^6 \cdot 2^3}{3^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{3}} = 2\sqrt[6]{\frac{2}{3}}; \quad \text{е) } \sqrt[5]{-\frac{320}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{2^5 \cdot 10}{3^5}} = -\frac{\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{3^5}} = -\frac{2}{3}\sqrt[5]{10}.$$

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня:

$$\text{а) } \sqrt[3]{32a^6b^5}; \quad \text{б) } \sqrt[5]{-128x^5y^6}; \quad \text{в) } \sqrt[7]{\frac{256a^9}{b^{14}}}.$$

Решение.

$$\text{а) } \sqrt[3]{32a^6b^5} = \sqrt[3]{2^3 2^2 a^6 b^3 b^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} = 2a^2b\sqrt[3]{4b^2};$$

$$\text{б) } \sqrt[5]{-128x^5y^6} = \sqrt[5]{(-32 \cdot 4)x^5y^5y} = -2xy\sqrt[5]{4y};$$

$$\text{в) } \sqrt[7]{\frac{256a^9}{b^{14}}} = \sqrt[7]{\frac{2^7 \cdot 2 \cdot a^7 \cdot a^2}{b^{14}}} = \frac{2a}{b^2} \sqrt[7]{2a^2}.$$

При вынесении множителей из-под знака четной степени часто нужно учитывать знак буквенных выражений под знаком корня или использовать знак модуля.

Пример 3. Вынести множитель из-под знака корня:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sqrt[4]{512a^5}; & \text{б) } \sqrt[4]{81a^6b^5}; & \text{в) } \sqrt[6]{-\frac{64a^8}{b^5}}; \\ \text{г) } \sqrt[4]{32a^8b^{10}}; & \text{д) } \sqrt[4]{-\frac{64a^5}{b^9}}; & \text{е) } \sqrt[8]{1024x^9y^{11}}. \end{array}$$

Решение.

а) $\sqrt[4]{512a^5} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 2 \cdot a^4 \cdot a} = \sqrt[4]{2^8} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a} = 2^2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot |a| \cdot \sqrt[4]{a}$. Так как выражение определено² только при $a \geq 0$, то $\sqrt[4]{512a^5} = 4a \cdot \sqrt[4]{2a}$, $a \geq 0$.

б) Так как $\sqrt[4]{81a^6b^5} = \sqrt[4]{3^4 a^4 b^4 a^2 b} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{a^2 b} = 3|a| \cdot |b| \sqrt[4]{a^2 b}$ (a — любое), то $\sqrt[4]{81a^6b^5} = 3b|a| \sqrt[4]{a^2 b}$, так как $b \geq 0$.

$$\text{в) } \sqrt[6]{-\frac{64a^8}{b^5}} = \sqrt[6]{-\frac{2^6 a^6 \cdot a^2 b}{b^6}} = \frac{\sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{-a^2 b}}{\sqrt[6]{b^6}} = \frac{2|a| \cdot \sqrt[6]{-a^2 b}}{|b|}.$$

При $a \neq 0$ выражение определено только при $b < 0$ (тогда $|b| = -b$), получим

$$-\frac{2|a| \cdot \sqrt[6]{|a|^6 |b|}}{|b|} = -\frac{2|a| \cdot \sqrt[6]{|a|^6 |b|}}{b}. \quad \text{При } a = 0 \ (b \neq 0) \text{ значение выражения равно } 0.$$

г) $\sqrt[4]{32a^8b^{10}} = \sqrt[4]{2^4 2a^8 b^8 b^2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{b^8} \cdot \sqrt[4]{b^2} = 2\sqrt[4]{2} a^2 b^2 \sqrt[4]{b}$
(равенство верно при всех $a, b \in \mathbf{R}$).

$$\text{д) } \sqrt[4]{-\frac{64a^5}{b^9}} = \sqrt[4]{-\frac{2^6 a^4 a}{b^8 b}} = \frac{\sqrt[4]{2^6} \sqrt[4]{a^4}}{\sqrt[4]{b^8}} \cdot \sqrt[4]{-\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{2^3} |a|}{b^2} \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}.$$

Было бы ошибкой в общем случае представлять $\sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ в виде $\frac{\sqrt[4]{-a}}{\sqrt[4]{b}}$ или $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{-b}}$, так как при этом нарушается область

² Примечание: в условии не требовалось находить область определения этого выражения, однако мы указали, что $a \geq 0$, чтобы закончить преобразование раскрытием модуля. Договоримся поступать так и далее: если в условии не требуется искать область определения, то делать это по собственной инициативе мы не будем, считая, что работаем на области определения исходного выражения. Однако если для выполнения преобразования нам потребуется обратиться к области определения, мы будем делать соответствующие пометки (как в случае с примером 3а).

определения выражения. Выражение $\sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ определено для чисел a и b разного знака (или $a = 0, b \neq 0$); выражение $\frac{\sqrt[4]{-a}}{\sqrt[4]{b}}$ — при $a \leq 0, b > 0$.

Окончательно имеем: $\sqrt[4]{-\frac{64a^5}{b^9}} = \frac{2\sqrt{2}|a|}{b^2} \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$, если $\frac{a}{b} \leq 0$.

е) $\sqrt[8]{1024x^9y^{11}} = \sqrt[8]{2^8 2^2 x^8 xy^8 y^3} = \sqrt[8]{2^8} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{x^8} \cdot \sqrt[8]{y^8} \cdot \sqrt[8]{xy^3} = 2\sqrt[4]{2} |x| \cdot |y| \cdot \sqrt[8]{xy^3} = 2\sqrt[4]{2} |xy| \cdot \sqrt[8]{xy} = 2\sqrt[4]{2} xy \cdot \sqrt[8]{xy^3}$. Выражение определено, если числа x, y одного знака или одно из них обращается в нуль, то есть при $xy \geq 0$ (поэтому $|xy| = xy$). Было бы ошибкой представить $\sqrt[8]{xy^3}$ в виде $\sqrt[8]{x} \cdot \sqrt[8]{y^3}$, так как это сузило бы область определения исходного выражения (последнее выражение определено, если одновременно $x \geq 0$ и $y \geq 0$).

2. Внесение множителя под знак корня.

Пример 4.

Внести множитель под знак корня: а) $2\sqrt[4]{6}$; б) $-2\sqrt[3]{7}$; в) $-3\sqrt[4]{2}$; г) $4\sqrt[5]{\frac{5}{128}}$.

Решение.

$$\text{а) } 2\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{96};$$

$$\text{б) } -2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{-56};$$

$$\text{в) } -3\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{162}.$$

Заметим, что ответ в примере 4б) может быть записан как в виде $\sqrt[3]{-56}$, так и в виде $-\sqrt[3]{56}$; а вот в примере 4в) знак «минус» под корень внести нельзя, так как корень четной степени извлекается только из неотрицательного числа и принимает неотрицательные значения.

$$\text{г) } 4\sqrt[5]{\frac{5}{128}} = \sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt[5]{\frac{5}{128}} = \sqrt[5]{\frac{1024 \cdot 5}{128}} = \sqrt[5]{40}.$$

Пример 5.

Внести множитель под знак корня: а) $3ab\sqrt[3]{a^2b}$; б) $-2xy^3\sqrt[5]{x^2y^4}$; в) $-xz\sqrt[7]{\frac{x^5}{z^2}}$.

Решение.

$$\text{а) } 3ab\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{27a^5b^4};$$

$$\text{б) } -2xy^3\sqrt[5]{x^2y^4} = -\sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[5]{y^{15}} \cdot \sqrt[5]{x^2y^4} = \sqrt[5]{-32x^7y^{19}};$$

$$\text{в) } -xz\sqrt[7]{\frac{x^5}{z^2}} = -\sqrt[7]{x^7} \cdot \sqrt[7]{z^7} \cdot \sqrt[7]{\frac{x^5}{z^2}} = \sqrt[7]{-x^{12}z^5}.$$

При внесении множителя под знак корня четной степени часто нужно учитывать знак соответствующего буквенного выражения.

Пример 6.

Внести множитель под знак корня: а) $x\sqrt[4]{x}$; б) $y\sqrt[6]{-y}$; в) $a^3b\sqrt[4]{ab^3}$; г) $a^2b\sqrt[4]{ab^2}$; д) $-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}}$; е) $a^2\sqrt[8]{-ab^2}$.

Решение.

а) Выражение определено при $x \geq 0$, поэтому $x = \sqrt[4]{x^4}$. Тогда $x\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^5}$, $x \geq 0$.

б) Выражение определено при $y \leq 0$, поэтому $y = -|y| = -\sqrt[6]{(-y)^6} = -\sqrt[6]{y^6}$. Тогда $y\sqrt[6]{-y} = -\sqrt[6]{y^6} \cdot \sqrt[6]{-y} = -\sqrt[6]{-y^7}$, $y \leq 0$.

в) Выражение определено, если $ab^3 \geq 0$, то есть если числа a и b одного знака или хотя одно из них обращается в нуль. Тогда $a^3b \geq 0$ и $a^3b = \sqrt[4]{(a^3b)^4} = \sqrt[4]{a^{12}b^4}$. Поэтому $a^3b\sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{a^{12}b^4} \cdot \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{a^{13}b^7}$, если $ab \geq 0$ (числа a и b одного знака или хотя одно из них обращается в нуль).

г) Выражение определено, если $ab^2 \geq 0$, то есть если $a \geq 0$ или $b = 0$ (в последнем случае a — любое). При этом $b = |b| = \sqrt[4]{b^4}$, если $b > 0$ и $b = -|b| = -\sqrt[4]{b^4}$, если $b < 0$. Тогда при $b > 0$ получим $a^2b \cdot \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[4]{a^9b^6}$, а при $b < 0$ получим $a^2b \cdot \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[4]{a^8} \cdot (-\sqrt[4]{b^4}) \cdot \sqrt[4]{ab^2} = -\sqrt[4]{a^9b^6}$. Итак,

$$a^2b\sqrt[4]{ab^2} = \begin{cases} \sqrt[4]{a^9b^6}, & \text{если } b > 0, a > 0; \\ -\sqrt[4]{a^9b^6}, & \text{если } b < 0, a > 0. \end{cases}$$

Если $b = 0$ или $a = 0$, то равенство имеет место для обоих знаков.

д) Выражение определено, если $\frac{a^3}{b^4} \geq 0$, то есть если $a \geq 0$ и $b \neq 0$.

При этом $b = |b| = \sqrt[6]{b^6}$, если $b > 0$, и $b = -|b| = \sqrt[6]{b^6}$, если $b < 0$. Тогда при $b > 0$ получим $-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = -\sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{b^6} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = -\sqrt[6]{a^9b^2}$, а при $b < 0$ получим $-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = -\sqrt[6]{a^6} \cdot (-\sqrt[6]{b^6}) \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = \sqrt[6]{a^9b^2}$.
Итак,

$$-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = \begin{cases} -\sqrt[6]{a^9b^2}, & \text{если } a > 0, b > 0; \\ \sqrt[6]{a^9b^2}, & \text{если } a > 0, b < 0. \end{cases}$$

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то равенство имеет место для обоих знаков.

е) Выражение определено, если $ab^2 \leq 0$, то есть если $a \leq 0$ или $b = 0$ (в последнем случае a — любое). Тогда $a^2\sqrt[8]{-ab^2} = \sqrt[8]{a^{16}} \cdot \sqrt[8]{-ab^2} = \sqrt[8]{-a^{17}b^2}$.

Итак, $a^2\sqrt[8]{-ab^2} = \sqrt[8]{-a^{17}b^2}$, если $a \leq 0$ или $b = 0$.

3. Приведение радикалов к общему показателю.

Знак $\sqrt{}$ называется **радикалом** (от латинского слова *radix* — корень). Если имеется произведение или частное радикалов с различными показателями корня, то это выражение можно превратить в один радикал с показателем, равным наименьшему общему кратному всех имеющихся показателей (эта процедура основана на VI свойстве корня n -й степени и аналогична приведению к общему знаменателю при сложении или вычитании дробей).

Пример 7. Представить выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[3]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{12}};$

б) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{-\frac{2}{15}};$

в) $\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[8]{10}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}}.$

Решение.

а) Наименьшее общее кратное чисел 3, 2 и 5 равно 30, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 30:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{12}} = \sqrt[30]{3^{10}} \cdot \frac{\sqrt[30]{2^{15}}}{\sqrt[30]{12^6}} = \sqrt[30]{\frac{3^{10} \cdot 2^{15}}{12^6}} = \sqrt[30]{\frac{3^{10} \cdot 2^{15}}{3^6 \cdot 4^6}} = \sqrt[30]{\frac{3^4 \cdot 2^{15}}{2^{12}}} = \sqrt[30]{3^4 \cdot 2^3} = \sqrt[30]{648}.$$

б) Наименьшее общее кратное чисел 4 и 5 равно 20, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 20:

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{-\frac{2}{15}} = \sqrt[20]{5^5} \cdot \left(-\sqrt[20]{\frac{2^4}{15^4}} \right) = -\sqrt[20]{\frac{5^5 \cdot 2^4}{15^4}} = -\sqrt[20]{\frac{5^5 \cdot 2^4}{3^4 \cdot 5^4}} = -\sqrt[20]{\frac{5 \cdot 2^4}{3^4}} = -\sqrt[20]{\frac{80}{81}}.$$

в) Наименьшее общее кратное чисел 6, 8 и 4 равно 24, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 24:

$$\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[8]{10}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[24]{9^4}}{\sqrt[24]{10^3}} \cdot \sqrt[24]{\frac{2^6}{3^6}} = \sqrt[24]{\frac{9^4 \cdot 2^6}{10^3 \cdot 3^6}} = \sqrt[24]{\frac{3^8 \cdot 2^6}{2^3 \cdot 5^3 \cdot 3^6}} = \sqrt[24]{\frac{2^3 \cdot 3^2}{5^3}} = \sqrt[24]{\frac{72}{125}}.$$

Пример 8. Представить выражения в виде корня некоторой степени из рационального выражения: а) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \frac{\sqrt[6]{2a^3b}}{\sqrt[15]{4a^2b^6}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{3a^2x}}{\sqrt[4]{5ax^4}} \cdot \sqrt[6]{a^3x^2}$; в) $\sqrt[5]{x^3y^2} \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{x^3y^6}}$, считая величины a, b, x, y положительными.

Решение.

Положительность величин a, b, x, y нужна для того, чтобы не следить за возможным изменением области определения выражения (иногда может потребоваться дополнительное исследование знака окончательного выражения, не имеющее сейчас принципиального значения).

а) Наименьшее общее кратное чисел 3, 6 и 15 равно 30, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 30:

$$\sqrt[3]{ab^2} \cdot \frac{\sqrt[6]{2a^3b}}{\sqrt[15]{4a^2b^6}} = \sqrt[30]{a^{10}b^{20}} \cdot \frac{\sqrt[30]{2^5a^{15}b^5}}{\sqrt[30]{4^2a^4b^{12}}} = \sqrt[30]{\frac{a^{10}b^{20} \cdot 2^5a^{15}b^5}{4^2a^4b^{12}}} = \sqrt[30]{2a^{21}b^{13}}.$$

б) Наименьшее общее кратное чисел 4 и 6 равно 12, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 12:

$$\frac{\sqrt[4]{3a^2x}}{\sqrt[4]{5ax^4}} \cdot \sqrt[6]{a^3x^2} = \frac{\sqrt[12]{3^3a^6x^3}}{\sqrt[12]{5^3a^3x^{12}}} \cdot \sqrt[12]{a^6x^4} = \sqrt[12]{\frac{3^3a^6x^3 \cdot a^6x^4}{5^3a^3x^{12}}} = \sqrt[12]{\frac{27}{125} \cdot \frac{a^9}{x^5}}.$$

в) Наименьшее общее кратное чисел 5, 2 и 4 равно 20, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 20:

$$\sqrt[5]{x^3y^2} \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt[4]{x^3y^6}} = \sqrt[20]{x^{12}y^8} \cdot \frac{\sqrt[20]{2^{10}x^{10}y^{10}}}{\sqrt[20]{x^{15}y^{30}}} = \sqrt[20]{\frac{x^{12}y^8 \cdot 2^{10}x^{10}y^{10}}{x^{15}y^{30}}} = \sqrt[20]{\frac{1024x^7}{y^{12}}}.$$

4. Избавление от иррациональности в знаменателе (или числителе) дроби.

Аналогично случаю квадратного корня часто бывает удобно избавиться от знака корня в знаменателе дроби («избавиться от иррациональности»).

Пример 9.

Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей:

$$\text{а) } \frac{3}{\sqrt[3]{7}}; \quad \text{б) } \frac{11}{\sqrt[4]{8}}; \quad \text{в) } \frac{2}{\sqrt[3]{-5}}; \quad \text{г) } \frac{ab}{\sqrt[6]{c^5}}.$$

Решение.

Во всех этих случаях нужно умножить числитель и знаменатель дроби на корень из выражения, которое дополняло бы подкоренное выражение до полной n -й степени, например, в примере а) до $\sqrt[3]{7^3}$.

$$\text{а) } \frac{3}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{3\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{49}}{7};$$

$$\text{б) } \frac{11}{\sqrt[4]{8}} = \frac{11 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{11\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{11\sqrt[4]{2}}{2};$$

$$\text{в) } \frac{2}{\sqrt[3]{-5}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{5};$$

$$\text{г) } \frac{ab}{\sqrt[6]{c^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c^5} \cdot \sqrt[6]{c}} = \frac{ab \cdot \sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c^6}} = \frac{ab\sqrt[6]{c}}{c}, c > 0.$$

Заметим, что аналогичным образом можно избавиться и от иррациональности в числителе.

К 28 Даны выражения $\sqrt[10]{32a^5}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[12]{a^{10}b^6}$, $\sqrt[7]{a^{14}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^{12}}{b^6}}$. Какие из них можно упростить? Упростите их.

29 Сравните числа:

$$\text{а) } \sqrt{3} \text{ и } \sqrt[3]{4}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{4} \text{ и } \sqrt[4]{5}; \quad \text{в) } \sqrt{\sqrt{2}} \text{ и } \sqrt[3]{\sqrt{19}}.$$

Какие свойства вы использовали для выполнения задания?

30 1) Какое из чисел больше:

$$\text{а) } 3\sqrt{2} \text{ или } 2\sqrt{3}; \quad \text{б) } 4\sqrt{5} \text{ или } 2\sqrt{10}; \quad \text{в) } 6\sqrt{5} \text{ или } 5\sqrt{8}?$$

2) Вынесите из-под корня множители:

$$\text{а) } \sqrt{121a^8b^5c^{19}}; \quad \text{б) } \sqrt{256a^4b^9c^{21}}.$$

31 1) Выпишите выражения, подчеркните множители, которые можно вынести из-под знака корня: $\sqrt[3]{27 \cdot 3a^3 \cdot a \cdot x^3 \cdot x^2}$; $\sqrt[5]{32 \cdot a^{10} \cdot x^5 \cdot x^2}$.

2) Вынесите множители из-под знака корня. Какими свойствами корня n -й степени необходимо воспользоваться?

3) Сравните выполнение задания с решением примера 1 и 2 на стр. 10–11 учебника и примените для упрощения выражения $\sqrt[4]{625x^5y^6n^4}$.

32 Представьте выражение в виде корня некоторой степени из рационального числа, используя известные вам свойства корней:

$$\text{а) } \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[10]{5}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{11}}.$$

1) Сопоставьте показатели исходных корней и показатель корня, полученного в результате преобразования. Что интересного вы наблюдаете?

2) Сформулируйте вывод о способе приведения корней разной степени к корню одной степени, сопоставьте его со способом, который применили в примере 7 на стр. 13–14 учебника.

3) Может ли полученный вывод помочь в упрощении выражений: $\frac{\sqrt[4]{2a^2b^{3c}}}{\sqrt[6]{ab^3c^2}}$;

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[7]{-\frac{2}{24}}? \text{ Упростите их.}$$

33 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{2000}$; б) $\sqrt[5]{96}$; в) $\sqrt[3]{-250}$; г) $\sqrt[3]{\frac{625}{243}}$; д) $\sqrt[6]{\frac{128}{125}}$.

34 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{128a^5b^4}$; б) $\sqrt[5]{-512x^6y^{15}}$; в) $\sqrt[7]{\frac{4096a^{10}}{b^{35}}}$; г) $\sqrt[4]{81a^9}$; д) $\sqrt[4]{49a^9b^5}$.

35 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{2}$; б) $-7\sqrt[3]{2}$; в) $-4\sqrt[4]{3}$; г) $6\sqrt[5]{\frac{3}{64}}$.

36 Внесите множитель под знак корня:

а) $4a^2b\sqrt[3]{a^4b}$; б) $-xyz\sqrt[3]{\frac{x^4}{yz^2}}$; в) $y^3\sqrt[6]{-y}$;
 б) $-3x^3y^4\sqrt[7]{xy^6}$; г) $x^2\sqrt[4]{x^3}$; и) $-a^2b\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^2}}$.

37 Представьте выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[5]{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}}$; б) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{-\frac{5}{12}}$; в) $\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[8]{18}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

38 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$; б) $\frac{10}{\sqrt[4]{32}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{-7}}$; г) $\frac{abc}{\sqrt[6]{c^7}}$.

39 Сравните числа: а) $\sqrt[4]{24}$ и $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{9}$; в) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[8]{4\sqrt{2}}$.

40 Представьте в виде корня с меньшей степенью:

$\sqrt[24]{a^{20}}$; $\sqrt[14]{a^{21}}$; $\sqrt[30]{a^{35}}$; $\sqrt[15]{a^{30}}$.

41 Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $(x-3)(y-4)=1$; б) $|x|+|y-2|=3$; в) $(x-1)^2=-(y-2)^2$.

42 Упростите выражение $\sqrt{11}-\sqrt{3}-\frac{8}{\sqrt{14+2\sqrt{33}}}$.

43 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{1250}$; б) $\sqrt[5]{5120}$; в) $\sqrt[3]{-12\,005}$; г) $\sqrt[3]{\frac{250}{243}}$; д) $\sqrt[6]{\frac{3645}{3584}}$.

44 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{3}$; б) $-5\sqrt[3]{4}$; в) $-2\sqrt[4]{2}$; г) $12\sqrt[5]{\frac{3}{512}}$.

45 Внесите множитель под знак корня:

а) $3a^3b\sqrt[3]{2a^5b}$; б) $-xy^2z^3\sqrt[3]{\frac{1}{x^5y^3z}}$; в) $-y^3\sqrt[6]{-y^5}$;
 б) $-2x^2y^7\sqrt[7]{3x^2y^5}$; г) $x^3\sqrt[4]{-x^5}$; е) $ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^8}}$.

46 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{162a^7b^2}$; б) $\sqrt[5]{-1280x^{13}y^7}$; в) $\sqrt[7]{\frac{10\,935a^8}{b^{70}}}$; г) $\sqrt[4]{-324a^{15}}$; д) $\sqrt[4]{125a^{11}b^5}$.

47 Представьте выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[5]{8} \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt[4]{2048}}$; б) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[5]{-\frac{1}{18}}$; в) $\frac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[8]{72}} \cdot \sqrt[4]{6}$.

48 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{30}{\sqrt[3]{81}}$; б) $\frac{20}{\sqrt[4]{128}}$; в) $\frac{35}{\sqrt[3]{-49}}$; г) $\frac{ab}{\sqrt[6]{a^{13}}}$.

49 Сравните числа: а) $\sqrt[5]{10}$ и $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{5\frac{1}{2}}$; в) $-\sqrt[4]{7}$ и $-\sqrt{2\sqrt{3}}$.

50 Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $(x-1)(y+2)=1$; б) $|x+1|-|y|=2$; в) $(1-x)^2=-(y-1)^2$.

с

51*

Докажите равенство³: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, если $a \geq \sqrt{b}$.

3.* Более сложные преобразования выражений, содержащих корни.



Если бы природа не была прекрасна, она не стоила бы того, чтобы ее знать... Я имею в виду ту более глубокую красоту, которая открывается в гармонии частей, которая постигается только разумом...

Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, механик, физик, философ

В этом пункте мы рассмотрим более сложные преобразования выражений, содержащих корни n -й степени.

1. Применение формул сокращенного умножения.

Вспомним, как мы избавлялись от иррациональности в знаменателе в выражениях с квадратным корнем. Если в знаменателе дроби имелась сумма или разность квадратных корней, то мы умножали числитель и знаменатель дроби на так называемое «сопряженное выражение» для последующего применения формулы разности квадратов, по которой $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

Например,
$$\frac{2 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{6 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{7}.$$

Аналогичные преобразования можно провести для корней более высоких степеней, применив формулы суммы и разности кубов и т.д. Например,

³ Это равенство называется формулой сложного радикала.

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2)=(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3=a-b;$$

$$(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b \text{ и т. д.}$$

Пример 1.

Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$; б) $\frac{3+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+3}$; в) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}$; г) $\frac{1}{\sqrt[6]{5}-1}$; д*) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}-1}$.

Решение.

а) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{2(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3-1} = 2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1);$

б) $\frac{3+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+3} = \frac{(3+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\cdot 3+3^2)}{(\sqrt[3]{4}+3)(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\cdot 3+3^2)} = \frac{(3+\sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4}+9)}{(\sqrt[3]{4})^3+3^3} =$

$$= \frac{6\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}-9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{8}+27+9\sqrt[3]{2}}{31} = \frac{21+15\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{4}}{31};$$

в) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2})^2-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt[4]{2}+1)}{2-1} = (3+2\sqrt{2})(\sqrt[4]{2}+1);$$

г) $\frac{1}{\sqrt[6]{5}-1} = \frac{\sqrt[6]{5}+1}{(\sqrt[6]{5}-1)(\sqrt[6]{5}+1)} = \frac{\sqrt[6]{5}+1}{(\sqrt[6]{5})^2-1} = \frac{\sqrt[6]{5}+1}{\sqrt[3]{5}-1} = \frac{(\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[6]{5}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)} =$

$$= \frac{(\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5})^3-1} = \frac{(\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)}{4}.$$

* * *

д*) Воспользуемся тем, что $(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)=a^5-1$ для любых a (проверьте это самостоятельно), поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3}-1} = \frac{(\sqrt[5]{3})^4+(\sqrt[5]{3})^3+(\sqrt[5]{3})^2+\sqrt[5]{3}+1}{(\sqrt[5]{3}-1)((\sqrt[5]{3})^4+(\sqrt[5]{3})^3+(\sqrt[5]{3})^2+\sqrt[5]{3}+1)} = \frac{\sqrt[5]{81}+\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{9}+\sqrt[5]{3}+1}{2}.$$

Пример 2.

Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; в) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$; г) $\frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)}$.

Решение.

а) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b};$

б) Если $a \neq b$, то $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{a-b};$$

если же $a = b$, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[4]{a^5}}{a} = \sqrt[4]{a}.$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad \frac{a-1}{\sqrt[6]{a}-1} &= \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)}{(\sqrt[6]{a}-1)(\sqrt[6]{a}+1)} = \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)}{\sqrt[6]{a}-1} = \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{(\sqrt[6]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)} = \\ &= \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{a-1} = (\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1), \quad a \neq 1; \end{aligned}$$

г) Если $a \neq 4$ и $a \neq 8$, то домножим числитель и знаменатель дроби сразу на два сопряженных выражения:

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a}-2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)(\sqrt[3]{a}-2)} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a}-2)}{(a-4)(a-8)};$$

$$\begin{aligned} \text{если } a = 4, \text{ то } \frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)} &= \frac{1}{(2+2)(\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}+4)} = \frac{1}{4(2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+4)} = \\ &= \frac{1}{16(\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{48}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{если } a = 8, \text{ то } \frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)} &= \frac{1}{(\sqrt{8}+2)(\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4)} = \frac{1}{(2\sqrt{2}+2)(4+4+4)} = \\ &= \frac{1}{24(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{24}. \end{aligned}$$

Комбинирование известных преобразований.

Упрощая выражения с квадратными корнями, мы иногда применяли сразу несколько различных преобразований: вынесение выражения из-под знака корня, возведение корня в степень и пр. Для упрощения выражений со знаком корня n -й степени мы тоже будем комбинировать известные нам преобразования.

Пример 3. Упростить выражения:

$$\text{а)} \quad \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}}; \quad \text{б)} \quad \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-x}; \quad \text{в)} \quad \frac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45})^2}.$$

Решение.

а) Так по условию $a > 0$, то можем представить $\sqrt[3]{a^2}$ в виде:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a \cdot a^3} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}} &= \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1-2\sqrt{a})} = \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(1-\sqrt{a})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[6]{a}(1-\sqrt{a})}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1. \end{aligned}$$

б) Так по условию $x > 0$, то можем представить $\sqrt[4]{x^3}$ в виде:

$$\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x \cdot x^2} = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-x} &= \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \\ &= \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

в) Числитель дроби равен $1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5} = 1-2\sqrt[4]{5}+(\sqrt[4]{5})^2 = (1-\sqrt[4]{5})^2$.

Знаменатель равен $(\sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{9 \cdot 5})^2 = (\sqrt[4]{9} \cdot (1 - \sqrt[4]{5}))^2 = (\sqrt[4]{9})^2 \cdot (1 - \sqrt[4]{5})^2 = \sqrt{9} \cdot (1 - \sqrt[4]{5})^2 = 3(1 - \sqrt[4]{5})^2$.

Поэтому $\frac{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45})^2} = \frac{(1 - \sqrt[4]{5})^2}{3(1 - \sqrt[4]{5})^2} = \frac{1}{3}$.

Выражения, которые содержат переменную под знаком корня, принято называть **иррациональными**. Рассмотрим примеры применения рассмотренных нами преобразований к упрощению подобных выражений.

Пример 4. Упростить выражения:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}+1} + \frac{1}{1-\sqrt[3]{a}} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}; \\ \text{б) } & \left(\frac{(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \frac{2}{a+b}; \\ \text{в) } & \left(\sqrt[4]{a^2 - 2a + 1} + \frac{a}{\sqrt{1-a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a+1}}{a-1} \right). \end{aligned}$$

Решение.

а) Сгруппируем дроби с одинаковыми знаменателями:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} + \frac{1}{1-\sqrt[3]{a}} &= \frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}-1} = \frac{a-1}{\sqrt[3]{a}-1} = \frac{(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1)}{\sqrt[3]{a}-1} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1; \\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}+1} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}} &= \frac{1-\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}} = \frac{(1-\sqrt[3]{a})(1+\sqrt[3]{a})}{1+\sqrt[3]{a}} = 1-\sqrt[3]{a}. \end{aligned}$$

Искомое выражение равно: $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1 + 1 - \sqrt[3]{a} = 2 + \sqrt[3]{a^2}$.

б) Числитель первой дроби равен:

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}) &= (\sqrt[4]{a^3})^2 - (\sqrt[4]{b^3})^2 = \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 = \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})((\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2). \end{aligned}$$

Поэтому искомое выражение равно:

$$\left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})((\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 - \sqrt{ab})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{2}{a+b} = (a+b) \cdot \frac{2}{a+b} = 2.$$

$$\text{в) Делимое равно } \sqrt[4]{a^2 - 2a + 1} + \frac{a}{\sqrt{1-a}} = \sqrt[4]{(a-1)^2} + \frac{a}{\sqrt{1-a}}.$$

Из условия следует, что $a < 1$, поэтому $\sqrt[4]{(a-1)^2} = \sqrt[4]{(1-a)^2} = \sqrt{1-a}$,

$$\text{и делимое равно } \sqrt{1-a} + \frac{a}{\sqrt{1-a}} = \frac{(\sqrt{1-a})^2 + a}{\sqrt{1-a}} = \frac{1-a+a}{\sqrt{1-a}} = \frac{1}{\sqrt{1-a}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Делитель равен } \frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a+1}}{a-1} &= \frac{a-1-(\sqrt{a+1})^2}{\sqrt{a+1}(a-1)} = \frac{a-1-(a+1)}{\sqrt{a+1}(a-1)} = \frac{-2}{\sqrt{a+1}(a-1)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a+1}(1-a)}. \end{aligned}$$

Искомое выражение равно:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1+a}(1-a)}{2} = \frac{\sqrt{1+a}(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a} \cdot 2} = \frac{\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2}.$$

Пример 5.

Упростить выражения: а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$; б*) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

Решение.

а) Можно заметить, что $(3-2\sqrt{2})^2 = 9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}$. Поэтому $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{17^2-(12\sqrt{2})^2} = \sqrt[4]{289-144 \cdot 2} = \sqrt[4]{1} = 1$.

Иначе пример можно было решить, заметив, что $17+12\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^2$. Откуда получаем $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Искомое выражение равно $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(3-2\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{2})} = \sqrt{9-8} = 1$.

* * *

б*) Данное выражение можно упростить, используя различные способы. Рассмотрим их.

1-й способ.

Можно заметить, что $10+6\sqrt{3} = 9+1+3\sqrt{3}+3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3 + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 + 3 \cdot \sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}+1)^3$.

Аналогично $10-6\sqrt{3} = 1-3 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = (1-\sqrt{3})^3$.

Поэтому искомое выражение равно $\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3} = \sqrt{3}+1+1-\sqrt{3} = 2$.

2-й способ.

Пусть $x = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$, $y = \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$. Тогда искомое выражение равно $x + y$.

Рассмотрим выражение $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 10+6\sqrt{3}+10-6\sqrt{3}+3 \cdot \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} \cdot (x+y) = 20+3 \cdot (-2) \cdot (x+y)$.

Здесь мы заменили $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ на -2 , так как $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(10-6\sqrt{3})} = \sqrt[3]{100-(6\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{100-108} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Значит, $(x + y)^3 = 20 - 6(x + y)$ и искомое выражение $x + y$ удовлетворяет уравнению $t^3 = 20 - 6t$, то есть $t^3 + 6t - 20 = 0$.

Разложив на множители левую часть уравнения, получим:

$$t^3 - 8 + 6t - 12 = (t - 2)(t^2 + 2t + 4) + 6(t - 2) = (t - 2)(t^2 + 2t + 10).$$

Так как квадратный трехчлен $t^2 + 2t + 10$ не имеет корней ($D < 0$), то уравнение $t^3 + 6t - 20 = 0$ имеет единственный корень $t = 2$. Поэтому искомое выражение равно 2.

К

52

Какие из данных утверждений являются верными?

а) $\sqrt{a+2\sqrt{ab}} + \sqrt{b} = (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2$;

г) $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

б) $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$;

д) Если $a \geq 0$, то $a = \sqrt[4]{a^4}$;

в) $a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$;

е) $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

53

1) Представьте число в виде квадрата:

а) 5; б) a ; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt[3]{b}$.

2) Представьте число в виде куба:

а) -3 ; б) b ; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt[3]{b}$.

54

Разложите на множители:

а) $27x^3 - 8$;

г) $a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$;

ж) $\sqrt{a} - 16\sqrt[4]{ab} + 64\sqrt{b}$;

б) $a^3 + b^6$;

д) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$;

з) $\sqrt[3]{a} + 8\sqrt[6]{ab} + 16\sqrt[3]{b}$;

в) $a^4 - b^4$;

е) $\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}$;

и) $a + 3\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b^2} + b$.

55 Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{12}{x+2\sqrt{3}}$.

56 1) Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$.

2) Какие из верных утверждений № 52 потребуются для выполнения этого преобразования?

3) Проанализируйте выражения из пункта 1. Сформулируйте общий способ, с помощью которого можно избавиться от иррациональности в знаменателе во всех подобных случаях, сопоставьте его со способом, описанным на стр. 17.

57 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$; б) $\frac{1-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$; в) $\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt[4]{3}-2}$; г*) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}-1}$.

58 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

59 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$.

60 Упростите выражения:

а) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}} + \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a+2\sqrt[3]{a^2}}$;

б) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4]{a}\sqrt{a}-\sqrt[8]{a}} + \frac{\sqrt[8]{a}-1}{\sqrt{\sqrt{a}-2\sqrt[8]{a}+4}} \right) : \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+1}$;

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}-\sqrt[4]{ab}} - \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{a}} \right) \cdot (\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{a^2b}) \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

61 Упростите выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

62 Упростите выражение $\sqrt{t+6\sqrt{t-9}} + \sqrt{t-6\sqrt{t-9}}$ ($9 \leq t \leq 18$).

63 Докажите равенство $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = 3$.

π 64 Представьте выражение в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

65 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$; б) $\frac{11}{\sqrt[3]{5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{-3}}$; г) $\frac{n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

66 Найдите область определения функций:

а) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+4}$; б) $y = \sqrt{-x-1} + \frac{2}{1+x}$; в) $y = \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}$.

67 Найдите область определения функции, постройте ее график и укажите множество ее значений:

а) $y = 2\sqrt{1-3x} + 3$; б) $y = |1 - |x||$.

D

68 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{12}{\sqrt[3]{9-1}}$; б) $\frac{1+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4+2}}$; в) $\frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt[4]{5-2}}$; г*) $\frac{1}{\sqrt[6]{4-1}}$.

69 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

70 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8+2}}$.

71 Упростите выражение $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

72 Упростите выражения:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{8}$; б) $\sqrt[5]{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[15]{2}}$.

73 Найдите область определения функции, постройте ее график и укажите множество ее значений:

а) $y = 2 - \sqrt{1+2x}$; б) $y = |2 - \sqrt{1-2x}|$; в) $y = \frac{1}{2 - \sqrt{1+2x}}$.

C 74* Найдите значение суммы $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99+\sqrt{100}}}$.

75* Докажите равенство: $\sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = 1$.

4. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и ее график



*В одном мгновении увидеть вечность,
Огромный мир — в зерне песка,
В единой горсти — бесконечность
И небо — в чашечке цветка.*

У. Блейк (1757–1827),
английский поэт, художник

В 8 классе мы уже изучили свойства функции $y = \sqrt{x}$. В этом пункте мы познакомимся с более общим ее случаем — функцией $y = \sqrt[n]{x}$. Точно так же, как при изучении свойств функции $y = \sqrt{x}$ нам помогали знания о функции $y = x^2$, при изучении свойств $y = \sqrt[n]{x}$ нам поможет функция $y = x^n$.

Вспомним, что нам известно о графике степенной функции $y = x^n$. При четном n — это кривая, напоминающая параболу $y = x^2$, только быстрее растущая при неограниченном увеличении x по модулю (если $n \geq 4$) и теснее прилегающая к оси Ox при x , очень малых по модулю (рис. 1а). Аналогично график функции $y = x^n$ при нечетном

натуральном n напоминает кривую $y = x^3$ с такими же замечаниями насчет роста при неограниченном увеличении x по модулю и прилегания к оси Ox при x , очень малых по модулю (рис. 1б).

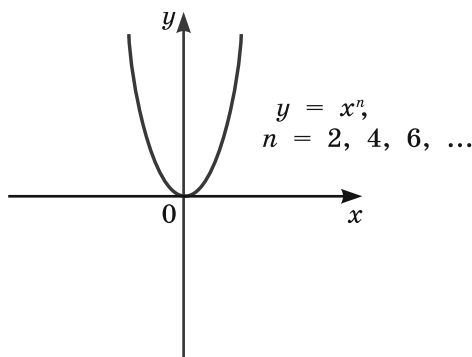


Рис. 1а

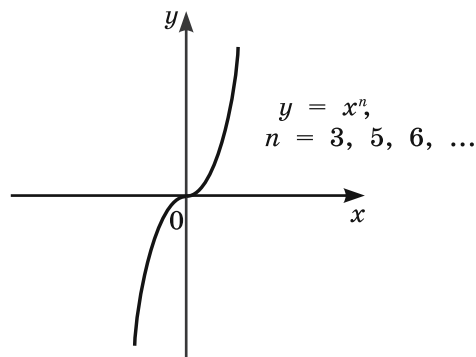


Рис. 1б

Теперь мы готовы к изучению функции $y = \sqrt[n]{x}$. Начнем с построения ее графика. Построим график $y = \sqrt[n]{x}$ по точкам для простейшего неизученного нами случая — для $n = 3$.

Заполним таблицу:

x	0	$\pm \frac{1}{8}$	± 1	$\pm \frac{27}{8} = \pm 3\frac{3}{8}$	± 8
y	0	$\pm \frac{1}{2}$	± 1	$\pm \frac{3}{2} = \pm 1\frac{1}{2}$	± 2

Построим кривую по точкам с указанными в таблице координатами. График $y = \sqrt[3]{x}$ изображен на рис. 2.

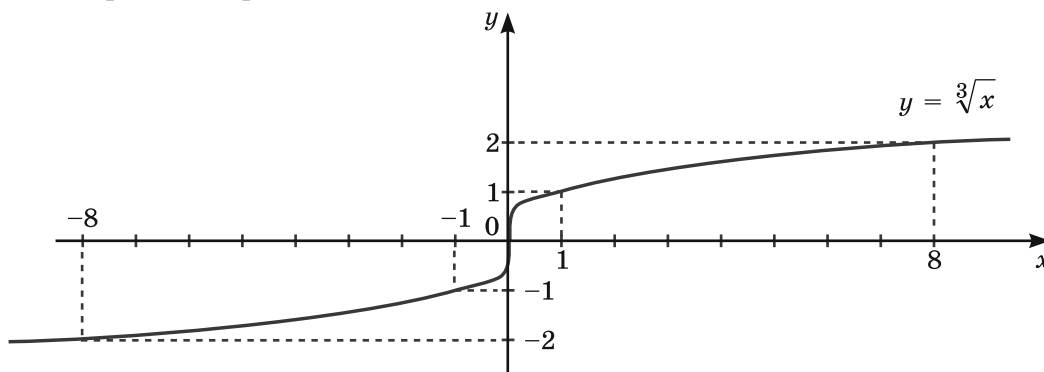


Рис. 2

Можно заметить, что эта кривая симметрична графику $y = x^3$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Подобную картину мы наблюдали и для $y = \sqrt{x}$ — ее график является правой ветвью параболы, которую симметрично отобразили относительно этой биссектрисы.

Действительно, равенство $y = x^n$ при нечетном натуральном n равносильно $x = \sqrt[n]{y}$. Поэтому для построения графика $y = \sqrt[n]{x}$ достаточно в графике $y = x^n$ поменять местами x и y , то есть отразить его симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. График $y = x^n$ изображен на рис. 3.

Равенство $y = x^n$ при четном натуральном n равносильно $x = \sqrt[n]{y}$, только если $x \geq 0$. Значит, если мы хотим построить график $y = \sqrt[n]{x}$, то нужно отразить симметрично от-

носителем биссектрисы первого координатного угла только правую («положительную») часть кривой $y = x^n$ (рис. 4).

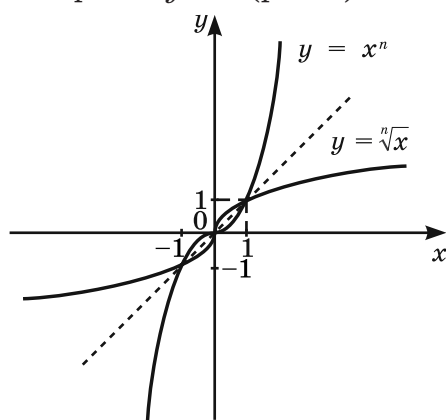


Рис. 3

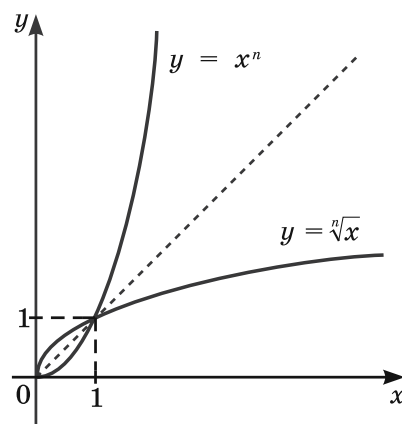


Рис. 4

Если построить график $y = \sqrt[n]{x}$ по точкам (например, для $n = 4$), то, естественно, получится такая же картина.

x	0	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$	16
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	2

График $y = \sqrt[4]{x}$ изображен на рисунке 5.

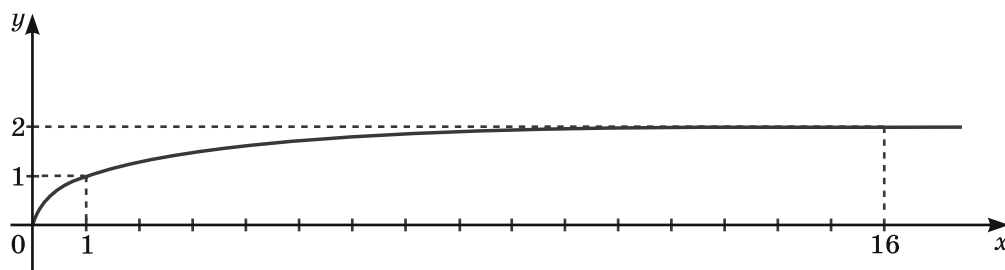


Рис. 5

Теперь сформулируем **основные свойства функции** $y = \sqrt[n]{x}$.

1. Область определения функции $y = \sqrt[n]{x}$:

- при нечетном натуральном n : $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- при четном натуральном n : $D(y) = [0; +\infty)$.

2. Область значений функции $y = \sqrt[n]{x}$:

- при нечетном натуральном n : $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
- при четном натуральном n : $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ равна нулю при $x = 0$.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном натуральном n положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при четном натуральном n положительна при $x > 0$.

4. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ строго возрастает на своей области определения, то есть на $(-\infty; +\infty)$ при нечетном натуральном n и на $[0; +\infty)$ при четном натуральном n .

Доказательство (методом от противного).

Если наше утверждение неверно, то найдутся x_1 и x_2 такие, что $x_1 > x_2$, но $\sqrt[n]{x_1} \leq \sqrt[n]{x_2}$ (при нечетном натуральном n), или $x_1 > x_2 \geq 0$, но $\sqrt[n]{x_1} \leq \sqrt[n]{x_2}$ (при четном натуральном n ; в этом случае $0 \leq \sqrt[n]{x_1} \leq \sqrt[n]{x_2}$). Так как функция x^n строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ при нечетном натуральном n и строго возрастает на $[0; +\infty)$ при четном натуральном n , то в любом случае $(\sqrt[n]{x_1})^n \leq (\sqrt[n]{x_2})^n$, то есть $x_1 \leq x_2$. А это противоречит тому, что $x_1 > x_2$. Значит, функция $y = \sqrt[n]{x}$ строго возрастает на своей области определения. ■

5. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном натуральном n нечетна, а при четном натуральном n не является ни четной, ни нечетной.

Доказательство.

1) Рассмотрим функцию $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном натуральном n . Ее нечетность следует из того, что при всех x : $\sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{(-1) \cdot x} = \sqrt[n]{-1} \cdot \sqrt[n]{x} = (-1) \cdot \sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{x}$.

2) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при четном натуральном n определена при $x \in [0; +\infty)$. Ее область определения несимметрична относительно точки 0 на числовой прямой, поэтому она не может быть ни четной, ни нечетной. ■

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, как и свойства любой другой функции, имеют свое применение. Например, свойство возрастания функции может быть сформулировано иначе: если $x_1 > x_2$ и n — нечетное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$; если $x_1 > x_2 \geq 0$ и n — четное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$. Данное свойство было указано в пункте 4.1.1. (свойство VII) и использовалось нами для сравнения корней высших степеней.

К

76

Какие из данных выражений не имеют смысла?

$\sqrt{-9}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[4]{-0,25}$; $\sqrt[7]{-2}$; $\sqrt[5]{-1}$; $\sqrt[6]{-81}$.

77

Начертите график функций $y = \sqrt{x}$. Определите с его помощью приблизительные значения $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Сравните числа $\sqrt{3,6}$ и $\sqrt{3,9}$, используя график. Какое свойство функции при этом используется?

78

1) Объем куба со стороной a см составляет V см³. Запишите формулу зависимости a в см от V см³.

2) Можно ли вычислить число, если известен его куб? Запишите формулу, с помощью которой можно это сделать, обозначив искомое число буквой k , а его куб — буквой c .

3) Какой единой обобщенной формулой можно записать две предыдущие зависимости? Докажите, что эта зависимость является функциональной.

79

1) Задайте функцию $y = \sqrt[3]{x}$ таблично:

x	-8	$-\frac{1}{8}$	-1	0	1	$\frac{1}{8}$	8
y							

2) Рассмотрите функцию $y = \sqrt[4]{x}$. Чем отличается область определения этой функции от области определения функции $y = \sqrt[3]{x}$?

3) Задайте функцию $y = \sqrt[4]{x}$ таблично:

x	0	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{81}{16}$	16
y					

4) Постройте графики функций, используя полученные таблицы. Сравните их с графиками, изображенными на стр. 24, 25 учебника.

5) Какие общие свойства графиков вы можете отметить? В чем различие? Почему? Сопоставьте их со свойствами на стр. 25, 26 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

80

Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x-3}$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 3$; в) $y = -\sqrt[5]{x+1}$.

81

Решите графически уравнение $\sqrt[3]{x} = 2 - x$.

82

Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -2 - x, & \text{если } x < -1 \\ \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \geq -1 \end{cases}$$

83

Постройте графики функций:

а) $y = 2 \cdot \sqrt[4]{x-2} + 1$; б) $y = |\sqrt[5]{x} - 1|$; в) $y = \sqrt[4]{|x|+1} - 1$.

π

84 Сократите дроби:

а) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$; в) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$;
 б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; г) $\frac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$.

85

Упростите выражение: $\frac{1-c}{\sqrt{c}} x^2 - 2x + \sqrt{c}$, если $x = \frac{\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}$.

86

Определите, на каких промежутках функция возрастает и убывает:

а) $y = 2\sqrt[3]{x} - 3|1 - \sqrt[3]{x}|$; б) $y = \sqrt[3]{x} + 2|1 - \sqrt[3]{x}|$.

D

87 Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x} + 2$; б) $y = \sqrt[3]{x+2}$; в) $y = -\sqrt[3]{x+1} + 1$.

88

Постройте графики функций:

а) $y = |\sqrt[4]{x} - 1|$; б) $y = \sqrt[4]{|x|+1}$.

89

Упростите выражение: $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}}$.

C

90*

Докажите, что уравнение $\sqrt[2]{2-x^2} + \sqrt[3]{3-x^3} = 0$ не имеет действительных решений.



5*. Иррациональность чисел $\sqrt[n]{a}$ 

Среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью.

Симон Стевин (1548–1620),
бельгийский математик и инженер

Мы знаем, что числа $\sqrt{a}$, где a — натуральное число, не являющееся полным квадратом, — иррациональны. Доказательство было проведено для отдельных чисел, например, для числа $\sqrt{2}$ (нами было доказано то, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2; существование действительного числа, квадрат которого равен 2, доказывается пока недоступными нам методами).

Докажем теперь в общем виде, что $\sqrt[n]{a}$, где a — натуральное число, не являющееся точной n -й степенью натурального числа, — иррациональное число. Докажем, точнее, что для такого a не существует рационального числа, n -я степень которого равна a .

Теорема 1. Пусть $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, если x — рациональное число такое, что $x^n = a$, то x — целое число.

(Иными словами, если a — натуральное число, то $\sqrt[n]{a}$ есть целое либо иррациональное число; поэтому если a не является n -й степенью натурального числа, то $\sqrt[n]{a}$ не может быть рациональным числом.)

Прежде чем доказывать эту теорему, выясним, какими вообще могут быть рациональные корни алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

Теорема 2. Пусть r — рациональный корень уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$,

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$, причем $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда p — делитель a_n , q — делитель a_0 .

Доказательство.

Так как $r = \frac{p}{q}$ — корень уравнения, то $a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0$, то есть $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$.

Так как $a_nq^n = -a_0p^n - a_1p^{n-1}q - \dots - a_{n-1}pq^{n-1}$, то $a_nq^n : p$. Но $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, значит, в разложении p и q на простые множители нет общих множителей. Так как $a_nq^n : p$, а q^n и p не имеют общих простых множителей, то все простые множители, входящие в разложение p , входят в разложение a_n с теми же или большими степенями, то есть $a_n : p$.

Аналогично $a_0 : q$ (это следует из равенства $a_0p^n = -a_1p^{n-1}q - \dots - a_{n-1}pq^{n-1} - a_nq^n$). ■

Пример.

Найти все рациональные корни уравнения $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

Решение.

Пусть $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, являющаяся корнем данного уравнения. Тогда из теоремы 2 следует, что p — делитель числа -2 , q — делитель числа 3 , $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Поэтому p может принимать значения $2; -2; 1; -1$; q может принимать значения 3 и 1 . Итого лишь 8 рациональных чисел могут быть корнями данного уравнения:

$$1; -1; 2; -2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что число $\frac{2}{3}$ удовлетворяет уравнению, остальные числа — нет. Уравнение $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ имеет единственный рациональный корень $r = \frac{2}{3}$.

Вернемся к доказательству теоремы 1.

Доказательство.

Пусть несократимая дробь $r = \frac{p}{q}$ является корнем уравнения $x^n - a = 0$ (то есть рациональное число r является корнем n -й степени из a). По теореме 2, q — делитель коэффициента $a_0 = 1$, то есть r — целое число. ■

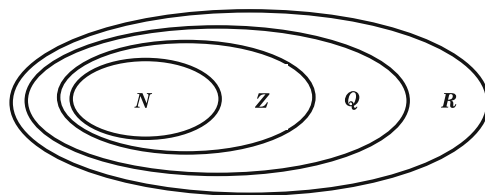
Итак, все числа вида $\sqrt[n]{a}$, где a натуральное и не является n -й степенью натурального числа, — иррациональны. Иррациональными являются числа $\sqrt{7}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{11}$ и т.д.

К

91

Рассмотрите диаграмму. Какие множества представлены на диаграмме? Покажите, где располагается множество иррациональных чисел?

Приведите пример квадратного корня, принадлежащего указанному множеству, и докажьте его иррациональность.



92

Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[5]{11}$; б*) $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$.

93

Число r — рациональное, α и β — иррациональные числа. Рациональными или иррациональными являются числа:

а) $\frac{\alpha}{3}$; б) β^2 ; в) $\alpha + r$; г) $\alpha \cdot \beta$; д) $\alpha + \beta$; е) $\frac{\alpha}{\beta}$?

Для всех ли случаев получилось дать однозначный ответ?

94

1) Чем похожи эти уравнения? Какой общий вид всех таких уравнений?

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$; в) $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

2) Решите квадратное уравнение при помощи теоремы, обратной теореме Виета. Объясните, с каких чисел вы начинали подбор корней этого уравнения. При объяснении используйте понятие «делитель». Объясните, среди каких чисел нужно искать рациональные корни этого и других квадратных уравнений.

3) Попробуйте найти рациональные корни остальных уравнений. Как вы думаете, среди каких чисел следует искать рациональные корни второго уравнения? Проверьте свою гипотезу подстановкой найденных чисел.

4) Познакомьтесь с теоремой 2 и примените ее для поиска рациональных корней третьего уравнения. Сопоставьте ход своего решения с примером на стр. 29.

95 Найдите все рациональные корни уравнений:

а) $3x^3 + 8x^2 + 9x - 4 = 0$;

б) $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 15x + 10 = 0$.

π

96 Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x+1}$;

б) $y = \sqrt[3]{|x|+1}$;

в) $y = \left| \sqrt[3]{x+1} \right|$.

97

Постройте график уравнения:

$|y^2 - 2x^2| = 2x^2$.

98

Исследуйте на четность и нечетность функции:

а) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot x + 2$;

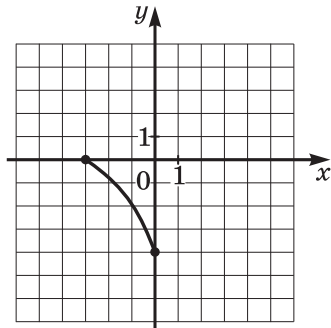
б) $y = \frac{|x|+2}{x^4} + 4$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \cdot |x|$.

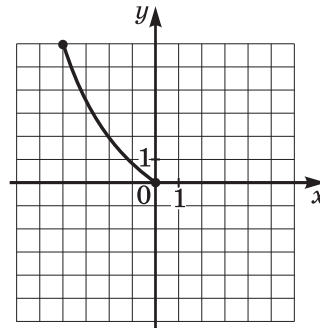
99

Достройте график

а) четной функции:



б) нечетной функции:



Д

100 Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[6]{36}$;

б*) $\sqrt[3]{5} + \sqrt{3}$.

101

Найдите все рациональные корни уравнений:

а) $4x^3 + 5x^2 + 13x + 3 = 0$;

б) $12x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 5x + 2 = 0$.

102

Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{x-1}$;

б) $y = \sqrt{|x|-1}$;

в) $y = \sqrt{|x-1|}$.

103

Исследуйте на четность и нечетность функции:

а) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$;

б) $y = \frac{x^2-1}{\sqrt[5]{x^3 \cdot x}}$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot x^2$.

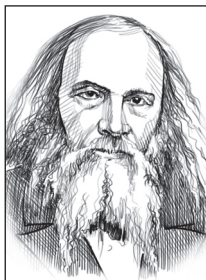
С

104*

Целые числа m и n таковы, что сумма $\sqrt{n} + \sqrt[3]{m}$ целая. Верно ли, что оба слагаемых целые?

§ 2. Решение простейших иррациональных уравнений и неравенств

1. Иррациональные уравнения



...Справедливость требует не тому отдать наибольшую научную славу, кто первый высказал известную истину, а тому, кто умел убедить в ней других, показал ее достоверность и сделал ее применимою в науке.

Д. И. Менделеев (1834–1907),
русский ученый-энциклопедист: химик, физик,
геолог, метеоролог, воздухоплаватель

Мы уже знаем, что, изучая новый вид уравнений, описывающих различные классы задач, возникающих на практике, мы расширяем свои возможности по их решению. В 8 классе мы встречались с уравнениями, содержащими неизвестную под знаком корня. Однако нам удавалось путем использования определения арифметического квадратного корня или удачной замены сводить их к известному нам виду – линейному или квадратному уравнениям.

Например:

1) $\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 6^2 \Leftrightarrow x = 36$ (по определению арифметического квадратного корня).

2) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$, пусть $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$), тогда $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$.

Отсюда, выбирая неотрицательное значение t , имеем $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.

Но эти приемы работают не всегда. В данном пункте мы подробно изучим способы решения уравнений с неизвестной под знаком корня, причем не только второй степени, но и выше. Сначала введем определение.

Определение 1. Уравнение, в котором алгебраическое выражение, содержащее неизвестную, находится под знаком корня, называется **иррациональным**.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sqrt{5x - 3x^2 + 2} = 2$; б) $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 50} = 3$.

Решение.

а) Ясно, что по определению арифметического квадратного корня уравнение $\sqrt{5x - 3x^2 + 2} = 2$ равносильно уравнению $5x - 3x^2 + 2 = 4$, то есть квадратному уравнению $3x^2 - 5x + 2 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$.

б) Ясно, что по определению кубического корня уравнение $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 50} = 3$ равносильно $x^2 + 4x - 50 = 27$, то есть $x^2 + 4x - 77 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 77}$, то есть $x_1 = 7$, $x_2 = -11$.

Ответ: $\{-11; 7\}$.

Замечание. Так как мы использовали при решении уравнения равносильное преобразование, то нет необходимости проводить проверку полученных корней подстановкой в уравнение. Конечно, для контроля правильности вычислений такая проверка иногда бывает полезной, но здесь необходимости в этом нет.

Отметим, что, используя определение корня n -й степени, мы фактически возводили обе части уравнения в n -ю степень, избавившись тем самым от знака корня. Используем эту идею для решения следующих уравнений.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{5x + 8}$; б) $\sqrt[3]{-2x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 36}$.

Решение.

а) Возведем обе части уравнения $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{5x + 8}$ в квадрат. Получим $(\sqrt{x^2 - 16})^2 = (\sqrt{5x + 8})^2$. Тогда по основному тождеству арифметического корня это уравнение сведется к квадратному $x^2 - 16 = 5x + 8$. А его решать мы умеем.

Это уравнение $x^2 - 5x - 24 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 8$, $x_2 = -3$.

Обратим внимание, что в уравнении, полученном нами с помощью возведения в квадрат, ограничения, связанные с понятием корня четной степени, уже не действуют. Значит, нужно сделать проверку. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

При $x = 8$ получим $\sqrt{8^2 - 16} = \sqrt{5 \cdot 8 + 8} \Leftrightarrow \sqrt{48} = \sqrt{48}$ (истинно)

При $x = -3$ получим $\sqrt{(-3)^2 - 16} = \sqrt{5 \cdot (-3) + 8} \Leftrightarrow \sqrt{-9} = \sqrt{-9}$, полученное равенство не имеет смысла, так как противоречит определению арифметического квадратного корня.

Значит, $x = 8$ – корень исходного уравнения, а $x = -3$ – нет (это – посторонний корень, появившийся при неравносильном преобразовании – возведении обеих частей уравнения в квадрат).

Замечание. Для отсеивания постороннего корня вместо подстановки можно было проверить, является ли хотя бы одно из выражений $x^2 - 16$ и $5x + 8$ неотрицательным для полученных корней (тогда второе будет неотрицательным в силу их равенства). Так, при $x = 8$ подкоренное выражение $x^2 - 16 > 0$, а при $x = -3$ выражение $x^2 - 16 < 0$.

Ответ: 8.

Итак, возведение в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ не является равносильным преобразованием. Конечно, $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$, но обратное утверждение верно лишь в случае $a = b \geq 0$. Поэтому при решении уравнений таким способом необходимо делать проверку на наличие посторонних корней.

б) Возведем обе части уравнения $\sqrt[3]{-2x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 36}$ в третью степень.

$\sqrt[3]{-2x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 36} \Leftrightarrow -2x - 1 = x^2 - 36$, так как $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a = b$.

Решая квадратное уравнение $x^2 + 2x - 35 = 0$, получим: $x_1 = 5$, $x_2 = -7$. Так как преобразование, использованное нами, равносильное, то проверку делать не нужно.

Ответ: $\{-7; 5\}$.

Можем записать следующие **схемы решения иррациональных уравнений**:

$$\sqrt{f(x)} = a \quad (a \geq 0) \Leftrightarrow f(x) = a^2;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^3;$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Пример 3. Решить уравнения:

а) $x+17=10\sqrt{x-4}$; б) $x=32+2\sqrt{x+3}$; в) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+5x+100}$.

Решение.

а) 1-й способ. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим уравнение $(x+17)^2=100(x-4)$. Решим полученное квадратное уравнение $x^2+34x+289=100x-400 \Leftrightarrow x^2-66x+689=0 \Leftrightarrow x_1=53, x_2=13$.

Так как использованное нами преобразование $a=\sqrt{b} \Rightarrow a^2=b$ равносильно, только если $a \geq 0$, нужно сделать проверку на наличие посторонних корней.

При $x=53$ и $x=13$ выражение $x+17 > 0$, и возведение в квадрат обеих частей уравнения не приведет к появлению посторонних корней (проверять неотрицательность выражения под знаком корня не имеет смысла, так как из выполнения равенства $b=a^2$ автоматически следует, что $b \geq 0$).

Заметим, что проверку можно было сделать и непосредственной подстановкой корней в исходное уравнение.

При решении подобных уравнений можно «избавиться» от знака радикала и по-другому – хорошо знакомым нам методом введения нового неизвестного.

2-й способ. Сделаем замену $t=\sqrt{x-4}$ (обращаем внимание на то, что $t \geq 0$). Тогда $t^2=x-4$ и $x=t^2+4$. Уравнение примет вид $t^2+4+17=10t$, т.е. $t^2-10t+21=0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: $t_1=7, t_2=3$. Проверим условие $t \geq 0$ – оба корня неотрицательны. Перейдем к «старому» неизвестному: $x_1=7^2+4=53, x_2=3^2+4=13$.

Ответ: $\{13, 53\}$.

б) 1-й способ. Возведем обе части уравнения в квадрат. Учитывая, что это преобразование будет равносильным только при неотрицательности левой части уравнения, можем записать следующую равносильность:

$$x-32=2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-32)^2=4(x+3) \\ x \geq 32 \end{cases}.$$

Квадратное уравнение, входящее в систему, имеет вид $x^2-64x+1024=4x+12$, то есть $x^2-68x+1012=0$. Оно имеет корни $x_{1,2}=34 \pm \sqrt{1156-1012}=34 \pm 12$, то есть $x_1=46, x_2=22$. Но только первый из этих корней удовлетворяет условию $x \geq 32$, поэтому только он является корнем исходного уравнения.

Заметим, что это уравнение тоже можно было решить введением нового неизвестного.

2-й способ. Сделаем замену $\sqrt{x+3}=t$ ($t \geq 0$); тогда $x=t^2-3$. Уравнение примет вид $t^2-3=32+2t$, то есть $t^2-2t-35=0$, откуда $t_1=7, t_2=-5$. Учитывая, что $t \geq 0$, подходит только положительный корень $t=7$.

Перейдем к «старому» неизвестному: $x=7^2-3=46$.

Ответ: 46.

в) Так как $a=\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a^3=b$, то исходное уравнение равносильно $(x+1)^3=x^3+2x^2+5x+100$ (возведение обеих частей уравнения в куб является равносильным преобразованием). Уравнение преобразуется к виду

$$x^3+3x^2+3x+1=x^3+2x^2+5x+100 \Leftrightarrow x^2-2x-99=0.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1=-9, x_2=11$.

Ответ: $\{-9, 11\}$.

Можем записать следующие схемы решений иррациональных уравнений:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}; \quad \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^3.$$

Обратим внимание на то, что при решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ мы не находили область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. ОДЗ уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (если функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду определены) является множеством решений неравенства $f(x) \geq 0$. Но после возведения в квадрат получаем уравнение $f(x) = (g(x))^2$, для решений которого неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется автоматически. А вот условие $g(x) \geq 0$ проверять нужно. Заметим, что вместо этой проверки можно подставить корни в исходное уравнение, но эта процедура может быть очень громоздкой (например, если полученные корни иррациональны).

Полученные нами схемы для квадратного корня сохраняются для корней любой четной степени, а схема кубического корня – для корней любой нечетной степени.

Итак, **решить иррациональное уравнение, содержащее корни n -й степени, можно следующими способами:**

1 способ. Для уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$ использовать определение корня n -й степени.

2 способ. Для уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ возвести обе части уравнения в n -ю степень, добиваясь перехода к уравнению без знака корня. При четном n необходимо учитывать возможность появления посторонних корней.

3 способ. Провести замену неизвестного $\sqrt[n]{f(x)} = t$, учитывая в ходе дальнейшего решения, что $t \geq 0$.

* * *

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} + x = 7$.

Решение.

Решение этого уравнения последовательным возведением в квадрат сведется к уравнению четвертой степени с последующей проверкой, поэтому проще поступить иначе. Заметим, что уравнение имеет корень $x = 4$.

Покажем, что других корней уравнение не имеет. Левая часть этого уравнения определена при $x \geq 3$, и все три слагаемых в левой части являются строго возрастающими функциями на $[3; +\infty)$. Поэтому левая часть уравнения $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-3} + x$ является строго возрастающей функцией на $[3; +\infty)$. Но $f(4) = 7$, значит, при $x > 4$ выполняется неравенство $f(x) > f(4) = 7$, а при $3 \leq x < 4$ выполняется неравенство $f(x) < f(4) = 7$. Значит $f(x) = 7 \Leftrightarrow x = 4$, то есть единственным решением уравнения является число $x = 4$.

Ответ: 4.

Это решение основано на том факте, что строго возрастающая функция принимает каждое свое значение ровно 1 раз. Поэтому если удастся угадать одно решение такого уравнения, то оно будет единственным.

Отметим, что такой метод применяется не только для иррациональных уравнений, но и для уравнений более широких классов.

К

105 Какие из утверждений являются неверными?

а) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$;

б) $a = b \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$;

в) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$;

г) $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases}$;

д) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \end{cases}$;

е) $a = \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a^3 = b$.

106

1) Решите уравнения $\sqrt{x} = 2$ и $\sqrt[3]{x} = -2$, используя известное понятие корня n -й степени.2) По аналогии решите уравнение: $\sqrt[3]{x^2 + 7} = 2$.

3) Как можно по-другому описать выполненное в ходе решения преобразование:

$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^2$,

$\sqrt[3]{x} = -2 \Leftrightarrow x = (-2)^3$,

$\sqrt[3]{x^2 + 7} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 7 = 2^3$,

используя понятие «возведение в степень»? Поясните, почему это преобразование является равносильным.

107

1) С помощью какого преобразования можно свести уравнение $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x + 4}$ к уравнению, способ решения которого уже известен? Решите уравнение и сделайте проверку. Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным.2) С помощью какого преобразования можно свести уравнение $\sqrt{12 - 4x} = x$ к уравнению, способ решения которого уже известен? Решите уравнение и сделайте проверку. Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным.

3) Можно ли применять использованные вами способы решения для всех иррациональных уравнений такого вида? Составьте правило решения таких уравнений и сопоставьте его с правилом на стр. 33.

108

Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x^2 - 3x + 10} = 3$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = -2$;

в) $\sqrt[3]{x^2 - 11} = -2$.

109

Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{2x - 6}$;

б) $\sqrt[3]{x^2 + x} = \sqrt[3]{-2x - 2}$.

110

Решите уравнения:

а) $2x = 1 + \sqrt{x^2 - 5x + 5}$;

б) $\sqrt[3]{x^2 - 5x - 14 - x^3} + x = 0$.

111

Решите уравнение: $\sqrt{2x} + \sqrt{x - 1} = 9 - 3x$.

π

112 Дана последовательность $a_n = 9n - 5n^2 + 2$. Сколько в этой последовательности положительных членов? Найдите наибольший член последовательности.

113

Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = \frac{4n - 1}{3n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите,что $a_n < 1 \frac{1}{3}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность (a_n) является возрастающей.

114

Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[4]{4}$;

б*) $\sqrt[5]{3} - \sqrt{3}$.

115

Найдите все рациональные корни уравнения $x^3 - 8x^2 + 9x - 2 = 0$.

D

116 Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-7}=-3$; б) $\sqrt{x^2-6x-4}=1$; в) $\sqrt[3]{x^2+2x-7}=2$.

117

Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-6x+7}=\sqrt{x-3}$; б) $\sqrt[3]{x^2-5}=\sqrt[3]{1-x}$.

118

Решите уравнения:

а) $x+1=\sqrt{x+13}$; б) $\sqrt[3]{x^3+4x^2+6x-3}=x+1$.

119

Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{2x}+x=7$.

120

Дана последовательность $a_n = 3n^2 - 5n - 12$. Сколько в этой последовательности отрицательных членов? Найдите наименьший член последовательности.

121

Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = \frac{3n+1}{4n-3}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $a_n > 0,75$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность (a_n) является убывающей.

122

Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[5]{5}$; б*) $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}$.

123

Найдите все рациональные корни уравнения $-2x^3-3x^2+5x+6=0$.

C

124*

Решите неравенство: $[x] \cdot \{x\} < x - 1$.

2.* Иррациональные неравенства



...Человека, умеющего наблюдать и анализировать, обмануть просто невозможно. Его выводы будут безошибочны, как теоремы Евклида.

А. Конан Дойл (1859–1930),
шотландский и английский писатель

В предыдущем пункте мы научились решать простейшие иррациональные уравнения. Естественно помимо иррациональных уравнений рассмотреть и аналогичные неравенства.

Определение 1. Неравенство, в котором алгебраическое выражение, содержащее неизвестную, находится под знаком корня, называется **иррациональным**.

Так же как и при решении иррациональных уравнений, при решении иррациональных неравенств мы будем использовать возведение обеих частей неравенства в нужную нам степень. При этом при возведении обеих частей неравенства в четную степень будем следить за знаками левой и правой частей, чтобы отслеживать равносильность выполненных нами преобразований. Начнем с самых простых примеров.

Пример 1. Решить неравенства:

- а) $\sqrt{3x+5} \geq 2$; б) $\sqrt{4x-1} < 2$;
 в) $\sqrt[3]{5x+1} \geq 3$; г) $\sqrt[3]{2x-1} < -5$.

Решение.

а) Если b – положительное число, то $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq b^2$ (a обязано быть неотрицательным, но для всех a , удовлетворяющих неравенству $a \geq b^2$, автоматически выполняется условие $a \geq 0$). Поэтому $\sqrt{3x+5} \geq 2 \Leftrightarrow 3x+5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

б) Если b – положительное число, то $\sqrt{a} < b \Rightarrow a < b^2$. Равносильности здесь уже нет, так из выполнения неравенства $a < b^2$ вовсе не следует, что $a \geq 0$, и a может быть отрицательным. А вот если $a \geq 0$, то $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow a < b^2$. Поэтому в общем случае

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2 \\ a \geq 0 \end{cases}, \text{ то есть } \sqrt{a} < b \Leftrightarrow 0 \leq a < b^2.$$

$$\text{Итак, } \sqrt{4x-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq 4x-1 < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{4}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

в) $\sqrt[3]{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq b^3$ (функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой), поэтому

$$\sqrt[3]{5x+1} \geq 3 \Leftrightarrow 5x+1 \geq 27 \Leftrightarrow x \geq \frac{26}{5}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{26}{5}; +\infty\right)$.

$$\text{г) } \sqrt[3]{a} < b \Leftrightarrow a < b^3; \text{ поэтому } \sqrt[3]{2x-1} < -5 \Leftrightarrow 2x-1 < -125 \Leftrightarrow x < -62.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -62)$.

Как мы знаем, возведение в квадрат является неравносильным преобразованием в случае, когда одна из частей неравенства отрицательна. Рассмотрим примеры, показывающие, как решаются иррациональные неравенства в этом случае.

Пример 2. Решить неравенства:

- а) $\sqrt{4x+3} \leq -2$; б) $\sqrt{5x-4} > -6$.

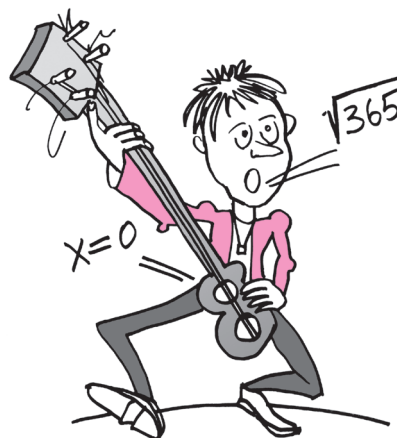
Решение.

а) Если b – отрицательное число, то неравенство $\sqrt{a} \leq b$ невозможно, так как a обязано быть неотрицательным, и для всех $a \geq 0$ выполнено $\sqrt{a} \geq 0$.

Ответ: $x \in \emptyset$.

б) Если b – отрицательное число, то $\sqrt{a} > b \Leftrightarrow a \geq 0$ (a обязано быть неотрицательным, и тогда $\sqrt{a} \geq 0 > b$). Поэтому $5x-4 \geq 0$, $x \geq \frac{4}{5}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$.



Рассмотрим неравенства, где под знаком корня стоит квадратный трехчлен.

Пример 3. Решить неравенства:

$$\text{а) } \sqrt{3x^2 - 10x + 7} \geq 2; \quad \text{б) } \sqrt{x^2 - 35x} < 6; \quad \text{в) } \sqrt[3]{x^2 - x} \leq 4; \quad \text{г) } \sqrt[3]{x^2 + 9x} > -2.$$

Решение.

$$\text{а) } \sqrt{3x^2 - 10x + 7} \geq 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 \geq 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 \geq 0.$$

Квадратный трехчлен имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty).$$

$$\text{б) } \sqrt{x^2 - 35x} < 6 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 35x < 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 35x \geq 0 \\ x^2 - 35x < 36 \end{cases}.$$

Квадратный трехчлен $x^2 - 35x$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 35$, поэтому неравенство $x^2 - 35x \geq 0$ имеет множество решений $(-\infty; 0] \cup [35; +\infty)$. Далее, $x^2 - 35x < 36 \Leftrightarrow x^2 - 35x - 36 < 0$. Квадратный трехчлен $x^2 - 35x - 36$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 36$, поэтому неравенство $x^2 - 35x - 36 < 0$ имеет множество решений $x \in (-1; 36)$. Пересекая полученные множества решений, получаем ответ: $x \in (-1; 0] \cup [35; 36)$.

Ответ: $x \in (-1; 0] \cup [35; 36)$.

$\text{в) } \sqrt[3]{x^2 - x} \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 64 \Leftrightarrow x^2 - x - 64 \leq 0$. Квадратный трехчлен $x^2 - x - 64$ имеет корни $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{257}}{2}$.

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{1 - \sqrt{257}}{2}; \frac{1 + \sqrt{257}}{2}\right].$$

$\text{г) } \sqrt[3]{x^2 + 9x} > -2 \Leftrightarrow x^2 + 9x > -8 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 8 > 0$. Квадратный трехчлен имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = -8$.

Ответ: $x \in (-\infty; -8) \cup (-1; +\infty)$.

Итак, мы можем использовать следующие **схемы решений иррациональных неравенств**:

$$\sqrt{f(x)} > a \ (a \geq 0) \Leftrightarrow f(x) > a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} \geq a \ (a \geq 0) \Leftrightarrow f(x) \geq a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} < a \ (a > 0) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} \leq a \ (a \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} > a \ (a < 0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0;$$

$$\sqrt{f(x)} \geq a \ (a < 0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0;$$

$$\sqrt{f(x)} < a \ (a < 0) \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$\sqrt{f(x)} \leq a \ (a \leq 0) \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\sqrt[3]{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^3;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} \geq a \Leftrightarrow f(x) \geq a^3;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} < a \Leftrightarrow f(x) < a^3;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} \leq a \Leftrightarrow f(x) \leq a^3.$$

Мы познакомились с простейшими иррациональными неравенствами. Рассмотрим примеры решения более сложных неравенств.

Пример 4. Решить неравенства:

$$\text{а) } (3x^2 - 16x + 21)\sqrt{2x + 5} \leq 0; \quad \text{б) } (2x + 3)\sqrt{6 + x - x^2} \geq 0; \quad \text{в) } \sqrt{4x + 7} < \sqrt{x^2 - 2x}.$$

Решение.

а) Заметим, что $\sqrt{2x+5} \geq 0$ для всех значений x из области допустимых значений переменной, т.е. для всех $x \geq -\frac{5}{2}$. Но если $x > -\frac{5}{2}$, то $\sqrt{2x+5} > 0$, и неравенство равносильно $3x^2 - 16x + 21 \leq 0$. Квадратный трехчлен имеет корни $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 3 \cdot 21}}{3}$, т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{7}{3}$; множество решений неравенства $x \in \left[\frac{7}{3}; 3\right]$. Все эти числа удовлетворяют условию $x > -\frac{5}{2}$, поэтому являются решениями исходного неравенства. Если $x = -\frac{5}{2}$, то левая часть неравенства равна 0, и неравенства выполняются.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup \left[\frac{7}{3}; 3\right]$.

б) Заметим, что $\sqrt{6+x-x^2} \geq 0$ при всех x из области допустимых значений переменной, т.е. для всех решений неравенства $6+x-x^2 \geq 0$, т.е. для всех $x \in [-2; 3]$. Но при $x \in (-2; 3)$ выполняется неравенство $6+x-x^2 > 0$, и неравенство равносильно $2x+3 \geq 0$, т.е. $x \geq -\frac{3}{2}$. Пересекая с интервалом $(-2; 3)$, получаем $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$. Все эти числа являются решениями исходного неравенства. А если $x = -2$ или $x = 3$, то левая часть неравенства равна 0, и неравенство выполняется.

Ответ: $x \in \{-2\} \cup \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

в) $\sqrt{4x+7} < \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow 0 \leq 4x+7 < x^2-2x$ (попробуйте объяснить, почему это так).

Далее, $0 \leq 4x+7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{4}$; $4x+7 < x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-7 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

Пересекая полученные множества решений, получим ответ: $x \in \left[-\frac{7}{4}; -1\right) \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{7}{4}; -1\right) \cup (7; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x+1} > x-1$; б) $\sqrt{5-x^2} \geq x+1$; в) $\sqrt{x+5} < x-1$; г) $\sqrt{x^2-5} \leq 2x-4$.

Решение.

а) 1-й способ. В правой части неравенства стоит функция, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому возведение в квадрат будет неэквивалентным преобразованием. Необходимо рассмотреть два случая: $x-1 < 0$ и $x-1 \geq 0$.

1) $x-1 < 0$. Тогда левая часть неравенства неотрицательна при всех таких x из ОДЗ: $x+1 \geq 0$, а правая – отрицательна, и неравенство выполнено. Получаем систему $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, решение которой $-1 \leq x < 1$.

2) $x-1 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x+1 > (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x < 0$. При этом подкоренное выражение $x+1$ автоматически будет неотрицательным. Получаем систему $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-3x < 0 \end{cases}$, решение которой $1 \leq x < 3$.

Объединяя найденные множества решений, получаем ответ: $x \in [-1; 3)$.

2-й способ. Сделаем замену $t = \sqrt{x+1}$ ($t \geq 0$). Тогда $x = t^2 - 1$. Неравенство примет вид $t > t^2 - 2$, т.е. $t^2 - t - 2 < 0$. Это квадратное неравенство имеет решение $-1 < t < 2$. Учитывая $t \geq 0$, получаем $0 \leq t < 2$. Значит, $0 \leq \sqrt{x+1} < 2$. Получаем неравенство $0 \leq x+1 < 4$, решение которого $-1 \leq x < 3$.

Ответ: $x \in [-1; 3)$.

б) Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $x+1 < 0$ и $x+1 \geq 0$.

1) $x+1 < 0$. Тогда левая часть неравенства неотрицательна при всех таких x из ОДЗ: $5 - x^2 \geq 0$. Получаем систему $\begin{cases} x+1 < 0 \\ 5 - x^2 \geq 0 \end{cases}$, решение которой $-\sqrt{5} \leq x < -1$.

2) $x+1 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $5 - x^2 \geq (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$. Получаем систему $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$, решение которой $-1 \leq x \leq 1$.

Объединяя найденные множества решений, получаем ответ: $x \in [-\sqrt{5}; 1]$.

Ответ: $x \in [-\sqrt{5}; 1]$.

в) 1-й способ. Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $x-1 < 0$ и $x-1 \geq 0$.

1) $x-1 < 0$. Тогда при всех таких x из ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому в этом случае решений нет.

2) $x-1 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x+5 < (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$. При этом необходимо проверить, что подкоренное выражение

$x+5$ будет неотрицательным (т.е. $x+5 \geq 0$). Получаем систему $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$, решение кото-

рой $x > 4$.

2-й способ. Сделаем замену $t = \sqrt{x+5}$ ($t \geq 0$). Тогда $x = t^2 - 5$. Неравенство примет вид: $t < t^2 - 6$, $0 < t^2 - t - 6$, и, с учетом $t \geq 0$, получаем: $3 < t$, $3 < \sqrt{x+5}$, $9 < x+5$.

Ответ: $x \in (4; +\infty)$.

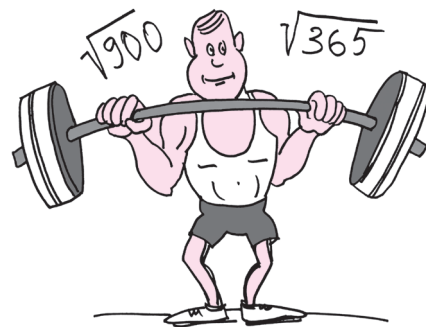
г) Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $2x-4 < 0$ и $2x-4 \geq 0$.

1) $2x-4 < 0$. Тогда при всех таких x из ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому в этом случае решений нет.

2) $2x-4 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x^2 - 5 \leq (2x-4)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 21 \geq 0$. При этом необходимо проверить, что подкоренное выражение $x^2 - 5$ будет неотрицатель-

ным (т.е. $x^2 - 5 \geq 0$). Получаем систему $\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x^2 - 5 \geq 0 \\ 3x^2 - 16x + 21 \geq 0 \end{cases}$, решение которой $\left[\sqrt{5}; \frac{7}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{7}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.



Мы можем использовать следующие схемы решения иррациональных неравенств такого вида:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

K

125 Какие из утверждений являются неверными?

а) $b^2 \geq 0$;

г) $\sqrt[3]{a} < b \Leftrightarrow a < b^3$;

б) $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq b^2$;

д) $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2 \\ a \geq 0 \end{cases}$;

в) $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow a < b^2$;

е) $\sqrt[3]{a} > b \Leftrightarrow a > b^3$.

Обоснуйте свой ответ, приводя контрпример.

126

1) С помощью какого преобразования можно привести неравенство $\sqrt{3x+5} \geq 2$ к неравенству, способ решения которого известен? Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным. Решите неравенство и сопоставьте ход решения с решением, изложенным на стр. 37.

2) С помощью какого преобразования можно привести неравенство $\sqrt{4x-1} < 2$ к неравенству, способ решения которого известен? Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным. Решите неравенство и сопоставьте ход решения с решением, изложенным на стр. 37.

3) Можно ли применять использованные вами способы решения для всех иррациональных неравенств такого вида? Познакомьтесь со способом решения аналогичных неравенств со знаком корня 3-й степени, разобрав решение остальных неравенств из примера 1.

127

Решите неравенства:

а) $\sqrt{7x+1} \geq 2$;

в) $\sqrt{2x+1} < 2$;

д) $\sqrt[3]{3x-2} > 3$.

б) $\sqrt{2x-1} \leq -1$;

г) $\sqrt[3]{x-1} \leq -2$;

128

Решите неравенства:

а) $\sqrt{5x+7-2x^2} > 2$;

б) $\sqrt{x^2-4} \leq 3$;

в) $\sqrt[3]{x^2-2x+1} > 2$.

129

Решите неравенства:

а) $(x^2-x-6)\sqrt{x+1} \geq 0$;

б) $(x-2)\sqrt{x^2-6x+5} \geq 0$;

в) $\sqrt{x+6} < \sqrt{x^2+2x}$.

142 Решите уравнения:

- а) $\sqrt{5x-3x^2+7}=3$; в) $\sqrt[3]{x^2+11x+1}=-3$;
 б) $\sqrt{40-x^2}=\sqrt{4-9x}$; г) $\sqrt[3]{6+2x^2}=\sqrt[3]{5+4x}$.

143 Решите уравнения:

- а) $5-x+\sqrt{x-2}=3$; б) $2\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}=2$; в) $x+2=\sqrt[3]{x^3+7x^2-2x+41}$.

с 144* Для последовательности Фибоначчи ($F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$) найдите значение выражения: $F_{2012}^2 - F_{2011} \cdot F_{2013}$.

Экспресс-тест № 6

Примерное время выполнения – 60 минут

Часть А

№ 1			
1	2	3	4

№ 1. Установите соответствие между данными выражениями:

- 1) $-10\sqrt{(-243)^2}$; 2) $\sqrt[8]{(-3)^8}$; 3) $\sqrt[28]{t^7}$; 4) $\sqrt{\sqrt{t}}$

и выражениями, являющимися их упрощениями.

- А) 3; Б) $\sqrt[4]{|t|}$; В) -3; Г) $\sqrt[4]{t}$.

№ 2

№ 2. Найдите наименьшее целое число, не меньшее числа $\sqrt[4]{255}$.

- А) 16; Б) 3; В) 4; Г) 5.

№ 3			
1	2	3	4

№ 3. Представьте каждое из выражений в виде одного корня некоторой степени:

- 1) $\sqrt[9]{12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{18}}}$; 2) $\frac{\sqrt[9]{16}}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt[6]{4 \cdot \sqrt{5}}}{\sqrt[3]{10}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{21}}{\sqrt[9]{7 \cdot \sqrt[3]{3}}}$

и установите соответствие с предложенными ответами:

- А) $\sqrt[18]{125}$; Б) $\sqrt[18]{\frac{7}{27}}$; В) $\sqrt[18]{0,5}$; Г) $\sqrt[18]{486}$.

№ 4

№ 4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{5}{\sqrt[5]{-5}}$.

- А) $\sqrt[5]{625}$; Б) $-\sqrt[5]{625}$; В) 1; Г) -1.

№ 5

№ 5. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

- А) -5; 7; Б) 0,5; В) 6; Г) 7.

№ 6

№ 6. Упростите выражение: $\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{16})}$.

- А) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$; Б) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; В) $\frac{\sqrt{x}-2}{x+4}$; Г) $\frac{1}{2}$.

Часть В

(ход решения записывается на отдельном листе)

№ 7

№ 7. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} \right)^2 \cdot \frac{a-b}{4(\sqrt{a}+\sqrt{b})}.$$

- А) $\frac{a-b}{8\sqrt[4]{a}}$; Б) 0; В) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; Г) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

№ 8

№ 8. Найдите все рациональные корни уравнения:

$$4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

- А) 0,5; 2; Б) -0,5; 0,5; -2; 2; В) 1; 4; Г) $\emptyset$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 9. Определите наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x^2 - 3x} > 4 - x$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1				№ 2	№ 3				№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
1	2	3	4	B	1	2	3	4	B	Г	B	Г	A
B	A	B	Г		Г	B	A	B					
№ 9													
$\sqrt{x^2 - 3x} > 4 - x$ Данное неравенство равносильно совокупности двух систем: $\left\{ \begin{array}{l} 4 - x < 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 4 \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x > 3,2 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x > (4 - x)^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x > 3,2 \end{array} \right.$ Наименьшим целым решением неравенства $x > 3,2$ является число 4. Ответ: 4.													

Шкала успешности:

10–11 баллов – отлично
8–9 баллов – хорошо
5–7 баллов – удовлетворительно

§ 3. Расширение понятия степени

1. Степень с целым показателем



Пусть кто-нибудь попробует вычеркнуть из математики степени, и он увидит, что без них далеко не уедешь.

М.В. Ломоносов (1711–1765),
первый русский ученый-естествоиспытатель,
энциклопедист

Мы знаем определение степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

и определение степени с нулевым показателем:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0),$$

а также свойства степеней:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}, \text{ если } m \geq n, a \neq 0; \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Вспомним историю развития понятия степени. Сначала мы рассматривали степень только положительных чисел, затем отрицательных. В 7 классе мы ввели понятие степени для рационального числа a , потом, познакомившись с иррациональными числами, естественным образом распространили известное нам понятие степени (и ее свойства) на множество действительных чисел. Поэтому теперь мы оперируем определением степени с основанием $a \in \mathbf{R}$ и показателем $n \in N_0$.

Далее мы продолжим расширять понятие степени – только теперь мы будем расширять множество значений, которые может принимать показатель степени. Расширим его до множества целых чисел. Первый шаг был сделан нами в 7 классе: мы ввели определение для степени числа с нулевым показателем ($a^0 = 1$). В этом пункте мы рассмотрим степень с отрицательным показателем.

Чтобы расширить известное нам определение на случай целого отрицательного показателя, воспользуемся фундаментальным принципом развития математической теории: *вновь введенное понятие не должно нарушать все доказанные ранее свойства*.

Рассмотрим степень a^{-n} ($n \in N$), представим ее в виде a^{0-n} , тогда, сохраняя известное нам свойство частного степеней, будем считать, что $a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.

Введем следующее определение степени с целым отрицательным показателем.

Определение. Пусть $a \neq 0$, тогда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in N$.

Так, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ и т.д.

Эта запись облегчает запись десятичных дробей с большим числом нулей после запятой. Их можно записывать в виде отрицательных степеней числа 10:

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}; \text{ аналогично } 0,000001 = 10^{-6}.$$

$$0,0003 = \frac{3}{10\,000} = 3 \cdot \frac{3}{10^4} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ и т.д.}$$

Самое важное, что при таком определении все **основные свойства степени**:

$$\text{I. } a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$\text{II. } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$\text{III. } (a^m)^n = a^{mn}$$

сохраняются при всех целых значениях m, n (а не только натуральных). Только теперь мы будем считать, что $a \neq 0$ (число 0 нельзя возводить в нулевую степень и целую отрицательную степень; при этом $0^n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$).

Например, $a^{-5} \cdot a^{-6} = a^{-11}$; $\frac{a^{23}}{a^{-3}} = a^{26}$; $(a^3)^{-5} = a^{-15}$ и т.д.

* * *

Докажем свойства I – III (соответствующие свойства для $m, n \in \mathbb{N}$ считаем известными).

Доказательство.

I. Если одно из чисел m, n равно нулю (например, $m = 0$), то независимо от n $a^{m+n} = a^{0+n} = a^n = 1 \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = a^m \cdot a^n$. Если ни одно из чисел m, n не равно 0, то рассмотрим разные случаи знаков чисел m и n .

1) Если $m, n \in \mathbb{N}$ – свойство известно.

2) Если m, n – целые отрицательные числа, то $m = -p, n = -q$, где $p, q \in \mathbb{N}$.

$$\text{Тогда } a^{m+n} = a^{-p-q} = a^{-(p+q)} = \frac{1}{a^{p+q}} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = a^{-p} \cdot a^{-q} = a^m \cdot a^n.$$

3) Пусть теперь числа m и n разного знака (для определенности $m > 0, n < 0$).

Тогда $n = -p, p \in \mathbb{N}$, и $a^{m+n} = a^{m-p}$.

$$\text{Если } m = p, \text{ то } a^{m+n} = a^0 = 1 = \frac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n.$$

$$\text{Если } m > p, \text{ то } a^{m+n} = a^{m-p} = \frac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n.$$

Наконец, если $m < p$, то $p - m \in \mathbb{N}$.

$$\text{Тогда } a^{m+n} = a^{m-p} = a^{-(p-m)} = \frac{1}{a^{p-m}} = \frac{1}{\frac{a^p}{a^m}} = \frac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n.$$

Свойство I доказано для любых $m, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.

II. Пусть $-n = p \in \mathbb{Z}$. Тогда при любом $a \neq 0$ $a^{m-n} = a^{m+p} = a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n}$ (свойство уже доказано при всех $m, p \in \mathbb{Z}$). Но $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ при любом целом (а не только натуральном) n . В самом деле, при $n \in \mathbb{N}$ это следует из определения.

$$\text{При } n = 0 \text{ имеем: } a^{-0} = a^0 = 1 = \frac{1}{a^0}.$$

$$\text{Наконец, при } n = -k, k \in \mathbb{N} \text{ имеем: } a^{-n} = a^k = \frac{1}{\frac{1}{a^k}} = \frac{1}{a^{-k}}. \text{ Поэтому при любых } m, n:$$

$$a^{m-n} = a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Свойство II доказано для любых $m, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0$. Отметим, что тем самым доказано, что $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ при любом целом n .

III. Так как $1^n = 1$ для любого целого n , то

при $m = 0$ имеем: $(a^m)^n = (a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{mn}$;

при $n = 0$ имеем: $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{mn}$.

Пусть теперь ни одно из чисел m, n не равно 0. Рассмотрим разные случаи знаков чисел m и n .

Если $m, n \in N$ – свойство известно.

Если $m < 0, n < 0$, то $m = -p, n = -q, p, q \in N$.

$$\text{Тогда } (a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{(a^p)^q}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}} = a^{pq} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}.$$

Если $m < 0, n > 0$, то $m = -p, p \in N$.

$$\text{Тогда } (a^m)^n = (a^{-p})^n = \left(\frac{1}{a^p}\right)^n = \frac{1}{(a^p)^n} = \frac{1}{a^{pn}} = a^{-pn} = a^{mn}.$$

Наконец, если $m > 0, n < 0$, то $n = -q, q \in N$.

$$\text{Тогда } (a^m)^n = (a^m)^{-q} = \frac{1}{(a^m)^q} = \frac{1}{a^{mq}} = a^{-mq} = a^{mn}.$$

Свойство III доказано для любых $m, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0$. ■

Приведем более сложные примеры преобразования выражений, содержащих степени с целыми показателями.

Пример 1. Упростить выражения:

$$\text{а) } \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \cdot (2,25)^{-3}}{(3,375)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4}; \quad \text{б) } \frac{((-2)^3)^5 \cdot 4^{-2}}{(-2)^{14} \cdot 2^{-3}}; \quad \text{в) } (1 - (1 - 2^{-1})^{-1})^{-1} + (1 + (1 + 2^{-1})^{-1})^{-1}.$$

Решение.

а) Приведем степени к одному и тому же основанию.

$$\text{Заметим, что } 2,25 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, 3,375 = \left(\frac{3}{2}\right)^3, \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}.$$

Поэтому искомое выражение равно

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-3}}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5+4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{б) Искомое выражение равно } \frac{(-2)^{15} \cdot (2^2)^{-2}}{(-2)^{14} \cdot 2^{-3}} = (-2) \cdot \frac{2^{-4}}{2^{-3}} = (-2) \cdot 2^{-4+3} = (-2) \cdot 2^{-1} = -1.$$

в) Так как $1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, а $1 + 2^{-1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, то искомое выражение равно

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} + \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} = (1 - 2)^{-1} + \left(1 + \frac{2}{3}\right)^{-1} = (-1)^{-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Упростить выражения:

$$\text{а) } \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-2n} - b^{-2n}} : \left(\frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}, \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} + b^{-2}}\right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{b}{3a}\right)^{-1} + \left(\frac{a}{3b}\right)^{-1}\right)^{-1} \cdot \frac{3(a^{-1} + b^{-1})}{(ab)^{-1}};$$

$$\text{в) } \left(\left(\frac{9^{-2}}{a^{-24}} - \frac{16}{b^{-8}}\right) : \left(\frac{a^{12}}{3^2} + \frac{b^4}{2^{-2}}\right)\right) : \left(\frac{3^{-1}}{a^{-6}} - \frac{1}{2^{-1}b^{-2}}\right).$$

Решение.

а) Искомое выражение равно

$$\frac{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}}{\frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{b^{2n}}} \cdot \left(\frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}} \right) = \frac{\frac{b^n + a^n}{a^n b^n}}{\frac{b^{2n} - a^{2n}}{a^{2n} b^{2n}}} \cdot (b^n - a^n) = \frac{(b^n + a^n)(b^n - a^n) a^{2n} b^{2n}}{(b^{2n} - a^{2n}) a^n b^n} = a^n b^n.$$

б) Искомое выражение равно

$$\begin{aligned} \frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left(\frac{3a}{b} + \frac{3b}{a} \right)^{-1} \cdot 3ab \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) &= \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \left(\frac{3a^2 + 3b^2}{ab} \right)^{-1} \cdot 3ab \cdot \frac{a+b}{ab} = \\ &= \frac{\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}}{\frac{a+b}{ab}} \cdot \frac{ab}{3(a^2 + b^2)} \cdot 3ab \cdot \frac{a+b}{ab} = \frac{(a^2 + b^2) ab \cdot ab \cdot 3ab \cdot (a+b)}{(a+b) a^2 b^2 \cdot 3(a^2 + b^2) \cdot ab} = 1. \end{aligned}$$

в) Так как $\frac{9^{-2}}{a^{-24}} - \frac{16}{b^{-8}} = \frac{a^{24}}{9^2} - 4^2 b^8 = \left(\frac{a^{12}}{9} + 4b^4 \right) \left(\frac{a^{12}}{9} - 4b^4 \right)$, а $\frac{a^{12}}{3^2} + \frac{b^4}{2^{-2}} = \frac{a^{12}}{9} + 4b^4$, то

искомое выражение равно

$$\left(\frac{a^{12}}{9} - 4b^4 \right) : \left(\frac{a^6}{3} - 2b^2 \right) = \left(\frac{a^6}{3} - 2b^2 \right) \left(\frac{a^6}{3} + 2b^2 \right) : \left(\frac{a^6}{3} - 2b^2 \right) = \frac{a^6}{3} + 2b^2.$$

Пример 3. Упростить выражения:

$$\text{а) } \frac{4 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \right)^{-1} + 3 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \right)^{-1}}{\left(6^{-1} + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1} + \left(1 + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1}};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{4-a^2} + a^2 \sqrt{(4-a^2)^{-1}}}{(4-a^2)^{-1}} \cdot \sqrt{\left(1 - \left(\frac{2}{a} \right)^{-2} \right)^{-1}}, -2 < a < 2, a \neq 0.$$

Решение.

а) 1) Рассмотрим числитель дроби.

$$\text{Имеем: } \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \right)^{-1} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{6} - 3 \cdot 2}{3 - 2} = 3\sqrt{6} - 6;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \right)^{-1} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{4 \cdot 3 - 4\sqrt{6}}{3 - 2} = 12 - 4\sqrt{6}, \text{ поэтому числи-}$$

тель в искомом выражении равен

$$4(3\sqrt{6} - 6) + 3(12 - 4\sqrt{6}) = 12\sqrt{6} - 24 + 36 - 12\sqrt{6} = 12.$$

2) Рассмотрим знаменатель дроби.

$$\text{Так как } \left(6^{-1} + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^{-1} = \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{6} \right)^{-1} = \frac{6}{1 + \sqrt{6}}$$

$$\text{и } \left(1 + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6}} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}},$$

то знаменатель в искомом выражении равен

$$\frac{6}{1 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} + 1)}{\sqrt{6} + 1} = \sqrt{6}.$$

3) Искомое выражение равно $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$.

б) 1) Рассмотрим первый множитель.

Числитель дроби равен

$$\sqrt{4-a^2} + a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4-a^2}} = \sqrt{4-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{4-a^2}} = \frac{4-a^2+a^2}{\sqrt{4-a^2}} = \frac{4}{\sqrt{4-a^2}}.$$

Значит, дробь (первый множитель) равна $\frac{4}{\sqrt{4-a^2}} \cdot (4-a^2) = 4\sqrt{4-a^2}$.

2) Второй множитель равен

$$\sqrt{\left(1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{-1}} = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{\left(\frac{4-a^2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{4}{4-a^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}.$$

3) Искомое произведение равно $4\sqrt{4-a^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-a^2}} = 8$.

К

145 Запишите числа короче:

а) 1000; б) 2 000 000; в) 3 000 000 000; г) 4 000 000 000 000.

Какое понятие вы использовали для выполнения задания?

146

Упростите:

а) $a^5 \cdot a^{10} \cdot a^{10}$; б) $b^4 : b^3$; в) $\frac{x \cdot x^2 \cdot x^{12}}{x^4}$; г) $(y^5)^2 : y^{10}$; д) $\frac{x \cdot x^2}{(x^4)^2}$.

147

Какие числа записаны при помощи степеней?

а) 10^2 ; б) $3 \cdot 10^3$; в) $6 \cdot 10^6$; г) $9 \cdot 10^9$.

Запишите их без использования степени.

148

1) Какие числа записаны при помощи степеней?

а) 10^{-2} ; б) $3 \cdot 10^{-3}$; в) $6 \cdot 10^{-6}$; г) $9 \cdot 10^{-9}$.

2) Чем отличается это задание от предыдущего? Достаточно ли ваших знаний о степени числа для выполнения этого задания? Расширьте понятие степени для отрицательного показателя, следуя плану:

1. Преобразуйте a^{-n} ($n \in \mathbb{N}$), используя известное свойство степеней $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, допустив, что оно верно и при $n > m$.

2. Предположите, что называют степенью с *отрицательным* показателем.

3. Сопоставьте свое предположение с определением степени с *отрицательным* показателем на стр. 45.

3) Вернитесь к заданию, вызвавшему затруднение, и выполните его.

149

Запишите числа, используя понятие степени с *отрицательным* показателем:

а) $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$; б) 0,000002; в) 0,0000000003; г) 0,0000000000004.

150

Вычислите:

а) 5^{-2} ; б) 5^{-3} ; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; г) $\frac{1}{5^{-3}}$; д) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-2}$.

151 Упростите выражения:

$$\text{а) } \frac{(-2)^3 \cdot (-2)^5}{((-2)^3)^2 \cdot (-2)^{-7}}; \quad \text{б) } \frac{((-3)^2)^4 \cdot 9^{-5}}{(-27)^2 \cdot 3^{-7}}; \quad \text{в) } \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot 0,16^{-2}}{6,25^2 \cdot 0,4^5}; \quad \text{г) } (1 + (2^{-1} + 3^{-1})^{-1})^{-1}.$$

152 Упростите выражения

$$\text{а) } \left(\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}} \right)^{-1} \cdot \frac{a^{-1} + b^{-1}}{(ab)^{-1}};$$

$$\text{б) } ((a^{-3} - a^{-1}b^{-2} - b^{-3})(b^3 - a^2b - a^3)^{-1})^{-1}.$$

π 153 Второй член арифметической прогрессии составляет 107% от первого. Сколько процентов от первого члена составляет десятый член этой прогрессии?

154 Первый член арифметической прогрессии равен -5 , сумма двадцати трех ее первых членов равна 1909 . Найдите разность и двадцать третий член этой прогрессии.

155 Решите неравенства:

$$\text{а) } \sqrt{5x-1} < -1; \quad \text{в) } \sqrt{6x+5} \geq 3; \quad \text{д) } \sqrt{x+4} < 5;$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{1-2x} \leq -2; \quad \text{г) } \sqrt{3x-2} > -3; \quad \text{е) } \sqrt[5]{x-6} \geq -2.$$

156 Решите неравенства:

$$\text{а) } \sqrt{5x^2 - x + 5} > 3; \quad \text{б) } \sqrt{x^2 - 8x} < 2; \quad \text{в) } \sqrt[3]{x^2 - 9x + 10} \leq -2.$$

д 157 Упростите выражения:

$$\text{а) } \frac{(625^{-2})^3 \cdot 125^7}{(-25)^3 \cdot 5^{-10}}; \quad \text{б) } \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^7 \cdot 0,36^4}{\left(-7\frac{58}{81}\right)^{-2} \cdot 0,6^{-5}}; \quad \text{в) } \sqrt{\frac{13}{(1^{-1} + (2^{-2} + 3^{-3})^{-1})^{-1}}}.$$

158 Упростите выражения:

$$\text{а) } \left(\left(\frac{a^{-3} - b^{-3}}{a^{-1} - b^{-1}} + a^{-1}b^{-1} \right) : (a+b)^2 \right)^{-1};$$

$$\text{б) } \left(\frac{(a-b)(a^2 + b^2)}{a^{-4} - b^{-4}} \right) : \left(\frac{a^4}{b^{-4}} \right).$$

159 Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого. Сколько процентов от первого члена составляет пятый член этой прогрессии?

160 Первый член арифметической прогрессии равен 81 , а сумма тридцати четырех ее первых членов равна 510 . Найдите разность и тридцать четвертый член этой прогрессии.

161 Решите неравенства:

$$\text{а) } \sqrt{4-5x} \leq 0; \quad \text{в) } \sqrt{6-x} > 5; \quad \text{д) } \sqrt{5-x} \leq 6;$$

$$\text{б) } \sqrt{x+4} \leq -8; \quad \text{г) } \sqrt{7x+9} > -9; \quad \text{е) } \sqrt[5]{x+1} \geq -3.$$

162 Решите неравенства:

$$\text{а) } \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \geq 3; \quad \text{б) } \sqrt{x^2 - 8x} < 2; \quad \text{в) } \sqrt[3]{x^2 + 7x - 29} > 1.$$

с 163* Числа $x^3 + x^{-1}$ и $x + x^{-3}$ — рациональные. Докажите, что x — рациональное число.