

Глава 2

Арифметика

§ 3. Отношения

1. Понятие отношения.

Для решения практических задач человеку часто приходится сравнивать разные значения одной и той же величины – массы, расстояния, времени, скорости, стоимости, объема, площади и т. д.

Существуют два способа сравнения величин. Первый состоит в нахождении их разности и отвечает на вопрос «*На сколько больше (меньше)?*». Второй состоит в нахождении частного и отвечает на вопрос «*Во сколько раз больше (меньше)?*». Например, гиря массой 6 кг *тяжелее* гири массой 2 кг *на* 4 кг ($6 \text{ кг} - 2 \text{ кг} = 4 \text{ кг}$), или *в* 3 *раза* ($6 \text{ кг} : 2 \text{ кг} = 3$).

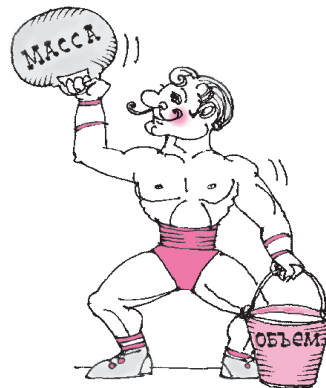
Эти два вида сравнения имеют специальные названия – *разностное сравнение* и *кратное сравнение*. Они часто встречаются в практической жизни и служат для разных целей. Разностное сравнение указывает разность, то есть *на сколько* величины отличаются друг от друга, а кратное – дает качественную, или относительную, оценку этого отличия.

Пусть, например, зарплата человека увеличилась *на* 1000 р. – *много это или мало?* Очевидно, что если раньше его зарплата была 4000 р., то новая зарплата стала в $5000 : 4000 = 1,25$ раза, или на четверть, выше и прибавка является существенной. Если же старая зарплата составляла 20 000 р., то она повысилась всего лишь в $21\,000 : 20\,000 = 1,05$ раза, то есть изменилась не так значительно. Таким образом, ответ на поставленный вопрос зависит не от самой величины прибавки, а от того, *во сколько раз* новая зарплата стала выше старой.

Для *результата кратного сравнения* двух чисел или двух величин в математике часто используют термин *отношение*.

Отношением двух чисел называют их частное. Как известно, при переводе с русского языка на математический и обратно используются два типа обозначения частного. Поэтому фразу «Отношение a к b равно 7» можно перевести как « $a : b = 7$ », или « $\frac{a}{b} = 7$ ».

Отношение двух чисел показывает, во сколько раз первое число больше второго, или какую часть первое число составляет от второго. Например, отношение числа 8 к числу 3 равно $\frac{8}{3}$ и показывает, что 8 больше, чем 3,



в $2\frac{2}{3}$ раза. А отношение числа 3 к числу 8 равно $\frac{3}{8}$ и выражает часть, которую 3 составляет от 8. Заметим, что отношения 8 к 3 и 3 к 8, как и дроби $\frac{8}{3}$ и $\frac{3}{8}$, называют **взаимно обратными**.

Для отношения двух чисел, как и для любого частного двух чисел, справедливы все свойства деления. В частности, **отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля**.

На основании этого свойства отношения чисел можно упрощать. Например, отношение чисел 25 и 20 можно заменить отношением 5 к 4, а отношение чисел 1,4 и $2\frac{1}{3}$ – отношением 3 к 5:

$$\frac{25}{20} = \frac{25 : 5}{20 : 5} = \frac{5}{4}, \quad \frac{1,4}{2\frac{1}{3}} = \frac{1,4 \cdot 10 \cdot 3}{2\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3} = \frac{14 \cdot 3}{7 \cdot 10} = \frac{3}{5}.$$

Кроме того, для отношений справедливо «перекрестное» правило:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad (b \neq 0, d \neq 0)$$

В словесной форме: ***a* относится к *b* как *c* относится к *d* в том и только в том случае, когда $ad = bc$ ($b \neq 0, d \neq 0$).**

Итак, мы видим, что с точки зрения математики в понятии отношения нет ничего нового: отношение чисел – это их частное. Возникает естественный вопрос: зачем же использовать два названия для одного и того же понятия? Однако точнее спросить: **«Почему в математике длительное время употребляются оба эти названия?»**

Все дело в том, что математика как наука возникла прежде всего для решения практических задач. А в реальной практике при сравнении величин употребляется обычное слово *отношение*, а вовсе не математический термин «частное». Вместе с тем *средством* для нахождения отношений является именно вычисление частного.

Чтобы найти отношение **одноименных величин** (длин, масс и т. д.), необходимо выразить их **в одной и той же единице измерения** – в противном случае полученный результат для сравнения величин использовать нельзя.

Например, чтобы найти отношение 50 см к 1 м, надо сначала выразить обе эти величины либо в метрах, либо в сантиметрах и только после этого находить частное. Так как 50 см = 0,5 м, а 100 см = 1 м, то

$$0,5 : 1 = \frac{1}{2}, \text{ или } 50 : 100 = \frac{1}{2}.$$

Если этого не сделать, то получится, что 50 см больше 1 м в $50 : 1 = 50$ раз.



Отношение иногда бывает удобно выражать в процентах. Как мы уже знаем, для этого достаточно умножить полученное частное на сто. Так, об увеличении зарплаты в 1,5 раза можно иначе сказать, что новая зарплата составила 150% старой, а об увеличении ее в 1,05 раза – что новая зарплата составила 105% старой. Значит, в первом случае зарплата повысилась на 50%, а во втором – всего лишь на 5%.



Процентное отношение широко используется для сравнения на практике, поскольку проценты соответствуют дробям с одним и тем же знаменателем 100, а дроби с одним знаменателем сравнивать гораздо проще.

Итак, если a и b – два числа, причем $b \neq 0$, то

- 1) Отношение $a : b$ – это частное от деления a на b .
- 2) Если $a > b$, то отношение $a : b$ показывает, во сколько раз a больше b .
- 3) Если $a \leq b$, то отношение $a : b$ показывает, какую часть a составляет от b .
- 4) Процентное отношение a к b – это отношение $a : b$, выраженное в про-

центах; оно равно $\left(\frac{a}{b} \cdot 100\right)\%$. Процентное отношение показывает, сколько процентов число a составляет от числа b .

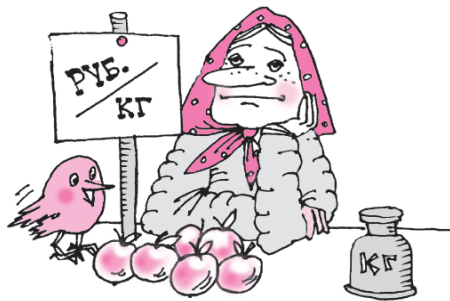
Как мы видели, *отношение одноименных величин есть число*. А вот *отношение величин разных наименований образует новую величину*. Так, **скорость** v – это отношение пройденного расстояния s ко времени движения t ; **цена** a – отношение стоимости товара C к количеству товара n ; **производительность** w – отношение объема выполненной работы A ко времени работы t ; **плотность** вещества ρ – отношение массы этого вещества m к его объему V :

$$v = \frac{s}{t}, \quad a = \frac{C}{n}, \quad w = \frac{A}{t}, \quad \rho = \frac{m}{V} \quad \text{и т. д.}$$

Каждая из этих новых величин представляет собой значение величины, стоящей в числителе дроби, приходящейся на единицу величины, стоящей в знаменателе. Скорость – это путь, пройденный за *единицу времени*, цена – это стоимость *единицы товара*, производительность – работа, выполненная за *единицу времени*, плотность – масса вещества в *единице объема*.

Не случайно поэтому единицами измерения этих новых величин являются дроби: для скорости – км/ч, м/с, см/с; для цены – р./кг, р./билет; для производительности – шт./мин, деталей/ч; для плотности – кг/дм³, г/см³ и т.д.

В обычной речи для производительности и цены такие обозначения не употребляют, а выражают их словами: «8 страниц в час», «5 рублей за килограмм».



К

1 Много или мало составляют:

- а) 5 уроков математики в день и в месяц;
 б) увеличение в весе в 1 г для муравья и для слона?
 Придумай свои примеры, когда одно и то же значение величины дает разную качественную оценку некоторой ситуации.



2

Кобра живет около 15 лет, а крокодил – около 90 лет. Как можно сравнить продолжительность их жизни? Рассмотрите все возможные варианты.

3

Прочитай и упрости отношения. Какое свойство отношений при этом используется? Какими еще свойствами обладают отношения?

- а) $15 : 30$; в) $2,5 : 3$; д) $\frac{0,34}{1,7}$; ж) $\frac{15abc}{5a^2b}$, где $a \neq 0, b \neq 0$;
 б) $\frac{48}{112}$; г) $4 : \frac{1}{3}$; е) $3\frac{1}{9} : 4\frac{2}{3}$; з) $(4x^2) : (20xy)$, где $x \neq 0, y \neq 0$.

4

На клумбе 6 белых и 12 красных роз. Что показывают отношения:

$$6 : 12; \quad 12 : 6; \quad 6 : 18; \quad 18 : 12?$$

Какие еще отношения можно составить к данному условию задачи?

5

По данному условию составь какие-нибудь отношения и объясни их смысл. Упрости, если возможно, полученные отношения.

- а) В классе 10 мальчиков и 15 девочек.
 б) В тетради 12 листов, из них 4 исписано.
 в) Биатлонист сделал 5 выстрелов и 2 раза промахнулся.
 г) Из 200 участников викторины 50 стали победителями.

6

Найди процентное отношение чисел:

- а) $4 : 5$; в) $\frac{15}{3}$; д) $1,6 : 5\frac{1}{3}$; ж) $\frac{a}{4a}$, где $a \neq 0$;
 б) $\frac{9}{25}$; г) $77 : 28$; е) $\frac{6,3}{70}$; з) $(8,4b) : (4\frac{1}{5}b)$, где $b \neq 0$.

7

Имеет ли значение порядок членов отношения? Почему? Вырази в процентах данное и обратное отношение чисел:

- а) $1 : 3$; б) $12 : 15$; в) $7,2 : 36$; г) $\frac{9}{20} : 0,75$.

8

Вырази данные отношения величин в процентах:

- а) 8 дм к 3,2 м; в) 12 ц к 4 т; д) 6 мин к 1 ч;
 б) 0,3 км к 500 м; г) 0,034 ц к 20 кг; е) 2 ч 20 мин к 40 мин.

- 9) 1) Для определения процента всхожести семян посадили 300 семян. Из них проросло 273. Сколько процентов посаженных семян проросло?
2) Отношение каких величин характеризует *всхожесть семян*?

- 10) 1) Отношение каких величин характеризует *концентрацию* раствора?
2) В 5,6 л воды растворили 140 г соли. Чему равна концентрация соли в полученном растворе? (Масса 1 л воды равна 1 кг.)
3) Смешали три раствора соли одинаковой массы. Концентрация первого раствора равна 18%, концентрация второго – 7%. Чему равна концентрация третьего раствора, если концентрация полученной смеси составляет 10%?

- 11) Найди отношение величин и назови, значение какой новой величины при этом образуется:

- а) 4 м к 2 мин; в) 280 р. к 7 м; д) 6 деталей к 3 мин;
б) 25 км к 4 ч; г) 120 р. к 5 кг; е) 50 страниц к 2 ч.

- 12) Начерти отрезок AB и отметь на нем точку C так, чтобы выполнялось условие:

- 1) $\frac{AC}{BC} = 1$; 2) $\frac{AC}{BC} > 1$; 3) $\frac{AC}{BC} < 1$; 4) $\frac{AC}{BC} = 2$.

- 13) 1) Начерти два отрезка, длины которых относятся как 2 к 3.
2) Начерти прямоугольник, отношение длин сторон которого равно 5 : 3.
3) Начерти прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся как 3 к 4. Измерь гипотенузу и найди отношение длины каждого из катетов этого треугольника к длине гипотенузы.
4) Начерти угол, равный 60° , и раздели его на 2 части, отношение которых равно 1 : 2.

- 14) 1) Прочитай определения и назови определяемые понятия.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего катета к длине гипотенузы.

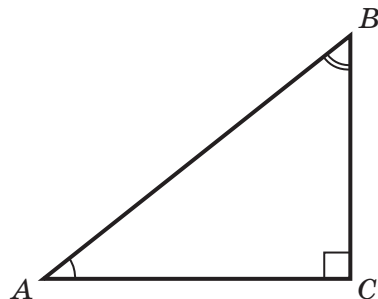
Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины прилежащего катета к длине гипотенузы.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего катета к длине прилежащего.

- 2) Синус, косинус и тангенс угла X обозначаются соответственно $\sin X$, $\cos X$ и $\operatorname{tg} X$. Запиши отношения длин сторон треугольника ABC , выражающие значения синусов, косинусов и тангенсов углов A и B .

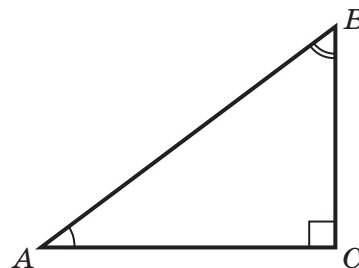
Образец:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$$



15

- 1) Измерь стороны треугольника ABC и вычисли синус, косинус и тангенс угла A .
- 2) Вычисли сумму квадратов синуса и косинуса угла A .
- 3) Найди отношение синуса угла A к косинусу угла A и сравни его с тангенсом угла A .
- 4) Выполни три предыдущих задания для угла B треугольника ABC . Что ты замечаешь?
- 5) Повтори исследование для острого угла произвольного прямоугольного треугольника. Сформулируй *гипотезу*. Попробуй доказать ее в общем виде, используя теорему Пифагора (см. № 18).

 π

16

- 1) Увеличь 2,75 на $\frac{1}{4}$.
- 2) Уменьши $4\frac{2}{15}$ в 3,1 раза.
- 3) Уменьши $9\frac{3}{8}$ на 4,37.
- 4) Увеличь 5,4 в $1\frac{1}{27}$ раза.

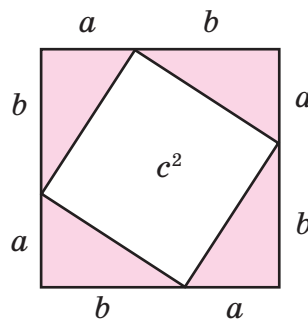
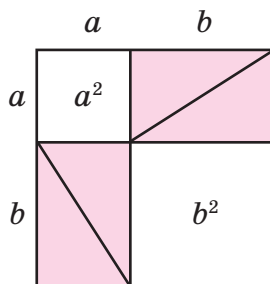
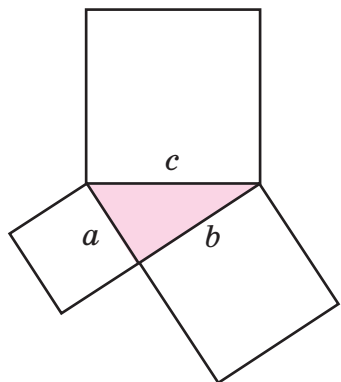
17

Запиши высказывания на математическом языке:

- 1) Число a в 7 раз меньше числа b .
- 2) Число c на 3 больше числа d .
- 3) Число m составляет $\frac{2}{9}$ числа n .
- 4) Число k составляет 80% числа t .
- 5) Число x на 28% больше числа y .
- 6) Число p на 40% меньше числа s .

18

Пусть катеты прямоугольного треугольника равны a и b , а гипотенуза – c . На сторонах этого треугольника построены квадраты. Используя рисунки, покажи, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе:



Доказательство этого равенства, называемого теоремой Пифагора, было известно уже в V веке до н. э. Запиши это равенство на математическом языке.

19

Реши уравнения, используя правило «весов»:

а) $0,9a + 4,96 = 3,6 + 1,4a$;

в) $0,4(2x + 0,3) = \frac{1}{3}(6x - 7,2)$;

б) $4\frac{1}{3}b + b = 6b - 10,4$;

г) $5(y - 3,8) = 4,7(y - 4)$.

20 Построй математическую модель задачи и найди ответ:

1) В первом вагоне трамвая ехало в 1,5 раза больше пассажиров, чем во втором. После того как из первого вагона вышли 5 пассажиров, а во второй вошли 3 пассажира, в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров ехало в каждом вагоне первоначально?

2) В бидоне было в 2 раза больше молока, чем в банке. После того как из банки отлили 2 л, а из бидона — 3 л, в банке осталось молока в 4,5 раз меньше, чем в бидоне. Сколько литров молока было в бидоне и в банке вместе?



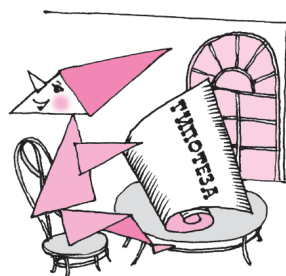
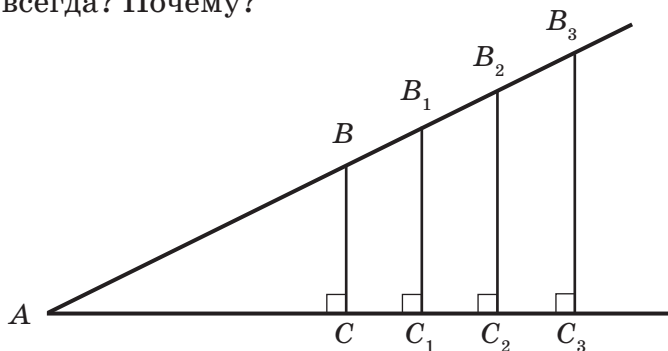
21 Найди процентное отношение чисел и величин:

а) $0,56 : 0,7$; в) $3,6 : 2\frac{4}{7}$; д) 2,8 см к 4 дм; ж) 5 ц к 400 кг;

б) $\frac{3}{22} : 1\frac{4}{11}$; г) $8\frac{1}{3} : 25$; е) 3 ч к 1 сут.; з) 180 м к 3 км.

22 Смешали три раствора соли с концентрацией соответственно 10%, 15% и 30%. Масса первого раствора равна 180 г, масса второго раствора в 2 раза больше массы первого, а масса третьего раствора на 100 г больше массы второго. Чему равна концентрация полученной смеси?

23 Пользуясь определением тангенса острого угла прямоугольного треугольника, приведенным на стр. 7, найди тангенс угла A в треугольниках ABC , AB_1C_1 , AB_2C_2 , AB_3C_3 , выполнив необходимые измерения. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*. Можно ли утверждать, что твоя гипотеза верна всегда? Почему?



24 Реши уравнения, используя правило «весов»:

а) $12x - 39 = 8x + 5$;

б) $6(y - 1,4) = 3,5y + 1,6$.

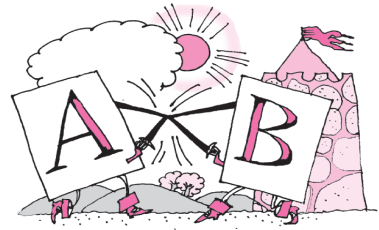
25 Построй математическую модель задачи и найди ответ:

На первой полке на 18 книг меньше, чем на второй. После того как число книг на первой полке удвоили, оно составило 80% от числа книг на второй полке. Сколько книг стояло на каждой полке первоначально?

- 26 Вычисли процентное отношение чисел A и B и определи: 1) на сколько процентов A меньше, чем B ; 2) на сколько процентов B больше, чем A ?

$$A \quad \frac{(7\frac{3}{8} - 2,125) \cdot 2\frac{2}{7} - 39,48 : 5,6}{(3,4 \cdot 0,9 - 2,7) : 0,06 \cdot 2\frac{2}{3} - 30,9 \cdot 0,5}$$

$$B \quad \frac{[6,1 \cdot 3,05 - 2,05 \cdot (4\frac{3}{5} + 4,46)] \cdot 22,5}{(1\frac{1}{4} + 0,5 + 2\frac{1}{3}) : 2\frac{1}{24} \cdot 0,01}$$



С

27* Старинная задача

Некто имеет 6 сыновей, один другого старше 4 годами, а самый старший сын втрое старше младшего. Чему равен возраст младшего сына?

2. Масштаб изображения.

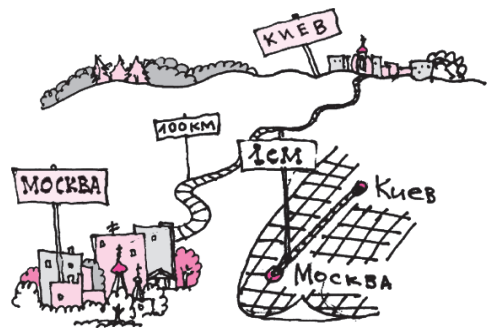
В предыдущем пункте мы рассмотрели задачи, приводящие к понятию отношения. Теперь мы познакомимся еще с одним распространенным примером отношения одноименных величин, имеющим специальное название – **масштаб**.

В практической жизни человек часто пользуется не столько самими предметами, сколько их изображениями – чертежами, фотографиями, географическими картами. На этих изображениях все расстояния оказываются в уменьшенном или в увеличенном виде. Рассмотрим самый важный для практики случай, когда длины всех отрезков уменьшаются или увеличиваются *в одно и то же число раз*, в одном и том же отношении. Это число и называется *масштабом изображения*.

О п р е д е л е н и е: *Отношение длины отрезка на изображении к его реальной длине (в одних и тех же единицах измерения) называется масштабом изображения.*

Согласно этому определению, масштаб изображения – это число. На географической карте оно всегда меньше единицы – $1 : 2$, $1 : 10$, $1 : 100$ и т. д., – ведь ясно, что расстояние, например, от Москвы до Киева на карте значительно короче настоящего расстояния между этими городами.

В технических же чертежах масштаб нередко оказывается большим 1 – если требуется изобразить детали маленького размера, например, детали наручных часов. В этом случае все размеры на чертеже, наоборот, увеличиваются в одно и то же число раз, так что масштаб получается с увеличением – $2 : 1$, $10 : 1$, $100 : 1$ и т. д. Точно так же, рисуя, например, клетку растения, используют масштаб, больший 1.



Масштаб карты можно записать в виде дроби с числителем 1 или в виде частного с делимым 1. Например, $\frac{1}{1\,000\,000}$ или $1 : 1\,000\,000$ (в современных картах обычно используют обозначение в виде частного). Это означает, что расстоянию в 1 см на карте соответствует расстояние на местности в $1\,000\,000\text{ см} = 10\text{ км}$.

Масштаб может задаваться также дробью с числителем, не равным 1, например, дробью $\frac{1}{50\,000}$ (или, соответственно, частным с делимым, не равным 1). Смысл масштаба при этом, конечно, не меняется: он означает, что отрезок в 3 см изображает расстояние в $50\,000\text{ см}$, то есть в 500 м .

Знание масштаба географической карты позволяет, проводя измерения на карте, узнавать расстояния на местности с помощью вычислений. Если, скажем, масштаб карты равен $1 : 1\,000\,000$, то расстоянию на карте, равному $7,2\text{ см}$, соответствует расстояние на местности в $1\,000\,000$ раз большее, то есть $7,2\text{ см} \cdot 1\,000\,000 = 7\,200\,000\text{ см} = 72\text{ км}$.

Аналогично, если масштаб задан дробью с числителем 1, то для вычисления реального расстояния на местности длину соответствующего отрезка на карте достаточно *умножить на знаменатель дроби*.

Задача 1. На карте с масштабом $\frac{1}{150\,000}$ расстояние между деревней и станцией равно $2,8\text{ см}$. Найти расстояние между ними на местности.

Решение:

Масштаб $\frac{1}{150\,000}$ означает, что расстояние на местности в $150\,000$ раз больше, чем на карте. Следовательно, искомое расстояние равно

$$2,8 \cdot 150\,000 = 420\,000\text{ (см)}.$$

Так как $1\text{ км} = 100\,000\text{ см}$, то $420\,000\text{ см} = 4,2\text{ км}$.

О т в е т: расстояние от деревни до станции на местности равно $4,2\text{ км}$.

Обратная задача – нахождение расстояния на карте по расстоянию на местности – решается, естественно, обратным действием – *делением*.

Задача 2. Расстояние между двумя городами равно 560 км . Найти длину отрезка, соединяющего эти города на карте, выполненной в масштабе $1 : 4\,000\,000$.

Решение:

Поскольку расстояние на карте в $4\,000\,000$ раз меньше, чем на местности, то 560 км надо уменьшить в $4\,000\,000$ раз. Для простоты вычислений вначале выразим это расстояние в сантиметрах, а затем выполним деление:

$$560\text{ км} = 56\,000\,000\text{ см},$$

$$56\,000\,000 : 4\,000\,000 = 14\text{ (см)}.$$

О т в е т: расстояние между городами на карте 14 см .

К

28 1) Что называют масштабом? Чему равен масштаб чертежа, если на нем детали увеличены в 5 раз, уменьшены в 100 раз?

2) Что означают выражения: а) масштаб плана местности равен 1 : 400; б) масштаб карты равен 1 : 500 000; в) масштаб чертежа равен 3 : 1?

29 Определи масштаб карты, если: 1) 1 см на карте соответствует 100 км на местности; 2) 3 см на карте соответствует 1 км 200 м на местности; 3) 50 км на местности соответствует 2 дм на карте.

30 Расстояние от Москвы до Бреста равно примерно 1100 км. Изобрази шоссе от Москвы до Бреста на тетрадном листе в виде отрезка, подобрав удобный масштаб.

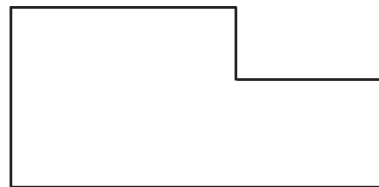
31 Масштаб карты равен 1 : 1 000 000. Известно, что расстояние между двумя точками на этой карте равно: 1) 1 см; 2) 0,6 см; 3) 1, 8 дм; 4) 35 мм. Вычисли соответствующие расстояния на местности.

32 Длина крыла насекомого, нарисованного в масштабе 20 : 1, равна 4 см. Чему равна его длина в действительности?

33 Практическая работа

По карте определи приближенные расстояния между Москвой и городами: 1) Санкт-Петербург; 2) Казань; 3) Ижевск; 4) Киев; 5) Прага; 6) Берлин; 7) Париж; 8) Лондон.

34 План земельного участка выполнен в масштабе 1 : 4000. Сделай необходимые измерения и вычисли его периметр и площадь.



35 На рисунке изображен план квартиры в масштабе 1 : 200. Определи по плану, какие размеры имеют гостиная, спальня, кухня, прихожая, кладовая и ванная комната. Вычисли площадь этих помещений и общую площадь квартиры.



36 Длина Москвы-реки примерно 470 км. Чему равна ее длина на карте, масштаб которой 1 : 5 000 000?

37 Размеры дачного участка прямоугольной формы 40 м × 30 м. Начерти план этого участка в масштабе 1 : 500. Изобрази на этом плане дом, размеры которого 10 м × 10 м, расположенный в центре участка. На одной из больших сторон прямоугольника посередине отметь ворота шириной 4 м.

38 Практическая работа

Начерти план кабинета математики в масштабе 1 : 100.

39 Размеры комнаты равны 4,2 м × 6 м. На плане комнаты ее длина изображена отрезком, равным 4 см. Чему равна длина отрезка, изображающего на этом плане ширину комнаты?

40 На карте, масштаб которой 1 : 100 000, расстояние между двумя городами равно 12 см. Каким будет это расстояние на карте, масштаб которой 1 : 300 000?

π

41 Найди число, которое в указанном ряду чисел нарушает закономерность:

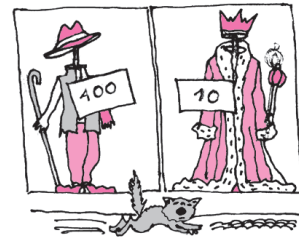
1) 10; 2; 0,4; 0,08; 0,16; 0,032; 3) 3; 0,5; 6; 0,8; 12; 1,1; 18; 1,4;

2) $\frac{1}{2}$; 1; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; 4; $6\frac{1}{2}$; 10; $16\frac{1}{2}$; 4) $\frac{5}{8}$; $\frac{6}{13}$; $\frac{7}{19}$; $\frac{8}{26}$; $\frac{9}{32}$; $\frac{10}{41}$; $\frac{11}{51}$; $\frac{12}{62}$.

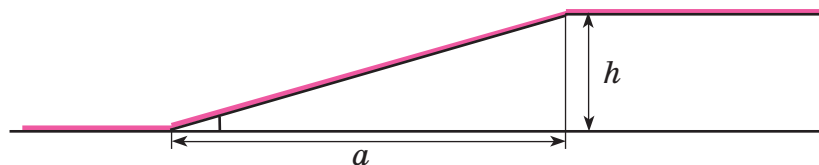
42 Имеется набор шестеренок в 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120 зубцов. Подбери такие пары шестеренок, чтобы отношение чисел их зубцов было равно:

1) 5; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{2}{5}$; 7) $\frac{5}{6}$; 8) $\frac{3}{4}$.

43 Комиссионные магазины, продав вещь, берут с ее владельца *комиссионный сбор*, который составляет определенный процент от стоимости вещи. В одном магазине за вещь стоимостью 4000 р. взяли комиссионный сбор 240 р., а в другом за вещь стоимостью 18 000 р. взяли комиссионный сбор 900 р. В каком из этих магазинов комиссионный сбор больше?



44 Крутизна участка дороги выражается отношением высоты подъема дороги h к горизонтальной протяженности этого участка a (см. рисунок):



а) Какова высота спуска, если на дорожном знаке, предупреждающем о спуске, указано 20%, а его горизонтальная протяженность равна 400 м?

б) Чему равна крутизна участка дороги, если горизонтальная протяженность составляет 1,2 км, а высота спуска 30 м?

45 Найди ложные высказывания и построй их отрицания:

- 1) Любую обыкновенную дробь, знаменатель которой кратен 10, можно записать в виде конечной десятичной дроби.
- 2) Число, произведение цифр которого кратно 9, делится на 9.
- 3) Существуют числа, кратные трем, сумма которых не делится на 3.
- 4) Есть такие нечетные числа, произведение которых – число четное.

46 Представь выражение в виде дроби, если $a, b, c, d, k \neq 0$:

- 1) $\frac{7}{2a} + \frac{4}{a^2}$;
- 2) $1 - \frac{5}{b}$;
- 3) $3d : \frac{d^3}{4c}$;
- 4) $\frac{n}{5k^2} \cdot 10k$.

47 БЛИЦтурнир

Составь и, если возможно, упрости выражение:

- 1) После увеличения цены альбома на 25% он стал стоить a р. Сколько стоил альбом первоначально?
- 2) В книге b страниц. В первый день Саша прочитал 20% книги, а во второй – половину остатка. Сколько страниц прочитал Саша за эти два дня?
- 3) Цена телевизора снизилась с x р. до y р. На сколько процентов снизилась цена телевизора?
- 4) Длина комнаты прямоугольной формы s метров, а ширина составляет 70% длины. Чему равны ее периметр и площадь?
- 5) Клиент положил в банк d р. Какая сумма будет на его счете через 4 года, если банк начисляет доход в размере 5% в год (простые проценты)?
- 6) Население города составляет сейчас k тыс. жителей и увеличивается ежегодно на 3%. Каким оно станет через 2 года?

48 Реши уравнения, пользуясь «перекрестным правилом»:

- 1) $\frac{x}{7,2} = \frac{1\frac{1}{9}}{0,25}$;
- 2) $\frac{2\frac{1}{3}}{0,6x} = \frac{2,5}{1\frac{2}{7}}$;
- 3) $\frac{7}{12} = \frac{50x}{0,14}$;
- 4) $\frac{1\frac{3}{17}}{13,75} = \frac{2\frac{2}{11}}{3x}$.

2

49 На туристской карте запись с указанием масштаба оказалась оторванной. Можно ли ее восстановить, если известно, что расстояние от сельской почты до окраины села (по прямой дороге) равно 3,2 км, а на карте это расстояние изображено отрезком длиной 4 см? Если это возможно, определи масштаб данной карты.



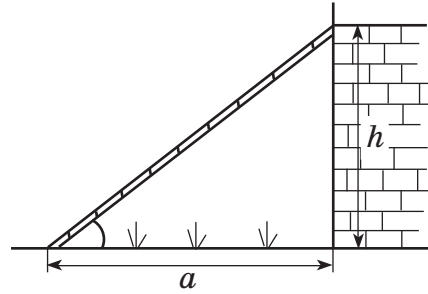
50 Практическая работа

Возьми три географические карты с разным масштабом. По каждой из них найди расстояние между двумя городами, взятыми по твоему выбору.

51 Практическая работа

Измерь размеры своей комнаты, задай масштаб и нарисуй план комнаты. Укажи на нем расположение окон, дверей, мебели.

- 52** Приставить лестницу к стене можно более круто или более полого. Ее *крутизна* выражается отношением расстояния h от пола до верхнего края лестницы к расстоянию a от нижнего края до стены. В каком случае лестница имеет бóльшую крутизну: если $h = 1,5$ м и $a = 1,2$ м или если $h = 2,4$ м и $a = 2$ м?



- 53** Составь и, если возможно, упрости выражение:

- 1) Жилищному кооперативу принадлежит a га земли, из которых b га занимают гаражи. Какой процент площади, принадлежащей этому кооперативу, отведено под гаражи?
- 2) 40% участников первого тура олимпиады прошли во второй тур, а 50% участников второго тура в количестве c человек прошли в третий тур. Сколько человек приняли участие в первом туре олимпиады?
- 3) Турист за три дня прошел путь, равный d км. В первый день он прошел 40% всего пути, а во второй день – 75% пути, пройденного в первый день. Сколько километров прошел турист в третий день?

- 54** Реши уравнения, пользуясь «перекрестным правилом»:

$$1) \frac{x}{6,3} = \frac{9}{2,8}; \quad 2) \frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{5}{6}} = \frac{2}{0,25x}; \quad 3) \frac{6,125}{4x} = \frac{0,35}{\frac{2}{7}}; \quad 4) \frac{2\frac{1}{4}}{1,6} = \frac{0,125x}{2\frac{2}{3}}.$$

- 55** Вычисли и запиши в последовательности ответов следующее число, сохраняя закономерность:

$$1) (4,5 + 3\frac{5}{6}) \cdot 0,6; \quad 2) 3,7 : (1\frac{2}{9} - 0,4); \quad 3) \frac{4 : \frac{4}{7} \cdot 0,3}{2,88 : 4,8}; \quad 4) \frac{0,5 + \frac{1}{18}}{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{18}) : 2,8}.$$

C

- 56**^{*} 1) В квадрате размером 10×10 клеток выписаны натуральные числа от 1 до 100, как показано на рисунке. Выбери внутри него любой квадрат размером 2×2 клетки и сравни суммы, записанные по его диагоналям. Что ты замечаешь? Будут ли обладать этим же свойством аналогичные суммы в любом другом квадрате размером 2×2 клетки? Обоснуй свой ответ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- 2) Рассмотрим теперь квадраты размером 3×3 клетки и найди в них группы из трех чисел, суммы которых будут одинаковы.

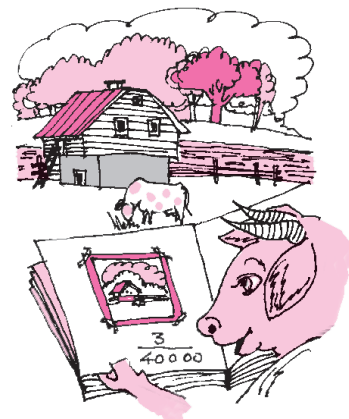
3. Понятие пропорции. Основное свойство пропорции.

Математической моделью многих практических задач является равенство двух отношений. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *План местности сделан в масштабе $\frac{3}{40\,000}$. На каком расстоянии от реки находится дом, который на плане удален от реки на 3,6 см?*

Все расстояния на плане уменьшаются в одно и то же число раз, поэтому отношения соответствующих расстояний равны между собой и равны $\frac{3}{40\,000}$. Обозначив искомое расстояние x , получаем, что число 3,6 так относится к x , как 3 к 40 000:

$$\frac{3,6}{x} = \frac{3}{40\,000}.$$



Задача 2. *Автомобилист заметил, что расстояние 58 км он проехал за 45 мин. За сколько времени он преодолеет оставшиеся 174 км, если будет ехать с той же скоростью?*

Скорость равна отношению пути ко времени. По условию, она не изменяется, поэтому

$$\frac{58}{45} = \frac{174}{y},$$

где y – искомое время в минутах.

Как удобнее и проще найти в полученных моделях неизвестные числа x и y ? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо провести математическое исследование истинных равенств вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \neq 0$. Для них уже много веков существует специальное название – *пропорция*.

Итак, *пропорцией называется истинное равенство двух отношений*. Пропорции записывают так:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ или } a : b = c : d,$$

где $a, b, c, d \neq 0$. Читают: «Отношение a к b равно отношению c к d » или « a относится к b как c относится к d ».

На основании перекрестного правила можно записать:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc,$$

и тогда любой член пропорции легко вычисляется, исходя из перекрестного правила и правила нахождения неизвестного множителя.

Так, в первой задаче

$$\frac{3,6}{x} = \frac{3}{40\,000} \Leftrightarrow 3x = 3,6 \cdot 40\,000 \Leftrightarrow x = \frac{3,6 \cdot 40\,000}{3} \Leftrightarrow x = 48\,000,$$

то есть дом находится на расстоянии 48 000 см = 480 м от реки.

Во второй задаче

$$\frac{58}{45} = \frac{174}{y} \Leftrightarrow 58y = 45 \cdot 174 \Leftrightarrow y = \frac{45 \cdot 174}{58} \Leftrightarrow y = 135,$$

и, значит, оставшееся расстояние автомобиль пройдет за 135 мин = 2 ч 15 мин.

Таким образом, перекрестное правило является основой решения задач на пропорции, и поэтому его также называют **основным свойством пропорции**.

При переводе решения задач с математического языка на русский часто используются ставшие традиционными термины «*крайние*» и «*средние*» члены пропорции. Эти названия связаны с тем, что при записи пропорции в строчку два члена располагаются «по краям», а два – «посередине», причем это как раз те члены, которые в записи пропорции с помощью дробей расположены «перекрестно»:



крайние члены

$$a : b = c : d$$

средние члены

крайние
члены

средние
члены

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

В этих терминах основное свойство пропорции читается так:

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \neq 0$, является пропорцией тогда и только тогда, когда произведение крайних членов a и d равно произведению средних членов b и c .



А правила нахождения неизвестных членов пропорции формулируются следующим образом:

1) **Чтобы найти крайний член пропорции, надо произведение ее средних членов разделить на второй крайний член:**

$$a = \frac{bc}{d}, \quad d = \frac{bc}{a}.$$

2) **Чтобы найти средний член пропорции, надо произведение ее крайних членов разделить на второй средний член:**

$$b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}.$$

Отметим, что новая терминология по сути ничего не добавляет к хорошо известному нам перекрестному правилу, а является лишь сложившимся языком, описывающим решение задач на пропорции. Этот язык удобен при решении практических задач, поэтому каждому полезно его знать.



К

57

Запиши равенство двух отношений двумя способами. Проверь, является ли оно пропорцией. Если да, то назови крайние и средние члены пропорции.

- а) 7 так относится к 14, как 3 относится к 6;
- б) отношение 8 к 3 равно отношению 40 к 15;
- в) 36 во столько раз больше 20, во сколько раз 9 больше 5;
- г) 2 составляет такую же часть от 10, какую 3 составляет от 15.

58

Выбери из данных отношений те, из которых можно составить пропорцию:

- 1) $5 : 15$; 3) $3 : 1,2$; 5) $\frac{1}{3} : 3$; 7) $1,2 : 4$; 9) $3\frac{1}{3} : 50$;
- 2) $\frac{2}{9} : \frac{2}{27}$; 4) $0,2 : 3$; 6) $4,2 : 21$; 8) $0,1 : 0,4$; 10) $1,5 : 0,05$.

59

В чем заключается *основное свойство пропорции*? Запиши его для пропорций:

- 1) $m : n = k : p$; 2) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$. Как иначе называют это свойство?

60

Прочитай пропорцию разными способами, назови ее крайние и средние члены:

- а) $9 : 1 = 18 : 2$; б) $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; в) $0,5 : \frac{1}{30} = 6 : 0,4$; г) $\frac{8}{2,4} = \frac{5}{1,5}$.

Докажи истинность утверждений, используя основное свойство пропорции.

61

Проверь двумя способами, является ли равенство пропорцией. Какой из способов проверки удобнее применить в каждом случае?

- а) $4 : 1\frac{1}{5} = 5 : 1,5$; б) $\frac{9}{10} = \frac{0,9}{0,01}$; в) $7 : 14 = 2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{2,5} = \frac{4}{3\frac{1}{3}}$.

62

Составь, если возможно, пропорцию из 4 данных чисел. Можно ли составить из этих чисел другие пропорции?

- а) 2; 5; 20; 8; б) 18; 4; 24; 3; в) 4,5; 6; 9; 12; г) $\frac{1}{7}$; 0,2; $\frac{5}{7}$; 1.

63

Напиши пропорцию, в которой каждое отношение равно: а) 2; б) $\frac{1}{3}$.

64 Составь различные пропорции из равенства $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$. Сколько различных пропорций можно составить из чисел 3, 6, 2 и 9? Какие свойства чисел при этом используются?

65 Проверь истинность равенств. Из букв, соответствующих пропорциям, составь математический термин. Что он означает?

Р $1,5 : 5 = \frac{3}{5} : 2$

Д $\frac{0,125}{0,2} = \frac{5}{8}$

Н $\frac{\frac{2}{3}}{0,3} = \frac{12,4}{15}$

А $\frac{8}{9} : 1\frac{1}{3} = 0,2 : 0,3$

О $\frac{7,2}{0,08} = \frac{63}{0,7}$

Х $4,4 : \frac{2}{7} = 7 : \frac{5}{11}$

В $1,2 : 4 = 15 : 0,5$

М $\frac{0,48}{0,06} = \frac{2,4}{3}$

Л $1\frac{1}{6} : 2 = 2 : 3,5$

66 Найди неизвестный член пропорции (устно):

1) $\frac{a}{12} = \frac{5}{6}$;

3) $\frac{2,5}{4} = \frac{7,5}{c}$;

5) $k : 25 = 4 : 5$;

7) $7 : x = 2 : 3$;

2) $\frac{81}{b} = \frac{9}{4}$;

4) $\frac{3}{8} = \frac{d}{6,4}$;

6) $1,5 : 2 = n : 8$;

8) $0,3 : 4 = 9 : y$.

67 Реши уравнения:

1) $5,4 : a = 1,8 : 6,8$;

5) $2,4 : (0,5k) = 3,6 : 1\frac{2}{3}$;

9) $4 : (x - 3) = 2 : 3$;

2) $b : \frac{6}{7} = 5\frac{4}{9} : 4\frac{2}{3}$;

6) $7 : (\frac{4}{11}m) = 56 : 3,2$;

10) $\frac{2y + 1,6}{0,8} = \frac{30}{2,5}$;

3) $\frac{720}{91,2} = \frac{c}{0,513}$;

7) $\frac{8n}{9} = \frac{6,4}{0,45}$;

11) $\frac{1,5}{4x - 1} = \frac{0,4}{x + 4}$;

4) $\frac{4,2}{7\frac{5}{7}} = \frac{3\frac{1}{9}}{d}$;

8) $\frac{2,1}{27} = \frac{2\frac{1}{3}}{0,3p}$;

12) $\frac{5y}{1\frac{1}{3}} = \frac{y - 0,9}{0,2}$.

68 Найди значения x и y такие, чтобы каждое из двух равенств было верным:

1) $\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$ и $\frac{y}{25} = \frac{6,4}{5}$;

2) $x : 1\frac{2}{3} = y : 3\frac{1}{3}$ и $y : 1,5 = 0,2 : 0,75$.

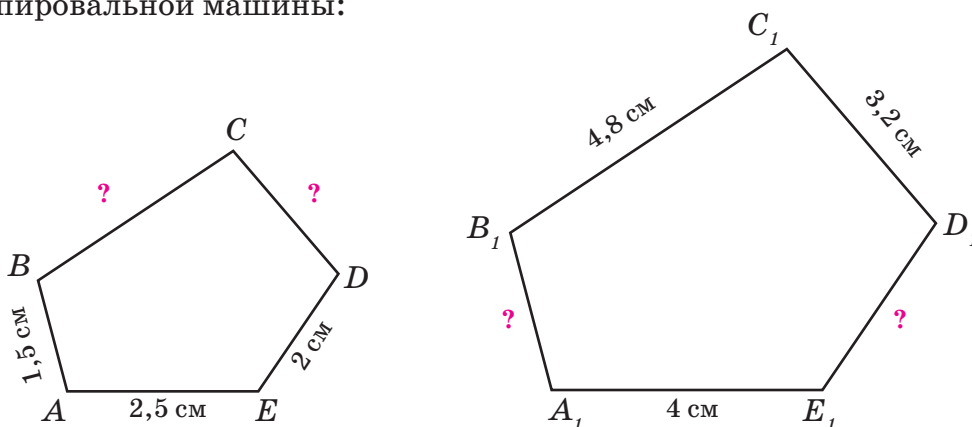
69 Дана пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Запиши другие пропорции, членами которых являются те же числа a, b, c и d .

70 Копировальная машина уменьшает размеры изображения в отношении 3 : 5.

1) Чему равна длина отрезка в оригинале, если на копии она равна 7,5 см?

2) Какой размер на копии будет иметь отрезок, длина которого в оригинале равна 8 см?

- 71** На рисунке показаны размеры фигуры и ее копии, увеличенной с помощью копировальной машины:



- 1) В каком отношении увеличено изображение? Вырази это отношение в процентах. 2) Найди неизвестные длины сторон.

- 72** В сплаве золота и серебра масса золота так относится к массе серебра, как $2 : 5$. 1) Чему равна масса золота в сплаве, содержащем 80 г серебра? 2) Чему равна масса серебра в сплаве, содержащем 18 г золота?

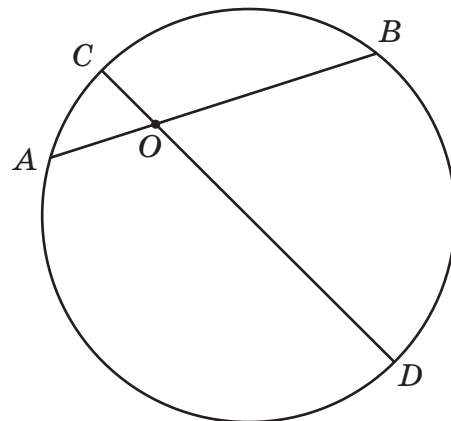
- 73** В любой окружности отношение длины окружности к ее диаметру постоянно и равно примерно $22 : 7$. 1) Чему примерно равна длина окружности, если ее диаметр равен 10 см? 2) Чему примерно равен диаметр окружности, если ее длина равна 60 см? Ответы округли с точностью до десятых.

74 Математическое исследование

1) Проведи окружность произвольного радиуса и две хорды AB и CD этой окружности, пересекающиеся в точке O . Измерь длины отрезков хорд, на которые они разбиваются точкой O . Сравни произведения $AO \cdot OB$ и $CO \cdot OD$.

2) Повтори эксперимент еще 2 раза. Что ты замечаешь? Сформулируй гипотезу. Можно ли на основании проведенного исследования считать твою гипотезу доказанной?

3) Какие пропорции можно составить из полученного равенства?



π

- 75** Какое выражение может быть «лишним»? Как можно записать оставшиеся выражения с помощью одного буквенного равенства (в общем виде)?

1) $2x + 4$; $7x + 11$; $1,2x + 5$; $x^2 + 8$; $x + 1$; $0,4x + 25$; $x + 3,2$; $16x + 9$.

2) $5y + 2y$; $1,6y + y$; $0,2y + 4y$; $\frac{1}{3}y + 14y$; $3y + 4,6$; $y + \frac{2}{9}y$; $y + 0,7y$.

76 Найди истинные и ложные высказывания. Обоснуй свой ответ. Построй отрицания ложных высказываний.

- 1) $\forall a \in N: \frac{a}{8} = \frac{2}{a}$; 3) $\exists b \in R: b^2 + 9 = 0$ (R – множество дробей);
 2) $\exists n \in N: n^2 - 16 = 0$; 4) $\forall c \in R: \frac{c}{5} > \frac{c}{6}$ (R – множество дробей).

77 Найди ложные высказывания и построь их отрицания:

- 1) Отношение двух чисел показывает, во сколько раз одно число больше или меньше другого.
- 2) Отношение двух чисел может быть равно обратному отношению этих чисел.
- 3) Масштаб изображения всегда выражается числом, меньшим 1.
- 4) Произведение крайних членов пропорции всегда равно произведению их средних членов.
- 5) Правильная дробь может быть равна 1.
- 6) Множество натуральных чисел является подмножеством множества дробей.

78 Запиши процентное отношение чисел 28 к 35 и 35 к 28. На сколько процентов первое число меньше второго? На сколько процентов второе число больше первого?

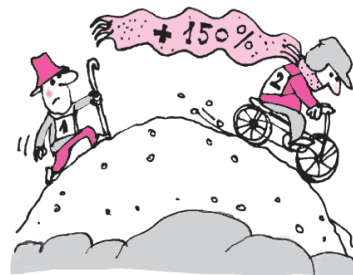
79 Как и на сколько процентов изменилось число, если:

- 1) его удвоили; 5) взяли от него треть;
- 2) его увеличили в 3,5 раза; 6) взяли от него две пятых;
- 3) его уменьшили в 4 раза; 7) разделили его пополам;
- 4) его уменьшили на четверть; 8) умножили его на 5?

80 Мотоциклист проехал путь между городами M и N со скоростью на 20% больше намеченной, а обратный путь – со скоростью на 20% меньше намеченной. Во сколько раз скорость мотоциклиста на обратном пути была меньше, чем по пути из M в N ?

81 Автобус проходит расстояние между двумя пунктами, равное 36 км, за 40 мин, а легковой автомобиль – на 40% быстрее. Через сколько времени они встретятся, если из конечных пунктов начнут одновременно двигаться навстречу друг другу? Есть ли лишнее данное в условии этой задачи?

82 Скорость велосипедиста на 250% больше скорости пешехода. Через 1,5 ч после того, как они одновременно начали двигаться из одного и того же пункта в одном направлении, расстояние между ними стало равно 16,5 км. Чему равны скорости движения велосипедиста и пешехода?



83 Расстояние между двумя пристанями s км. От этих пристаней одновременно отплыли два катера со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). Построй формулу зависимости расстояния d между катерами от времени движения t , если они движутся: 1) навстречу друг другу; 2) в противоположных направлениях; 3) вдогонку; 4) с отставанием. (Считать, что встречи за это время не произойдет.)

84 Расстояние h , которое проходит в вакууме падающее вниз тело, не зависит от его массы, а зависит лишь от времени падения t . Приближенные значения величины h м в первые 5 секунд падения приведены в таблице. Построй формулу и график этой зависимости, подобрав на осях координат удобные единицы измерения.

t с	0	1	2	3	4	5
h м	0	5	20	45	80	125



85 Найди верные равенства и из соответствующих им букв составь название денежной единицы. В каких странах она используется?

Д $0,2 : 6 = 1 : \frac{1}{3}$

Б $\frac{2}{3} = \frac{0,7}{10,5}$

Ь $\frac{1,75}{0,2} = \frac{3,5}{4}$

А $2 : \frac{1}{3} = 3 : 0,5$

О $\frac{2,7}{0,36} = \frac{3}{0,4}$

Н $1 \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 0,1 : 0,01$

П $1,5 : 3 = 3 : 4$

Л $\frac{1}{7} = \frac{10}{0,7}$

У $6,3 : 3 = 2 : 100$

С $0,9 : 6 = 0,06 : 4$

К $\frac{2,4}{0,6} = \frac{20}{5}$

Р $\frac{0,04}{0,8} = \frac{0,5}{10}$

86 Реши уравнения:

1) $x : 250 = 5,08 : 12,5$; 2) $1,32 : 3 \frac{1}{7} = (1,4y) : \frac{5}{6}$; 3) $\frac{4,8}{2z + 15} = \frac{0,2}{5}$.

87 Размеры фигур, приведенных на рисунках 1 и 2, были увеличены в отношении 3 : 2.

1) Вырази увеличение изображения в процентах.

2) Изобрази в тетради копию чертежа, приведенного на рис. 1, произведя необходимые измерения и вычисления.

3) По копии чертежа, приведенного на рис. 2, восстанови его размеры в оригинале и нарисуй чертеж в тетради.

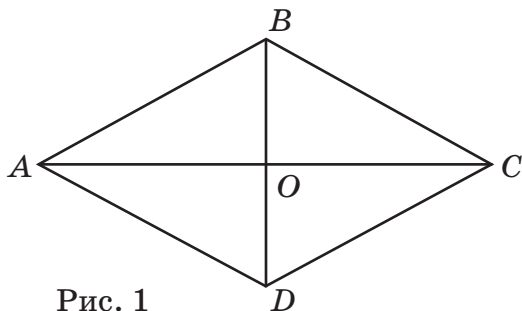


Рис. 1

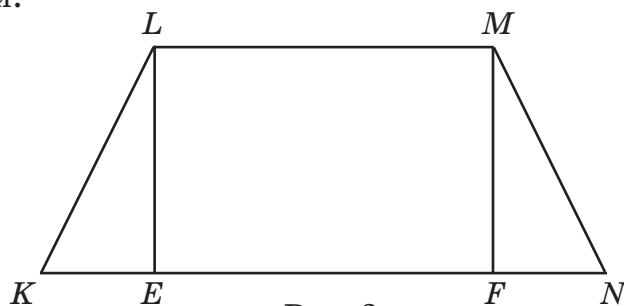


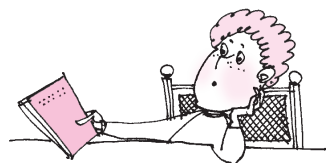
Рис. 2

88 Стороны прямоугольника относятся как 4 : 7, а его бо́льшая сторона равна 31,5 см. Найди меньшую сторону, периметр и площадь этого прямоугольника.

89 Расстояние между двумя городами 145 км. Грузовая машина может пройти это расстояние за 2,5 ч. Скорость легковой машины на 50% больше скорости грузовой. Через сколько часов эти машины встретятся, если одновременно выедут из этих городов навстречу друг другу? Есть ли лишнее данное в условии этой задачи?

90 Площадь прямоугольника равна 12 см^2 . Построй формулу зависимости длины стороны b см этого прямоугольника от длины a см его второй стороны. Заполни таблицу соответственных значений a и b и построь график зависимости b от a .

a см	1	1,5	2	3	4	8	12
b см							



91 Математическое исследование

1) Начерти окружность радиуса 3 см и проводи ее диаметр. Соедини концы диаметра с произвольной точкой окружности и измерь угол, образованный хордами. Проведи те же самые построения и измерения еще для двух точек окружности. Что ты замечаешь?

2) Повтори эксперимент для окружности произвольного радиуса и сформулируй *гипотезу*. Можно ли считать ее доказанной на основании проведенных тобой измерений? Почему?

92 1) Найди значения выражений A , B , C и D и из полученных чисел составь пропорцию. Можно ли из этих же чисел составить другую пропорцию?

A $3,6 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12}\right)$

C $\left(4\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right) : 0,15 - \frac{(14 - 0,14) : 0,014}{99}$

B $(84,8 \cdot 0,125) : (10,07 : 0,95)$

D $0,28 \cdot 4500 : 50,4 \cdot \left(\frac{16,2 - 12\frac{2}{5}}{190} + 0,1\right)$

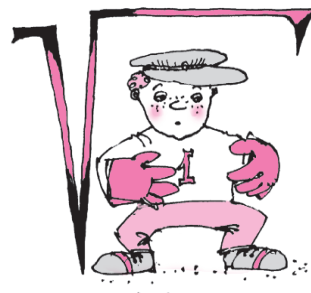
2) Сколько различных пропорций можно составить из этих чисел? Назови их.

C

93* Найди наименьшее число, кратное 36, в записи которого встречаются все 10 цифр по одному разу.

94

Выполняя домашнее задание, Петя спешил на футбол и сделал ошибку. Вместо того чтобы данное однозначное число возвести в квадрат, он его удвоил. В результате он получил двузначное число, записанное теми же цифрами, что и искомый квадрат, но в обратном порядке. Какой правильный ответ должен был получить Петя?



95

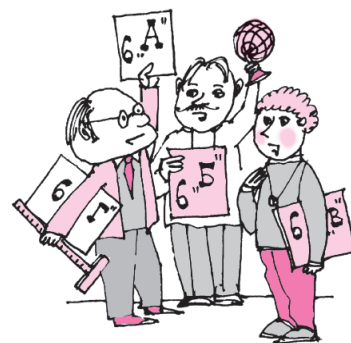
* Предстоят спортивные соревнования между четырьмя шестыми классами одной школы. В учительской живо обсуждаются возможные результаты и высказываются прогнозы.

– Первое место займет 6 «А», а второе – 6 «Б», – сказал учитель математики.

– Да что вы! – сказал учитель географии. – Я недавно ходил с ними в поход и знаю их возможности. 6 «А» займет второе место, а 6 «Г» – только третье.

– А я думаю, что на втором месте будет 6 «В», а 6 «Г» будет на последнем месте.

Оказалось, что у каждого учителя один прогноз сбывся, а другой – нет. Какое место занял каждый класс?



4. Свойства и преобразование пропорций.

В предыдущем пункте мы называли **основным свойством пропорций** следующее утверждение: *равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \neq 0$, является пропорцией тогда и только тогда, когда произведение крайних членов a и d равно произведению средних членов b и c .*

Как мы уже отмечали, основное свойство пропорций есть не что иное, как другая формулировка уже известного нам «перекрестного» правила равенства дробей:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad (a, b, c, d \neq 0).$$

Иначе говоря, мы имеем одно утверждение – «перекрестное» правило для дробей, а называть его можно и основным свойством пропорций, и условием равенства дробей, и условием равенства отношений.

Использование различных терминов, имеющих один и тот же математический смысл, обусловлено тем, где и как они формировались. В арифметике, имеющей дело с числами, удобно говорить на языке дробей, язык отношений – со времен Древней Греции – распространен в геометрии, а язык пропорций общепринят в повседневной практике и при проведении математических расчетов в физике, химии и т. п.

Применение пропорций для решения различных практических задач требует определенной техники вычислений – использования некоторых дополнительных свойств пропорций. Эти свойства вытекают, естественно, из основного свойства пропорций, то есть все из того же «перекрестного» правила.



Простейшие преобразования пропорций связаны с перестановкой ее членов. Итак, мы знаем, что

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Ясно, что равенство не нарушится, если, например, в нем поменять местами множители a и d . Следовательно, **в пропорции можно поменять местами ее крайние члены**, то есть

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

Точно так же **в пропорции можно поменять местами ее средние члены**. А значит, пропорция не нарушится, если в ней поменять местами одновременно и крайние, и средние члены: в этом случае получится пропорция, составленная из **обратных отношений**. На математическом языке данные равносильные преобразования можно записать так:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Вообще, **из данной пропорции можно составить несколько новых пропорций следующими преобразованиями**: 1) поменять местами крайние члены; 2) поменять местами средние члены; 3) составить пропорцию из отношений, обратных данным; 4) в четырех имеющихся пропорциях поменять местами правую и левую части.

Однако при всех преобразованиях полезно проверять себя «перекрестным» правилом, поскольку числа, составляющие пропорцию, нельзя переставлять произвольным образом. Например, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, но $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{6}$.

Существуют и другие, менее очевидные преобразования пропорций. Например, **пропорция не нарушится, если к каждому крайнему ее члену прибавить «соседний» средний член**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Для доказательства этого свойства достаточно к левой и правой части исходной пропорции прибавить по единице:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Далее, применим полученное свойство к пропорции, составленной из обратных отношений, и получим новое свойство:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \quad (a > b, c > d) \text{ и т. д.}$$

Пропорции, получаемые подобными преобразованиями, называют обычно *производными пропорциями*.

Несмотря на то что приведенные рассуждения имеют достаточно общий характер, производные пропорции часто оказываются полезными для решения практических задач. Например, мы знаем, что при равномерном движении скорость не меняется, поэтому отношения соответствующих значений расстояния и времени образуют пропорцию:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}.$$

Поменяв в полученной пропорции местами крайние члены, а затем левую и правую части равенства, получим новую пропорцию:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Эта пропорция означает, что *при равномерном движении пройденный путь увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько раз увеличивается (уменьшается) время движения*. Поэтому, не выполняя вычислений, можно, например, сказать, что если скорость движения не изменяется, то при увеличении времени движения в 4 раза пройденный путь также увеличится в 4 раза.

К

96

Сделай все возможные перестановки членов пропорции, не нарушающие ее:

а) $1 : 2 = 5 : 10$;

в) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{3}{5} : \frac{3}{20}$;

д) $m : n = k : p$;

б) $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$;

г) $\frac{0,4}{0,8} = \frac{1,6}{3,2}$;

е) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

97

Составь из равенства пропорцию и сделай все перестановки ее членов, не нарушающие эту пропорцию:

а) $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$; б) $4 \cdot 0,5 = 2 \cdot 1$; в) $2\frac{1}{3} \cdot 3 = 3\frac{1}{2} \cdot 2$; г) $ab = xy$.

98

Составь пропорцию из данных чисел и сделай все перестановки ее членов, не нарушающие эту пропорцию:

а) 2; 3; 4; 6; б) 3; 5; 12; 20; в) 0,5; 4; 1,6; 0,2; г) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{8}$; 5; 8.

99

Составь различные пропорции из соответствующих значений величин:

- 1) стоимости и количества товара при постоянной цене этого товара;
- 2) времени работы и объема выполненной работы при постоянной производительности;
- 3) длины стороны прямоугольника и его площади при постоянной длине другой стороны;
- 4) массы вещества в растворе и массы раствора при постоянной концентрации.

Сделай вывод.



100 Докажи равносильность пропорций и определи, при каких значениях переменных данные утверждения истинны:

$$1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

$$4) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d};$$

$$2) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};$$

$$5) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d};$$

$$3) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d};$$

$$6) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c};$$

$$7) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

101 Пользуясь свойствами, установленными в предыдущем задании, составь из данной пропорции три производные пропорции:

$$1) \frac{3}{2} = \frac{15}{10};$$

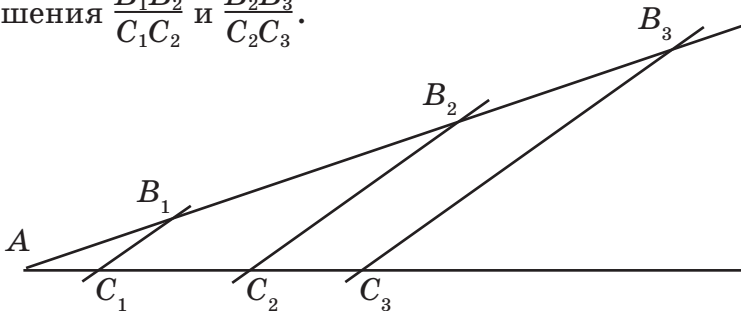
$$2) \frac{4}{5} = \frac{12}{15};$$

$$3) \frac{m}{n} = \frac{k}{p};$$

$$4) \frac{x}{y} = \frac{z}{t}.$$

102 Математическое исследование

1) Стороны угла A пересечены параллельными прямыми B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 . Измерь длины отрезков, образовавшихся на сторонах угла A , и сравни отношения $\frac{B_1B_2}{C_1C_2}$ и $\frac{B_2B_3}{C_2C_3}$.



2) Проведи исследование для произвольного угла A и произвольных параллельных прямых B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 , пересекающих его сторону. Сформулируй *гипотезу*. Можно ли считать ее доказанной посредством проведенных измерений и вычислений?

3) Считая равенство $\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$ истинным, докажи, что $\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_1B_3}{C_1C_3}$.

π

103 Найди верные равенства и расшифруй фамилию известного ученого. Когда и в какой стране он жил? Что ты о нем знаешь?

И $\frac{0,2}{1,3} = \frac{4}{2,6}$

А $\frac{2}{3} : 5 = 0,1 : \frac{3}{4}$

Е $2\frac{1}{6} : 10 = 1,3 : 6$

Ф $\frac{9,6}{0,3} = \frac{0,32}{0,01}$

Л $\frac{7}{15} : \frac{7}{9} = 0,3 : 0,5$

О $\frac{3,131}{31} = \frac{9,6}{0,3}$

П $\frac{60}{1,2} = \frac{0,5}{1}$

Г $\frac{5,5}{11} = \frac{0,77}{0,7}$

С $1,5 : 0,18 = 5 : 0,6$

104 Поставь вместо звездочек знаки действий так, чтобы получились верные высказывания:

а) $0,4 * \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$; б) $3 * 2\frac{1}{4} = 1\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{5} * \frac{5}{8} = 0,75$; г) $2\frac{1}{6} * 0,5 = 1\frac{2}{3}$.

105 (Устно.) Найди неизвестные члены пропорций:

1) $\frac{5}{8} = \frac{15}{a}$; 3) $2 : c = 5 : 7$; 5) $\frac{k}{0,5} = 4 : 11$; 7) $\frac{1}{3} : 4 = \frac{x}{6}$;
 2) $\frac{b}{7} = \frac{5}{3}$; 4) $0,3 : 2 = d : 8$; 6) $9 : 2 = \frac{n}{5}$; 8) $\frac{0,8}{y} = 2 : \frac{3}{4}$.

106 Реши уравнения:

1) $2\frac{1}{7} : (1,5a) = \frac{5}{14} : 0,8$; 3) $3,8 : (4c + 3) = 2 : 2\frac{2}{19}$; 5) $\frac{3x - 1}{5} = \frac{x + 1}{3}$;
 2) $\frac{4,8}{1\frac{7}{9}} = (1,2b) : 6\frac{2}{3}$; 4) $\frac{0,3d - 1,5}{3\frac{1}{3}} = 0,84 : \frac{7}{15}$; 6) $\frac{0,5y}{\frac{4}{9}} = \frac{y + 3}{8}$.

107 Составь уравнения и реши их, используя правило «весов»:

1) Задуманное число увеличили в 5 раз, затем уменьшили на 3 и полученную разность уменьшили вдвое. В результате получили число на 0,3 меньше задуманного. Какое число задумали?

2) Задуманное число утроили, затем результат вычли из 10, полученную разность увеличили в 2 раза, а потом еще на 2. Число, полученное в результате всех преобразований, оказалось в 5 раз больше задуманного. Какое число задумали?

108 1) Один трактор вспахал 15% всего поля и еще 1,2 га, а второй – $\frac{3}{5}$ всего поля и остальные 0,3 га. Вместе они вспахали все поле. Чему равна площадь поля?

2) Рабочий сделал 60% всего задания и еще 8 деталей, а его ученик – пятую часть всего задания и остальные 7 деталей. Вместе они сделали все задание. Сколько всего деталей сделали вместе мастер и ученик?

109 В результате реконструкции на одном заводе выпуск автомобилей увеличился с 8 до 10 тыс. штук в год, а на другом – с 10 до 12 тыс. штук в год. На каком заводе увеличение выпуска продукции в процентном отношении больше?

110 Выпуск продукции в прошлом году снизился на 10%, а в текущем – повысился на 20%. (Выпуск продукции сравнивается каждый раз с предыдущим годом.) Как изменился процент выпуска продукции за два года?

111 Во время эпидемии резко – в 3,6 раза по сравнению с обычным уровнем – возросло число заболеваний дифтерией. В результате лечебно-профилактических мероприятий число заболеваний снизилось на 75%. Когда заболеваемость была ниже – до эпидемии или после проведения профилактических мероприятий – и на сколько процентов?

- 112** Для рабочих некоторого предприятия в зависимости от разряда установлены различные тарифные ставки, причем для каждого следующего разряда тарифная ставка увеличивается на величину, равную 25% от ставки работника 1-го разряда. Чему равна зарплата у работника 9-го разряда, если у работника 1-го разряда она равна 8000 р.? Во сколько раз отличаются зарплаты работников 9-го и 1-го разрядов? На сколько процентов отличаются их зарплаты?



- 113** Тест состоит из четырех заданий. Максимальная оценка за каждое задание составляет 100 баллов. Средний результат среди всех участников – 75 баллов. Коэффициентом успеха ученика называется отношение среднего балла этого ученика к среднему результату всех участников тестирования. В таблице указаны результаты прохождения теста несколькими учениками.

Фамилия, имя	Задача	Пример	Уравнение	Логика	Средний балл	Коэф. успеха
1. Логинов Боря	34	56	83	7		
2. Снежина Ира	95	100	96	69		
3. Тонков Ваня	21	75	99	45		
4. Осипова Катя	98	60	48	82		
5. Бейлин Витя	100	82	56	74		
6. Корин Саша	100	96	100	100		
7. Петрова Ира	57	100	93	44		

Найди коэффициент успеха каждого ученика из приведенного списка и расположи полученные числа в убывающем порядке. Если порядок коэффициентов определен верно, то из третьих букв соответствующих им фамилий учеников составит слово. Что оно означает?

D

- 114** Сделай все возможные перестановки членов пропорции, не нарушающие ее:

а) $16 : 8 = 2 : 1$; б) $\frac{0,3}{1,2} = \frac{2}{8}$; в) $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$.

- 115** Для данной пропорции составь несколько производных пропорций. Рядом запиши в буквенном виде, какие равносильные преобразования пропорций для этого использовались.

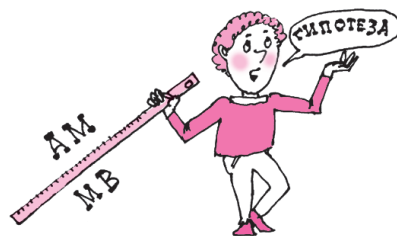
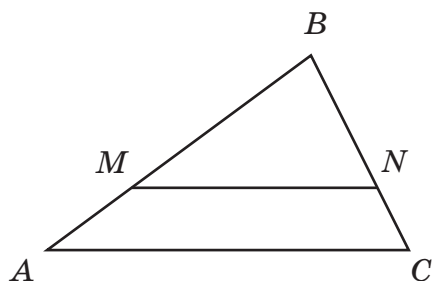
а) $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$; б) $\frac{3}{2} = \frac{18}{12}$; в) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

- 116** Реши уравнения:

1) $\frac{6x}{25} = \frac{0,4}{0,15}$; 2) $1\frac{1}{9} : (0,8y) = \frac{1}{7} : 3,6$; 3) $\frac{1,25}{0,06} = \frac{z-6}{2,4}$; 4) $\frac{7}{2+t} = \frac{4,2}{t}$.

117 Математическое исследование

1) В треугольнике ABC проведен отрезок MN , параллельный стороне AC :



Измерь длины отрезков AM , MB , BN и NC и составь пропорцию из полученных чисел. Повтори исследование для произвольного треугольника ABC и отрезка MN , параллельного его стороне AC . Сформулируй гипотезу.

2) Используй преобразования пропорций, чтобы, исходя из гипотезы, получить новые свойства данной фигуры.

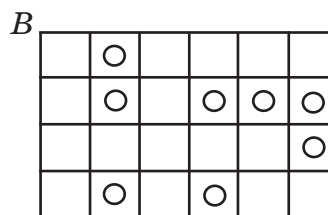
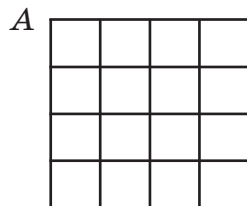
Можно ли на основании проведенных построений и измерений считать гипотезу и ее следствия верными для общего случая? Почему?

118 Две трети учащихся класса поехали на экскурсию, а оставшиеся 25% учащихся и 3 человека пошли в кино. Сколько всего учащихся в классе?

119 При какой месячной процентной ставке (простой процентный рост) вклад на сумму 5000 р. возрастет за 6 месяцев до 5225 р.? Чему равна в этом случае годовая процентная ставка (то есть процент роста вклада за год)?

120 Задуманное число удвоили, а затем уменьшили на 6. В результате оказалось, что полученное число так относится к 9, как 4 относится к 4,5. Какое число задумали?

с **121**^{*} 1) Разрежь фигуру A по линиям сетки на три одинаковые части.
2) Разрежь фигуру B по линиям сетки на 8 одинаковых по площади частей так, чтобы в каждой части был один кружок.



122^{*} Взяв у сестренки по одной карточке с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Гена разложил их по две на столе и вдруг увидел, что полученные двузначные числа относятся как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Когда вечером он захотел показать этот интересный результат отцу, то обнаружил, что отсутствует карточка с цифрой 0. Однако, подумав, он из оставшихся карточек сложил пять чисел, отношение которых вновь было равно 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Как он раскладывал карточки в первый и во второй раз?

Задачи для самопроверки.

123 Прочитай и упрости отношения:

а) $18 : 30$; б) $7,2 : 0,64$; в) $5\frac{1}{3} : 3,2$; г) $\frac{2ab}{6a}$ ($a \neq 0$).

124 Найди процентное отношение:

а) 3 к 4; б) $0,15$ к $\frac{3}{8}$; в) 7 м к 5 м; г) 9 см^2 к $0,2 \text{ дм}^2$.

125 1) Расстояние между Москвой и Харьковом на карте равно 18,6 см, а в действительности – 744 км. Чему равен масштаб карты?

2) Расстояние от Москвы до Севастополя 1490 км. Какое расстояние между этими городами на карте, масштаб которой $1 : 10\,000\,000$?3) На карте, масштаб которой равен $1 : 8\,000\,000$, расстояние от Москвы до Ростова-на-Дону 13,7 см. Какое расстояние между этими городами в действительности?

126 Найди неизвестный член пропорции:

1) $\frac{a}{8} = \frac{9}{4}$; 2) $5 : b = 15 : 12$; 3) $\frac{7}{3,6} = \frac{c}{1,44}$; 4) $0,5 : 3 = 1\frac{1}{3} : d$.

127 Реши уравнения:

1) $\frac{18}{5+x} = \frac{3}{2}$; 2) $(4y) : 1,2 = \frac{1}{6} : 0,1$; 3) $\frac{7}{3} = \frac{2z-11}{9}$.

128 Сделай все возможные перестановки членов пропорции $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, не нарушающие пропорцию.

129 Реши уравнения, используя правило «весов»:

1) $1,5a - 3 = a + 7,5$; 2) $1,8b = 3(b - 0,12)$.

130 Составь выражение и, если можно, упрости его:

1) Аэросани прошли a км, что составляет 20% всего пути. Чему равен весь путь?2) Машинистке надо напечатать b страниц рукописи. В первый день она напечатала 30% всей рукописи, а во второй – 25% всей рукописи. Сколько страниц ей еще осталось напечатать?3) Пылесос стоил s р. Его цена увеличилась на d р. На сколько процентов увеличилась цена пылесоса?4) В соревновании участвовало x человек. Из них 10% стали призерами соревнований. Среди призеров 40% составили женщины. Сколько женщин получили призы?

131 Найди значения выражений:

1) $27,21 + \left(3\frac{2}{5} - 1,141\right) : 0,45 \cdot 14,5$;
2) $\left[7,8 : \left(4\frac{3}{7} - 1\frac{9}{14}\right) + 0,312\right] : 0,02 - 3,89 \cdot 40$.

