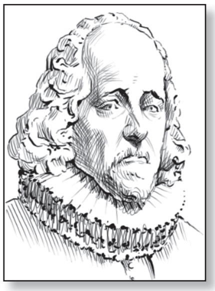
Глава 4
Введение в теорию многочленов

§ 1. Степень с натуральным показателем

1. Понятие степени с натуральным показателем



Истинная и законная цель всех наук состоит в том, чтобы наделять жизнь человеческую новыми изобретениями и богатствами.

Фрэнсис Бэкон (1561–1626),
английский философ и политический деятель

Последовательность чисел:

$$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729$$

устроена таким образом, что в ней каждое следующее число в три раза больше предыдущего. Мы уже знаем, что эту же последовательность можно записать иначе:

$$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6.$$

Вторая запись последовательности более наглядно показывает ее структуру. Составляя эту запись, мы использовали уже известное нам понятие степени натуральных чисел, что позволяет короче записывать выражения, содержащие одинаковые множители.

А как короче записать, например, выражение $0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75$? Чтобы распространить наши знания о степени на множество рациональных чисел, уточним соответствующие определения.

Под натуральной степенью n числа $a \in N$ мы понимали произведение n множителей, каждый из которых равен a. Аналогичным образом мы будем понимать и натуральную степень рационального числа.

Определение 1. Пусть n – натуральное число, большее 1. Тогда **n-й степенью рационального числа a** называется произведение n множителей, каждый из которых равен a. При этом повторяющийся множитель a называют **основанием степени**, а число повторяющихся множителей n – **показателем степени**.

Вычисление произведения, состоящего из n множителей, каждый из которых равен a, называют **возведением числа a в n-ю степень.**

Для n-й степени числа a, как и раньше, будем использовать обозначение: a^n. Эта запись читается как «a в степени n» . Тогда определение степени на математическом языке можно записать следующим образом:

$$\forall\ a \in Q,\ n \in N,\ n > 1: \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Теперь, пользуясь введенным понятием степени рационального числа, мы можем записать:

$$0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}75^5.$$

Как и раньше, **квадратом числа** будем называть вторую степень этого числа ($a^2 = a \cdot a$), а **кубом числа** – его третью степень ($a^3 = a \cdot a \cdot a$).

В нашем определении мы говорили о натуральном показателе степени, большем 1, поскольку произведение чисел не может содержать менее двух множителей. Теперь «доопределим» понятие натуральной степени рационального числа для случая показателя, равного 1.

Исходя из фундаментального принципа развития математической теории (принципа «неразрушения»), дадим определение первой степени рационального числа, согласованное с определением первой степени натурального числа, которое мы использовали раньше.

Определение 2. Степенью рационального числа a с натуральным показателем 1 называется само это число. То есть

$$\forall\, a \in Q\colon a^1 = a.$$

Запись больших чисел с помощью степени очень удобна, поэтому ее часто используют в разных науках, например в астрономии, где расстояния выражаются огромными числами. А для того чтобы проводить вычисления с этими числами, необходимо уметь выполнять арифметические действия со степенями. Установим сначала несколько свойств и правил, которые помогут нам правильно выполнять такие вычисления.

Для начала ответим на вопрос, можем ли мы сразу определить знак любой степени числа, пусть даже с очень большим показателем? Например, можем ли мы, не вычисляя значения самой степени, определить знак числа $\left(\frac{3}{8}\right)^{7562}$ или числа $(-56{,}799)^{329}$? Для того чтобы ответить на этот вопрос, докажем несколько теорем.

Теорема 1. Любая натуральная степень положительного рационального числа – это число положительное.

Доказательство:

Натуральная степень положительного рационального числа представляет собой произведение положительных чисел (или само число). Поскольку при умножении любого числа положительных чисел получается положительное число, то значение степени будет положительным, что и требовалось доказать. ▼

Значит, мы сразу можем сказать, что $\left(\frac{3}{8}\right)^{7562} > 0$.

Теорема 2. Отрицательное число, возведенное в четную степень, есть число положительное, а отрицательное число, возведенное в нечетную степень, – число отрицательное.

Доказательство:

Четная степень отрицательного числа содержит четное число отрицательных множителей. Из них можно составить целое число пар, в каждой из которых при умножении двух отрицательных чисел получается положительное число. Значит, четная степень отрицательного числа является числом положительным.

А нечетная степень отрицательного числа содержит целое число пар отрицательных множителей и еще один отрицательный множитель. Поэтому нечетная степень отрицательного числа является числом отрицательным, что и требовалось доказать. ▼

Значит, поскольку число 329 – нечетное, то $(-56{,}799)^{329} = -56{,}799^{329} < 0$.

Теорема 3. Нуль в любой натуральной степени равен нулю.

Доказательство:

Любая натуральная степень нуля представляет собой произведение нулей (или само число 0). Это произведение всегда равно нулю, что и требовалось доказать. ▼

Например, $0^{954} = 0$.

Итак, мы ввели новое для нас арифметическое действие для рациональных чисел – возведение в натуральную степень, и установили некоторые правила, упрощающие определение знака степени. Теперь нам важно разобраться с тем, какой принят порядок действий в выражениях, содержащих степени.

Поскольку степень фактически представляет собой произведение нескольких множителей, то запись степени можно рассматривать как запись произведения, заключенного в скобки. Это позволяет нам сформулировать следующее правило, устанавливающее порядок действий в выражениях, содержащих степени.

Порядок действий в выражениях, содержащих степени

В выражениях со степенями без скобок сначала производят возведение в степень, затем умножение и деление, а уже потом – сложение и вычитание. Если в выражениях есть скобки, то сначала в указанном порядке выполняют действия в скобках, а потом в том же порядке – остальные действия.

Пример. Вычислите значение выражения $1 + 2^3 \cdot ((-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2\ ) + 4^2$.

Решение:

Сначала вычислим значение выражения в скобках: $(-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2$. Согласно порядку действий в выражениях со степенями, сначала возведем (-3) в степень, затем выполним умножение и деление и после этого – выполним вычитание:

$$(-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2 = 9 \cdot 5 - 8 : 2 = 45 - 4 = 41.$$

Теперь подставим в исходное выражение вместо скобок вычисленное значение. Затем выполним возведение в степень, после этого умножение и, наконец, – сложение:

$$1 + 2^3 \cdot ((-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2\ ) + 4^2 = 1 + 2^3 \cdot 41 + 4^2 = 1 + 8 \cdot 41 + 16 = 1 + 328 + 16 = 345.$$

Ответ: 345.

К **1** а) Запишите произведение натуральных чисел в виде степени:

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; $25 \cdot 25 \cdot 25$; $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, где $a \in N$.

б) Дайте определение степени натурального числа a с натуральным показателем n, если: 1) $n > 1$; 2) $n = 1$.

в) Предложите собственную версию определения степени рационального числа a с натуральным показателем n, исходя из фундаментального принципа развития математической теории («принципа неразрушения»).

2 Запишите числовое выражение короче, используя понятие степени:

а) $(-\frac{1}{7}) \cdot (-\frac{1}{7}) \cdot (-\frac{1}{7})$;

б) $-9{,}4 \cdot 9{,}4 \cdot 9{,}4 \cdot 9{,}4 \cdot 9{,}4$;

в) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;

г) $2{,}(8) \cdot 2{,}(8) \cdot 2{,}(8) \cdot 2{,}(8) \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

3 При рациональных значениях переменных запишите буквенное выражение короче, используя понятие степени:

а) $(-y) \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y)$;
б) $-\,y \cdot y \cdot y \cdot y$;
в) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$;
г) $a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$;
д) $(-5m) \cdot (-5m) \cdot 2n \cdot 2n \cdot 2n$;
е) $-5m \cdot m \cdot 2n \cdot n \cdot n$;
ж) $(p - q) \cdot (p - q) \cdot (p - q) \cdot (p - q) \cdot (p - q)$;
з) $p - q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q$.

4 Назовите основание и показатель степени, вычислите значение выражения:

а) 5^3; б) $(-4)^2$; в) $(-0,1)^4$; г) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$; д) $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^2$; е) $(-3,6)^1$.

5 Замените в выражениях степени произведениями:

а) $(-x)^2$; в) $(2c)^3$; д) $(-mn)^4$; ж) $(a + 3b)^2$; и) $(2x - y)^3$;
б) $-x^2$; г) $2c^3$; е) $-mn^4$; з) $a + 3b^2$; к) $2x - y^3$.

Проанализируйте полученные выражения и определите, какие возможны ошибки при записи степеней.

6 Найдите значение выражения:

а) 2^5; г) 3^4; ж) $0,2^6$; к) $0,05^2$; н) 10^7; р) $0,1^3$;
б) $(-2)^5$; д) $(-3)^4$; з) $(-0,2)^6$; л) $(-0,05)^2$; о) $(-10)^7$; с) $(-0,1)^3$;
в) -2^5; е) -3^4; и) $-0,2^6$; м) $-0,05^2$; п) -10^7; т) $-0,1^3$.

Какие из этих выражений являются «степенью числа», а какие – «числом, противоположным степени числа»?

7 Заполните таблицы:

n	1	2	3	4	5	6
2^n						
3^n						

n	1	2	3	4
4^n				
5^n				

8 Представьте, если возможно, данные числа в виде степеней:

а) 128; в) 243; д) 0,0016; ж) 0,0009; и) $15\dfrac{5}{8}$; л) 12,25;
б) –128; г) –243; е) –0,0016; з) –0,0009; к) $-15\dfrac{5}{8}$; м) –12,25.

9 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является выражение:

а) $(-8)^{97}$; б) $\left(-\dfrac{5}{6}\right)^{314}$; в) $(-2,8)^{153} \cdot (-0,15)^{725}$; г) $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{2009} : (-60,4)^{2010}$.

10 Сравните значения выражений:

а) 3^{15} и 4^{15}; в) 9^{24} и 7^{23}; д) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^7$ и $\left(\dfrac{2}{3}\right)^8$; ж) $1,8^5$ и $1,8^6$;
б) $(-3)^{15}$ и $(-4)^{15}$; г) $(-9)^{24}$ и $(-7)^{23}$; е) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^7$ и $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^8$; з) $(-1,8)^5$ и $(-1,8)^6$.

11 Прочитайте выражение и найдите его значение. Что вы замечаете?

а) $((-3) + 4)^2$; в) $((-8) - (-3))^2$; д) $(3 + (-2))^3$; ж) $((-9) + (-1))^3$;

б) $(-3)^2 + 4^2$; г) $(-8)^2 - (-3)^2$; е) $3^3 + (-2)^3$; з) $(-9)^3 + (-1)^3$.

12 Вычислите:

а) $((-2)^4 + (-1)^3 \cdot 7) : (-3)^2$; в) $-2 \cdot (-5)^3 : 6\frac{1}{4} + \left(-3 : \left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 - (-2)^5$;

б) $-0{,}5^2 - \frac{1}{4} \cdot (0{,}05 : (-0{,}1)^2 - 2^1)$; г) $-3^4 \cdot (-1)^6 - \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(-5\frac{1}{2} - 2^3\right) + (-7)^2$.

13 Используя степень числа 10, запишите, что:

а) в одном метре 100 см; г) в одном центнере 100 000 г;

б) в одном километре 10 000 дм; д) в одном кубическом дециметре 1000 см^3;

в) в одном гектаре 1 000 000 дм^2; е) в одном кубическом метре 1 000 000 000 мм^3.

14 Найдите значение выражения:

1) a^2, $-a^2$ и $(-a)^2$, если $a = 5$, $a = -3$; 2) b^3, $-b^3$ и $(-b)^3$, если $b = 4$, $b = -2$.

15 а) Найдите значение выражения $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, если $x = -1$, $x = 0$, $x = 10$.

б) Найдите значение выражения $y^1 - 2y^2 + 3y^3 - 4y^4 + 5y^5$, если $y = 1$, $y = -1$, $y = 2$.

П **16** Запишите высказывания на математическом языке с помощью кванторов общности (∀) и существования (∃). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

а) Любое целое число, отличное от нуля, делится само на себя.

б) Существуют целые числа, делящиеся на нуль.

в) Четные натуральные числа не могут быть простыми.

г) Можно найти целое число, которое при делении на 3 дает остаток 4.

д) Есть целые числа, которые не делятся на единицу.

е) Четные числа всегда делятся на 3.

ж) Некоторые простые числа при делении на 2 дают остаток 1.

з) Если целое число при делении на 3 дает остаток 2, то оно кратно 5.

17 Докажите прямым и косвенным методом:

а) Равенство $m(m + 1)(m + 2) = 71\ 536$ неверно при любом натуральном m.

б) Равенство $9k(k + 1) = 54\ 621$ неверно при любом натуральном k.

18 Сравните значения величин:

а) 43 м 6 дм 53 см и 436 дм 532 мм; г) 27 т 468 кг и 274 ц 68 кг 500 г;

б) 3 км 315 м 2 дм и 3300 м 104 дм; д) 5 ц 900 кг 300 г и 1 т 5 ц 300 г;

в) 7 сут. 5 ч 63 мин 5 с и 174 ч 63 мин 3 с; е) 27 а 64 м^2 и 0,25 га 2 а 65 м^2.

19 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $a + 5 > 9$; в) $-5 \leqslant x \leqslant -1$; д) $|p| > 3$;

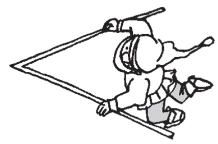
б) $b - 11 \leqslant 3$; г) $-2 \leqslant y < 4$; е) $|q - 2| \leqslant 1$.

20 Постройте математическую модель и решите задачу:

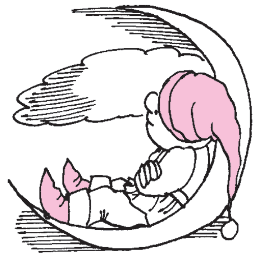
а) Сумма двух натуральных чисел равна 27. Первое число при делении на 7 дает остаток 4, а второе число при делении на 7 дает остаток 2. Найдите эти числа.

б) Первый угол треугольника на 30° больше второго и в три раза меньше третьего. Найдите больший угол этого треугольника.

в) Длина ломаной $AKLN$ равна 15,6 см. Известно, что AK равно четверти расстояния между ее началом и концом, KL на 0,6 см меньше AK, а LN в 2 раза больше KL. Чему равно звено AK этой ломаной?



г) Сумма цифр загаданного четырехзначного числа равна 30. Вторая цифра этого числа на 1 меньше первой, третья – в 3 раза больше второй, а четвертая – на 4 больше первой. Какое число загадали?



21 Может ли:

а) остаток при делении четного числа на 6 быть равным 3?

б) число, кратное 5, при делении на 15 давать остаток 7?

в) число, делящееся на 3, при делении на 12 давать остаток 8?

г) число, делящееся на 9, при делении на 36 давать остаток 28?

22 Запишите произведения рациональных чисел короче, используя понятие степени:

а) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;

б) $(-1,(4)) \cdot (-1,(4)) \cdot (-1,(4))$;

в) $-5,6 \cdot 5,6 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$;

г) $(-kl) \cdot (-kl) \cdot (-kl) \cdot (-kl) \cdot (-kl) \cdot (-kl)$;

д) $-(kl) \cdot (kl) \cdot (kl) \cdot (kl) \cdot (kl) \cdot (kl)$;

е) $(-z) \cdot (-z) \cdot (-z) \cdot (2b + c) \cdot (2b + c)$.

23 Замените в выражениях степени произведениями:

а) $(-a)^5$; в) $(3n)^6$; д) $(-xy)^3$; ж) $(5 - d)^4$; и) $(a + b)^2$;

б) $-a^5$; г) $3n^6$; е) $-xy^3$; з) $5 - d^4$; к) $a^2 + b^2$.

24 Найдите значение выражения:

а) 5^3, -5^3 и $(-5)^3$; б) $0,1^4$; $-0,1^4$ и $(-0,1)^4$; в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$, $-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$ и $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

25 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является выражение:

а) $(-16)^{102}$; б) $\left(-2\frac{4}{15}\right)^{237}$; в) $(-0,9)^{58} : (-1,2)^{923}$; г) $(-7,5)^{123} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^{345}$.

26 Сравните значения выражений:

а) 5^9 и 3^9; в) 6^{10} и 6^{12}; д) $\left(\frac{7}{4}\right)^5$ и $\left(\frac{7}{4}\right)^6$; ж) $0,9^4$ и $0,9^5$;

б) $(-5)^9$ и $(-3)^9$; г) $(-6)^{10}$ и $(-6)^{12}$; е) $\left(-\frac{7}{4}\right)^5$ и $\left(-\frac{7}{4}\right)^6$; з) $(-0,9)^4$ и $(-0,9)^5$.

27 Вычислите:

а) $(-7 + 3)^2$; г) $(-2)^4 - 5^2$;

б) $-7 + 3^2$; д) $((-3)^2 - 7)^3 - ((-2)^2)^3$;

в) $(-7)^2 + 3^2$; е) $\left(-0{,}6^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(2\frac{1}{2} - (-4)^2\right)\right) : (-0{,}1)^2$.

28 Найдите значение выражения:

1) x^2, $-x^2$ и $(-x)^2$, если $x = 3$, $x = -4$;

2) y^3, $-y^3$ и $(-y)^3$, если $y = -1$, $y = 2$.

29 а) Найдите значение выражения $a^1 - a^2 + a^3 - a^4 + a^5$, если $a = 2$, $a = 0$, $a = -1$.

б) Найдите значение выражения $b^1 + 2b^2 + 3b^3 + 4b^4 + 5b^5$, если $y = -2$, $y = 0{,}1$, $y = 10$.

30 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма полных лет Антона и Ксюши равна 30. Число полных лет Антона при делении на 5 дает остаток 1, а число полных лет Ксюши при делении на 5 дает остаток 4. Сколько лет Ксюше, если Антону больше 12 и меньше 20 лет?

б) Количество рецептов пончиков в пончиковой компании Антона и Ксюши выражается трехзначным числом, сумма цифр которого равна 20. Вторая цифра этого числа на 5 больше первой, а третья – в 2 раза меньше первой. Сколько рецептов пончиков в пончиковой компании Антона и Ксюши?

31 Семь футболистов забили в турнире 20 голов. Докажите, что хотя бы два футболиста забили одинаковое количество голов.

32 а) Найдите значения числовых выражений A и B:

$$A = \frac{\left(3\frac{6}{7} - 2\frac{2}{3} - \frac{4}{21}\right) \cdot 47}{9\frac{5}{51} - 3\frac{2}{9} + 5\frac{7}{18} - 10\frac{9}{34}} : \frac{47}{15}; \qquad B = \frac{6 - \frac{4}{10}}{7 + 1 : \frac{3}{7}} \cdot \frac{35}{3}.$$

б) Найдите три числа, сравнимых с A по модулю B.

C **33*** Учитель дал ученикам задание написать, используя три раза цифру 2, числовое выражение, значение которого будет как можно более большим. Среди составленных учащимися выражений были следующие:

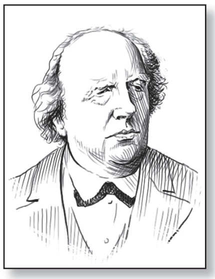
1) 222; 2) $22 \cdot 2$; 3) 22^2; 4) 2^{22}; 5) 2^{2^2}.

Расположите эти выражения в порядке возрастания их значений.

34* Даны 6 чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум числам прибавлять по 1. Можно ли сделать все числа равными?

35* Трем братьям раздали 24 бублика таким образом, что каждый получил на три бублика меньше, чем ему лет. Меньший брат, подумав, предложил поменяться частью бубликов. «Я, – сказал он, – оставляю себе половину бубликов, а вторую половину разделю между вами поровну». Глядя на такое благородство, средний и старший братья также решили оставить себе половину своих бубликов, а вторую половину разделить поровну между другими братьями. После этих операций каждый из братьев получил одинаковое количество бубликов. Сколько лет братьям?

2. Свойства степени с натуральным показателем



Чтобы добиться какого-нибудь прогресса в науках, безусловно, необходимо заниматься отдельными проблемами.

Карл Вейерштрасс (1815–1897),
немецкий математик

В предыдущем пункте мы узнали, что понимается в математике под натуральной степенью любого рационального числа, научились определять знак степени и узнали, в каком порядке проводятся вычисления в выражениях со степенью. Но мы пока не знаем, как рационально проводить эти вычисления. Например, как можно быстро решить следующий пример:

$$\left(\frac{2^{12}\cdot 2^{28}\cdot 2^{35}\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{74}\cdot 10^{25}\cdot (3^3)^8}{(2\cdot 3)^{24}\cdot (5^{42}:5^{16})}\right)^2?$$

Для ответа на этот вопрос докажем несколько свойств степеней.

Произведение и частное степеней

Теорема 1. Для любого рационального числа a и любых натуральных m и n.

$$\boldsymbol{a^m\cdot a^n = a^{m+n}}.$$

Доказательство:

Пусть a – произвольное рациональное число, а m и n – произвольные натуральные числа, тогда

$$a^m\cdot a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ множителей}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m+n\text{ множителей}} = a^{m+n},$$

что и требовалось доказать. ▼

Данное свойство можно распространить на произведение трех и более степеней. Значит, в нашем примере мы можем сразу упростить числитель:

$$2^{12}\cdot 2^{28}\cdot 2^{35} = 2^{12+28+35} = 2^{75}.$$

Теорема 2. Для любого рационального числа a, отличного от 0, и любых натуральных m и n таких, что $m > n$.

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}.$$

Доказательство:

Пусть a – произвольное рациональное число, отличное от 0, а m и n – произвольные натуральные числа такие, что $m > n$. Представим частное $a^m : a^n$ в виде дроби и сократим n раз ее числитель и знаменатель на общий множитель a:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ множителей}}\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m-n\text{ множителей}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}} = \frac{a^{m-n}}{1} = a^{m-n},$$

что и требовалось доказать. ▼

Теперь в исходном примере мы можем выполнить следующие преобразования:

$$5^{42} : 5^{16} = 5^{42-16} = 5^{26}.$$

Возведение степени в степень

Теорема 3. Для любого рационального числа a и любых натуральных m и n

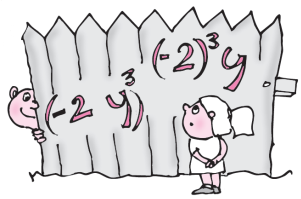
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Доказательство:

Пусть a – произвольное рациональное число, а m и n – произвольные натуральные числа, тогда

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множителей}} = a^{\overbrace{m + m + \ldots + m}^{n \text{ множителей}}} = a^{m \cdot n},$$

что и требовалось доказать. ▼



Продолжим упрощение исходного примера:

$$(3^3)^8 = 3^{3 \cdot 8} = 3^{24}.$$

Степень произведения и частного (дроби)

Теорема 4. Для любых рациональных чисел a и b и любого натурального числа n

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Доказательство:

Пусть a и b – произвольные рациональные числа, а n – произвольное натуральное число, тогда

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множителей}} = a^n \cdot b^n,$$

что и требовалось доказать. ▼

Следовательно, в числителе и знаменателе рассматриваемой нами дроби мы можем выполнить следующие преобразования:

$$(2 \cdot 3)^{24} = 2^{24} \cdot 3^{24} \qquad 10^{25} = (2 \cdot 5)^{25} = 2^{25} \cdot 5^{25}$$

Теорема 5. Для любых рациональных чисел a и b, где $b \neq 0$, и любого натурального числа n

$$(a : b)^n = a^n : b^n, \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Доказательство:

Поскольку обе записи описывают одно и то же арифметическое действие, то достаточно провести доказательство для одной из них.

Рассмотрим запись частного в виде дроби.

Пусть a и b – произвольные рациональные числа, где $b \neq 0$, и n – произвольное натуральное число, тогда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множителей}}} = \frac{a^n}{b^n},$$

что и требовалось доказать. ▼

Значит, в числителе приведенного выше примера мы можем записать соответственно степень дроби и вычислить следующее произведение:

$$2^{75} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{74} = 2^{75} \cdot \frac{1^{74}}{2^{74}} = \frac{2^{75} \cdot 1}{2^{74}} = \frac{2^{75}}{2^{74}} = 2^{75 - 74} = 2^1 = 2.$$

Вернемся теперь к исходному примеру и упростим его, «собрав» все выполненные преобразования вместе, а затем сократим полученную дробь и возведем ее в квадрат:

$$\left(\frac{2^{12}\cdot 2^{28}\cdot 2^{35}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{74}\cdot 10^{25}\cdot (3^{3})^{8}}{(2\cdot 3)^{24}\cdot(5^{42}:5^{16})}\right)^{2}=\left(\frac{2\cdot(2^{25}\cdot 5^{25})\cdot 3^{24}}{(2^{24}\cdot 3^{24})\cdot 5^{26}}\right)^{2}=\left(\frac{2\cdot \overset{2}{\cancel{2^{25}}}\cdot \overset{1}{\cancel{5^{25}}}\cdot \overset{1}{\cancel{3^{24}}}}{\underset{1}{\cancel{2^{24}}}\cdot \underset{1}{\cancel{3^{24}}}\cdot \underset{5}{\cancel{5^{26}}}}\right)^{2}=\left(\frac{4}{5}\right)^{2}=\frac{16}{25}.$$

Мы видим, что полученные нами свойства степеней существенно упрощают вычисления.

Таким образом, у нас теперь есть определение натуральной степени рационального числа, и мы знаем свойства степеней с натуральными показателями. А можно ли расширить это определение на случай нулевого показателя?

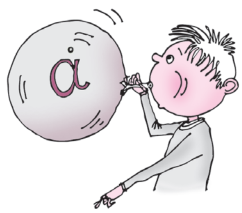
Как мы уже знаем, для этого мы должны руководствоваться фундаментальным принципом развития математической теории, а значит, *вновь введенное понятие не должно нарушать все доказанные ранее свойства*. Например, для любого не равного нулю рационального a должно быть верно следующее равенство:

$$a^{0}=a^{n-n}=a^{n}:a^{n}=1.$$

Поэтому логично ввести определение, по которому $a^0 = 1$ для любого не равного нулю рационального числа a. Действительно, можно показать, что если принять $a^0 = 1$ при $a \neq 0$, то все остальные доказанные нами свойства будут также выполняться. Таким образом, расширим определение понятия степени на случай показателя, равного 0.

Определение. Нулевой степенью рационального числа a, отличного от нуля, называется число 1. То есть

$$\forall\ a \in Q,\ a \neq 0\colon\ a^{0}=1.$$



Так, например, $12^0 = 1$, $\left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$, $(-6)^0 = 1$.

В завершение выпишем все правила вычислений со степенями, которые следуют из доказанных нами теорем.

Правила вычислений со степенями

1. Для того чтобы умножить степени с одинаковым основанием, можно основание оставить без изменений, а показатели степеней сложить.

2. Для того чтобы разделить степени с одинаковым основанием, не равным нулю, можно основание оставить без изменений, а из показателя делимого вычесть показатель делителя.

3. Для того чтобы возвести степень в степень, можно основание оставить без изменений, а показатели перемножить.

4. Для того чтобы возвести в степень произведение, можно возвести в эту степень каждый из множителей и результаты перемножить.

5. а) Для того чтобы возвести в степень частное, можно возвести в эту степень отдельно делимое и делитель и первый результат разделить на второй.

б) Для того чтобы возвести в степень дробь, можно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби.

К

Произведение и частное степеней

36 а) Представьте произведение в виде степени:

$0{,}2^3 \cdot 0{,}2^2$; $(-3)^4 \cdot (-3)^6$; $x^{2000} \cdot x^{3000}$, где $x \in Q$.

б) Установите общую формулу для вычисления произведения степеней рациональных чисел с общим основанием и натуральными показателями:

$$a^n \cdot a^m = ?\ (n,\ m \in N;\ a \in Q).$$

37 Запишите произведение в виде степени:

а) $2^7 \cdot 2^8$; г) $a^9 \cdot a^3$; ж) $n^{14} \cdot n \cdot n^{30}$; к) $(pq)^5 \cdot (pq) \cdot (pq)^6 \cdot (pq)^{12}$;

б) $(-5)^{99} \cdot (-5)$; д) $c \cdot c^{437}$; з) $x^6 \cdot x^7 \cdot x^8 \cdot x^9$; л) $\left(\frac{a^2m}{c}\right)^{27} \cdot \left(\frac{a^2m}{c}\right) \cdot \left(\frac{a^2m}{c}\right)^4$;

в) $0{,}4^5 \cdot 0{,}4^{25}$; е) $y^{120} \cdot y^{80}$; и) $b \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot b^4 \cdot b^5$; м) $(2x + y)^4 \cdot (2x + y) \cdot (2x + y)^3$.

38 Упростите выражение:

а) $aa^m(-a)^2$; г) $2x^2y^3 \cdot (-4xy^2)$; ж) $2^4 + 2^4$; к) $3^2 + 3^2 + 3^2$;

б) $c^kc(-c^2)c^{k-1}c^3$; д) $0{,}5a(-b)^6 \cdot 10a^2b^2$; з) $2^m + 2^m$; л) $3^k + 3^k + 3^k$;

в) $dd^n(-d^{n+1})d^nd^2$; е) $\frac{1}{6}(-c)^5dk \cdot (-6cdk^3)$; и) $2^m \cdot 2^m$; м) $3^k \cdot 3^k \cdot 3^k$.

39 Запишите выражение a^{15} в виде произведения: а) двух степеней; б) трех степеней; в) четырех степеней с основанием a. Имеются ли другие варианты решения этой задачи?

40 Запишите в виде степени выражение, равное данному:

а) $4 \cdot 8$; б) $3 \cdot 27 \cdot 9$; в) $16 \cdot 2 \cdot 32$; г) $25 \cdot 5^{2k} \cdot 125$; д) $2^m \cdot 2^m \cdot 2^m \cdot 2^m$.

Возможны ли другие варианты записи?

41 Сколькими различными способами можно представить x^6, где $x \in Q$, $x > 0$:

а) в виде произведения двух степеней с основанием x и показателем $n \in N_0$;

б) в виде произведения трех степеней с основанием x и показателем $n \in N_0$?

($N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, варианты, различающиеся лишь порядком множителей, считать одинаковыми.)

42 Запишите выражение в виде степени при допустимых значениях переменных:

а) $3^9 : 3^7$; г) $x^8 : x^3$; ж) $b^{21} : b : b^{16}$; к) $(mn)^5 : (mn) \cdot (mn)^6 : (mn)^4$;

б) $(-2)^{100} : (-2)^{99}$; д) $y^{32} : y^{32}$; з) $c^7 : c^6 : c \cdot c^9$; л) $\left(\frac{bc}{n^2}\right)^{10} : \left(\frac{bc}{n^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{bc}{n^2}\right)$;

в) $0{,}8^{14} : 0{,}8^{12}$; е) $a^{103} : a^{79}$; и) $d^5 : d^2 \cdot d^7 : d^4 \cdot d$; м) $(3x-4)^8 : (3x-4)^6 : (3x-4)^2$.

43 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $b^{k+5} : (-b)^3$; г) $\frac{a^m \cdot a^3}{a \cdot a^{m-1} \cdot a^2}$; ж) $\frac{68x^4y^2z^3}{17x^2y^3z^4}$; к) $\frac{28p^3q^2 - 32p^3q^2}{12p^3q}$;

б) $-c^n : c^{n-2}$; д) $\frac{x^9 \cdot x^3 \cdot x^{2k}}{x^k \cdot x^4 \cdot x^8}$; з) $\frac{15a^{32}b^{15}c^{56}}{10a^{35}b^{14}c^{56}}$; л) $\frac{35x^2y^3 + 55x^2y^3}{15y^3x^2}$;

в) $(-x)^{2m} : x^{m+1} \cdot x^2$; е) $\frac{y^{n+1} \cdot y^{2n} \cdot y^5}{y^n \cdot y^3 \cdot y^2}$; и) $\frac{80m^{48}n^{22}k^{50}}{16k^{48}m^{45}n^{21}}$; м) $\frac{16ab^2 + 26ab^2}{32a^2b - 15a^2b}$.

44 Докажите, что если k, m, $n \in N$, то значение указанного выражения не зависит от значения переменной. Найдите значение этого выражения.

а) $\dfrac{4^m + 4^m + 4^m + 4^m}{4^m : 4^2}$; б) $\dfrac{\overbrace{10^n + 10^n + \ldots + 10^n}^{10\text{ раз}}}{10^n : 10}$; в) $\dfrac{\overbrace{99^k + 99^k + \ldots + 99^k}^{99\text{ раз}}}{99^{k+2} : 99}$.

45 Замените букву x выражением так, чтобы полученное равенство стало тождеством:

а) $a^2 \cdot x = a^5$; б) $x \cdot b^7 = b^{11}$; в) $c^{35} \cdot x = c^{70}$; г) $x \cdot d^{348} = d^{412}$.

Возведение степени в степень

46 Представьте выражение в виде степени с основанием a:

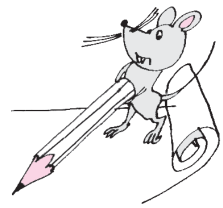
а) $(a^2)^5$; в) $(a^9)^4$; д) $(a^m)^3$; ж) $(a^k)^n$; и) $(a^4)^3 \cdot a^8$; л) $(a^m)^2 : a^m$;

б) $a^2 \cdot a^5$; г) $a^9 \cdot a^4$; е) $a^m \cdot a^3$; з) $a^k \cdot a^n$; к) $a^{19} \cdot (a^3)^7$; м)a^{p+8}: $(a^4)^2$.

47 Запишите выражение в виде степени с основанием t:

а) $((-x)^2)^{16}$ при $t = -x$; в) $((-pq)^4)^2$ при $t = pq$;

б) $((2nm)^5)^6$ при $t = 2nm$; г) $((-a + 3b)^3)^8$ при $t = 3b - a$.



48 Представьте a^{24} в виде степени с основанием

а) a^2; б) a^3; в) a^4; г) a^6; д) a^8; е) a^{12}.

49 При каком значении n верно равенство:

а) $x^n \cdot x^6 = x^{18}$; б) $(x^n)^6 = x^{18}$; в) $(y^{10})^n = y^{40}$; г) $y^{10} \cdot y^n = y^{40}$?

50 Представьте в виде степени с показателем, отличным от 1, выражение:

а) m^{15} двумя различными способами; б) n^{12} четырьмя различными способами;

в) k^{40} шестью различными способами.

51 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{5^3 \cdot a^2 \cdot (b^4)^2 \cdot c^5}{(25)^2 \cdot a^3 \cdot (b^3)^3 \cdot (c^3)^1}$; б) $\dfrac{9^2 \cdot (x^2)^3 \cdot y^5 \cdot z^4}{3^3 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot (y^3)^2 \cdot (z^2)^2}$; в) $\dfrac{k^4 - k^2}{k^4 - k^6}$; г) $\dfrac{m^4 - m^6 + m^8}{m^6 - m^8 + m^{10}}$.

52 Запишите выражение в виде степени с основанием 2, 3 или 5:

а) $2 \cdot 4^6 : 32$; б) $27^4 \cdot 81^2 : 9^5$; в) $8^5 \cdot 16^3 : 128$; г) $125^3 : 25^2 \cdot 625$.

53 Вычислите:

а) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^2)^4}{(3^5)^3 \cdot 3}$; б) $\dfrac{(5^2)^6 \cdot (5^7 : 5^4)}{(-125)^5}$; в) $\dfrac{(-3)^9 \cdot 9^2 \cdot 81^3}{-27^{10} : 3^5}$; г) $\dfrac{32^4 \cdot (-2)^8 : 64^3}{-128^3 : (-8)^4}$.

Степень произведения и частного (дроби)

54 Возведите произведение в степень:

а) $(-2ab)^3$; в) $(-x^2y)^6$; д) $(6a^2b^3c)^2$; ж) $(-4p^3q^4)^{10}$; и) $(5r^5s^8t^4)^7$;

б) $(\frac{5}{7}cdk)^2$; г) $(-0{,}1pq^2r)^5$; е) $(-\frac{2}{3}km^2n^4)^3$; з) $(7c^2x^5d)^9$; к) $(-u^3v^6w^9)^8$.

55 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $-m^5n^5$; в) $0{,}49a^2b^2c^2$; д) $-27q^6r^3$; ж) $-a^6b^3ab^4$; и) $125p^6q^{10}r^{12}q^5$;

б) $25c^2d^2$; г) $-\frac{1}{8}x^3y^3z^3$; е) $9a^4b^2c^6$; з) $16c^3d^2d^2c$; к) $-32m^{10}n^8l^{75}n^7$.

56 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $8a^{17}b^4c^{36}d^8a^{16}b^{20}d^{13}$; б) $xzr^{90}y^8z^{14}x^{50}y^{60}r^{63}z^{70}$; в) $m^{369}n^{287}$; г) $p^{119}q^{323}$.

57 а) Докажите, что если сторону квадрата увеличить в n раз, то его площадь увеличится в n^2 раз.

б) Во сколько раз увеличится объем куба, если его сторону увеличить в m раз?

58 Вычислите рациональным способом:

а) $0{,}5^{16} \cdot 2^{16}$; б) $4^{21} \cdot (-0{,}25)^{20}$; в) $(-0{,}125)^9 \cdot 8^{10}$; г) $\left(\frac{7}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{12}{7}\right)^5$.

59 Запишите выражение в виде частного степеней:

а) $(5 : 3)^{12}$; б) $\left(\frac{2}{15}\right)^n$; в) $(-a : b)^m$; г) $\left(\frac{c}{-d}\right)^{24}$; д) $((-4p) : 7)^8$; е) $\left(\frac{3x}{2yz}\right)^k$.

60 Представьте выражение в виде степени дроби с показателем, отличным от 1:

а) $121 : 9$; б) $27 : 64$; в) $\frac{36}{p^2}$; г) $\frac{q^3}{125}$; д) $(49)^2 : r^4$.

61 Представьте выражение в виде степени дроби с показателем, отличным от 1:

а) $(-27a^{27}) : (b^{33}c^{39})$; б) $\frac{81x^{16}y^{48}}{z^{52}}$; в) $a^{253} : (-b^{299})$; г) $p^{1083} : q^{1197}$.

62 Вычислите рациональным способом:

а) $56^5 : 28^5$; в) $0{,}18^3 : (-0{,}9)^3$;

б) $\frac{(-750)^6}{75^6}$; г) $\left(\frac{12}{19}\right)^4 : \left(\frac{4}{19}\right)^4$.

63 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\left(\frac{1}{a^3}\right)^2 \cdot (-3aa^4)$; в) $\frac{-3x^2 \cdot (-xy)^3 \cdot x^0 \cdot y^0}{(x^2)^3 \cdot (-3y)^2}$; д) $\frac{(4bc^3) \cdot (-ac^2)^2 \cdot (2a^2b^3c)^3}{(-2b^2c^2)^5 \cdot (((-a)^2)^2)^2}$;

б) $(-2b^2)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2b^3}\right)^3$; г) $\frac{(m^2n)^3 \cdot (mn^4) \cdot (-25m)^2}{(-5m^3n^2)^3 \cdot (mn)^0}$; е) $\frac{(x^2yz)^4 \cdot (7y^2)^3 \cdot (2x^2z)^2}{(-((-x)^2)^2)^3 \cdot (14y^5z^3)^2}$.

64 Вычислите:

а) $\dfrac{5^6 \cdot 6^4 \cdot 5^3 \cdot (2^5)^2 \cdot (3^9 : 3^3)}{10^5 \cdot 25^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot 15^7 \cdot 2^8}$; б) $\dfrac{77^4 \cdot 11^3 \cdot (2 : 7)^2 \cdot 28^3}{(4^6 : 2^4) \cdot 7^6 \cdot 16^0 \cdot (11^2)^5 \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^3}$.

65 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{b^{17} \cdot b^{24} \cdot b^{48} \cdot (b^3)^5 \cdot (2b)^{13}}{(2b^3)^{12} \cdot (b^{31} : b^{18}) \cdot b^{49} \cdot b^{18}} + b^0$ при $b = 7$;

б) $\dfrac{3^{49} \cdot (c^{96} : c^{75}) \cdot d^{36} \cdot d^{45} \cdot (cd)^{39}}{c^8 \cdot d^{35} \cdot (d^{18} : d^{13}) \cdot (d^6)^8 \cdot d^{31} \cdot (3c)^{48} \cdot c^3} - 2(bc)^0$ при $c = -\frac{1}{6}$, $d = -2$.

66 Найдите все натуральные значения x, удовлетворяющие равенствам:

а) $6^x = 216$; б) $5^{x+2} = 125$; в) $2^{4y} = 256$; г) $3^{x-2} = 243$.

67 Вычислите A, если:

а) $4^k = 64$, $8^m = 64$; $A = k^2 + m^2$;

б) $5^c = 625$, $7^d = 49$, $A = (c + d)^2$;

в) $3^x = 81$, $10^y = 100$, $A = x^y$;

д) $2^{3p-1} = 32$, $3^{q+3} = 27$, $A = (p^{10})^q$.

68 **Математическое исследование.**

Исходя из фундаментального принципа развития математической теории (принципа неразрушения) подумайте, как можно было бы дать определение степени рационального числа с целым показателем. Как в этом случае будут связаны между собой степени одного и того же отличного от нуля числа с противоположными показателями?

69 Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Если высказывание ложно, постройте его отрицание и докажите истинность отрицания.

а) $\forall\ a, b \in Q$: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;

б) $\exists\ a, b \in Q$: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;

в) $\forall\ x \in Q$, $n \in N$: $|x^{2n}| = x^{2n}$;

г) $\exists\ x \in Q$, $n \in N$: $|x^{2n}| = -x^{2n}$.

70 Изобразите на координатной прямой множество значений x, для которых:

а) $x > 4$; в) $-5 \leqslant x < 1$; д) $|x| < 3$; ж) $|x - 2| > 4$; и) $3 \leqslant |x| < 5$;

б) $x \leqslant -2$; г) $-5 < x \leqslant 1$; е) $|x| \geqslant 3$; з) $|x + 2| \leqslant 1$; к) $-3 \leqslant |x| < 5$.

71 а) Две пловчихи, Катя и Даша, поплыли по реке из одного места. Катя поплыла по течению, а Даша – против течения. Через четверть часа девушки развернулись и поплыли навстречу друг другу. Через сколько времени после старта они встретятся, если они плывут с одинаковой собственной скоростью?

б) От пристани Киевского вокзала вниз по течению отправился прогулочный теплоход, затем он развернулся и вернулся на пристань Киевского вокзала через 7 часов. Сколько километров проплыл теплоход за время этой прогулки, если теплоход плыл с собственной скоростью, равной 21 км/ч, а скорость течения равна 2 км/ч.

в) Поднимаясь вверх по движущемуся с постоянной скоростью эскалатору, Ваня насчитал 20 ступенек, при этом весь путь занял у него 60 с. Маша же, поднимаясь вверх по тому же эскалатору, насчитала 16 ступенек, а весь путь у нее занял 72 с. Сколько ступенек насчитает Ваня, поднимаясь вверх по неподвижному эскалатору?

72 Упростите выражение при допустимых значениях величин:

а) $x + (2x - 4y) - (3x + 2y - (x + (6y - 5x)) - 2x)$;

б) $a - (a - (a - ((a - 2b) - a))) - (a - (a - b + 2(a - b)))$;

в) $(-1{,}5pq^2) : (-p) \cdot (0{,}25qr) : (-3pr) \cdot (4p^2q) : (0{,}5pq)$;

г) $\dfrac{3xy \cdot \frac{2}{5}xz - 2x \cdot xyz - \frac{1}{3}x^2yz + x - (5 + 2x - 7) + x - 2}{2xy - 2yz \cdot z - xy + 2yz \cdot y + \frac{13}{15}z^2y - 4zy^2 + 2zy \cdot y - xy}$.

73 Разложите числа на простые множители и найдите их НОД и НОК:

а) 24 и 256; б) 42 и 108; в) 512 и 100 000; г) 216 и 243.

74 С помощью алгоритма Евклида найдите НОД данных чисел, а затем найдите их НОК:

а) 476 и 901; б) 207 и 989; в) 779 и 1435; г) 534 и 1157.

75 Решите уравнение:

а) $5y - 9 = 2\frac{1}{4}$; в) $4{,}3(a - 2) + 3{,}7(a - 2) = 2\frac{2}{3} - 16$;

б) $(7x + 4{,}2) - (1{,}2 + 5x) = 3\frac{2}{7}$; г) $5\frac{1}{3} - 3{,}2(c - 3) + 1{,}5(c - 2) = 0{,}7c - \frac{1}{15}$.

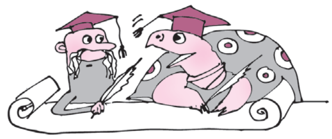
76 Докажите, что для любых целых a:

а) если $a + 1$ делится на 3, то $4 + 7a$ делится на 3;

б) если $a + 2$ делится на 5, то $1 + 3a$ делится на 5;

в) если $2a + 1$ делится на 7, то $12a - 1$ делится на 7;

г) если $3a + 2$ делится на 11, то $21a + 3$ делится на 11.



Д **77** Запишите выражение в виде степени при допустимых значениях переменных:

а) xx^3xx^7; г) $5 \cdot 125 \cdot 25$; ж) $b^8 : b^3$; к) $(a^n)^8$;

б) $(-2a)^2(-2a)(-2a)^5$; д) $8 \cdot 32 \cdot 16$; з) $n^9 : n^6 \cdot n$; л) $(d^5)^3 \cdot d^6$;

в) $c^m cc^2 c^{m+1} c$; е) $3^n \cdot 27 \cdot 3^{n-4} \cdot 9$; и) $y^{2k} : y^4 \cdot y^7 : y^k$; м) $a^{24} : (a^2)^m$.

78 Упростите выражение при допустимых значениях переменной:

а) $3ab^2 : (-0{,}2a^3b)$; г) $\frac{b^2 \cdot b^n \cdot b^3}{b^{n-2} \cdot b^6}$; ж) $\frac{2^7 \cdot x^3 \cdot (-x^3)^2 \cdot x^4}{64 \cdot (-x^2)^5 \cdot x^2 \cdot x^3}$;

б) $\frac{5}{12}(-x)^3yz \cdot 6 : (-xyz^2)$; д) $\frac{36a^2c^5y^3}{18c^6y^2a^2}$; з) $\frac{49^2 \cdot (m^3)^5 \cdot n^8 \cdot k^6}{7^4 \cdot k \cdot k^5 \cdot (n^4)^2 \cdot (m^2)^7}$;

в) $-0{,}8m^2nk^2 \cdot 12{,}5 : ((-m)^4n^2k^3)$; е) $\frac{18kd^3 - 6kd^3}{5k^2d + 7k^2d}$; и) $\frac{a^n + a^{n+2}}{a^n + a^{n-2}}$.

79 Запишите выражение в виде степени с основанием 2, 3 или 5:

а) $(3^4)^6$; б) $25 \cdot 5^7 : 125^2$; в) $9^5 : 81 \cdot 3^2 : 27$; г) $-\frac{(-2^2)^5 \cdot 2^8}{2 \cdot 4^7 \cdot (-2)^2}$; д) $((5^4)^3)^2)^1$.

80 Представьте x^{18} в виде степени с основанием: а) x^2; б) x^3; в) x^6; г) x^9.

81 Возведите в степень:

а) $(4bc)^2$; б) $(-\frac{3}{2}mnk)^3$; в) $(-a^2b)^5$; г) $(0{,}2x^2yz^3)^4$; д) $\left(\frac{5}{7}\right)^m$; е) $\left(\frac{p^2}{3qr^3}\right)^2$.

82 Возведите выражения $4a^3$; $-0{,}3xy^4z^2$; $\frac{2m^5}{5n^2k}$: а) в квадрат; б) в куб.

83 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) m^8n^8; б) $-0{,}125x^3y^3z^6$; в) $16a^2ba^4b$; г) $\frac{27^2}{y^6}$; д) $\frac{100c^2d^2}{m^6}$; е) $-\frac{x^3y^2x^2y^8}{32z^5}$.

84 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $49x^6y^{34}z^{26}$; б) $\frac{32a^{25}b^{15}}{c^{75}}$; в) $x^{473}y^{731}$; г) $c^{377} : d^{493}$.

85 Вычислите рациональным способом:

а) $25^6 \cdot 0{,}04^6$; б) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{14} \cdot 0{,}8^{15}$; в) $(-24)^9 : 2{,}4^8$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} : \left(\frac{3}{8}\right)^{10}$.

86 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{4x \cdot (-3y)^2 \cdot x^3}{(6x^2y)^2}$; б) $\dfrac{((-m)^2)^3 \cdot ((-m)^3)^2}{(-(-m)^4)^3}$; в) $\dfrac{(0{,}5a^2b^4)^2 \cdot (-2a^3b)^3}{(ab)^{11} \cdot ((-b^2)^1)^0}$.

87 При каком значении m верно равенство:

а) $x^8 \cdot x^m = x^{24}$; б) $(x^8)^m = x^{24}$; в) $(y^m)^5 = y^{40}$; г) $y^m \cdot y^5 = y^{40}$.

88 Вычислите:

а) $\dfrac{7^6 \cdot 22^3 \cdot (2^5)^2 \cdot (11^{10} : 11^8) \cdot 28^4}{14^3 \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^4 \cdot 44^3 \cdot 77^6}$; б) $\dfrac{(9^7 : 3^4) \cdot 15^8 \cdot (7^3)^2 \cdot \left(\frac{5^{11}}{5^4}\right) \cdot 7^4}{21^{10} \cdot 25^6 \cdot 45^4} + 2{,}315^0$.

89 Постройте математическую модель и решите задачу:

Прогулка сотрудников пончиковой компании Антона и Ксюши по Москве-реке началась в 10 ч утра, когда теплоход отчалил от пристани в Коломенском. Поплыв вниз по течению реки, он через некоторое время остановился на зеленой стоянке, где был устроен пикник, занявший 3 часа. После этого все опять разместились на теплоходе и вернулись на пристань в Коломенском в 9 ч вечера. Чему равно расстояние до места пикника, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость теплохода не менялась и была равна 15 км/ч?

90 Докажите, что числа A и B имеют одинаковые остатки при делении на 7.

$A = \left[\left(42{,}4 \cdot \frac{3}{4} - 21{,}2\right) \cdot 50 + 100 \cdot \left(60 \cdot \left(14\frac{1}{9} - 13\frac{134}{135}\right) : \frac{32}{45} + 3{,}75 \cdot \frac{6}{25}\right)\right]$;

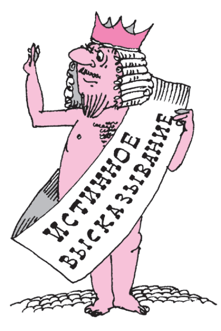
$B = 25 \cdot \left[17\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} - \left(3\frac{2}{3} - 2\frac{7}{60}\right)\right] \cdot \left(\frac{11}{40} : 4\frac{7}{12} + 9{,}94\right)$.

C **91*** Сравните значения выражений:

а) 2^{10} и 10^3; б) 10^{100} и 100^{10}; в) 2^{300} и 3^{200}; г) 31^{16} и 17^{20}; д) 4^{53} и 15^{45}.

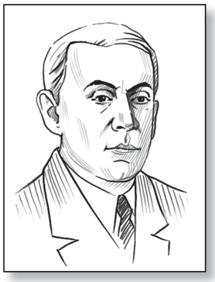
92* В гимназии 85 школьников. На занятия английским языком ходят 42 человека, немецким – 28, французским – 30. При этом 10 человек ходят как на занятия английским языком, так и немецким, 5 человек – на занятия английским и французским языками, а 8 человек – на занятия немецким и французским языками. Все эти три языка изучают 3 школьника. Сколько школьников не учат эти иностранные языки?

93* Король решил устроить испытание жениху своей дочери. В одну их трех комнат он посадил принцессу, в другую – дракона, а третью комнату оставил пустой. Если жених угадает, в какой комнате принцесса, то сможет на ней жениться. Табличка на той комнате, где находится принцесса, истинна, на той комнате, где сидит дракон, – ложна, а табличка на пустой комнате может быть как истинной, так и ложной. На комнате 1 висит табличка «Комната 3 пуста», на комнате 2 – «Дракон в комнате 1», на комнате 3 – «Эта комната пуста». В какой комнате находится принцесса?



§ 2. Многочлены и действия с ними

1. Одночлены



Математика имеет целью найти общие методы для получения эффективных результатов в различных сферах человеческой деятельности.

Граве Дмитрий Александрович (1863–1939), русский математик

При решении задач мы часто сталкиваемся с произведениями различного вида. Так, например, объем прямоугольного параллелепипеда есть произведение трех его измерений; выполненная работа – произведение производительности и затраченного времени и т.д. Поэтому выражения, в которых используется только действие умножения, имеют в математике отдельное название и специально изучаются.

Определение 1. Произведение, состоящее из числовых множителей и множителей-переменных, называется **одночленом**.

Напомним, что возведение в степень также является умножением. Поэтому одночленами являются, например, следующие произведения:

$$yxxxcy \cdot (-0{,}5), \qquad (-n^2 \cdot 2 \cdot b)^4, \qquad m \cdot \frac{1}{8} \cdot z^5 \cdot (-2k)^3.$$

Отдельные числа и переменные также являются одночленами, так как их всегда можно представить в виде произведения, например, $d = d \cdot 1$, $14 = 14 \cdot a^0$. А вот выражения $x + 1$, $y^2 - 3$ и $\frac{7x}{5y}$ одночленами не являются, поскольку содержат действия соответственно сложения, вычитания, деления. Если среди множителей одночлена имеется нуль, то такой одночлен называется *нулевым*. Например, одночлен $0 \cdot a^3 \cdot (-7c^3)$ – нулевой.

Определение 2. Произведение всех числовых множителей одночлена называется **коэффициентом** одночлена.

Так, например, коэффициентом одночлена $yxxxcy \cdot (-0{,}5)$ является число $(-0{,}5)$, а одночлена $m \cdot \frac{1}{8} \cdot z^5 \cdot (-2k)^3$– число $\frac{1}{8} \cdot (-2)^3 = -1$.

Если коэффициент одночлена равен 1 или −1, то числовой множитель в его записи обычно не указывают. И наоборот, если в записи одночлена имеются только буквенные множители, то его коэффициент, соответственно стоящему перед ним знаку, считают равным либо 1, либо −1. Таким образом, каждый одночлен может быть представлен в виде произведения своего коэффициента и степеней входящих в него переменных. Например:

$$(-0{,}5) \cdot y^2x^3c^1, \qquad 16 \cdot n^8b^4, \qquad -1 \cdot m^1z^5k^3, \qquad 1 \cdot d^1, \qquad 14 \cdot a^0.$$

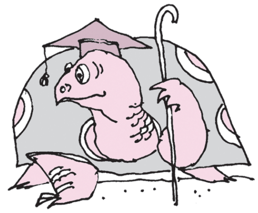
Каждый из одночленов можно записать несколькими различными способами. При этом два одночлена считаются равными, если один из них может быть получен из другого с помощью равносильных преобразований.

Так, например,

$$yxxxcy \cdot (-0{,}5) = (-0{,}5)y^2x^3c = -0{,}5cx^3y^2.$$

Поэтому для того, чтобы легче было производить действия с одночленами, вычислять их значение при известных значениях входящих в них букв, договорились записывать одночлены в так называемом *стандартном виде*.

Определение 3. **Стандартным видом** ненулевого одночлена называется его запись, при которой:



1) коэффициент стоит на первом месте;

2) каждая переменная участвует в записи одночлена лишь один раз в виде соответствующей степени;

3) буквы в записи одночлена (если они есть) следуют в алфавитном порядке.

Например, приведенные выше одночлены в стандартном виде записываются так:

$$-0{,}5cx^3y^2, \qquad 16b^4n^8, \qquad -k^2mz^5, \qquad d, \qquad 14.$$

Определение 4. **Стандартным видом** нулевого одночлена называется число 0.

Проанализируем, как в рассмотренных примерах мы записывали одночлены в стандартном виде, и построим соответствующий алгоритм.

Алгоритм записи одночлена в стандартном виде

1. Вычислить произведение всех числовых множителей (коэффициент) одночлена и записать его на первом месте.
2. Определить, какие переменные входят в одночлен, и записать их в алфавитном порядке.
3. Найти и записать степени переменных.

После того как мы научились записывать одночлены в стандартном виде, нам становится проще определять некоторые их характеристики и производить с ними арифметические действия.

Одной из важных характеристик одночлена является его *степень*. Например, для одночленов одинаковой степени мы можем установить общие методы решения уравнений, в которые эти одночлены входят. Выбор метода решения задач всегда играет ключевую роль и во многом определяет успех. Поэтому нам важно уточнить это понятие и научиться его применять.

Определение 5. **Степенью ненулевого одночлена** называется сумма показателей степеней входящих в одночлен переменных.

Так, степени рассмотренных нами выше одночленов равны соответственно 6, 12, 8, 1 и 0.

Степень нулевого одночлена не определяется.

Выполнять арифметические действия с одночленами достаточно легко. Ведь мы всегда можем записать сумму, разность, произведение и частное нескольких одночленов (кроме деления на нулевой одночлен). При умножении и возведении в степень одночленов в результате всегда будут получаться одночлены, поскольку никаких других действий, кроме умножения, мы при этом не производим. А вот при сложении и вычитании двух одночленов ситуация иная: одночлен в итоге может получиться лишь тогда, когда слагаемые составленной алгебраической суммы, записанные в стандартном виде, имеют одинаковую буквенную часть.

Определение 6. Одночлены, имеющие в стандартном виде одинаковую буквенную часть, называются **подобными**.

Подобными являются, например, одночлены $-3a^2b$ и a^2b. При их сложении или вычитании, применив распределительный закон умножения, мы вновь получим одночлен, например:

$$-3a^2b + a^2b = (-3 + 1)a^2b = -2a^2b \qquad -3a^2b - a^2b = (-3 - 1)a^2b = -4a^2b.$$

Равносильное преобразование, в результате которого все подобные между собой одночлены записываются как один одночлен, называется **приведением подобных слагаемых**.

Приведение одночленов к стандартному виду и приведение подобных слагаемых позволяет упрощать решение различных задач и примеров.

Пример. Определите, можно ли записать данное выражение, как одночлен и найдите его значение при $m = -48$, $n = -0{,}32$, $k = 5{,}6$:

$$mkn(0{,}5k)^2\,mn^4 - 2nnnk^3nm^2n + knkn \cdot 1\frac{3}{4} \cdot mkn^2mn.$$

Решение:

Мы видим, что сразу ответить на поставленный вопрос очень непросто. Приведем каждый из одночленов данной алгебраической суммы к стандартному виду и упростим полученное выражение:

$$0{,}25k^3n^5m^2 - 2k^3n^5m^2 + 1\frac{3}{4} \cdot k^3n^5m^2 = (0{,}25 - 2 + 1{,}75)\,k^3n^5m^2 = 0 \cdot k^3n^5m^2 = 0.$$

Таким образом, фактически устно мы получили, что при всех значениях m, n и k (в том числе и при указанных в условии) значение данного выражения будет равно 0. А значит, данное выражение является нулевым одночленом.

94 1) Запишите следующие выражения:

а) Удвоенный куб числа a.

б) Разность квадрата числа x и частного чисел y и z.

в) Сумма кубов чисел m, n и k.

г) Утроенное произведение квадрата числа b и куба пятой степени числа c.

2) Исходя из смысла слов русского языка, выскажите предположение, какие из записанных вами выражений можно назвать «одночленами». Проверьте свое предположение, используя определение понятия одночлена, приведенное на стр. 19.

95 Прочитайте выражение и определите, является ли оно одночленом. Обоснуйте свой ответ.

а) $2ab^2$; в) $3(a^2 + c^2)$; д) $\frac{1}{9}$; ж) 0; и) $\frac{1}{x} \cdot 5y$;

б) $\frac{1}{12} \cdot d^7$; г) $-k$; е) $m^3(n^2)^6$; з) $-2(x - y)^3$; к) $-\frac{4}{7}c^0k^0$.

96 (Устно.) Найдите коэффициент одночлена:

а) $4x^2 \cdot 3y^3$; в) $0{,}2a \cdot \frac{1}{2}c^2 \cdot (-7b)$; д) $(-a)^2$; ж) $-\frac{2}{3}ab^3 \cdot (6ac)^2$;

б) $-1{,}2r^2s \cdot 0{,}3t$; г) $-3bc^3 \cdot (-y^4) \cdot \frac{5}{9}xb$; е) $-p^2(-q)^4$; з) $(-0{,}5m^2)^3 \cdot (-8n^3m)$.

97 Приведите одночлен к стандартному виду, определите его коэффициент и степень:

а) $3mmddm \cdot 8md^2$; г) $(-0{,}1ky^4)^2 \cdot 40y^2k^3$; ж) $-1{,}8bac^2 \cdot \left(\frac{1}{3}c^2ab^4\right)^2$;

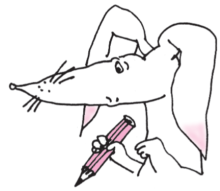
б) $14yx^2yx \cdot (-\frac{5}{7}xy)$; д) $(5ab)^3 \cdot (-0{,}2a^2b)^2$; з) $\frac{5}{24}k^2 \cdot (-2kcn^2)^3 \cdot (-0{,}6n^2c)$;

в) $-\frac{3}{4}cb^2c^3 \cdot (-0{,}4)b^3c^2$; е) $12{,}5(-n)^4d \cdot (0{,}2dn^2)^3$; и) $\left(\frac{2}{3}a^2y\right)^2 \cdot 4{,}5n^2ay^2 \cdot (-yn)^3$.

98 Представьте данный одночлен как степень некоторого одночлена:

а) $0{,}16a^4b^2$; б) $6\frac{1}{4}n^{12}d^{20}$; в) $-\frac{1}{125}m^3n^3k^6$; г) $0{,}0081x^8y^4z^{12}$; д) $-32a^{10}c^5y^5d^{15}$.

99 Среди указанных одночленов найдите подобные:



а) $2xy$; $-4x^2y$; $3xy^2$; $\frac{1}{2}x^2y^2$; $-5y^2x$;

б) $7a^3b$; $0{,}4a^3c$; $-9{,}8ab^3$; aba^2; $-\frac{9}{11}ca^3$;

в) $-\frac{6}{7}m^2nk$; $1{,}3n^2mk$; $-\frac{3}{4}k^2nm$; $nmnk$; $2{,}5mn^2k$.

100 Составьте из букв a, b и c восемь подобных между собой одночленов шестой степени с буквенными частями, записанными разными способами.

101 Выполните указанные действия над одночленами (при допустимых значениях переменных) и докажите, что в результате их получится одночлен. Запишите его в стандартном виде.

а) $(3a^2b - 4ba^2) + 5aba$; д) $15c^8d^2 : (c^4d) - 9c^5d^3 : (3cd^2)$;

б) $7x^4y^2 - (2x^2y^2x^2 + 6y^2x^4)$; е) $(-ab^3 : 5)^2 \cdot (5a : b) : (ba : 5) - 6a^3b^7 : (3ab^3)$;

в) $-0{,}5p^2 \cdot (2pq)^3 + 12p^4q^3p$; ж) $(3xy)^3 \cdot (5xy)^2 : (15x^2y)^2 - (5xy) \cdot y^2 + y^3x$;

г) $(3mn)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}mn\right)^2 - 5n^5m^5$; з) $k^7m^4 - ((3k^2m)^4 : 27k + k(k^3m^2)^2)$.

102 Запишите данное выражение как одночлен стандартного вида. Запишите подобный ему одночлен с коэффициентом a.

а) $(x^2 - (6xy^2 - 3x^2)) - 5xy^2 + 5x^2 - (7x^2 - (-2x^2 + (11xy^2 - xy^2 - 3xy^2)))$, если $a = -1$;

б) $2pq^2 + 4(3pq^2 - q) - 5pq^2 - 8pq^2 + (5q - 2(6q - 4pq^2 - pq^2) + 11q + pq^2)$, если $a = 1$;

в) $c^2b - (4c + 2c(4 - (6 - 3cb))) + 0{,}5(12c + 4c^2b) - 3c + 3(6c^2b - c)$, если $a = 1{,}5$;

г) $5x^2z^3 - ((5xz - 3x^2z^3) - 2x^2z^3) + 2xz - 3(2x^2z^3 - x^2z^3) + 3xz + 0{,}5(-4x^2z^3)$, если $a = -\frac{1}{3}$.

103 Докажите, что данное выражение может быть записано в виде одночлена. Запишите его в стандартном виде и найдите его значение при данных значениях букв.

а) $5m^2n - 4(3n - 2m^2n) + 0{,}5(2m^2n - 4(m^2n - 3n)) - 3(m^2n - 2n)$ при $m = 1$, $n = -1$;

б) $0{,}8a^2b \cdot 2{,}5ab + 9ab^2 \cdot \frac{1}{3}a^2 - 7a^3b^2$ при $a = 2$, $b = -3$;

в) $2pq^2r + pq(7qr - 2r^2) - 6p^2 - 3(4pq^2r - 2p^2) + 2pqr^2$ при $p = 2$, $q = -1$, $r = 1$;

г) $(5ac)^2 - 2ac(8ac - 7ab) - 5a^2(c^2 + 3bc) + a^2bc$ при $a = 5$, $b = -12$, $c = -3$.

104 Какие одночлены надо поставить вместо A, B, C и D, чтобы выражения превратились в истинные равенства?

а) $7x^2y^3 + A = 13x^2y^3$;

б) $21p^7q^9 - B = 4p^7q^9$;

в) $11a^7b^4 \cdot C = 5b^{11}a^{12}$ $(a,\ b \neq 0)$;

г) $36m^{12}n^{26} : D = 4m^3n^{21}$ $(m,\ n \neq 0)$.

105 Какие одночлены надо подставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $A^2B^5 = 32x^8y^{15}z^4$;

б) $A^{11}B^4 = 81p^{22}q^4r^{10}s^{12}trt^3q^4$;

в) $A^3B^7 = 27a^4b^2c^5d^2 \cdot 8a^3b^4c^2d$;

г) $A^5B^{12} = m^4n^2k^5t^3t^9n^{10}k^5m^8$.

П **106** Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний постройте отрицания и докажите истинность отрицаний.

а) $\forall\ x \in Q$: $x^5 \cdot x^5 = x^{25}$;

б) $\exists\ x \in Q$: $x^5 \cdot x^5 = x^{25}$;

в) $\forall\ x,\ y \in Q$: $(xy^4)^2 = x^2y^6$;

г) $\exists\ x,\ y \in Q$: $(xy^4)^2 = xy$.

107 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Число мужчин, женщин и детей, занимающихся в секции тенниса, относится как $3 : 5 : 9$. Сколько детей в этой секции, если всего в ней занимаются 34 человека?

б) Число однокомнатных, двухкомнатных, трехкомнатных и четырехкомнатных квартир в доме относится как $5{,}7 : 5{,}6 : 2{,}2 : 1{,}5$. Сколько трехкомнатных квартир в этом доме, если в нем всего 150 квартир?

в) Для изготовления блинов берут муку, молоко, яичный порошок и прочие компоненты (сахар, сода, соль) в отношении $2 : 4 : 0{,}75 : 0{,}25$. Сколько нужно муки, чтобы приготовить 3,5 кг блинов?

108 Выполните указанное действие по модулю m:

а) $13 + 11,\ m = 7$;

б) $9 + 17,\ m = 9$;

в) $11 + 11 + 11,\ m = 14$;

г) $27 - 3,\ m = 8$;

д) $35 - 12,\ m = 4$;

е) $48 - 17,\ m = 3$;

ж) $6 \cdot 3,\ m = 5$;

з) $19 \cdot 2,\ m = 6$;

и) $7^2,\ m = 11$.

109 Докажите, что для любых целых a:

а) $a^3 + 2a^2 + 3a$ либо делится на 4, либо при делении на 4 дает остаток 2;

б) $2a^3 + a^2 + 5a$ либо делится на 3, либо при делении на 3 дает остаток 2.

Д **110** Приведите одночлен к стандартному виду, определите его коэффициент и степень:

а) $15ab^3ab \cdot (-\frac{3}{5}a^2b)$;

б) $24x^3 \cdot (-\frac{1}{2}yzx)^3 \cdot (-0{,}2x^3z)$.

111 Выполните указанные действия (при допустимых значениях переменных) и докажите, что в результате их получится одночлен. Запишите его в стандартном виде.

а) $11a^3b^4 - (5ab^4a^2 + 4b^4a^3)$;

б) $-0{,}2cd^3 \cdot (5dc)^2 + 7c^2d^5c$;

в) $(9x : y^2) \cdot (x^2y : 3)^3 \cdot \frac{6}{x^2} - 8x^4y^2 : (2yx^2)$;

г) $(7pq^2)^2 \cdot (2q^3p) : (-14q^5p^2) - (3qp)^3 : (-9qp^2)$.

112 Запишите данное выражение как одночлен стандартного вида. Запишите подобный ему одночлен с коэффициентом a.

а) $2x - (3xy^2 - 4x) + 5xy^2 - 7x - (9x - (10x - (4xy^2 - 3xy^2 - 2xy^2)))$, если $a = -2$;

б) $4cb^2 - (7cb^2 - 2c) - 2cb^2 - cb^2 + (4c - (6c - 2cb^2 - cb^2) + cb^2)$, если $a = 3$.

113 Докажите, что данное выражение может быть записано в виде одночлена. Запишите его в стандартном виде и найдите его значение при данных значениях букв.

а) $7x^3y - 4(2xy - x^3y) - (8x^3y - (3x^3y + 4xy)) - 4(2x^3y - xy)$ при $x = 2$, $y = -2$;

б) $(3ml)^3 - 6(mn)^3 - 2m^3(4l^3 - 3n^3) - 20m^3l^3$ при $m = 1$, $n = -1$, $l = -2$.

114 Какие одночлены надо поставить вместо A, B, C и D, чтобы выражения превратились в истинные равенства?

а) $9a^5b^7 + A = 28a^5b^7$;

б) $48m^3n^{11} - C = 14m^3n^{11}$;

в) $19x^4y^3 \cdot B = 4x^6y^8$ $(x,\ y \neq 0)$;

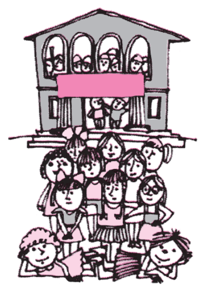
г) $55p^{12}q^{18} : D = 11p^2q^7$ $(p,\ q \neq 0)$.

115 Какие одночлены надо подставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $A^6B^9 = 64p^{12}q^{27}r^{24}s^9$;

б) $A^5B^{12} = 27x^7y^3z^5t^6 \cdot 9y^2x^5t^6$.

116 Количество сотрудников пяти филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши – московского, питерского, воронежского, казанского, сочинского – относится как 7,25 : 3 : 2 : 1,25 : 2,5. Определите, сколько сотрудников работает в каждом филиале, если всего в этих пяти филиалах работает 320 человек.



117 Докажите, что $a^3 + 4a$ для любых целых a либо делится на 5, либо при делении на 5 дает остаток 1, либо при делении на 5 дает остаток 4.

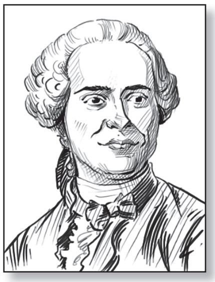
118 Докажите, что разность A и B делится на 17:

$$A = \frac{\left(9\frac{1}{4} - 7\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{4}{37} - 1\frac{1}{2}}{0{,}1 \cdot \left(3\frac{1}{8} + 4\frac{3}{20} - 1\frac{1}{6} - 5\frac{2}{5}\right) : 4\frac{1}{4}}; \qquad B = \left(\frac{3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} - 6\frac{5}{6}}{5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} : 1\frac{2}{9}\right) \cdot 150.$$

С **119*** На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести 5 реформ. Каждой реформой недовольна половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге?

120* Несколько друзей нашли клад и начали его делить. Первый взял 100 золотых монет и десятую часть остатка. Второй взял 200 золотых монет и десятую часть остатка, третий – 300 золотых монет и десятую часть остатка, и так до последнего. Сколько золотых монет было в найденном кладе и сколько было друзей, если в процессе указанного дележа все получили поровну?

2. Многочлены



Алгебра щедра. Зачастую она дает больше, чем у нее спрашивают.

Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783),
французский математик, механик и философ

Как мы уже знаем, алгебраическая сумма нескольких одночленов является одночленом, только если речь идет о сложении и вычитании подобных одночленов. В общем случае мы получаем новое выражение, называемое *многочленом*.

Определение 1. Выражение, записанное как алгебраическая сумма одночленов, называется **многочленом.**

Например, многочленами являются выражения:

$$2x + 3y \qquad 5 - a^2 + 6a - ab^2 \qquad 3n^2 - 8 + 4n^6$$

Изучение свойств многочленов крайне важно, так как часто они являются математическими моделями практических задач. Так, например, стоимость покупки из 2 книг по цене x р. и 3 журналов по цене y р. или длину пути автомобиля, ехавшего 2 ч со скоростью x км/ч и 3 ч со скоростью y км/ч, можно записать с помощью многочлена $2x + 3y$. Поэтому для того, чтобы решать самые разнообразные задачи, нам надо научиться выполнять действия с многочленами и преобразовывать их.

Определение 2. Одночлены, из которых составлен многочлен, называются **членами** многочлена. При этом многочлен, состоящий из двух одночленов, называют **двучленом**, из трех – **трехчленом** и т.д.

Например, $2x + 3y$ – это двучлен, $5 - a^2 + 6a - ab^2$ – четырехчлен, $3n^2 - 8 + 4n^6$ – трехчлен. Сам одночлен также является многочленом, состоящим из одного члена.

Многочлены, как и одночлены, можно записать различными способами. При этом два многочлена считаются равными, если один из них может быть получен из другого с помощью равносильных преобразований. Так,

$$5 - a^2 + 6a - ab^2 = -ab^2 - a^2 + 6a + 5,$$

поскольку при перестановке слагаемых их сумма не изменяется. Однако вторая запись упорядочивает члены многочлена по степеням. Как мы уже убедились на примере одночленов, упорядочивание записи математических объектов значительно упрощает различные операции с ними.

Определение 3. **Стандартным видом** многочлена называется запись, при которой все его члены:

1) являются одночленами стандартного вида;

2) не являются подобными одночленами;

3) записаны в порядке убывания степеней одночленов (одночлены, имеющие одинаковую степень, записываются в произвольном порядке).

Определение 4. **Степенью многочлена** называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов при записи многочлена в стандартном виде. При этом член многочлена, имеющий наибольшую степень, называют **старшим членом**, а имеющий нулевую степень – **свободным членом** многочлена.

Запишем в стандартном виде рассмотренные нами многочлены и определим их степени, а также их старшие и свободные члены.

Многочлен в стандартном виде	Степень многочлена	Старший член	Свободный член
$2x + 3y$	1	$2x$ и $3y$	0
$-ab^2 - a^2 + 6a + 5$	3	$-ab^2$	5
$4n^6 + 3n^2 - 8$	6	$4n^6$	–8

Пользуясь определением стандартного вида многочлена, мы можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм записи многочлена в стандартном виде

1. Записать все члены многочлена в стандартном виде.
2. Привести подобные слагаемые.
3. Определить степень каждого одночлена и записать их алгебраическую сумму в порядке убывания степеней.

При решении разнообразных задач нам часто приходится вычислять значение многочлена при известных значениях входящих в него переменных. Рассмотрим пример, который поможет нам выявить некоторые общие закономерности, упрощающие вычисления.

Пример. Найти значение многочлена $4n^5 + 3n^2 - 8$, если: 1) $n = -2$; 2) $n = 1$; 3) $n = 0$.

Решение:

Поскольку многочлен уже записан в стандартном виде, подставим в него данные значения переменной n.

1) Если $n = -2$, то $4n^5 + 3n^2 - 8 = 4 \cdot (-2)^5 + 3 \cdot (-2)^2 - 8 = 4 \cdot (-32) + 3 \cdot 4 - 8 =$ $= -128 + 12 - 8 = -124$.
2) Если $n = 1$, то $4n^5 + 3n^3 - 8 = 4 \cdot 1^5 + 3 \cdot 1^3 - 8 = \underline{4 + 3 - 8 = -1}$.
3) Если $n = 0$, то $4n^5 + 3n^3 - 8 = 4 \cdot 0^5 + 3 \cdot 0^3 - 8 = \underline{0 + 0 - 8 = -8}$.

Анализируя полученные результаты, мы видим, что если переменная равна 1, то вычисление значения многочлена свелось к нахождению алгебраической суммы его коэффициентов, а при нулевом значении переменной оно равно свободному члену. Полученный вывод имеет общий характер.

Теорема 1. Если значения всех переменных, входящих в запись многочлена, равны 1, то значение многочлена равно алгебраической сумме всех его коэффициентов.

Доказательство:

Любая натуральная степень единицы равна 1, а при умножении на 1 число не изменяется. Значит, значения всех членов многочлена при единичных значениях переменных будут равны их коэффициентам. А поскольку многочлен является алгебраической суммой своих членов, то его значение будет равно алгебраической сумме всех его коэффициентов, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 2. Если значения всех переменных, входящих в запись многочлена, равны 0, то значение многочлена равно его свободному члену.

Доказательство:

Любая натуральная степень нуля равна 0, а при умножении числа на 0 получается 0. Значит, при подстановке в многочлен вместо переменных нуля значения всех его членов (кроме свободного) будут равны 0. Следовательно, значение многочлена будет равно алгебраической сумме, состоящей из нулей и свободного члена, и поэтому равно свободному члену, что и требовалось доказать. ▼

121 Запишите данные выражения в виде суммы одночленов. Как одним словом можно было бы назвать все эти выражения?

а) $m^2n - mn^2$; б) $x^2 - 2x + 3$; в) $a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 - 3b^4$.

122 Исходя из определения многочлена, приведенного на стр. 25, определите, можно ли указанное выражение записать как многочлен:

а) $4(a + b)$; в) $p^2 - q^2$; д) $-\frac{2}{3}$; ж) $\frac{2x - 5}{x^2 - 16} \cdot x^2$;

б) $7xy^2$; г) $-m(m + 1)$; е) 0; з) $a^2 + \frac{9 - 3}{6}$.

123 Дан многочлен:

$$2a^2a - a^3a^2 - 9 + 4aa.$$

Проанализируйте его запись и предложите свою версию стандартного (удобного для работы) способа записи многочлена. Что естественно было бы считать степенью многочлена? Какой из его членов можно было бы назвать «свободным членом»?

Сравните свои определения с теми, которые приведены на стр. 25–26.

124 Докажите, что данные многочлены записаны в стандартном виде. Назовите их степени, свободные члены и коэффициенты членов, имеющих буквенные множители.

а) $-2x + 3y$; в) $-x^2 - 4x + 9$; д) $y^3 + 2y^2 - y + 5$;

б) $\frac{1}{2}a^5 - 1$; г) $m^4 + m^3n - m^2n^2$; е) $-c^3d^3 - 3c^4 + cd^2 - 6d$.

Как одним термином можно назвать многочлены каждого столбика?

125 Запишите многочлен в стандартном виде и определите его степень:

а) $5a - 3ab - 4a$; д) $7x^2y + x^2 - 5x^2y + x^4 - 3x^2 + x^2y$;

б) $3xyx^2 + y^5 - 4x^2yx$; е) $4a^2b^3a - 3a^3b^4 - 5b^2a^3b + 2a^2b^3ab + 2a^3b^3$;

в) $-4p \cdot 2q^2 - q^4 + 6q^2p$; ж) $5m^3 - 2m^2 \cdot 3n^3 - 6m^3 + 7n^3m^2 + 2m^3 - 4m^3$;

г) $c^2d^3 - (2cd)^2 + 3cd^2c$; з) $7u^3v + (3u)^2 - 4v^3 - 8vu^3 - 10u^2 + 5v^3$.

126 Составьте свой многочлен, содержащий: а) переменную x; б) переменные a и b. Запишите составленный многочлен в стандартном виде и определите его степень.

127 Найдите ошибки в записи многочлена в стандартном виде или докажите, что запись сделана верно:

а) $a^3 + a^2 - a + b^3 - b^2 - b$;
б) $3x^2y - yx^2 + 4xy + 3x$;
в) $mn^3 - 4m^2n^2 + n^2m^2 - 2mn + 7$;
г) $2p^3q^2 + q^3p^2 - 5p^2q + q^2p + 2p - 3q - 1$.

128 Найдите одно значение переменной, при котором значение многочлена равно A:

а) $2x^2 - 3x - 5$, если $A = 0$;
б) $-5y^3 - 3y^2 + 18$, если $A = 10$;
в) $4n^3 - 8n^2 + 7n - 2$, если $A = -2$;
г) $-a^4 + 2a^3 - 3a^2 + 4a - 5$, если $A = -15$.

129 Приведите пример трехчлена с одной переменной x, значение которого:

а) при $x = 1$ равно (-4); б) при $x = -1$ равно 12; в) при $x = 0$ равно (-3).

Запишите ваш трехчлен в стандартном виде.

130 Известны формулы суммы квадратов n первых натуральных чисел, а также суммы их кубов:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$.

Найдите сумму квадратов и сумму кубов n первых натуральных чисел для:

а) $n = 10$; б) $n = 20$; в) $n = 30$; г) $n = 50$.

131 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $4xy^2 - 9x^2y - (6yxy - x \cdot 3xy \cdot 4)$;
б) $-(7ababa - 3a \cdot 3ab \cdot a) + (-11a^3b + (3ab)^2 \cdot a)$;
в) $5p^6 - (2p^2)^2 + 7p^3 - p^2 \cdot (2p^2)^2 + 3p^4 - (2p)^2 \cdot 2p$;
г) $8(mn)^2 + 11m^2n^3 - 3mn \cdot 2nm \cdot 2n - mn \cdot nm \cdot mn - 2mn \cdot 4mn + 2(mn)^3$.

132 Докажите, что данные выражения можно преобразовать в двучлены. Запишите их в стандартном виде и определите их степень:

а) $2aba - \frac{1}{7}ab \cdot 7a + 2b \cdot (\frac{1}{2}ab)$;
б) $p^2 \cdot (-0{,}2p^3q) + 2pqq^4 + 2{,}2pp^3qp$;
в) $3x^2y^2 - 3x^2y \cdot (-2x^2y^2)x + 4x^3y^5 + (-3xy) \cdot xy + 2x^3y^5$;
г) $\frac{2}{3}a^2c^2 \cdot \frac{1}{7}ac^2 \cdot (-21ac) + 2^3 \cdot ac \cdot \frac{1}{4}a^4c^3 - 2c^3a^2 \cdot (-2a^2cc)$.

Каким общим свойством обладают все полученные двучлены?

133 Запишите выражение как многочлен стандартного вида. Какой из многочленов мог бы быть «лишним»?

а) $2x - (xy + z^2) - x - 4xy - 4z^2 + (5z^2 - (12xy - x - 1))$;
б) $x + (2xy - z^2) + 2x - 7xy + 5z^2 - (4z^2 + (5xy + 3x + 1))$;
в) $x + (xy - z^2) - 2x - 5xy + 4z^2 - (3z^2 - (11xy + x + 1))$;
г) $-3x - (2xy + 2z^2) + 6x + 14xy - 3z^2 + (5z^2 + (-5xy - 3x + 1))$.

134 Дан многочлен $a^4b - 2a^3b^2 + 4a^2b^3 - 3ab - 5$. Подставьте вместо a и b указанные выражения и запишите получившийся многочлен в стандартном виде:

1) $a = x,\ b = y$;　　3) $a = x,\ b = -y$;　　5) $a = 2c^2,\ b = -1$;

2) $a = -x,\ b = y$;　　4) $a = -x,\ b = -y$;　　6) $a = -m^3,\ b = n^5$.

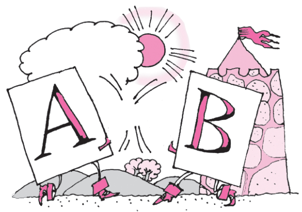
135 Какими многочленами можно заменить A, B, C и D, чтобы указанные выражения стали многочленами степени n?

а) $15c^2 - 17c - 14c - 13c^3 + 23c^2 + 7c^3 + A$, если $n = 2$;

б) $4ab^2 - 8b^2a - 5b^2a^2 + 4ab + 2a^2b^2 - B$, если $n = 3$;

в) $25x^3y^5 - 5x^2y^3 + 4y^2x^4 - 2y^5x^3 - 4xy^2 - C$, если $n = 5$;

г) $30mk^3 - 18m^5k - 5k^4m^5 - 7mk + 9m^3k^3 + D$, если $n = 6$.



П **136** Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний постройте отрицания и докажите истинность отрицаний:

а) $\forall\ z \in Z$: $z^2 > z$;　　в) $\forall\ n \in N$: $2n + 1 \not\,\vdots\ 2$;

б) $\exists\ x \in Z$: $x^2 + 1 \leqslant 0$;　　г) $\exists\ a, b \in Z$: $a + b = 11$ и $ab = 11$.

137 Сравните значения числовых выражений:

а) $\frac{25}{51}$ и $\frac{61}{120}$;　　в) $\frac{15}{16}$ и $\frac{14}{15}$;　　д) $\frac{5}{36}$ и $\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{36}$;　　ж) $5{,}6$ и $5{,}6 \cdot 0{,}999$;

б) $\frac{69}{68}$ и $\frac{698}{699}$;　　г) $\frac{356}{355}$ и $\frac{357}{356}$;　　е) $7\frac{9}{17}$ и $7\frac{9}{17} \cdot \frac{8}{9}$;　　з) $0{,}75 \cdot 1{,}01$ и $0{,}75$.

138 Решите уравнение:

а) $\frac{2(x-3)}{3} + \frac{5(x-3)}{27} = 46$;　　в) $2\frac{2}{5} \cdot (2x + 9) + \frac{3}{25} \cdot (5x - 10) = \frac{3}{5} \cdot (6x - 5)$;

б) $\frac{5(7x-2)}{2} - \frac{9(2x+8)}{4} = 5x + 1$;　　г) $\frac{3}{7} \cdot (3x - 1) - \frac{4}{21} \cdot (6x + 5) = \frac{5}{21} \cdot (4x + 1)$.

139 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Грибы при сушке теряют $\frac{11}{15}$ своей массы. Сколько надо собрать свежих грибов, чтобы получить 4 кг сушеных?

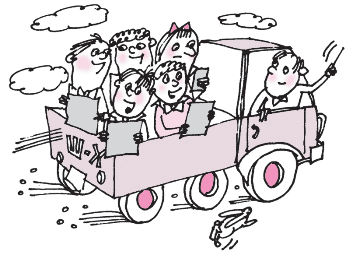
б) На конференции по экологическим проблемам развития общества основные доклады заняли $\frac{1}{7}$ часть от общего времени конференции. На обсуждение докладов потратили $\frac{10}{21}$ общего времени, на обсуждение новых направлений развития экологии – $\frac{1}{3}$ общего времени. Оставшееся время было отведено на кофе-паузы. Сколько времени проходила конференция, если общая продолжительность кофе-пауз составила 2 часа?

140 На кофейную фабрику поставщики доставили груз зеленого кофе и сложили его во дворе фабрики. Так как на следующий день обещали дождь, то мешки с зеленым кофе нужно было перенести в складское помещение. Все грузчики были заняты, но трое из них – Алексей, Михаил и Владимир – согласились в свободное от остальных дел время выполнить эту работу. Первым пришел грузчик Алексей, он перенес $\frac{1}{3}$ от общего количества поступившего кофе и ушел заниматься другими делами. Вторым пришел грузчик Михаил. Думая, что он пришел первым, он перенес $\frac{1}{3}$ от оставшегося количества мешков и тоже ушел. Последним пришел Владимир, он перенес 8 мешков – третью часть оставшихся мешков и также ушел. Сколько мешков с зеленым кофе поступило от поставщиков в данной партии?

141 Докажите, что:

а) $8^5 + 2^{11}$ делится на 17; б) $9^7 - 3^{10}$ делится на 20;

в) $25^6 - 5^{11}$ делится на 4; г) $16^8 + 2^{27}$ делится на 33.



142 Найдите ошибку в следующем рекламном объявлении:

«Наша машина может теперь ездить, не заправляясь бензином. Научно-исследовательский отдел нашего завода получил три патента на изобретения. Первое изобретение дает 40% экономии топлива, второе – еще 35%, а третье – дополнительно к первым двум еще 25% экономии. И это подтверждено самыми серьезными экспертами. Итоговую экономию может посчитать любой школьник:

$$40\% + 35\% + 25\% = 100\%.$$

Покупайте наши машины – и вы забудете, что такое заправки. Вам больше не нужно будет тратить деньги на бензин».

Д **143** Запишите выражение как многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $2(x - 3y) - 3(z - 2y) + 2(4z - 3x)$;

б) $(6m^2nmn - 2m^2 \cdot 2mn \cdot m) - (-5m^4n + (2mn)^2 \cdot m)$.

144 Запишите выражение как двучлен стандартного вида и определите его степень. Каким общим свойством обладают полученные двучлены?

1) $4c - (2a^2c - 5c^2a) - c - 3a^2c + 7c^2a - (11c^2a - (6a^2c - 3c))$;

2) $-x + (4x^3y - 2y^3x) - 5x - 6x^3y + 4y^3x - (y^3x + (-3x^3y - 6x)))$.

145 Сумма n первых натуральных чисел вычисляется по формуле:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Найдите сумму n первых натуральных чисел для: а) $n = 100$; б) $n = 200$; в) $n = 500$.

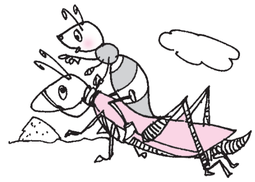
146 Найдите одно значение переменной, при котором значение многочлена равно A:

а) $-p^4 + p^3 - 8p^2 + 12$, если $A = 2$; б) $3m^7 - 7m^6 - 9m^4 + 5m^3 + 5$, если $A = 5$.

147 Какими многочленами можно заменить соответственно A и B, чтобы указанные выражения стали многочленами степени n?

а) $6a^3 - 8a - 9a - 21a^4 + 14a^3 - 8a^4 + A$, если $n = 3$;

б) $15xy^2 - 7x^4y - 9x^4y^5 - 11xy + 6x^2y^3 - B$, если $n = 5$.



148 Сравните значения числовых выражений:

а) $\frac{17}{33}$ и $\frac{18}{37}$; в) $\frac{25}{24}$ и $\frac{26}{25}$; д) $\frac{7}{18}$ и $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{18}$; ж) $9{,}2 \cdot 1{,}001$ и $9{,}2$;

б) $\frac{72}{71}$ и $\frac{713}{714}$; г) $\frac{319}{320}$ и $\frac{320}{321}$; е) $4\frac{5}{12} \cdot \frac{2}{3}$ и $4\frac{5}{12}$; з) $3{,}6$ и $3{,}6 \cdot 0{,}989$.

149 Решите уравнение:

а) $\frac{5(x+2)}{4} - \frac{6(x+2)}{12} = 3$; б) $2\frac{1}{3} \cdot (2x - 1) - \frac{7}{9} \cdot (4x + 3) = \frac{7}{18} \cdot (3x - 7)$.

150 Постройте математическую модель и решите задачу:

Рабочий день Антона и Ксюши, владельцев пончиковой компании, расписан следующим образом: решение производственных проблем на пончиковой фабрике занимает $\frac{2}{9}$ всего рабочего дня, $\frac{1}{6}$ рабочего дня отведена под переговоры с контрагентами компании, $\frac{12}{27}$ рабочего дня Антон и Ксюша решают текущие вопросы с сотрудниками офиса компании, а оставшееся время отведено на встречи с партнерами компании. Сколько времени длится рабочий день Антона и Ксюши, если встречи с партнерами компании длятся 1,5 часа?

151 Докажите, что:

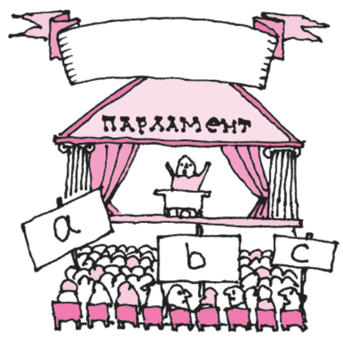
а) $16^7 - 2^{25}$ делится на 7; б) $81^6 - 3^{21}$ делится на 13.

152 Выполните вычисления рациональным способом и расшифруйте фамилию автора высказывания «Для парусника, который не знает, куда плыть, ни один ветер не будет попутным». В каком веке и в какой стране он жил?

Н $6345 \cdot 5 - 2269 \cdot 25$ **С** $484 \cdot 11 - 1111 \cdot 4$ **Е** $1002 \cdot 998 - 1003 \cdot 997$

А $1973 \cdot 125 - 4865 \cdot 25$ **К** $203 \cdot 197 - 201 \cdot 199$

880	5	–25 000	5	–8	125 000



C **153*** В банановой республике прошли выборы в парламент. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% голосовавших любят мандарины?

154* У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого барона-вассала ровно 9 баронов соседей, подданных короля?