Глава 1
Построение математической теории

§ 1. Математическое моделирование

1. Математическая модель реальной задачи

Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.

Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, физик и философ

При изучении проблем физики, химии, биологии, экономики и многих других наук сегодня широко используется математическое моделирование. Наблюдая за явлениями окружающего мира, ученые стараются выявить их наиболее существенные свойства и установить закономерности, которым они подчиняются. Когда результаты таких наблюдений получается записать на математическом языке, то удается построить математическую модель явления.

Иногда, казалось бы, различные явления или процессы описываются одними и теми же законами. Тогда возникает возможность дать их единое описание. Вот здесь и проявляется практическое удобство математического моделирования. Например, формула $a = bc$ может описывать как прямолинейное равномерное движение ($s = vt$), так и равномерную работу ($A = wt$) и множество других равномерных процессов. Поэтому при решении задач данного типа мы, например, можем легко найти значения величин v и w по общему правилу нахождения неизвестного множителя ($v = s : t$, $w = A : t$).

Язык математики, состоящий, в частности, из чисел, букв и выражений, уравнений и неравенств, помогает записать взаимосвязи, лежащие в основе различных процессов. А это уже позволяет упростить решение многих практических задач.

Идея моделирования состоит в замене реального объекта некоторым его «заместителем», называемым **моделью**. Сначала свойства изучаемого объекта формулируются, например, на языке физики. Таким образом, строится физическая модель. Построенная физическая модель – это фактически текст математической задачи. Записав его на математическом языке, мы получим **математическую модель**.

При построении модели, как правило, происходит упрощение первоначальной задачи. Так, в задачах, которые мы рассматривали ранее, рабочие работали с одинаковой производительностью, а все объекты двигались с одинаковой скоростью. Конечно же, упрощение при моделировании происходит не только в школьных учебниках, но и в реальной жизни. Например, автопилот самолета всегда проще человека – пилота, а компьютерная имитация игры в футбол проще реальной игры.

Процесс **математического моделирования**, как мы уже знаем, включает в себя три этапа. Вспомним их.

I. Построение математической модели.

На данном этапе текст задачи переводится на математический язык. Для этого определяется, что известно, что надо найти, устанавливаются взаимосвязи между известными и неизвестными величинами, вводятся буквенные обозначения, составляются математические соотношения: уравнения и неравенства. При этом важно выбрать буквенные обозначения таким образом, чтобы полученные соотношения имели как можно более простой вид.

II. Работа с математической моделью.

В результате перевода практической задачи на математический язык могут возникнуть два случая:

1) имеется математическая теория, позволяющая получить решение данной задачи;

2) такой математической теории не существует.

В первом случае мы просто выбираем способ, позволяющий получить решение задачи. Во втором случае мы должны создать новый или усовершенствовать некоторый старый способ таким образом, чтобы получить в итоге решение данной задачи (и одновременно всех других подобных задач). При этом происходит развитие и самой математической теории.

Математика может развиваться также, исходя лишь из своей внутренней логики и красоты, опережая потребности практики. Так, например, Евклид еще до нашей эры заложил основы теории делимости, а сегодня она широко используется в задачах шифрования и дешифрования текстов.

III. Практический вывод.

Получив решение математической задачи, необходимо его проанализировать, то есть разобраться в его реальном смысле, а затем сделать выводы. В этом состоит третий этап математического моделирования.

Таким образом, математическое моделирование позволяет свести решение большого числа внешне различных практических задач к решению уравнений и неравенств. А это, в свою очередь, ведет к развитию математической теории, в частности к развитию теории уравнений и неравенств.

Но для начала нам надо научиться **строить удобные математические модели, приводящие к уравнениям, способ решения которых известен.** И тогда следующий шаг – применение знакомого алгоритма – не составит труда, являясь, как говорят, «делом техники».

Вспомним и уточним известный нам алгоритм решения задач методом математического моделирования. Для этого рассмотрим следующую задачу.

Задача.

Мама купила Мише книги и диски. Вместе книг и дисков было 9. Известно, что количество купленных мамой книг при делении на 3 дает остаток 1, а количество купленных ею дисков при делении на 3 дает остаток 2. Один из дисков Миша подарил свой сестре. Сколько дисков у него осталось?

Решение:

I. Построение математической модели.

<u>Фиксируем, что известно и что надо найти.</u>

Нам известно, что мама купила общим числом 9 книг и дисков. Количество книг при делении на 3 дает остаток 1, количество дисков при делении на 3 дает остаток 2. Один из дисков Миша подарил своей сестре.

Нужно найти, сколько дисков осталось у Миши.

<u>Выбираем неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.</u>

Обозначим x – количество книг, а y – количество дисков, которые купила мама.

Из условия задачи следует, что $x \in N$ и $y \in N$.

<u>Устанавливаем взаимосвязи между известными и неизвестными величинами.</u>

Так как x при делении на 3 дает остаток 1, то по формуле деления с остатком $x = 3a + 1$ ($a \in N_0$), где N_0 – множество натуральных чисел и 0.

Аналогично $y = 3b + 2$ ($b \in N_0$).

<u>Составляем уравнение.</u>

По условию, сумма искомых чисел равна 9, значит, $x + y = 9$.

Все взаимосвязи, заданные в условии задачи, описаны полученными уравнениями.

Таким образом, мы получили математическую модель, состоящую из трех уравнений и требований к переменным, входящим в эти уравнения. Запишем их все вместе и **зафиксируем значение величины, которое требуется найти.** (Фигурная скобка обозначает, что все уравнения должны выполняться одновременно.)

$$\begin{cases} x + y = 9,\ x \in N,\ y \in N \\ x = 3a + 1,\ a \in N_0 \\ y = 3b + 2,\ b \in N_0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{y - 1 = ?}$$

Заметим, что в ходе построения математической модели мы выделили три важных шага, которые не были зафиксированы в алгоритме, который использовался нами ранее:

✓ мы определили множество значений, которые могут принимать неизвестные величины;

⚐ проверили, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением;

★ зафиксировали искомую величину.

Каждый из этих новых выделенных шагов непосредственно влияет на правильность построения модели и правильность ответа, поэтому необходимо дополнить этими шагами построенный ранее алгоритм.

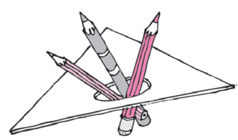
II. Работа с математической моделью.

После того как модель построена, можно в первое уравнение вместо x и y подставить соответствующие им выражения и выполнить несложные преобразования полученного уравнения, помня, что $x,\ y \in N,\ a,\ b \in N_0$:

$(3a + 1) + (3b + 2) = 9 \iff 3(a + b) = 6 \iff a + b = 2 \iff$

$\iff a = 0,\ b = 2$, или $a = 1,\ b = 1$, или $a = 2,\ b = 0 \iff$

$\iff x = 1,\ y = 8$, или $x = 4,\ y = 5$, или $x = 7,\ y = 2$.



Тогда количество дисков, оставшихся у Миши, равно:

$$y - 1 = 7, \text{ или } y - 1 = 4, \text{ или } y - 1 = 1.$$

III. Практический вывод.

Итак, мы получили, что данная задача имеет три решения, для каждого из которых значения величин x и y соответствуют условию задачи: полученные значения – натуральные числа, при этом во всех указанных случаях число книг при делении на 3 дает остаток 1, а число дисков при делении на 3 дает остаток 2.

Ответ: у Миши осталось либо 7 дисков, либо 4 диска, либо 1 диск.

В итоге мы пришли к следующему уточненному варианту алгоритма решения задач методом математического моделирования:

Алгоритм решения задач методом математического моделирования

I. Построение математической модели.

1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6) Установить взаимосвязи между величинами.
7) Составить уравнение и обосновать его.
8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим уравнением.
9) Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.

10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод.

11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

К **1** Запишите решение задачи в виде буквенного выражения и найдите его значение для:

а) $n = 208$, $m = 50$; в) $n = 242$, $m = 110$;

б) $n = 180$, $m = 46$; г) $n = 210$, $m = 62$.

1) «За книгу и фотоальбом заплатили n р. Книга стоила на m р. дороже фотоальбома. Сколько стоила книга?»

2) «Автомобиль и автобус проехали вместе n км. Известно, что автобус проехал на m км меньше, чем автомобиль. Сколько километров проехал автомобиль?»

3) «Двое рабочих сделали вместе n деталей. При этом первый рабочий сделал на m деталей больше, чем второй. Сколько деталей сделал первый рабочий?»

2 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Петю спросили, сколько ему лет. Он ответил: «Если из моего удвоенного теперешнего возраста вычесть утроенный мой возраст, который был восемь лет назад, то получится мой теперешний возраст». Сколько лет Пете?

б) Когда повара спросили, сколько яиц нужно взять, чтобы приготовить пирог, он ответил: «Если взять на 3 яйца меньше, чем это необходимо, увеличить это число в 5 раз, а затем вычесть из полученного результата число, в 2 раза большее необходимого числа яиц, то получится число, на 5 большее искомого». Сколько яиц нужно взять, чтобы приготовить три пирога по рецепту этого повара?

в) Высота Останкинской башни на 216 м больше, чем Эйфелевой. Если высоту Останкинской башни увеличить в 3 раза, а из высоты Эйфелевой башни вычесть 134 и сложить полученные величины, то получится 1810. Чему равна высота Останкинской башни?

3 Решите задачу:

а) Выручка книжного магазина (поступление денежных средств от покупателей) составила в первом квартале 700,46 тыс. р. Известно, что в январе выручка была на 49,58 тыс. р. больше, чем в феврале, а в марте – на 178,92 тыс. р. меньше, чем в феврале. Сколько денежных средств получил магазин от покупателей в марте?

б) Туристы прошли за 3 дня 112,73 км. Во второй день они прошли на 4,54 км меньше, чем в первый, а в третий день – на 5,61 км больше, чем в первый. Сколько километров прошли туристы во второй день?

в) Шоколадная фабрика выпустила в августе 524,48 тонны конфет трех сортов: «Миндальные», «Клубничные», «Сливочные». При этом миндальных конфет произвели на 39,56 тонны меньше, чем клубничных, а сливочных – на 97,69 тонны больше, чем клубничных. Сколько миндальных конфет произвели на шоколадной фабрике в августе?

4 а) Компания «Дискоспэйс» выпускает диски DVD. Стоимость изготовления одного диска составляет 50 р. При этом компания несет ежемесячно следующие расходы: аренда помещений – 50 000 р., зарплата персонала – 100 000 р., лицензии и авторские гонорары – 200 000 р., прочие расходы – 30 000 р. Цена продажи одного диска составляет в среднем 250 р. Какое количество дисков должна продавать компания ежемесячно, чтобы окупать все свои расходы?

б) Компания «Шокодрим» продает шоколадные батончики. Стоимость закупки одного батончика составляет 24 р., а стоимость продажи – 32 р. В месяц компания продает 80 000 батончиков. Какими должны быть другие ежемесячные расходы компании, чтобы ее прибыль равнялась нулю?

в) Компания «Лайтстар» продает многофункциональные туристические фонари. Стоимость продажи одного фонаря составляет 570 р. Ежемесячно компания несет следующие расходы: аренда помещений – 300 000 р., зарплата персонала – 400 000 р., прочие расходы – 76 900 р. В месяц компания продает 4570 фонарей. По какой максимальной цене может закупать компания эти фонари, чтобы покрывать все свои расходы?

5 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 12. Первое число при делении на 5 дает остаток 3, а второе число при делении на 5 дает остаток 4. Найдите эти числа.

б) Сумма двух натуральных чисел равна 28. Первое число при делении на 8 дает остаток 5, а второе число при делении на 8 дает остаток 7. Найдите эти числа.

в) Сумма двух натуральных чисел равна 44. Первое число при делении на 11 дает остаток 9, а второе число при делении на 11 дает остаток 2. Найдите эти числа.

г) Сумма двух натуральных чисел равна 47. Первое число при делении на 15 дает остаток 11, а второе число при делении на 15 дает остаток 6. Найдите эти числа.

П **6** Разбейте записи на три группы: выражения, уравнения, неравенства.

а) $158 + 2 \cdot 6$; в) $-1 = 3(7a + 2)$; д) $a^3 - b^3$; ж) $-1{,}04 \leqslant 2c < \frac{1}{9}$;

б) $0{,}5y - 45 = 5x$; г) $2 > 3$; е) $(a - b)^3$; з) $d^2 \geqslant 0$.

Вспомните, какими особенностями обладает каждая из этих групп.

7 Что общего во всех высказываниях?

а) Разностью двух чисел $a - b$ называется число c, такое, что $a = b + c$.

б) Средним арифметическим нескольких чисел называется результат деления суммы этих чисел на их количество.

в) Переменной величиной называется буквенное обозначение для элемента некоторого множества.

г) Натуральной (n-й) степенью числа a называется число a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a.

8 Запишите следующие выражения:

1) сумма квадратов двух чисел; 3) разность квадратов двух чисел;
2) квадрат суммы двух чисел; 4) квадрат разности двух чисел.

Найдите значения полученных выражений для чисел:

а) 8 и 2; б) −4 и 3; в) 7 и −5; г) −9 и −6.

9 Решите уравнение:

а) $2(x - 9{,}5) - 3(x + 1{,}8) = -4{,}4$; в) $-4(x - 7{,}6) = 8(x - 1{,}8) - 3{,}2$;

б) $5{,}7 - (x - 11{,}3) = 2(x + 3{,}7)$; г) $15{,}3 - 2(x - 0{,}9) = -0{,}7 + 3(x - 2{,}4)$.

10 Решите задачу:

а) Автомобилист проехал за два дня 580 км, причем в первый день он проехал расстояние в 1,5 раза большее, чем во второй. Сколько километров проехал автомобилист в первый день?

б) Расходы предприятия на закупку сырья увеличились в марте в 2,1 раза по сравнению с февралем. Всего в феврале и марте на закупку сырья потратили 1643 тыс. р. Какую сумму потратило предприятие на закупку сырья в марте?

в) Задумали три натуральных числа. Известно, что их сумма равна 960. Первое число на 36 больше второго, а второе в 2,5 раза больше третьего. Какие числа задумали?

г) Команда из 4 бегунов участвовала в эстафете. Их результат составил 104,3 с. Первый бегун пробежал свою часть дистанции на 3 с быстрее второго, второй – на 2,1 с медленнее третьего, а четвертый – на 1,6 с медленнее первого. За сколько секунд пробежал четвертый бегун свою часть дистанции?

Д **11** Решите задачу:

а) Выручка магазина составила в этом году на 323,69 тыс. р. больше, чем в предыдущем. Всего за эти два года магазин получил выручку в размере 927,45 тыс. р. Сколько денег получил магазин от покупателей в этом году?

б) В вагоне метро, после того как из него вышли 9 человек, а вошли 17 человек, стало в 1,5 раза больше людей, чем было до этого. Сколько человек стало в вагоне?

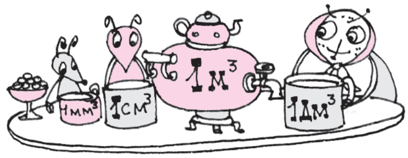
12 Запишите следующие выражения:

1) сумма кубов двух чисел; 2) куб суммы двух чисел.

Найдите значения полученных выражений для чисел:

а) 3 и 1; б) -5 и 2.

Что вы замечаете?



13 Решите уравнение:

а) $-(x + 15{,}4) = -5{,}4 + (3{,}7 - 2x)$;

б) $x + 12{,}3 - 5(x - 5{,}9) = 8{,}6$.

14 Выполните вычисления и расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Вы узнаете название раздела математики, основоположником которого был великий французский математик Анри Пуанкаре.

П $-4{,}3 + (-3{,}1 - 7{,}8)$

О $-6{,}4 + 5{,}2 - (12{,}7 - 3{,}5)$

Я $-(11{,}2 - 2{,}4 - 32{,}5)$

И $5{,}8 + 13{,}1 - (-3{,}4)$

Г $3{,}2 + 15{,}8 - (-5 + 4)$

Л $-(11{,}8 - 3{,}6) + 2{,}5$

О $(0{,}5 + 14{,}9) - (17{,}4 + 1{,}9)$

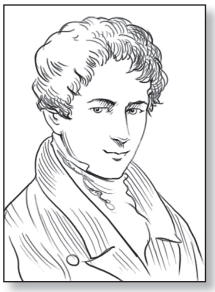
Т $(18{,}1 - 17{,}3 + 2{,}5) - 34{,}5$

О $45{,}7 - 38{,}9 + (-28{,}4)$

С **15*** Выпускники школы после выпускного вечера обменялись фотографиями каждый с каждым. Всего потребовалось 650 фотографий. Сколько было выпускников?

16* Мальчик спустился по движущемуся вниз эскалатору метро и насчитал 45 ступенек. Затем он с той же скоростью поднялся вверх по этому эскалатору и насчитал 225 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, пройдя по неподвижному эскалатору?

2. Основные требования к математической модели



Вместо того чтобы искать некоторое соотношение, надо спросить, возможно ли такое соотношение.

Нильс Хенрик Абель (1802–1829),
норвежский математик

В предыдущем пункте мы говорили о том, что построение математических моделей является эффективным методом исследования явлений и объектов окружающего мира. Математическое моделирование позволяет не только их изучать, но и управлять ими. Хорошо построенная модель помогает даже прогнозировать (предвидеть, определять заранее) моделируемое явление.

Математическая модель – это инструмент в руках исследователя. Для эффективности его использования он должен быть ***достаточно простым***.

Вместе с тем, важно находить разумный баланс между простотой модели и ее соответствием моделируемой ситуации. Ведь усложнение модели за счет чрезмерной детализации может привести порой к невозможности исследования такой модели, а сильное упрощение модели может не дать достоверной информации о поведении исследуемого объекта.

Поэтому важным является требование ***достаточной полноты*** математической модели. А именно, математическая модель должна отражать все существенные для решения задачи свойства объекта. Эти свойства могут быть описаны явно в условии задачи. Они могут также следовать и из особенностей изучаемых объектов. Так, например, если в задаче речь идет о количестве n учащихся класса, то ответ $n = -5\frac{2}{3}$ заведомо неверный. Ведь в задаче фактически есть условие $n \in N$, которое явно не указано.

Давайте решим задачу и посмотрим, какие изменения в нашем алгоритме повлекут эти требования к математическим моделям.

Задача.

Первый угол треугольника на 20° *больше второго, но в три раза меньше третьего угла. Найдите углы этого треугольника, если сумма первого и третьего углов равна* 120°.

<u>Определяем, что известно и что надо найти.</u>

Известно, что первый угол треугольника на 20° больше второго, но в три раза меньше третьего, а сумма первого и третьего углов равна 120°.

Надо найти углы этого треугольника.

<u>Проверяем соответствие единиц измерения величин.</u>

Величины всех углов выражены в градусах, поэтому единицы измерения величин соответствуют друг другу.

<u>Выбираем неизвестные величины, которые будем обозначать буквой.</u>

Для того чтобы получить более простые уравнения, обозначим x^o величину меньшего из углов треугольника, то есть величину второго угла.

<u>Определяем множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.</u>

Величина угла треугольника может принимать только положительные значения, меньшие 180^o, значит, $0 < x < 180$.

<u>Устанавливаем взаимосвязи между известными и неизвестными величинами.</u>

Величина первого угла треугольника равна $(x + 20)^o$, а третьего угла – $3(x + 20)^o$. Так как это углы треугольника, то для них также должны выполняться неравенства:

$$0 < x + 20 < 180; \; 0 < 3(x + 20) < 180.$$

Также известно, что сумма первого и третьего углов равна 120^o.

На первый взгляд кажется, что другой информации в условии не дано. Однако нередко бывает так, что какие-то взаимосвязи заданы не явно, а вытекают из свойств заданного объекта.

В нашем случае объект моделирования – треугольник, а сумма углов любого треугольника равна 180^o.

Таким образом, при построении математической модели необходимо также **установить взаимосвязи между величинами, возникающие из свойств моделируемого объекта (если они есть).**

<u>Составляем и обосновываем уравнение.</u>

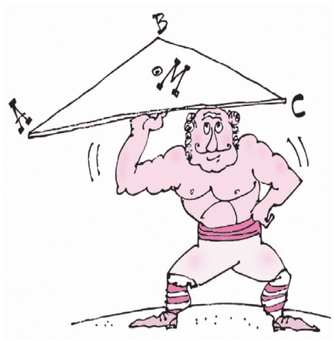
По условию, сумма первого и третьего углов равна 120^o, значит,

$$(x + 20) + 3(x + 20) = 120.$$

Сумма углов треугольника равна 180^o, значит,

$$(x + 20) + x + 3(x + 20) = 180.$$

<u>Проверяем, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим **соотношением**</u>.



Мы зафиксировали, что первый угол треугольника на 20^o больше второго и в три раза меньше третьего, сумма первого и третьего углов равна 120^o и что заданная фигура – треугольник.

Заметим, что ранее при моделировании задач мы сталкивались лишь с уравнениями, но требуемые соотношения могут быть заданы и неравенствами. Так, указанное множество значений переменной x не может быть описано уравнением, но может быть описано **неравенствами**. Поэтому соотношения мы будем понимать теперь в более широком смысле.

<u>Фиксируем искомую величину.</u>

Требуется найти величины каждого из трех углов треугольника, то есть значения $x + 20$, x и $3(x + 20)$.

Выпишем соотношения, которые мы составили, и зафиксируем искомые величины. При этом важно заметить, что все составленные соотношения должны выполняться одновременно.

$$\begin{cases} (x + 20) + 3(x + 20) = 120 \\ (x + 20) + x + 3(x + 20) = 180 \\ 0 < x < 180;\ 0 < x + 20 < 180;\ 0 < 3(x + 20) < 180 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x + 20 = ? \\ x = ? \\ 3(x + 20) = ? \end{array}}$$

Ищем все решения, удовлетворяющие построенной модели.

Искомое значение x должно удовлетворять каждому из составленных соотношений. Однако из первого уравнения следует, что $x = 10$, а из второго – что $x = 20$, что одновременно выполняться не может. Таким образом, приходим к выводу, что данная задача не имеет решений.

Проведенное исследование показывает, насколько важно при работе с математическими моделями учитывать все существенные свойства исследуемых объектов. Действительно, если бы мы не учли того, что сумма углов треугольника равна 180°, то получили бы решение 30°, 10° и 90°, которое не отражает объективных законов окружающего мира: треугольников с такими углами не существует.

Итак, математическая модель должна удовлетворять требованию *достаточной полноты*, то есть содержать все существенные взаимосвязи между исследуемыми объектами. Поэтому мы приходим к следующему **уточнению шагов** общего алгоритма решения задач методом математического моделирования:

Алгоритм решения задач методом математического моделирования

I. Построение математической модели.

1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны и какие надо найти.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Выбрать неизвестные величины и ввести для них буквенные обозначения.
5) Определить множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.
6) Установить взаимосвязи между величинами (явно заданные в условии и возникающие из свойств моделируемого объекта).
7) Составить уравнение или неравенство (одно или несколько) и обосновать их.
8) Проверить, что каждый элемент условия задачи описан соответствующим соотношением.
9) Зафиксировать искомую величину.

II. Работа с математической моделью.

10) Найти все решения, удовлетворяющие построенной модели.

III. Практический вывод.

11) Проверить соответствие полученного ответа вопросу задачи.
12) Убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

К **17** Периметр прямоугольного участка земли равен 62 м, а разность между его длиной и шириной равна 5 м. Чему равна площадь этого участка земли?

18 а) Расстояние AD между началом и концом ломаной $ABCD$ равно 9,6 см. Известно, что AB равно четверти AD, BC на 0,4 см меньше AB, а CD в 1,5 раза больше BC. Чему равна длина ломаной $ABCD$?

б) Постройте ломаную $ABCD$, удовлетворяющую условию предыдущей задачи.

19 Постройте математическую модель и решите задачу:

1) Величины углов треугольника в градусах равны трем последовательным натуральным числам. Найдите их.

2) Величины углов треугольника в градусах равны трем последовательным четным числам. Найдите их.

3) Величины углов треугольника в градусах равны трем последовательным натуральным числам, кратным трем. Найдите их.

20 Решите задачу, используя метод перебора:

а) В школьном парке растут дубы, клены, березы и тополя. Известно, что дубов, кленов и берез одинаковое количество. При этом число тополей более чем в 3 раза больше, чем число всех остальных деревьев. А число кленов и тополей меньше 12. Сколько в этом парке растет тополей?

б) В городском зоопарке живут обезьяны, крокодилы, слоны и тигры. Известно, что обезьян, слонов и крокодилов одинаковое количество. Число тигров более чем на 11 больше, чем число обезьян и крокодилов вместе. А число тигров и слонов в сумме меньше 16. Сколько в этом зоопарке крокодилов?

в) В турнире принимали участие не менее 12 игроков. В итоговой таблице турнира было указано, что игроки могли набрать следующие баллы: 5, 7, 8, 10. Количество игроков, набравших 5, 7 и 10 баллов, было одинаковым, а игроков, набравших 8 баллов, было больше, чем всех остальных, вместе взятых. При этом больше 7 баллов набрали менее 10 игроков. Сколько игроков набрали 8 баллов?

21 Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми ни другими? Определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицание.

а) Температура воздуха в Красноярске всегда равна –30 °С.

б) Некоторые грибы – съедобные.

в) Насекомые являются животными.

г) Известный математик Абель жил в Норвегии.

д) Иногда на пальмах растут кокосы.

е) Все школьники любят играть в шахматы.

ж) Автомобиль может развивать скорость 300 км/ч.

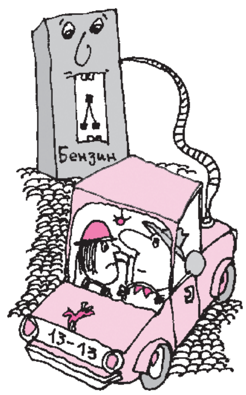
з) Некоторые реки не имеют истока.

и) Некоторые собаки лают.

к) Иногда родители балуют своих детей.

л) Все учителя – женщины.

м) На прошлом уроке мы изучали правила сложения дробей.



22 Длина прямоугольника равна 17 см. Какие значения может принимать ширина этого прямоугольника, если его периметр меньше периметра прямоугольника, длина которого равна 15 см, а ширина – 13 см?

23 Решите задачу:

а) Когда турист прошел $\frac{1}{9}$ всего пути, то до середины пути ему оставалось пройти еще $4\frac{2}{3}$ км. Найдите длину всего пути.

б) Если к числу рабочих на заводе прибавить половину их количества и еще $\frac{2}{3}$ от их количества, то получится 3510 человек. Сколько рабочих на этом заводе?

в) В одной школе три седьмых класса: 7 «А», 7 «Б» и 7 «В». В 7 «А» учится $\frac{3}{14}$ всех семиклассников, в 7 «Б» – $\frac{3}{7}$ всех семиклассников, а в 7 «В» – 20 человек. Сколько семиклассников в этой школе?

24 Решите задачу методом проб и ошибок:

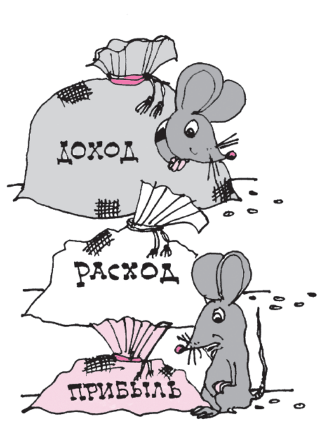
а) Ваня загадал два натуральных числа. Одно из этих чисел на 10 больше другого числа. Их произведение равно 375. Какие числа загадал Ваня?

б) Когда Таню попросили дать ее адрес, она сказала: «Номер моего дома на 12 меньше номера моей квартиры, а их произведение равно 1728». Какой номер у Таниного дома?

в) В классе мальчиков на 4 больше, чем девочек. А произведение количества мальчиков и девочек равно 252. Сколько мальчиков в этом классе?

25 Решите задачу:

а) Выручка компьютерной компании в первый год работы после открытия составила 527,3 тыс. р., а расходы – 723,9 тыс. р. Во второй и последующие годы выручка была на 135,2 тыс. р. больше, чем в первый год. Расходы же во второй и последующие годы были на 159,7 тыс. р. меньше, чем в первый год. Через сколько лет после открытия сумма всех расходов компании сравнялась с выручкой?



б) Расходы компании по производству велосипедов в первый год работы составили 895,5 тыс. р. Во второй год работы они сократились на 123,6 тыс. р. и более не изменялись. Выручка компании не изменялась год от года. Какой была ежегодная выручка этой компании, если к концу шестого года сумма всех расходов компании со дня открытия сравнялась с выручкой за это время?

26 Решите уравнение:

а) $x + \frac{2}{5} = 5\frac{1}{5}$; б) $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = 1\frac{7}{20}$; в) $\frac{3x}{7} = \frac{3x}{2} + 5$;

г) $\frac{4x}{5} - 9 = \frac{5x}{4}$; д) $\frac{5x}{7} - \frac{7x}{5} = 4$; е) $3(\frac{x}{5} - 3) = 5(\frac{x}{3} - 5)$.

Д **27** Один из острых углов прямоугольного треугольника больше другого на 26°. Найдите величину меньшего угла этого треугольника.

28 Антон и Ксюша создали компанию по производству пончиков и купили оборудование стоимостью 50 100 р. Они решили, что при расчете ежемесячной прибыли будут учитывать в расходах лишь часть стоимости этого оборудования. На какую сумму будет ежемесячно уменьшаться первоначальная стоимость оборудования, если уменьшение должно происходить равномерно в течение 5 лет, а к концу 5-го года стоимость оборудования должна быть равна нулю?

29 а) Иван должен был увеличить число $34\frac{3}{17}$ в 18 раз, а увеличил его на 18. На сколько полученный им результат меньше правильного?

б) Катя должна была увеличить число $27\frac{5}{6}$ на 7, а увеличила его в 7 раз. На сколько полученный ей результат больше правильного?

в) Алексей должен был уменьшить число $12\frac{6}{7}$ в 3 раза, а уменьшил его на 3. На сколько полученный им результат больше правильного?

г) Наташа должна была уменьшить число $2\frac{8}{11}$ на 4, а уменьшила его в 4 раза. На сколько полученный ей результат больше правильного?

30 Решите уравнение:

а) $2x - \frac{1}{5} = \frac{3}{7}$; б) $\frac{x}{3} + \frac{x}{15} = 9$; в) $\frac{3x}{12} = \frac{5x}{6} - 1$.

31 Выполните вычисления и расшифруйте название чина городской полиции в Российской империи:

Д $\frac{2}{5} : \frac{8}{25} + 2\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{3}$

В $10\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{14} - 1\frac{23}{35} + 2\frac{2}{7}$

О $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{9} : \frac{5}{27} + \frac{5}{6}$

О $15 : \frac{5}{18} : 3\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{16} - 32\frac{7}{15}$

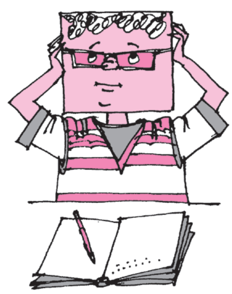
Й $\frac{4}{15} + 2\frac{7}{12} - \frac{30}{128} : \frac{9}{32}$

Р $\frac{1}{16} + \frac{11}{36} + \frac{5}{48} + \frac{7}{18}$

О $3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} - 4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{12}$

О $(11\frac{5}{11} - 8\frac{21}{22}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

Г $4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24} + 1\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}$

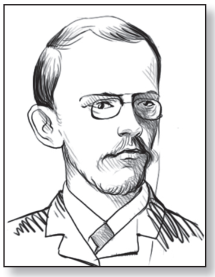


$2\frac{13}{24}$	$-2\frac{5}{12}$	$\frac{31}{36}$	$-2\frac{5}{6}$	$11\frac{1}{4}$	1	$2\frac{3}{7}$	$\frac{8}{15}$	$2\frac{1}{60}$

С **32*** Школьник с 7 по 11 класс включительно принял участие в 31 соревновании. При этом каждый следующий год он принимал участие в большем количестве соревнований, чем в предыдущем. А в 11 классе он принял участие в 3 раза большем количестве соревнований, чем в 7 классе. В скольких соревнованиях участвовал школьник в 10 классе?

§ 2. Основы построения математической теории*

1. Метод построения математической теории

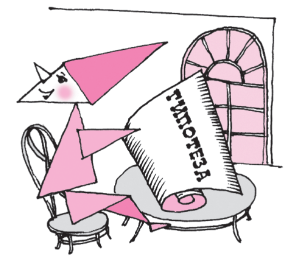


Математика – всего лишь игра, в которую играют согласно простым правилам...

Давид Гильберт (1862–1943),
немецкий математик

Метод математического моделирования используется для решения разных практических задач. После построения математической модели естественным образом встает вопрос о существовании математической теории, позволяющей получить решение исходной задачи. Поэтому давайте обсудим, каким образом строятся математические теории и в чем их преимущество перед другими теориями.

Для этого рассмотрим простой пример. Мы знаем, что ***сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3***. Это верно, так как данная сумма может быть записана в виде $n + (n + 1) + (n + 2)$, где $n \in N$. Преобразовав полученное выражение $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$, мы приходим к доказательству требуемого утверждения.



Свое доказательство мы основывали на том, что ***сумму трех последовательных натуральных чисел можно записать в виде*** $\boldsymbol{n + (n + 1) + (n + 2)}$.

В свою очередь, это последнее утверждение непосредственно следует из того, что ***если натуральное число равно n, то следующее за ним равно n + 1, а число, следующее за n + 1, равно n + 2***.

А почему же верно последнее утверждение?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, разберемся сначала в том, как строится математическая теория.

Математические утверждения, образно говоря, можно выстраивать в цепочки, в которых одно утверждение логически следует из другого. Но каждая из этих цепочек должна иметь начальное звено, иначе процесс обоснования утверждений будет бесконечным.

Вот почему в основу математической теории должны быть положены некоторые *первоначальные утверждения* – утверждения, истинность которых принимается без доказательства. Эти утверждения – начальные звенья в цепи математической теории. Они называются **аксиомами**. Все остальные элементы цепи называются **теоремами** и выводятся из аксиом путем **логических рассуждений**.

$\boxed{\textbf{Аксиома}} \Rightarrow \boxed{\text{Теорема 1}} \Rightarrow \boxed{\text{Теорема 2}} \Rightarrow \boxed{\text{Теорема 3}} \Rightarrow \ldots$

Мы уже встречались с подобной ситуацией, когда говорили о том, что в математике одни понятия определяются через другие, другие через третьи и т. д. Так как этот процесс также не может продолжаться бесконечно, то должны появиться понятия, не имеющие определения. Эти неопределяемые понятия в математике называются **первоначальными**, или *основными*. Например, в классической геометрии основными понятиями являются понятия *точки*, *прямой* и *плоскости*. А *единица* и *натуральное число* относятся к первоначальным понятиям теории чисел.

Первоначальное понятие ⇨ Определяемое понятие 1 ⇨ Определяемое понятие 2 ⇨ ...

Итак, определение каждого понятия, не являющегося первоначальным, опирается на ранее введенные понятия. При этом если понятие A определяется через понятие B, то B называют ***родом*** (или *родовым понятием*) для A, а указанные в определении новые существенные признаки A – его **видовым отличием**.

Рассмотрим, например, определение квадрата:

«Квадрат – это ***прямоугольник***, у которого **все стороны равны»**.

Мы видим, что квадрат определяется как прямоугольник с особыми свойствами. Значит, для квадрата родовым понятием является понятие прямоугольника, а его видовым отличием является то, что у него все стороны равны.

Соотношение между родовым понятием B (прямоугольники) и понятием A (квадраты) можно изобразить с помощью диаграммы Эйлера–Венна (рис. 1). На этой диаграмме мы видим, что множество квадратов является подмножеством множества прямоугольников.

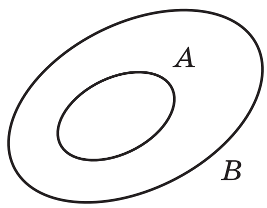


Рис. 1

Таким образом, при построении математической теории мы сначала выбираем первоначальные понятия, а затем с их помощью определяем остальные понятия. Однако при выборе первоначальных понятий мы сталкиваемся с некоторыми трудностями. Действительно, если им невозможно дать определение, то как мы узнаем, что они означают? Ведь поясняющие примеры дают лишь некоторое представление о них, а математика является наукой точной и не допускает нестрогости своих основ.

Выход из этого противоречия предлагает **аксиоматический метод** построения математической теории. Суть его заключается в следующем.

Аксиоматический метод

1) Выбирается перечень первоначальных понятий.

2) Основные свойства первоначальных понятий задаются *системой аксиом*.

3) Новые понятия вводятся только с помощью первоначальных и ранее введенных понятий.

4) Новые утверждения (теоремы) доказываются только с помощью аксиом и ранее доказанных утверждений.

Так каждый раз на базе уже известного даются определения новым понятиям и доказываются их неизвестные свойства.

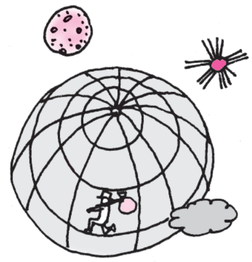
Построение математической теории можно сравнить со строительством здания. Понятно, что для возведения нового здания нужно заложить фундамент и на нем строить дом. Так и в математической теории сначала выбираются первоначальные понятия и утверждения, принимаемые без доказательств, а затем на их основе вводятся новые понятия, а все остальные утверждения доказываются с помощью логических умозаключений.

Что же дает аксиоматический метод? В математике он обеспечивает *надежность*, как и фундамент для дома. А для математической теории это означает *достоверность* полученных выводов. Именно поэтому об уровне развития науки сегодня судят по тому, в какой степени в ней применяются математические методы.

Аксиомы в современной математике – это не безусловные истины, как иногда принято считать. Скорее, аксиомы – это некоторые выбранные свойства первоначальных понятий. Создатель математической теории может сам выбирать первоначальные понятия и аксиомы. Однако этот выбор он может делать с определенными ограничениями. В частности, выбранная система аксиом должна быть *непротиворечивой*, то есть она не должна приводить к противоречащим друг другу выводам. Действительно, если система аксиом некоторой математической теории такова, что в результате логических рассуждений может быть получено, что одно и то же утверждение одновременно верно и неверно, то поиск истины с помощью этой теории теряет смысл.

Значение аксиом первым оценил Аристотель, величайший древнегреческий философ и ученый. Он считал, что во всех областях науки имеются высказывания, которые настолько очевидны, что не нуждаются в доказательствах. А применить аксиоматический метод в геометрии удалось Евклиду: он создал систему аксиом, которая стала основой логического обоснования всех известных на тот момент геометрических утверждений.

В XIX веке, изменив всего лишь одну аксиому в системе аксиом Евклида, великий русский математик Н.И. Лобачевский построил новую непротиворечивую геометрию. Геометрию Лобачевского назвали *неевклидовой*, подчеркнув ее отличие от классической геометрии, основанной на аксиомах Евклида.



Может возникнуть вопрос: какую же геометрию считать правильной – геометрию Евклида или Лобачевского? Ответ оказывается парадоксальным – это две разные математические теории, каждая из которых имеет реальный практический смысл. Геометрия Евклида – это геометрия плоского пространства, а геометрия Лобачевского – геометрия искривленного пространства, похожего на воронку. В зависимости от поставленных задач мы можем пользоваться той или другой математической теорией.

Теперь, ознакомившись с идеями, на которых строится математическая теория, мы можем ответить и на вопрос о свойствах натуральных чисел, поставивший нас в тупик вначале. Система аксиом для множества натуральных чисел была сформулирована итальянским математиком Джузеппе Пеано лишь в XIX веке. Она, в частности, позволила вывести все известные нам свойства натуральных чисел логическим путем. И именно из аксиом Пеано следует, что если натуральное число равно n, то следующее за ним равно $n + 1$, а число, следующее за $n + 1$, равно $n + 2$.

К **33** Какие из следующих высказываний являются определениями? Для определений назовите определяемые понятия и понятия, с помощью которых дается определение:

а) Окружность – это не квадрат.

б) У квадрата все углы равны.

в) Натуральное число является составным, если оно имеет более двух различных делителей.
г) Четные числа – это натуральные числа, кратные 2.
д) Арифметика – это царица математики.
е) Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками.

34 Прочитайте определения и назовите определяемые понятия. Какой должна быть последовательность определения этих понятий при построении математической теории? Почему?

A «Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны».

B «Четырехугольник – это многоугольник с четырьмя сторонами».

C «Четырехугольник, все углы которого равны, называется прямоугольником».

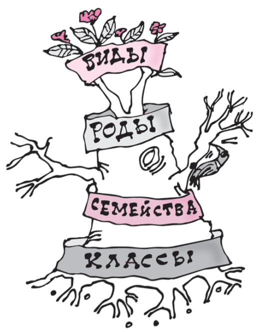
Может ли процесс поиска ранее введенных понятий, на которые опираются новые понятия, продолжаться бесконечно?
Какой выход из этого предложен в математике?

35 Сформулируйте определения:

а) правильной дроби; в) отношения; д) четного числа;
б) простого числа; г) пропорции; е) процента,

выбирая нужные понятия и свойства из нижеприведенного списка:
1) натуральное число;
2) дробь;
3) число;
4) кратное 2;
5) меньше единицы;
6) два отношения;
7) числитель меньше знаменателя;
8) произведение двух чисел;
9) сотая доля;
10) частное двух чисел;
11) имеет ровно 2 различных делителя;
12) истинное равенство.

36 а) Назовите родовые понятия и видовые отличия в определениях из № 34. Нарисуйте для данных понятий диаграмму Эйлера–Венна.
б) Выполните то же задание для определений из № 33.



37 Прочитайте определения и назовите определяемые понятия. Для каждого из определений назовите понятия, которые в них использованы:

а) Число a противоположно числу b, если $a + b = 0$.
б) Целые числа – это натуральные числа, им противоположные и нуль.
в) Модулем числа a называется расстояние от точки, соответствующей данному числу на числовой прямой, до 0.

38 Докажите, что:

а) Сумма трех последовательных четных чисел делится на 6.
б) Сумма трех последовательных нечетных чисел делится на 3.
в) Сумма четырех последовательных натуральных чисел при делении на 4 дает остаток 2.
г) Сумма четырех последовательных четных чисел при делении на 8 дает остаток 4.

39 В некоторой математической теории введены следующие **первоначальные понятия**: *торик*, *банарик*, *сладкий*, *кислый*, *круглый*, *квадратный*, *мягкий*, *твердый*. Для этих понятий введена следующая **система аксиом**:

$\mathbf{A}_1$ Есть хотя бы один торик и хотя бы один банарик.
$\mathbf{A}_2$ Торик сладкий.
$\mathbf{A}_3$ Банарик кислый.
$\mathbf{A}_4$ Торики и банарики могут быть как круглыми, так и квадратными.
$\mathbf{A}_5$ Торики и банарики могут быть как мягкими, так и твердыми.

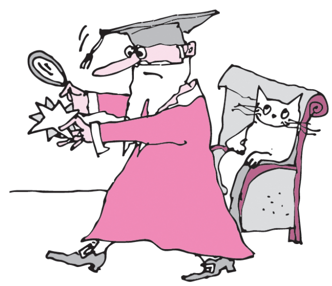
С учетом новых определений докажите указанную теорему:

а) ***Определение.*** Яблоко – круглый торик.
Теорема. Яблоко сладкое.

б) ***Определение.*** Лимон – мягкий банарик.
Теорема. Лимон кислый.

в) ***Определения.*** Апельсин – это круглый торик.
Мандар – это твердый апельсин.
Теорема. Мандар круглый и сладкий.

г) ***Определения.*** Помидор – это квадратный банарик.
Картоль – это твердый помидор.
Теорема. Картоль квадратный и кислый.



40 Вычислите устно и расположите ответы примеров в порядке убывания. Вы узнаете название самой яркой звезды на ночном небе.

Р	$24{,}4 + 9{,}7 + 2{,}5 + 15{,}6 + 10{,}3$	**У**	$95{,}614 - (19{,}99 + 45{,}614)$
И	$20{,}98 \cdot 0 - 1 \cdot (12{,}7 - 0 : 4{,}56) + 92{,}7 : 1$	**С**	$(75{,}48 + 3{,}916) - 75{,}48$
И	$42{,}9 : 1 - 0 \cdot 35{,}16 + 5{,}28 : 52{,}8$	**С**	$-2{,}5 \cdot (-4) \cdot 8 \cdot 12{,}5$

41 Составьте выражение и найдите его значение при $a = -15$, $b = -12{,}6$.

а) Первое из задуманных чисел больше a на 32, а второе равно результату от деления числа b на 2,1. Найдите сумму этих чисел.

б) Второе из задуманных чисел равно произведению числа a на число 3,3, а первое – произведению числа b и числа 4,7. Найдите разность между первым и вторым числом.

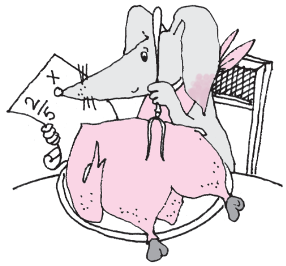
в) Первое из задуманных чисел равно результату от деления числа a на 5, а второе меньше b на 34. Найдите произведение этих чисел.

г) Второе из задуманных чисел меньше a на 90, а первое равно результату от деления числа b на 12. Найдите частное от деления второго числа на первое.

42 Прочитайте высказывания, записанные на математическом языке с помощью кванторов общности (∀) и существования (∃). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

а) $\exists\ n \in N : n = 3k + 2,\ k \in N$;
б) $\forall\ m \in N : m = 15l + 4,\ l \in N$;
в) $\forall\ a \in N : a$ делится на само себя;
г) $\exists\ b \in N : b$ делится на 0;
д) $\forall\ n \in N : 2n$ – составное число;
е) $\exists\ m \in N : 2m + 1$ – простое число;
ж) $\exists\ k \in N : 2k$ – кратно 3;
з) $\forall\ d \in N : 3d + 1$ – не кратно 5.

43 Составьте буквенное выражение для нахождения неизвестного числа и найдите его при данных значениях букв:



а) число, равное $\frac{2}{3}$ от a ($a = 1{,}2$);

б) число, равное 0,25 от b ($b = 5{,}6$);

в) число, $\frac{1}{7}$ которого равна c ($c = 0{,}14$);

г) число, 0,3 которого равны d ($d = 90$);

д) число, равное части, которую число k составляет от числа m ($k = 0{,}25$, $m = \frac{1}{3}$);

е) число, равное части, которую число n составляет от числа p ($n = 0{,}8$, $p = 2\frac{1}{5}$).

44 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Выручка предприятия в первый день составила $\frac{14}{15}$ выручки за второй день. Всего за эти два дня выручка составила 76 908 р. Сколько денег получили от покупателей в первый день?

б) За месяц расходы компании на бензин составили 45 720 р., что составило $\frac{3}{11}$ всех расходов компании. Сколько денег израсходовала компания в этом месяце?

в) Прибыль компании в первом полугодии составила 648 000 р., а во втором – 342 000 р. Какую часть составила прибыль второго полугодия от прибыли первого?

45 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x - 3 > 2$; в) $2 < a \leqslant 7$; д) $|z| < 2$;

б) $y + 9 \leqslant 12$; г) $-3 \leqslant b < 5$; е) $|n + 3| \geqslant 4$.

46 Сравните числа A и B:

$A = (6{,}8547 : 2{,}19 + 0{,}6039 : 5{,}49) : 1{,}62$;

$B = (0{,}9893 : 0{,}13 - 6{,}4) \cdot 62{,}9 - 77{,}109$.

Д **47** Зачеркните буквы, соответствующие высказываниям, не являющимся определениями. Прочитайте подряд оставшиеся буквы – и вы узнаете единицу измерения вязкости, которая была названа так в честь выдающегося французского физика.

П Число a называется обратным к числу $b \neq 0$, если $a \cdot b = 1$.

Л В прямоугольном треугольнике два угла острые.

У Произведением двух натуральных чисел a и b называется сумма b слагаемых, каждое из которых равно a.

А Натуральное число a делится на натуральное число b, если существует такое натуральное число c, что $a = bc$.

О Дробь – это не целое число.

Д Неправильная дробь больше или равна 1.

Н Модуль любого числа больше или равен нулю.

М Окружность – это не прямая.

З Производительность – это объем работы, сделанной за единицу времени.

48 В некоторой математической теории введены следующие первоначальные понятия: *талл, воад, твердый, жидкий, прямой, кривой*. Для этих понятий введена следующая система аксиом:

A_1 Есть хотя бы один талл и хотя бы один воад.
A_2 Таллы и воады могут быть как прямыми, так и кривыми.
A_3 Талл твердый.
A_4 Воад жидкий.

С учетом новых определений докажите указанную теорему:

а) ***Определение.*** Алюминий – это прямой талл.
Теорема. Алюминий – твердый.

б) ***Определение.*** Сок – это кривой воад.
Теорема. Сок – жидкий.

49 Владельцы пончиковой компании Антон и Ксюша посчитали, что количество пончиков, проданных ими в феврале, составило $\frac{5}{7}$ от количества пончиков, проданных ими в марте. Всего за эти два месяца они продали 480 пончиков. Сколько пончиков Антон и Ксюша продали в феврале?

50 Несколько школьников, вложив поровну денег, выбрали компьютерную игру и решили ее купить. В последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся школьников пришлось заплатить на 1 р. больше. Сколько стоила компьютерная игра, если ее стоимость больше 140 р., но меньше 160 р.?

51 Выполните вычисления и расшифруйте фамилию второго в истории шахмат чемпиона мира, ученика Давида Гильберта.

Е $(0,04 + 3,59)(7,35 + 2,65)$

К $(6,39 - 2,1028) : (18 - 5,3408 - 11,3022 : 1,35)$

А $(13 - 12,47) \cdot 0,8 \cdot 19$

Р $[1,91 \cdot 6 : (2,5 \cdot 5)] : (114,6 \cdot 0,002)$

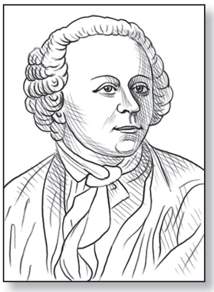
Л $(5,4 - 3,65)(10,28 - 7,09)$

С $[7,36 \cdot 4,5 \cdot (15,2 \cdot 0,2)] \cdot (65,24 : 13,048)$

5,5825	8,056	503,424	1	36,3	4

C **52*** Одновременно зажгли две свечи одинаковой длины. Одна свеча полностью сгорает за 6 часов, а вторая – за 2 часа. Через некоторое время свечи одновременно погасили, и оказалось, что огарок первой свечи в 3 раза длиннее, чем второй. Сколько времени горели свечи?

2. Некоторые методы математического доказательства



Именно математика дает надежнейшие правила: кто им следует – тому не опасен обман чувств.

Леонард Эйлер (1707–1783),
швейцарский математик

Как мы уже видели, любая математическая теория строится на базе первоначальных понятий и аксиом. С помощью логических рассуждений, называемых **доказательствами**, устанавливается справедливость всех остальных утверждений теории – теорем.

Так что же такое доказательство и какие методы доказательства существуют?

Если посмотреть определение понятия «доказательство» в толковом словаре, то мы увидим, что *доказательство* – это рассуждение, обосновывающее доказываемое утверждение. В математике доказать какое-либо утверждение – это значит показать, что это утверждение логически следует из уже доказанных утверждений или аксиом. Никакое другое рассуждение, даже подтвержденное сколь угодно большим количеством частных примеров, доказательством не считается.

Как же находить доказательства математических утверждений?

Общего рецепта здесь нет. Поиск доказательств во многом определяет развитие математики как науки. Для доказательства некоторых математических утверждений требуются столетия и создание целых теорий. Вот два ярких примера. Так называемая великая теорема Ферма была сформулирована Пьером Ферма еще в 1637 году, а доказана лишь в 1995 году английским математиком Эндрю Уайлсом, совершившим в процессе этого доказательства прорыв в теории чисел. И только в 2002 году российский математик Григорий Перельман доказал, используя парадоксальные идеи, знаменитую гипотезу Анри Пуанкаре почти вековой давности.

Тем не менее, в математике есть способы доказательства, которые успешно работают при установлении истинности самых разных с виду утверждений. С некоторыми из них мы с вами уже встречались, некоторые нам встретятся впервые.

Метод перебора

Задача 1.

Доказать, что среди двузначных чисел есть только два числа, 72 и 94, которые на 58 больше произведения своих цифр.

Доказательство:

Любое двузначное число можно представить в виде $10a + b$, где a и b – соответственно первая и вторая цифры этого числа. Значит, a – натуральное число, меньшее 10, а b может быть одним из целых чисел от 0 до 9.

Тогда указанное в условии свойство можно записать в виде равенства:

$$10a + b = 58 + ab.$$

Искомое двузначное число равно $58 + ab$, где a и b – целые числа от 0 до 9, значит оно больше 58. А значит число его десятков a больше или равно 5. Последовательно перебираем все возможные значения a и b и получаем, что указанное равенство возможно только для двузначных чисел 72 и 94, что и требовалось доказать.

Алгоритм доказательства методом перебора

Проверить истинность утверждения для каждого элемента рассматриваемого множества.

Метод проб и ошибок

Задача 2.

Доказать, что уравнение $x(x + 9) = 90$, где $x \in N$, имеет единственное решение.

Доказательство:

Возьмем $x = 6$, тогда $6(6 + 9) = 90$. Тем самым мы доказали, что решение указанного уравнения существует.

Теперь покажем, что другого натурального решения нет. Действительно, при увеличении значения x оба множителя в левой части увеличиваются, а при уменьшении x вплоть до значения $x = 1$ оба множителя уменьшаются. В обоих случаях произведение будет отлично от 90.

Значит, уравнение $x(x + 9) = 90$, где $x \in N$, имеет единственное решение, что и требовалось доказать.

Алгоритм доказательства методом проб и ошибок

1) Подобрать конкретные объекты с заданными свойствами.
2) Показать, что других объектов, удовлетворяющих этим свойствам, нет.

Отметим, что в математике часто требуется доказывать утверждения о существовании объекта с заданными свойствами. Как мы уже знаем, для доказательства таких утверждений достаточно предъявить хотя бы один удовлетворяющий условию объект. В этом случае нет необходимости доказывать, что других таких объектов не существует.

Задача 2а.

Доказать, что существует решение уравнения $x(x + 9) = 90$.

Доказательство:

Возьмем $x = 6$, тогда $6 \cdot (6 + 9) = 90$. Тем самым мы доказали, что решение указанного уравнения существует, что и требовалось доказать.

Доказательство существования, при котором предъявляется объект с указанными свойствами, называется *прямым*.

Косвенные доказательства

Иногда предъявить требуемый объект сложнее, чем доказать его существование. Если при доказательстве существования объект не указывается, то такое доказательство называется *косвенным*.

С косвенными доказательствами мы уже с вами встречались, но не выделяли их в отдельную группу.

Задача 3.

В школе 370 учеников. Докажите, что существуют хотя бы два ученика, справляющие день рождения в один и тот же день года.

Доказательство:

В обыкновенном году 365 дней, а в високосном – 366 дней. В школе всего 370 учеников. Значит, у всех у них не могут быть дни рождения в разные дни, так как $370 > 366$. Поэтому как минимум у двух учеников дни рождения совпадают, что и требовалось доказать.

Одним из способов косвенного доказательства, получившим широкое распространение, является так называемое **доказательство методом от противного**. Суть его состоит в следующем. Истинность утверждения A доказывают тем, что показывают ложность утверждения $\neg A$ (отрицание A). Дело в том, что по закону исключенного третьего из двух утверждений A и $\neg A$ одно истинно, а другое – ложно. Значит, если в результате предположения о том, что $\neg A$ истинно, мы приходим к противоречию (так называемому «абсурду») или к выводу об истинности заведомо ложного утверждения, то тем самым мы доказываем истинность исходного утверждения.

Задача 4.

Докажите, что не существует наибольшего четного числа.

Доказательство:

Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что, наоборот, существует наибольшее четное число n. Тогда всякое другое четное число должно быть меньше n. Однако, прибавив 2 к числу n, получим четное число $n + 2$, большее, чем n.

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение о существовании наибольшего четного числа ложно. Значит, наибольшего четного числа не существует, что и требовалось доказать.

Алгоритм доказательства методом от противного

1) Предположить, что доказываемое утверждение неверно.

2) Исходя из этого предположения либо получить противоречие, либо прийти к выводу об истинности заведомо ложного утверждения.

3) Сформулировать вывод о том, что сделанное предположение неверно, а значит, верно доказываемое утверждение.

Метод доказательства математических теорем от противного весьма эффективен и очень распространен. Чаще всего он используется для доказательства того, что объекта с заданными свойствами не существует. Так, упомянутая выше великая теорема Ферма была доказана с использованием именно такого метода.

К **53** Постройте отрицания следующих высказываний. Определите истинность данных высказываний и их отрицаний.

а) Сумма двух чисел не зависит от порядка слагаемых.
б) Число 0 является натуральным числом.
в) Разность двух натуральных чисел всегда число натуральное.
г) Частное двух целых чисел a и b может быть целым числом.
д) Дробь $\frac{2}{5}$ означает, что целое разделили на 2 равные части и взяли 5 таких частей.
е) Все правильные дроби больше или равны 1.
ж) Правильная дробь всегда меньше неправильной.
з) Модуль числа может быть отрицательным.

54 Проведите доказательство косвенным методом:

а) В гостинице 124 номера, в которых живут 250 человек. Докажите, что есть хотя бы один номер, в котором живет не менее 3 человек.

б) Население Земли на 1 июля 2009 года составляло 6 786 167 712 человек. Считая, что на Земле нет людей, возраст которых более 200 лет, докажите, что найдутся по крайней мере 2 человека, которые родились в одну и ту же секунду.

55 Докажите следующие утверждения:

а) Не существует наибольшего нечетного числа.

б) Существует бесконечно много натуральных чисел вида $15n + 7$, где $n \in N$.

в) Не существует натурального числа, которое при делении на 18 дает остаток 5, а при делении на 27 дает остаток 3.

56 Докажите прямым и косвенным методом:

а) Равенство $n(n + 1) = 35\ 419$ неверно при любом натуральном n.

б) Равенство $2m(m + 1) = 37\ 582$ неверно при любом $m \in N$.

57 Используя метод доказательства от противного, докажите:

а) При любых натуральных a и b число 15 не может быть корнем уравнения $ax^2 + bx + 48 = 0$.

б) Число 3 не может быть корнем уравнения $ax^3 + bx^2 + x + 9 = 0$ при любых натуральных a и b.

П **58** Сформулируйте утверждения, обратные к данным, и определите истинность прямых и обратных утверждений. Найдите высказывания, для которых истинны как прямое, так и обратное утверждение. Вспомните, как называются такие высказывания.

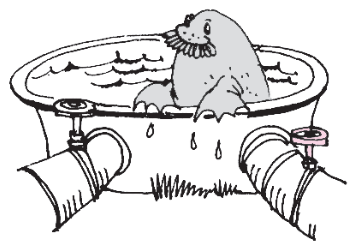
а) Если произведение двух натуральных чисел делится на 7, то хотя бы одно из этих чисел делится на 7.
б) Если произведение двух натуральных чисел делится на 15, то хотя бы одно из этих чисел делится на 15.
в) Если натуральное число делится на 2, то оно оканчивается нулем.
г) Если натуральное число оканчивается на 5 или на 0, то оно делится на 5.
д) Если сумма цифр натурального числа делится на 9, то оно делится на 3.

е) Если натуральное число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9.
ж) Если квадрат натурального числа делится на 4, то и само число делится на 4.
з) Если квадрат натурального числа делится на 5, то и само число делится на 5.

59 Решите задачу:

а) Телефонная станция получила заказ на прокладку кабеля и подключение новых телефонных номеров. Один телефонист может выполнить этот заказ за 37,5 часа, а другой может выполнить 5% заказа за 2,5 часа. Сколько времени потребуется этим двум телефонистам для выполнения всего заказа, если они будут работать вместе с указанной производительностью?

б) Для наполнения бассейна используются две трубы. Через первую трубу пустой бассейн наполняется за 15 часов, а через вторую – за 0,8 этого времени. За какое минимальное время можно наполнить пустой бассейн?



в) На автомобильном заводе работают 72 станка. Они выполняют дневное производственное задание за 10 часов. Сколько станков нужно добавить, чтобы выполнить эту же работу за 8 часов? Считать, что все станки работают с одинаковой производительностью.

г) На молочном заводе работают 210 рабочих. Профсоюз рабочих принял решение сократить рабочий день с 8 до 7 часов. Сколько рабочих необходимо будет принять на завод, для того чтобы сохранить неизменным ежедневный выпуск продукции? Считать, что все рабочие работают с одинаковой производительностью.

60 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

а) в килограммы:
0,057 т + 6,43 кг + 870 г – 0,003 ц;

б) в сантиметры:
4,8 м + 317,2 мм – 4,72 см – 2,3 дм;

в) в часы:
30 мин + 1 сутки – 3,5 часа + 2700 с;

г) в рубли:
5,2 тыс. р. – 500 коп. + 38 р. – 3 тыс. р.

61 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $36abc : 9$; б) $7\frac{1}{2}ax : 3$; в) $3a : a$; г) $6b : \frac{2}{3}b$; д) $\frac{39abc}{13ac}$; е) $\frac{76abxy}{18aby}$; ж) $\frac{84a^2nx}{7ax}$; з) $\frac{6{,}25pq^2r}{5prx}$.

Д **62** Проведите доказательство косвенным методом:

1) Шесть рыбаков поймали вместе 14 рыб. Докажите, что хотя бы два рыбака поймали рыб поровну.

2) В классе 25 учеников. Докажите, что есть такой месяц в году, когда день рождения справляют не менее 3 учеников.

3) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих вид $4k + 1$, где $k \in N$.

63 Используя метод доказательства от противного, докажите, что при любых натуральных a и b число 7 не может быть корнем уравнения $ax^2 + bx + 5 = 0$.

64 Сформулируйте утверждения, обратные к данным, и определите истинность прямых и обратных утверждений. Найдите равносильные утверждения.

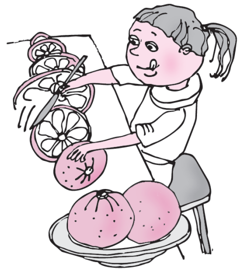
а) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

б) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$.

в) Если число оканчивается на одну из цифр 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на 2.

65 Землеройная машина за 8 часов работы вырывает канаву шириной 30 см, глубиной 3 м и длиной 6 км. Скольких землекопов заменяет такая машина, если один землекоп роет канаву с производительностью 0,5 м^3 земли в час?

66 Антон и Ксюша получили заказ на выпечку пончиков. Работая вместе, они могут выполнить этот заказ за 1 ч 20 мин. Ксюша может выполнить этот заказ полностью в 2 раза быстрее Антона. Какое время потребуется каждому из них в отдельности на выполнение этого заказа?



67 Сравните величины:

$A = 4{,}3$ м $-$ $3{,}5$ см $+$ $1{,}44$ м : $3{,}6$ $+$ $3{,}6$ дм : $1{,}44 \cdot (0{,}1 - 0{,}02)$;

$B = 1{,}35$ дм : 27 $+$ $6{,}02$ м $-$ $5{,}9$ см $+$ $0{,}4$ мм : $2{,}5 \cdot (4{,}2 - 1{,}075)$;

$C = 4{,}735$ м : $0{,}5$ $+$ $14{,}95$ дм : $1{,}3$ $+$ $2{,}121$ мм : $0{,}7$.

C **68*** Докажите, что сумма n первых нечетных чисел равна n^2.

3. Логический вывод

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, – это быть точным, второе – быть ясным и, насколько можно, простым.

Лазар Карно (1753–1823),
французский государственный деятель и ученый

Обсуждая принципы построения математических теорий и методы доказательств в математике, мы использовали термины «логический вывод», «логические рассуждения». Мы говорили о том, что доказательство математических утверждений, по сути, состоит из последовательности правильных выводов. Но как узнать, какие выводы правильные, а какие – нет? Какие из рассуждений «логически следуют» из уже известных?

Законы конструирования правильных рассуждений изучает специальная наука – ***логика***. Математическая логика, как и любая математическая теория, не опирается на такие аргументы, как наблюдения, конкретный случай, чьи-то ощущения. Она выстроена на базе системы основных понятий и аксиом, описывает общие законы и тем самым создает возможность для согласования различных мнений и взглядов. Поэтому законы логики – это принципы, которыми надлежит руководствоваться при проведении рассуждений в самых разнообразных науках и в жизни.

Вопросы логики интересовали ученых еще в древности. Так, великий древнегреческий философ Аристотель и его ученики начиная с IV века до н.э. исследовали законы конструирования логически правильных суждений.

Привести примеры таких суждений можно, опираясь на простые ситуации из повседневной жизни, где, как и в математике, мы постоянно рассуждаем и делаем разные выводы. Например, из того, что некоторую женщину зовут Татьяна Ивановна, *следует*, что ее отца зовут Иван. Данное рассуждение, как вы уже знаете, можно записать в форме $A \Rightarrow B$, где A (условие) – это высказывание «женщину зовут Татьяна Ивановна», а B (заключение) – высказывание «отца этой женщины зовут Иван». С другой стороны, если отца женщины зовут Иван, то из этого вовсе *не следует*, что она именно Татьяна Ивановна, – ее могут звать также и Мария Ивановна, и Елена Ивановна. На языке логики эта ситуация описывается формой $B \nRightarrow A$, где B становится условием, а A – заключением.

Примером хорошо известной нам логической формы, которую мы постоянно используем при проведении доказательств, является форма: «Если A – истинно и $A \Rightarrow B$, то B – истинно». Другими словами, если выполняется условие A и известно, что верно логическое следование $A \Rightarrow B$, то будет выполняться и B. Например:

$$\boxed{\begin{array}{l} A \\ \underline{A \Rightarrow B} \\ B \end{array}}$$

В числе 258 сумма цифр делится на 3 – **истинно**.
<u>Сумма цифр числа делится на 3 ⇒ Число делится на 3</u>.
Число 258 делится на 3 – **истинно**.

Рассмотрим еще несколько способов обобщенного описания рассуждений на языке логики. Проанализируем два похожих на первый взгляд рассуждения.

1) Все Олины кубики – деревянные. Все деревянные предметы не тонут в воде. Следовательно, все Олины кубики не тонут в воде.

2) Все Олины кубики не тонут в воде. Все деревянные предметы не тонут в воде. Следовательно, все Олины кубики – деревянные.

В примере (1) проведено правильное рассуждение, а в примере (2) – нет. Действительно, из того, что все кубики не тонут в воде, не следует, что все они деревянные. Например, они могут быть пластмассовыми. Поэтому, сделав вывод в примере (2), мы совершили логическую ошибку.

Разберемся в том, почему произошла ошибка. Для этого обозначим буквой A высказывание «Кубик принадлежит Оле», буквой B – высказывание «Предмет деревянный», а буквой C – «Предмет не тонет в воде». Тогда проведенные рассуждения можно записать в следующих формах:

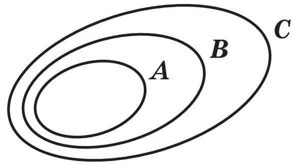
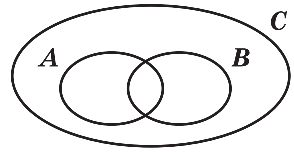
1) $\boxed{\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{B \Rightarrow C} \\ A \Rightarrow C \end{array}}$

(Если $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$)

2) $\boxed{\begin{array}{l} A \Rightarrow C \\ \underline{B \Rightarrow C} \\ A \Rightarrow B \end{array}}$

(Если $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow B$)

Проверить правильность данных рассуждений можно, используя язык теории множеств. Пусть A – множество Олиных кубиков, B – множество деревянных предметов, а C – множество предметов, которые не тонут в воде. Тогда рассуждения (1) и (2) можно перевести на язык теории множеств следующим образом:

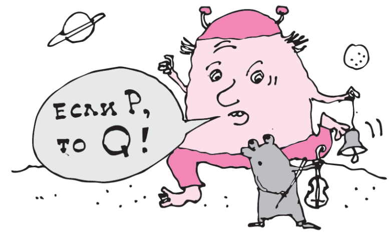
	Перевод рассуждения на язык теории множеств	Диаграмма Эйлера–Венна
1	Множество A является подмножеством множества B. Множество B является подмножеством множества C. Следовательно, множество A является подмножеством множества C. (Истинно.)	 $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
2	Множество A является подмножеством множества C. Множество B является подмножеством множества C. Следовательно, множество A является подмножеством множества B. (Ложно.)	 $A \subset C, B \subset C \not\Rightarrow A \subset B$

Как видите, для того, чтобы проверить правильность рассуждения, мы можем использовать также уже известные нам диаграммы Эйлера–Венна. И хотя этот способ не является строгим доказательством, он дает наглядное представление о сделанном высказывании и позволяет разобраться в правильности того или иного рассуждения.

Итак, мы показали, что рассуждения вида:

«Если $A \Rightarrow B$ и A – истинно, то B – истинно»;

«Если $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$»



построены логически грамотно и являются верными логическими выводами.

Ясно, что цепочку следований мы можем продолжить и дальше, например:

$$\text{Если } A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ C \Rightarrow D,\ D \Rightarrow E, \text{ то } A \Rightarrow E.$$

Как мы уже говорили, именно такие логические цепочки и лежат в основе математических теорий, метод построения которых мы обсуждали в пункте 1.2.1.

К **69** В спортивном клубе в секциях аэробики и плавания занимаются 58 человек. Аэробикой занимаются 27 человек, а плаванием – 39 человек. В каком случае это возможно?

70 а) Пусть A – множество натуральных решений неравенства $4{,}5 < a \leqslant 8$, а B – множество натуральных решений неравенства $-1{,}5 \leqslant b < 7$. Запишите множества A и B с помощью фигурных скобок и постройте для них диаграмму Эйлера–Венна. Найдите объединение и пересечение множеств A и B.

б) Выполните задание а) для случая, когда A и B – множества целых решений этих же неравенств.

71 Нарисуйте диаграммы Эйлера–Венна, иллюстрирующие высказывания:

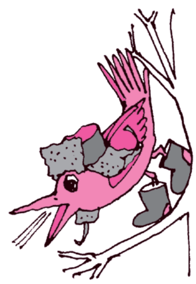
а) Все кошки являются животными.
б) Некоторые кошки – рыжие.
в) Ни одна кошка не является птицей.
г) Некоторые кошки не умеют плавать.

72 Определите правильность следующих выводов:

а) Если некоторые четвероногие животные лают, то некоторые лающие животные – четвероногие.
б) Если некоторые фрукты сладкие, то некоторые сладкие предметы – фрукты.
в) Если ни одна птица не рычит, то ни одно рычащее животное – не птица.
г) Если ни один школьник не является студентом, то ни один студент не является школьником.
д) Если все цветы красивые и некоторые красивые предметы – красные, то некоторые красные предметы – цветы.
е) Если все игры – компьютерные и некоторые компьютерные игры – не стратегии, значит, некоторые игры – не стратегии.
ж) Если ни один слон не крокодил, а некоторые крокодилы живут в Африке, значит, некоторые живущие в Африке – не слоны.
з) Если все семиклассники любят читать и ни один семиклассник не библиотекарь, значит, все любящие читать – не библиотекари.

73 Проверьте правильность следующих выводов с помощью диаграмм Эйлера–Венна. В каких случаях неправильно построенные выводы привели к истинным заключениям? К ложным заключениям? Можно ли считать неверные выводы доказательством или опровержением данных утверждений?

а) Если все тигры являются животными, то некоторые животные не являются тиграми.
б) Если все попугаи говорят и все попугаи – птицы, то все птицы говорят.
в) Если все птицы говорят и все попугаи говорят, то все попугаи – птицы.
г) Если все птицы говорят и все попугаи – птицы, то все попугаи говорят.
д) Если ни один тигр не летает, то ни один летающий предмет – не тигр.
е) Если некоторые попугаи говорят и все попугаи – птицы, то некоторые птицы говорят.
ж) Если все тигры – хищники и ни один тигр не поет, то некоторые хищники не поют.
з) Если ни один дельфин не является тигром и все дельфины живут в море, то ни один тигр не живет в море.



74 Правилен ли логический вывод, имеющий форму:

а) Если некоторые A являются B, то некоторые B являются A.
б) Если ни одно A не является B, то ни одно B не является A.
в) Все A являются B, и некоторые B являются C, – значит, некоторые C являются A.
г) Все A являются B, и некоторые B не являются C, – значит, некоторые A не являются C.

П **75** Постройте отрицания данных высказываний. Определите истинность исходного высказывания и его отрицания:

а) Если вы живете в Австралии, то вы живете южнее Москвы.

б) Если вам больше 2 лет, то вы учитесь в 7 классе.

в) Если $x = 5$, то $x - 5 = 0$.

г) Если число делится на 10, то оно делится на 5.

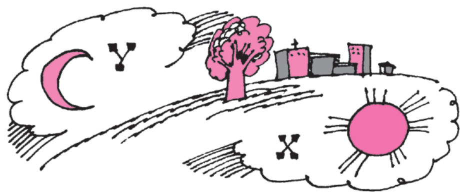
д) Если $a < 0$, то $|a| < 0$.

е) Если $ab = 1$, то $a < b$.

ж) Если $a + b = 0$, то $a = -b$.

з) Если из обеих частей равенства вычесть одно и то же число, то равенство не нарушится.

76 Приведите подобные слагаемые:



а) $2xy + 0{,}5xy + (xy) : 6 + (xy) : 3 + xy$;

б) $a + 2b + 2a + 4b + 3a + 6b$;

в) $8\frac{3}{11}x + 0{,}66y + 5\frac{2}{11}x + 2{,}34y$;

г) $a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b)$;

д) $17x - (3y + z) + (5z - x) - (2x - 8y)$;

е) $67x - (32y + 4z - 8x) - (15x - 6y + 18z) - (x - 4y - 5z)$;

ж) $x + (x - y) + (x - 0{,}2y) + (x - 0{,}4y) + (x - 0{,}8y) + (x - 1{,}6y)$;

з) $c - (c - d) - (c - \frac{d}{2}) - (c - \frac{d}{4}) - (c - \frac{d}{8}) - (c - \frac{d}{16}) + \frac{d}{16}$.

77 Найдите значение выражения:

а) $4x^2 - 5x + 7$ при $x = -6$;

б) $5y^3 + 15 - 7y$ при $y = -3$;

в) $2z^5 - 14z^4 + 6z^3 - 7z^2 + 9$ при $z = -2$;

г) $(6k^6 + 14k^4) : (3k^5 + 5k^3 - 3k)$ при $k = -1$.

78 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Две обувные фабрики, работая вместе, выполнили некоторый заказ на пошив партии обуви за 20 дней. Зная, что производительность второй фабрики составляет 40% от производительности первой, определить, за сколько дней смогла бы выполнить этот заказ вторая фабрика, работая самостоятельно.

б) На заводе по производству фруктовых напитков резервуар с соком наполняется через две трубы. Через первую трубу пустой резервуар наполняется за 6 часов, а через обе трубы – за 4 часа. За сколько часов будет наполнен этот резервуар, если он будет наполняться через одну вторую трубу?

в) На кофейный комбинат прибыло два вагона с зеленым кофе. В каждом вагоне находилось 60 т зеленого кофе. Выгрузка его была поручена нескольким грузчикам. Случилось так, что половина грузчиков заболели, поэтому каждому из оставшихся пришлось выгрузить на 10 тонн больше кофе. Сколько грузчиков работало на выгрузке зеленого кофе?

Д **79** Нарисуйте диаграммы Эйлера–Венна, соответствующие высказываниям:

а) Все A являются B.

б) Некоторые A являются B.

в) Некоторые A не являются B.

г) Все A не являются B.

80 Проверьте правильность следующих выводов, используя диаграммы Эйлера–Венна:

а) Все семиклассники родились в 1997 году. Коля – семиклассник. Значит, Коля родился в 1997 году.

б) Все семиклассники родились в 1997 году. Петя не родился в 1997 году. Значит, Петя не семиклассник.

в) Все семиклассники родились в 1997 году. Саша не семиклассник. Значит, Саша родился не в 1997 году.

г) Все семиклассники родились в 1997 году. Миша родился в 1997 году. Значит, Миша семиклассник.

81 Определите правильность следующих выводов:

а) Если некоторые девочки любят мороженое, то некоторые любящие мороженое – девочки.

б) Если ни один мальчик не обидит девочку, то ни один обидчик девочки – не мальчик.

в) Если все семиклассники – отличники и некоторые отличники – девочки, то некоторые девочки – семиклассницы.

г) Если ни один мальчик не любит играть в куклы и некоторые любящие играть в куклы любят ходить в кино, значит, некоторые мальчики не любят ходить в кино.

82 Найдите значение выражения:

а) $10x^2 - x$ при $x = 8$;

б) $7c^5 - 10c^4 + 5c^2 - 1$ при $c = 2$.

83 а) Найдите значение выражения.

Л $12 : (4 : 4) + (58 - 58 \cdot 0) \cdot (797 - 796)$;

Х $(0{,}008 + 0{,}992)(5{,}06 - 1{,}4 \cdot 0)$;

Л $(0{,}93 - 0{,}805) : (0{,}93 + 0{,}07) + (53{,}7 - 49) \cdot 0$;

Е $(50\,000 - 1397{,}3) \cdot 78 \cdot (0 : 7) - 1{,}375 \cdot (47 - 46)$;

Р $1{,}35 \cdot 45{,}7 - 1{,}35 \cdot 44{,}7 + (552 - 23 \cdot 24) \cdot (-59{,}98)$;

Л $(1975{,}6 + 8024{,}4) : 100 \cdot (13{,}7 \cdot 39{,}9 - 39{,}8 \cdot 13{,}7)$;

О $(605{,}125 : 12{,}5 - 36{,}8706 : 0{,}87 - 0{,}0012) \cdot (1085 - 35 \cdot 31)$;

А $(90{,}09 \cdot 5 - 50{,}05 \cdot 9)^7 - 3{,}48 \cdot (73 - 8 \cdot 9)$.

б) Сопоставьте ответы соответствующим буквам – и вы узнаете, как называется одноклеточная водоросль, широко используемая для очистки воздуха в космических кораблях.

5,06	70	0	1,35	–1,375	0,125	137	–3,48