

Глава 5

Введение в теорию функций

§ 1. Понятие функции и ее практическое применение

1. Функциональная зависимость между величинами



*Понятие функции такое же основное
и первоначальное, как понятие множества.*

Феликс Хаусдорф (1868–1942),
немецкий математик

В обычной жизни мы постоянно сталкиваемся с разнообразными величинами: температурой, стоимостью, массой, количеством предметов, длиной, площадью, объемом и т. д. При этом, рассматривая некоторую конкретную ситуацию, мы можем обнаружить, что одни величины меняются, а другие остаются неизменными.

Мы уже знаем, что величина, которая может принимать различные числовые значения, называется **переменной величиной**. Так, например, если вы решили проехать на автобусе несколько остановок, то скорость автобуса, масса бензина в его баке и количество пассажиров будут переменными величинами, а количество его колес и окон в течение поездки не изменится, останется постоянным.

Среди переменных величин различают *независимые* и *зависимые* величины. Например, длина пути, проходимого вами со скоростью 50 м/мин, зависит от времени прогулки, которое вы выберете. При этом она однозначно определяется выбранным временем: за 5 мин вы пройдете 250 м, за 12 мин – 600 м, за 20 мин – 1000 м и т. д.

Похожая ситуация возникнет, если вы захотите купить несколько одинаковых тетрадей или распечатать несколько страниц текста на принтере. Во всех этих примерах мы можем точно и однозначно находить конкретные значения переменных величин с помощью изученных нами формул – в данном случае формул пути, стоимости, работы.

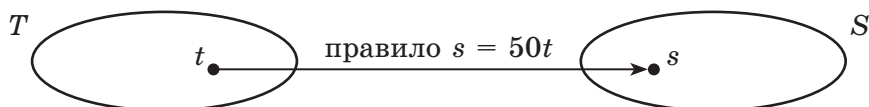
Зависимости между величинами, которые позволяют **однозначно** определять значение искомой величины, занимают среди всех других зависимостей особое место, так как помогают, например, осуществлять планирование, давать прогноз поведения различных величин в тех или иных условиях. Ведь даже в быту нам важно уметь рассчитать стоимость покупки или время, необходимое на ту или иную работу. Что же касается современного производства, то именно точность прогнозирования во многом определяет его результативность и конкурентоспособность.

В связи с особой значимостью таких зависимостей возникает необходимость изучать их отдельно от всех остальных. Для того чтобы выделить их среди всех других зависимостей, их называли **функциональными зависимостями**, или **функциями**.

Прежде чем дать определение функции, вспомним предыдущий пример. Как мы определяли длину пути s м, пройденного за данное время t мин со скоростью 50 м/мин? Мы брали некоторое конкретное значение t мин (5 мин, 12 мин, 20 мин и т. д.), затем, пользуясь правилом $s = 50t$, умножали t мин на 50 м/мин и получали искомое значение s м (250 м, 600 м, 1000 м и т. д.).

Возможные значения переменной t в мин образуют некоторое множество T . При этом t не может принимать любые значения. Так, например, прогулка не может длиться 1 000 000 мин или (-24) мин. Если же она длилась, например, 30 мин, то множество T можно задать следующим образом: $T = \{t \in \mathbb{Q}: 0 \leq t \leq 30\}$. Переменная s в метрах при этом принимает значения из некоторого множества S : $S = \{s \in \mathbb{Q}: 0 \leq s \leq 1500\}$.

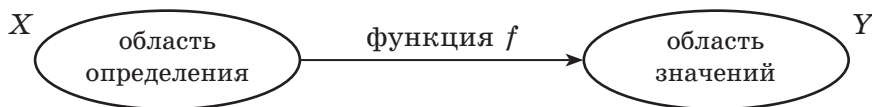
Данную зависимость можно схематически представить следующим образом:



где, согласно правилу $s = 50t$, каждому элементу t из множества T ставится в соответствие *единственный* элемент s из множества S .

Таким образом, мы приходим к следующему определению понятия функции, где независимая переменная обозначается буквой x , зависимая – буквой y , а правило соответствия – буквой f .

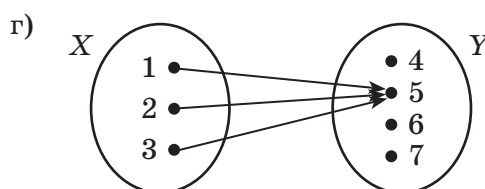
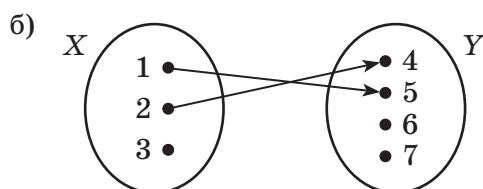
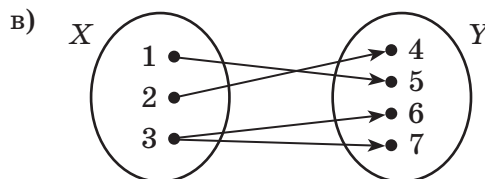
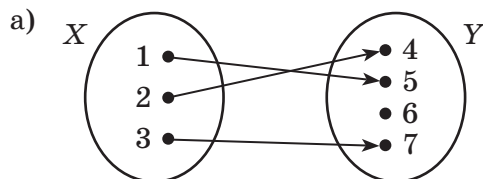
Определение. Функцией называется правило f , по которому *каждому* элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие *единственный* элемент y из множества Y . Множество X при этом называется областью определения, а множество Y – областью значений данной функции.



Итак, отличительной особенностью функциональной зависимости (функции) является то, что для каждого элемента из ее области определения 1) *существует* и 2) *единственный* соответствующий элемент из области ее значений. Если хотя бы одно из этих двух требований не выполняется, то зависимость не является функциональной.

Разберемся в этом на конкретных примерах.

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$ и зависимость между ними задается следующими схемами, описывающими, какой элемент множества Y соответствует тому или иному элементу множества X .



Исходя из определения понятия функции, мы можем заключить, что зависимости, заданные схемами a и $г$, являются функциональными, а схемами $б$ и $в$ – нет. Действительно, в случаях a и $г$ для каждого элемента из множества X *существует* и *единственный* соответствующий элемент из множества Y . В случае же $б$ числу 3 из множества X не сопоставлено ни одного элемента из множества Y (то есть нарушено требование *существования* соответствующего элемента), а в случае $в$ числу 3 соответствуют сразу два элемента, 6 и 7, из множества Y (то есть нарушено требование *единственности* соответствующего элемента).

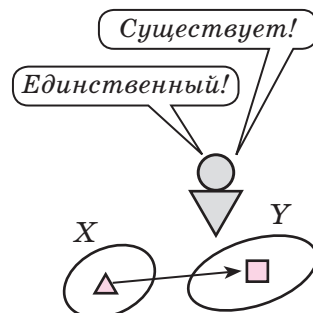
Таким образом, для того, чтобы определить, является ли данная зависимость функцией, надо:

1. Указать множество X , являющееся областью определения.

2. Указать множество Y , являющееся областью значений.

3. Убедиться в том, что каждому элементу из области определения X поставлен в соответствие некоторый элемент из области значений Y (*существование*).

4. Убедиться в том, что в области определения X нет элементов, которым поставлено в соответствие более одного элемента из области значений Y (*единственность*).



К

1

Используя данную формулу зависимости между p и q , вычислите значения p для данных q :

а) $p = 3q$, где $q = 1; 3; 5; 3$;

б) $p = \frac{1}{2}q$, где $q = 1; 4; 0; -4$;

в) $p = \frac{4}{q}$, где $q = 1; -1; 2; -2$;

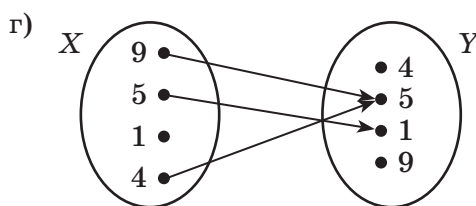
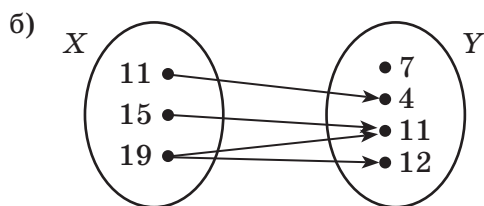
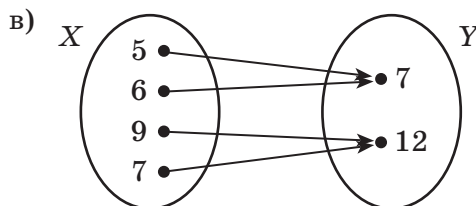
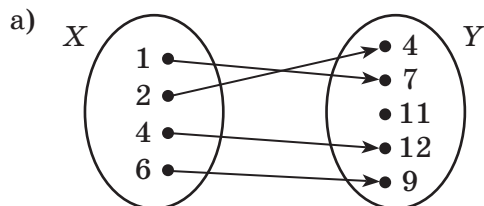
г) $p = 5q^2$, где $q = 1; -1; 0; 2$;

д) $p = 3 + q$, где $q = 0; -3; 1; 3$;

е) $p = 7$, где $q = 1; -5; 7; -8$.

2

1) Зависимости между множествами X и Y заданы приведенными ниже схемами. Определите, какие из указанных зависимостей позволяют для *каждого* элемента из множества X находить *единственный* соответствующий элемент из множества Y . Обоснуйте свой ответ.



2) Как вы думаете, где используются такие зависимости? Почему важно выделять и специально изучать подобные зависимости? Сравните свой вывод с выводом на стр. 3 учебника.

3) Предложите свое название для зависимостей данного вида и дайте свой вариант их определения. Сравните данные вами название и определение с теми, которые приведены на стр. 3–4 учебника.

4) Исходя из определения понятия функции, постройте алгоритм, позволяющий установить, является ли данная зависимость функцией, или нет. Сравните его с алгоритмом, приведенным на стр. 5 учебника.

3 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функциональной.

а)

x	-2	-1	0	1	3
y	1	2	3	4	5

в)

x	0	1	2	3	5
y	-3	-1	-3	-1	-3

б)

x	5	-3	5	4	3
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

г)

x	3	5	7	9	11
y	4	4	5	5	6

4 Задайте зависимость объема куба V от длины его ребра a . Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $a = 3$ см; б) $a = 2$ м; в) $a = \frac{1}{2}$ дм; г) $a = 10$ мм; д) $a = \frac{1}{4}$ м.

5 Задайте зависимость пройденного с постоянной скоростью 5 км/ч пути S (в км) от времени движения t (в часах). Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

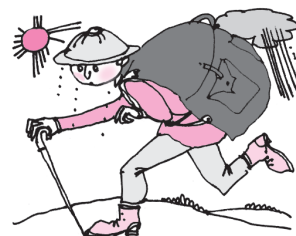
а) $t = 3$ ч; б) $t = 15$ мин; в) $t = 1$ ч 20 мин; г) $t = 3$ ч 30 мин.

6 Зависимость задали следующим образом: каждому целому числу поставили в соответствие его остаток при делении на целое число a . Определите, является ли данная зависимость функциональной. Укажите область определения и область значений этой зависимости для указанных значений a .

а) $a = 5$; б) $a = 8$; в) $a = 11$; г) $a = -3$; д) $a = -5$.

7 а) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 + 6x + 12$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно 3?

б) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 2$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -6?



π

8

Запишите высказывания на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

- а) Некоторые целые числа при делении на 6 дают остаток (-1) .
- б) Все целые числа при делении на 17 дают остаток 9.
- в) Каждое целое число делится само на себя.
- г) Можно найти такое целое число, делителем которого является 7.
- д) Все целые числа, делящиеся на 5, составные.
- е) Есть четные числа, кратные 7 и 5.
- ж) Все целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2, кратны 5.
- з) Существуют целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 7 дают остаток 5.

9

- а) В доме 190 квартир, в которых живут 572 человека. Докажите, что в этом доме есть хотя бы одна квартира, в которой живут не менее 4 человек.
- б) Семь покупателей купили 20 пирожных. Докажите, что хотя бы два покупателя купили одинаковое количество пирожных.

10

Решите уравнение:

- а) $5 - (3,25x - 4,6) = 5x - (5 - 0,4x) + 0,75x - (2x - 9) + 0,6x$;
- б) $5,7y + (7,2 - 0,9y) = 34,15 + 3,45y - (18,2 - 6,3y) - 3,8$;
- в) $1,2a - 5,3 = 0,5a - (0,75a - (5,4 - 1,85a)) - 8,7a + 7,3$;
- г) $7,1 - (6,9b - 0,9) - 1,4 - (5,7b + 3,9) = 34,5 + 3,4b - 7,8$.



11

Постройте математическую модель и решите задачу:

- а) Сумма двух натуральных чисел равна 36. Первое число при делении на 11 дает остаток 6, а второе число при делении на 11 дает остаток 8. Найдите эти числа.
- б) Величина первого угла треугольника на 10° больше величины второго и на 10° меньше величины третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.
- в) Длина ломаной $ABCD$ равна 13,5 см. Известно, что AB равно $\frac{1}{6}$ расстояния между ее началом и концом, BC на 5,1 см больше AB , а CD на 3,6 см меньше BC . Найдите длину звена AB этой ломаной.

12

Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{4}{5}abc^2 - \frac{5}{8}ab^2c + 5abc\right) - \left(\frac{14}{25}abc^2 - \frac{13}{32}ab^2c + 3abc\right)$;
- б) $\left(\frac{2}{7}xy^2 - \frac{4}{15}x^2y + \frac{5}{12}x^2yz\right) - \left(\frac{3}{14}xy^2 - \frac{2}{5}x^2y + \frac{1}{4}x^2yz\right)$;
- в) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{5}c\right) + \left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{9}b - \frac{3}{25}c\right) - \left(\frac{5}{8}a - \frac{4}{27}b + \frac{9}{125}c\right)$;
- г) $\left(3\frac{1}{6}mn - 2\frac{1}{3}m\right) - \left(\frac{2}{9}mn - 5\frac{1}{15}m\right) - \left(3\frac{5}{18}mn + 3\frac{8}{45}m\right)$.



13 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :

- а) $a = -56\ 353$, $b = -3$; г) $a = -397\ 542$, $b = 9$; ж) $a = 415\ 644$, $b = -8$;
 б) $a = -516\ 972$, $b = 3$; д) $a = -914\ 679$, $b = -9$; з) $a = 843\ 512$, $b = -12$;
 в) $a = 2\ 578\ 312$, $b = -6$; е) $a = -921\ 432$, $b = -4$; и) $a = -965\ 115$, $b = -15$.

14 Какое выражение нужно подставить вместо A , чтобы равенство превратилось в тождество?

- а) $3^{17} \cdot 3^{54} = A$; г) $A \cdot (9^8)^5 = 9^{51}$;
 б) $A : 8^{23} = 8^{35}$; д) $(7^6)^9 : A = 7^{48}$;
 в) $5^{34} \cdot A = 5^{51}$; е) $A : (4^8)^9 = 4^5$.

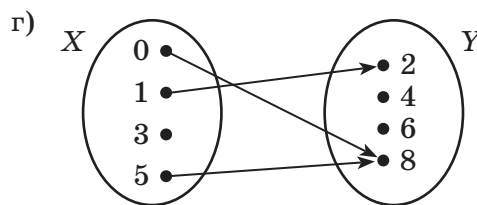
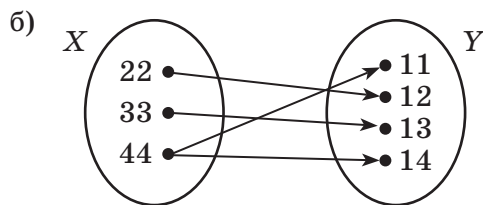
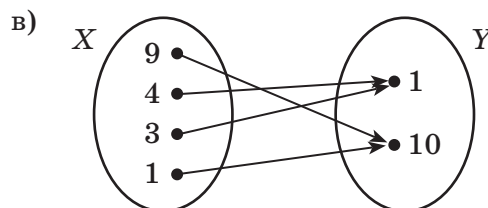
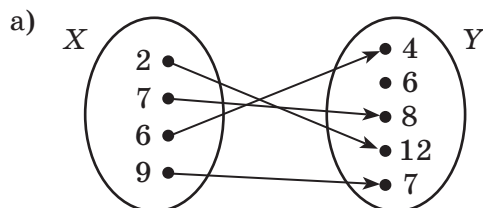


15 Докажите, что:

- а) При любых натуральных a и b число 7 не может быть корнем уравнения $2ax^2 + bx + 4 = 0$.
 б) Число 12 не может быть корнем уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 4x + 7 = 0$ при любых натуральных a и b .

Д

16 Зависимости между множествами X и Y заданы приведенными ниже схемами. Определите, какие из указанных зависимостей являются функциональными, и обоснуйте свой ответ.



17 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функцией.

а)

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

г)

x	1	3	5	7	9
y	-2	-2	-2	-2	-2

б)

x	1	2	1	2	1
y	2	4	6	8	10

д)

x	-2	-2	-2	-2	-2
y	1	3	5	7	9

в)

x	1	3	5	8	9
y	3	3	5	5	0

е)

x	2	4	0	4	2
y	0	2	4	6	8

18 Задайте зависимость выполненной работы A (в ед.) от времени работы t (в мин), если известно, что производительность равна 20 ед. в мин. Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $t = 10$ мин; б) $t = 2$ ч; в) $t = 90$ с; г) $t = 2$ сут.; д) $t = 1$ ч 20 мин.

19 Задайте зависимость стоимости C (в р.) купленных по цене 30 р. за килограмм яблок от массы покупки p (в кг). Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $p = 5$ кг; б) $p = 500$ г; в) $p = 1$ кг 300 г; г) $p = 2$ кг 800 г.

20 Функцию задали следующим образом: каждому рациональному числу q поставили в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее этого числа. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $q = 3,2$; б) $q = 7,4$; в) $q = 5\frac{1}{2}$; г) $q = -3,3$; д) $q = -5,6$.

21 а) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 + 8x + 21$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно 5?

б) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 3$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -5 ?

22 а) В пончиковой компании Антона и Ксюши 76 магазинов, торгующих пончиками, в которых работают 305 человек. Докажите, что среди этих магазинов есть хотя бы один магазин, в котором работает не менее 5 человек.

б) Восемь экспедиторов пончиковой компании доставили 27 заказов. Докажите, что хотя бы два экспедитора доставили одинаковое количество заказов.

23 Решите уравнение:

а) $6,7 - (6,8x - 0,6) = 6,9x - (1,9x - 5,3) + 0,8x - (2x + 9) + 0,4x$;

б) $4,3y + (6,2 - 1,5y) = 2,3 + 4,4y - (7,2 + 2,3y) - 2,9$.

24 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 55. Первое число при делении на 14 дает остаток 2, а второе число при делении на 14 дает остаток 11. Найдите эти числа.

б) Величина первого угла треугольника на 30° больше второго и на 60° меньше третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.

25 Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{7}klm^2 - \frac{4}{3}kl^2m + 7klm\right) - \left(\frac{3}{21}klm^2 - \frac{4}{9}kl^2m + 5klm\right);$

б) $\left(\frac{1}{7}p + \frac{1}{11}r + \frac{1}{4}q\right) - \left(\frac{2}{7}p - \frac{2}{11}r - \frac{3}{4}q\right) - \left(-\frac{5}{7}p + \frac{4}{11}r + \frac{9}{4}q\right).$

26 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :

а) $a = -78\ 514$, $b = -3$; д) $a = -357\ 615$, $b = -15$;

б) $a = -854\ 328$, $b = 4$; д) $a = 743\ 216$, $b = -8$;

в) $a = -516\ 915$, $b = 9$; е) $a = 493\ 532$, $b = -12$.

27 Какое выражение нужно подставить вместо A , чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $2^{36} \cdot 2^{43} = A$;

в) $4^{28} \cdot A = 4^{35}$;

д) $(5^2)^6 : A = 5^9$;

б) $A : 3^{76} = 3^{29}$;

г) $A \cdot (7^3)^4 = 7^{39}$;

е) $A : (6^7)^{11} = 6^{13}$.

28 Докажите, что:

а) При любых натуральных a и b число 11 не может быть корнем уравнения $ax^2 + 5bx - 9 = 0$.

б) Число 4 не может быть корнем уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 2x + 7 = 0$ при любых натуральных a и b .

в) Ни один из корней уравнения $2ax^3 + 6bx^2 + 15 = 0$ не делится на 6 при любых натуральных a и b .

29 Найдите три числа, дающих при делении на B такие же остатки, как A :

$$A = \frac{\left(9\frac{1}{4} - 7\frac{2}{5}\right) \cdot 25 - 15}{\left(3\frac{1}{8} + 4\frac{3}{20} - 1\frac{5}{48} - 5\frac{2}{5}\right) : 3\frac{1}{12}} + \frac{60 - 40 \cdot \frac{1}{10}}{7 + 1 : \frac{3}{7}};$$

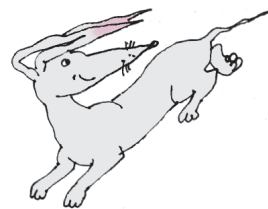
$$B = \frac{\left[\left(\frac{23}{36} + \frac{31}{63}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{21}\right)\right] \cdot 48 : \left(\frac{3}{5} : \frac{7}{8}\right)}{\left(\frac{19}{26} + \frac{14}{39} - \frac{1}{6}\right) \cdot 54\frac{1}{6} : \left(8\frac{4}{7} : \frac{12}{35}\right)}.$$

С

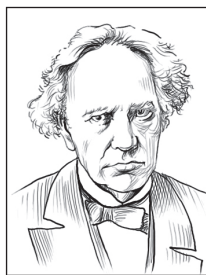
30* В классе 27 учеников. Может ли каждый из них дружить ровно с девятью другими учениками этого класса?

31* Четыре пары супругов играли в боулинг. Диана выиграла три очка, Лиза – два, Ника – четыре, а Анжела – одно. Семен выиграл столько же очков, сколько и его жена, Петр – вдвое больше своей жены, Николай – в три раза больше своей жены, а Константин – в 4 раза больше своей жены. Всего было выиграно 32 очка. Как зовут жену Николая?

32* Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. В лодке могут переправиться через реку либо двое мальчиков, либо один солдат. Смогут ли мальчики помочь солдатам переправиться через реку?



2. Способы задания функции



Числа и функции – не произвольные продукты нашего духа, они существуют вне нас с тем же характером необходимости, как вещи объективной реальности...

Шарль Эрмит (1822–1901),
французский математик

Функция – одно из важнейших понятий математики, и нам важно теперь научиться обозначать функции, а также выяснить, каким образом можно задать функцию.

Как мы уже знаем, для **обозначения функций** пользуются буквами, чаще всего x , y и f . Буквой x обозначают произвольный элемент области определения X , буквой y – соответствующий ему элемент области значений Y , а буквой f – правило, устанавливающее соответствие между x и y .

Поскольку значение y зависит от x , а x мы выбираем произвольно из области определения, то x – это *независимая переменная*, или, как говорят иначе, *аргумент функции*, а y – *зависимая переменная*.

Все три буквы, x , y и f , объединяют единой записью

$$y = f(x),$$

которая читается как «игрек равно эф от икс».

Разумеется, вместо букв x , y и f могут быть использованы любые другие буквы. Например, запись $s = g(t)$ означает, что s является функцией от t и правило зависимости s от t обозначено буквой g .

Функция определена (или *задана*), если нам известно правило соответствия и множество значений переменной, к которому это правило надо применять.

Таким образом, для того, чтобы **задать функцию**, необходимо:

1. Указать ее область определения X .
2. Указать правило f , по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется единственное значение функции y .

Какими же способами может быть задана функция?

Задание функции с помощью словесного описания

Зададим функцию f следующим образом: «всем неотрицательным рациональным числам поставим в соответствие число 1, а всем отрицательным – число (-1) ».

Областью определения этой функции является множество всех рациональных чисел. И каждому из них указанное правило сопоставляет *единственное* число: любому положительному числу и нулю – число 1, а любому отрицательному числу – число (-1) . Например:

$$f(4) = 1 \qquad f(-5) = -1 \qquad f(0) = 1.$$

Таким образом, функция полностью определена. Вместе с тем данный способ задания функции является достаточно громоздким, трудным для восприятия и осознания, а главное – неудобным для последующего исследования функции и работы с ней.

Поэтому возникает необходимость в других способах задания функции.

Табличный способ задания функции

Можно задать функцию, указав все значения независимой переменной и для каждого из них – соответствующее значение зависимой переменной. Такой способ задания функции называется *табличным*.

Пусть областью определения функции f является множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и каждому значению $x \in X$ сопоставлено значение y , указанное в соответствующем столбце таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	-2	3	4	-2	5

Таким образом, для каждого значения $x \in X$ *существует* и *единственное* соответствующее значение y . Например, $f(2) = 3$, а $f(4) = -2$.

Табличный способ задания функции удобен тем, что соответствующие значения x и y можно определить сразу, без дополнительных усилий. Однако при достаточно большом количестве элементов множества X данный способ становится слишком громоздким. А если множество X имеет бесконечное число элементов, то табличный способ не даст полной информации о характере исследуемой зависимости.

Аналитический способ задания функции (с помощью формулы)

Функция $y = \frac{5}{x^2}$ задана формулой, показывающей, как для каждого значения x из области ее определения вычислить соответствующее значение y .

Если область определения явно не указана, то мы будем считать, что функция задана для всех допустимых значений x , то есть тех значений x , при которых указанная формула имеет смысл.

Так как выражение $\frac{5}{x^2}$ имеет смысл для всех x , не равных нулю, то областью определения нашей функции является множество всех известных нам чисел, кроме нуля. И для каждого x из области ее определения *существует* и *единственное* соответствующее значение y , которое мы можем вычислить по формуле, задающей функцию. Например:

$$f(3) = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9} \quad f(-0,5) = \frac{5}{(-0,5)^2} = \frac{5}{0,25} = \frac{5 \cdot 4}{1} = 20.$$

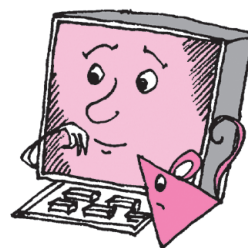
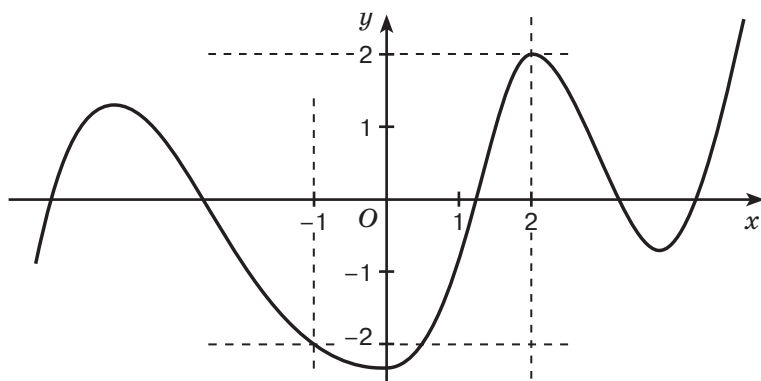
Аналитический способ задания функций очень удобен. Однако зависимость между величинами не всегда может быть задана формулой. В этом случае можно задать функцию графически.

Графический способ задания функции

На практике функция изначально может задаваться некоторым графиком. Например, метеорологические приборы автоматически регистрируют значение температуры в каждый заданный момент времени суток. Результатом их работы являются графики изменения температуры в зависимости от времени.

Графический способ задания функции основан на следующем. На координатной плоскости Oxy для каждого значения x из области определения функции строится точка, координата которой на оси Ox (*абсцисса*) равна выбранному значению x , а координата на оси Oy (*ордината*) равна соответствующему значению функции.

Построенные таким образом точки плоскости образуют множество точек, называемое **графиком функции**.



Используя график функции, найти ее значение в некоторой точке x можно следующим образом:

1. Найти абсциссу, равную x .
2. Провести через нее прямую, параллельную оси Oy .
3. Найти точку пересечения этой прямой с графиком функции.
4. Провести через найденную точку пересечения прямую, параллельную Ox .
5. Определить ординату этой точки пересечения.

Найденная ордината будет равна значению функции в точке x . Например, на графике, представленном выше, $f(2) = 2$, а $f(-1) = -2$.

К

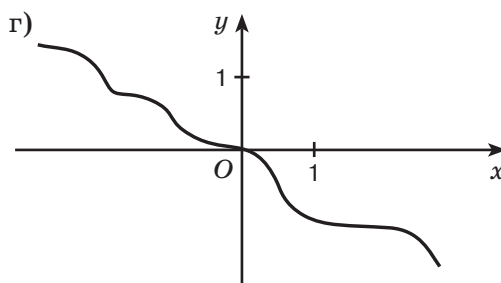
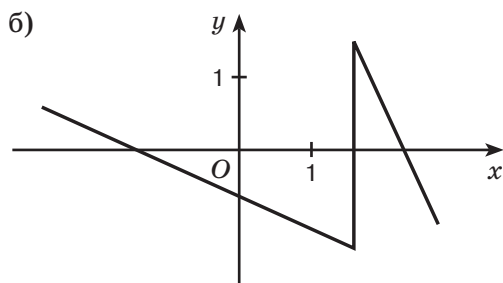
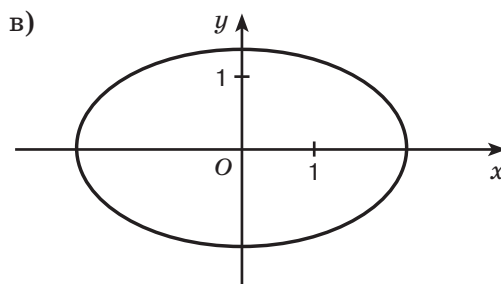
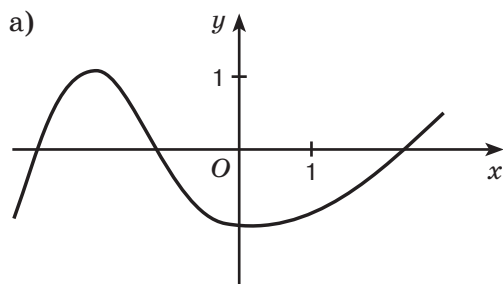
33

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

- а) $x = 2$; б) $x = -1,5$; в) $y = 4$; г) $y = -3,5$; д) $x = 0$; е) $y = 0$.

34

Зависимости заданы графически. Исходя из определения понятия функции, установите, какие из этих зависимостей являются функциональными, а какие нет.



- 35** 1) Прочитайте запись: $y = f(x)$. Что означают в этой записи буквы x , y , f ? Запишите несколько других обозначений функции и прочитайте свои записи.
2) Что значит задать (определить) функцию? Что необходимо сделать, чтобы задать функцию? Сравните свой вывод с выводом на стр. 11 учебника.

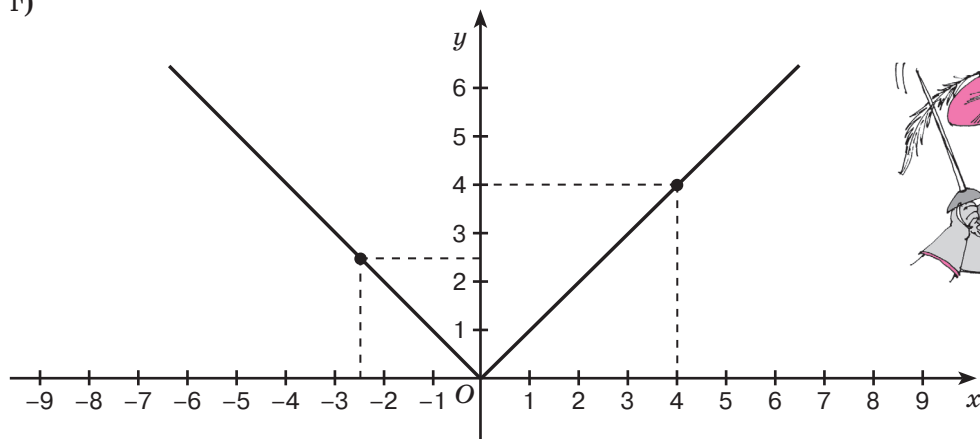
- 36** 1) Определите, какие из приведенных ниже зависимостей являются функциями.
а) Каждому рациональному числу ставится в соответствие его модуль.

б) $y = |x|$, $x \in \mathbb{Q}$.

в)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6

г)



Как для каждой из указанных функций найти $f(4)$, $f(-2,5)$, $f(1\frac{3}{4})$?

Что вы замечаете?

2) Какие способы задания функции были использованы? В чем преимущества и недостатки каждого из них? Сравните свои выводы с выводами на стр. 11–13 учебника.

- 37** 1) Функции заданы словесным описанием. Найдите область определения и область значений каждой функции. Определите их значения в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) Всем четным числам поставлено в соответствие число 3, а всем нечетным числам – число (-3) .

$$x_1 = 24; x_2 = 17; x_3 = 128.$$

б) Всем целым числам поставлено в соответствие число 1, а всем нецелым числам – число (-1) .

$$x_1 = -7; x_2 = 15,5; x_3 = -2,1.$$

в) Всем правильным дробям поставлено в соответствие число 2, а всем неправильным дробям – число 4.

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{8}{7}; x_3 = \frac{4}{5}.$$

2) Можно ли задать каждую из трех данных функций с помощью формулы, таблицы и графика?

38) Функция задана формулой. Найдите ее область определения.

а) $y = x^2$; в) $y = \frac{3}{x-9}$; д) $y = \frac{14}{x^2}$; ж) $y = \frac{9x+7}{(2x-5)(4x+9)}$;
 б) $y = 2x+3$; г) $y = \frac{7x+5}{3}$; е) $y = \frac{2x}{3x-8}$; з) $y = \frac{11(x-5)}{x^3(2x+6)}$.

39) Функция задана формулой. Найдите ее значение в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) $y = 7x - 5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; в) $y = 3x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -0,5$;
 б) $y = \frac{4}{2x-7}$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$; г) $y = \frac{4x-3}{5}$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0,75$; $x_3 = -2$.

40) Функция задана формулой: 1) $y = 2x$; 2) $y = -x$; 3) $y = 2 - x$; 4) $y = -|x|$.

Задайте данную функцию с помощью:

- а) словесного описания;
 б) таблицы значений от -3 до 3 с шагом 1.

(Шагом называют разность между двумя соседними значениями аргумента.)

41) Функция задана с помощью таблицы. Задайте ее словесным описанием и графически.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

в)

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	2	1	0,5	0	-0,5	-1	-2

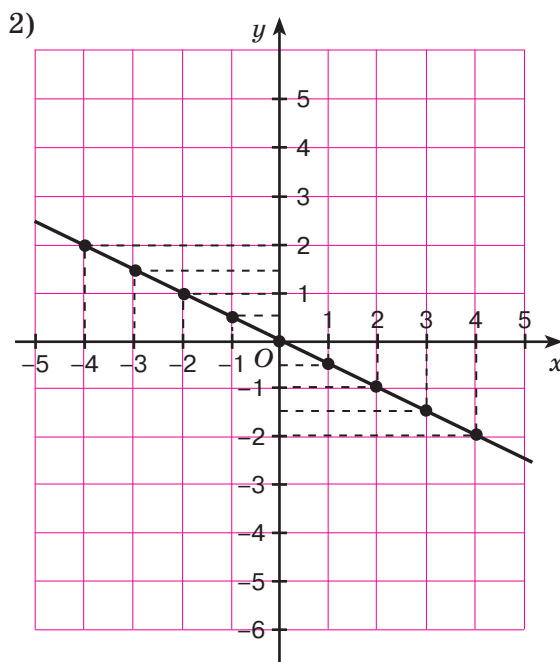
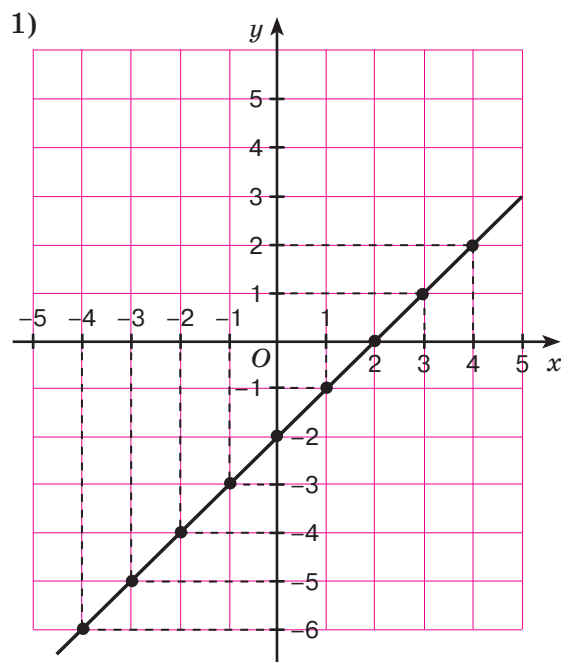
б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

г)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

42) Функция задана с помощью графика. Задайте эту функцию: а) таблицей значений от -4 до 4 с шагом, равным 1; б) словесным описанием; в) формулой.



43 Составьте таблицу значений функции:

- а) $y = 3x$ для x от -4 до 4 с шагом 1 ; в) $y = 3x + 5$ для x от -2 до 2 с шагом $0,5$;
 б) $y = -4x$ для x от -6 до 6 с шагом 2 ; г) $y = 4 - 3x$ для x от $-4,5$ до $4,5$ с шагом $1,5$.

Используя таблицы, постройте графики этих функций для указанных значений x .

44 Функция задана с помощью таблицы. Задайте эту функцию словесным описанием и графически.

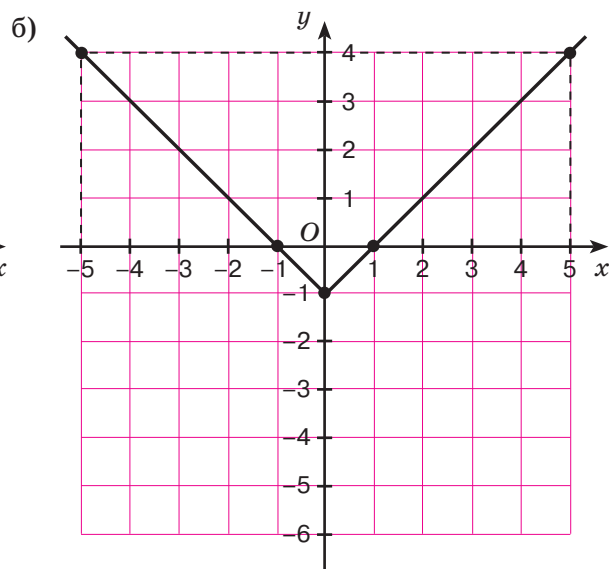
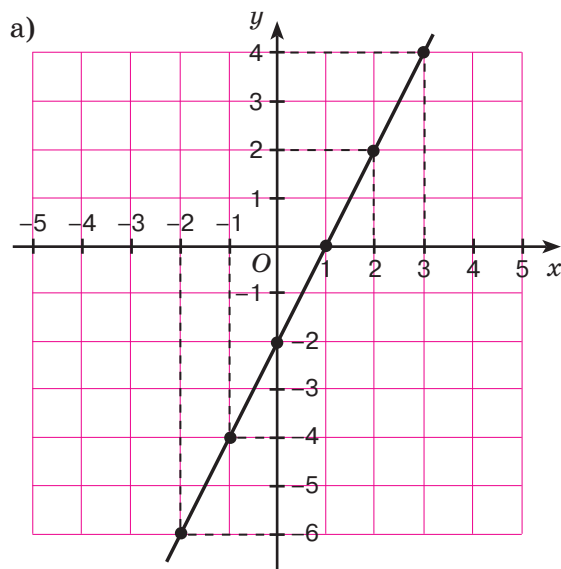
а)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

б)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27

45 Задайте функцию аналитически, используя ее график.



46 Функция задана формулой. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно y_1 , y_2 и y_3 .

- а) $y = 5x - 6$; $y_1 = 0$; $y_2 = 5$; $y_3 = -2$; в) $y = \frac{7}{x}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -1$; $y_3 = 2$;

- б) $y = \frac{11}{3x - 8}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -2$; $y_3 = 3$; г) $y = \frac{9x - 5}{2}$; $y_1 = 0$; $y_2 = 2$; $y_3 = -2,5$.

π

47 Запишите следующие выражения на математическом языке:

- а) произведение квадрата суммы чисел 7 и a и разности квадратов чисел b и c ;
 б) частное куба суммы чисел 9 , x , y и суммы кубов чисел 3 и z ;
 в) удвоенная разность кубов чисел 6 и p , умноженная на куб суммы чисел 2 и q ;
 г) квадрат разности чисел r и s , деленный на разность кубов чисел t и k ;
 д) произведение неполного квадрата суммы чисел m и n и разности квадратов чисел a и b ;
 е) шестая степень суммы чисел 4 , m , n , k ;
 ж) сумма шестых степеней чисел x , y и z .

48 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{5}{511}$ и $\frac{7}{949}$;

б) $\frac{3}{1691}$ и $\frac{4}{2047}$;

в) $\frac{7}{2813}$ и $\frac{2}{3589}$.

49 Решите уравнение:

а) $(a + 7)^2 - 4 = 0$;

б) $(7b - 5)^2 - 64 = 0$;

в) $64(c + 5)^2 - 4c^2 = 0$.

50 Упростите выражение:

а) $3a^4 - (4a^3b - 7a^2b^2 - ab^3) - (2a^4 + 6ab^3 - a^3b - b^4) - (-3a^3b + 6a^2b^2 - 5ab^3)$;

б) $x^4 + 3x^3y - (6x^2z - 3rx + s) + 4x^4 - (6x^3y - 5x^2z + 3rx - 2s) + (-5x^4 + 6x^3y + 5x^2z - s)$;

в) $2a^2(a - b) + 3a(a - b)^2 - 5(a - b)^3 + c - (-4(a - b)^3 + 2a(a - b)^2 + a^2(a - b) + c)$;

г) $3x^2 + 4y^2 - (x + y)^2 - 2x(x + y) - 3y^2 + 4xy$.

51 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 200\,000$, $b = 200\,056$, $c = 8$;

в) $a = 599\,615$, $b = 600\,000$, $c = 11$;

б) $a = 399\,996$, $b = 400\,009$, $c = 13$;

г) $a = 900\,312$, $b = 900\,632$, $c = 32$.

52 а) Из Москвы и Владивостока, расстояние между которыми 9000 км, вылетели одновременно навстречу друг другу два самолета, Су-34 и Ил-96. Через 3 часа расстояние между ними было равно 1170 км. Найдите скорости, с которой летели оба эти самолета, если скорость Су-34 была в два раза больше скорости Ил-96.

б) Из Москвы в Самару вышел теплоход со скоростью 20 км/ч. Через 3 часа из Москвы в том же направлении вышел второй теплоход, который передвигался со скоростью 24 км/ч. Чему равно расстояние между Москвой и Самарой, если в Самару оба теплохода прибыли одновременно?

в) Праздничная колонна демонстрантов движется по улице со скоростью 3 км/ч. Водитель машины с телевизионными камерами, двигавшейся навстречу колонне со скоростью 15 км/ч, заметил, что путь от начала и до конца колонны занял у него 2 минуты. Определите длину праздничной колонны.

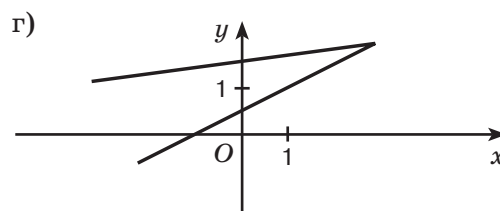
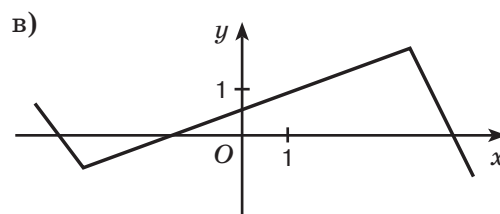
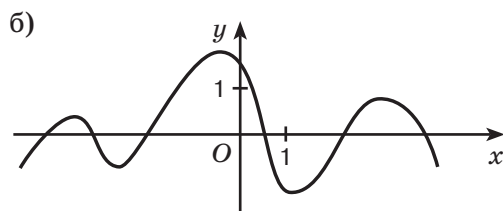
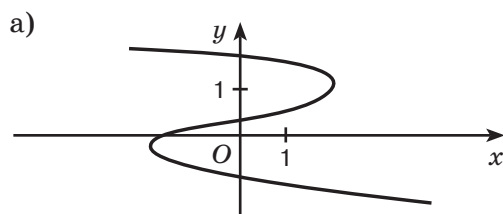
53 Докажите, что:

а) $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a$ для любого целого числа a делится на 3;

б) $b^5 - 5b^3 + 4b$ для любого целого числа b делится на 5.

Д

54 Зависимости заданы графически. Определите, какие из них являются функциональными, а какие нет.



55 Функция $y = f(x)$ задана следующим образом: всем числам, кратным 3, поставлено в соответствие число 0; всем числам, дающим остаток 1 при делении на 3, поставлено в соответствие число 1, а всем остальным целым числам поставлено в соответствие число 2. Найдите область определения и область значений этой функции. Вычислите ее значения в точках 26, 70, -1, 12, -8.

56 Функция задана с помощью таблицы. Задайте ее графически.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2



57 Функция задана формулой: 1) $y = -2x$; 2) $y = |2x|$.

Задайте данную функцию с помощью:

а) таблицы значений от -3 до 3 с шагом 1;

б) графика функции.

(Шагом называют разность между двумя соседними значениями аргумента.)

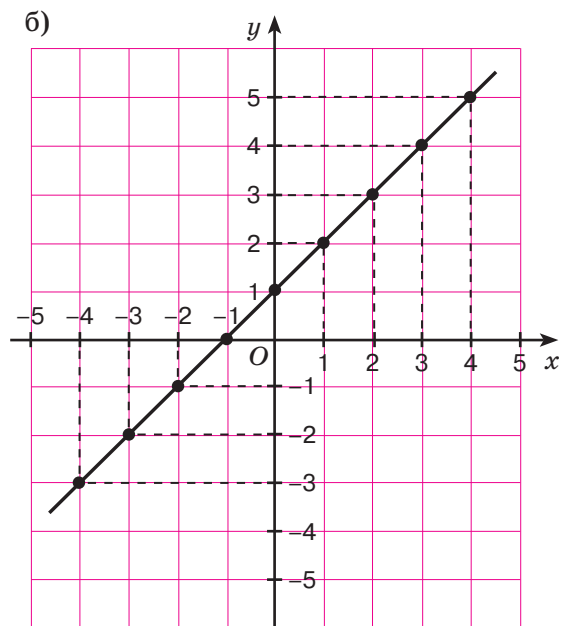
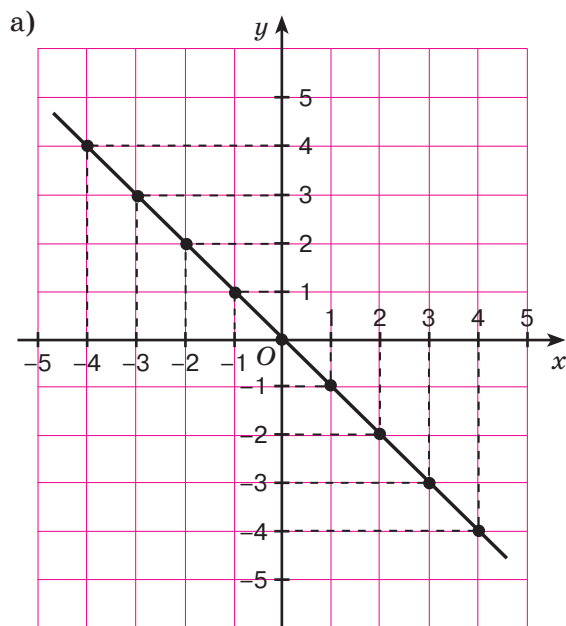
58 Функция задана формулой $y = \frac{7x-28}{4}$. Найдите ее значение в точках 0, 2, 4, -1, -3.

59 Составьте таблицу значений функции:

а) $y = 5x$ для x от -2 до 2 с шагом 0,5; в) $y = 2x + 7$ для x от -3 до 3 с шагом 1;

б) $y = -7x$ для x от -9 до 9 с шагом 3; г) $y = 6 - x$ для x от -7,5 до 7,5 с шагом 2,5.

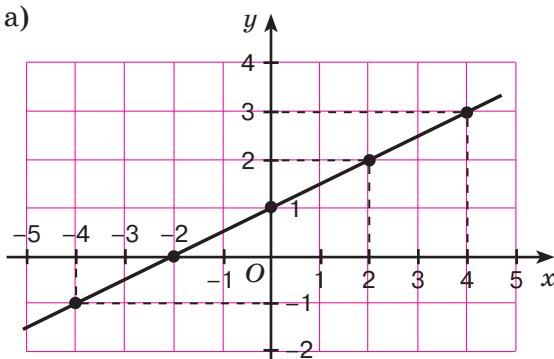
60 Функция задана с помощью графика. Задайте эту функцию таблицей значений от -4 до 4 (с шагом, равным 1) и формулой.



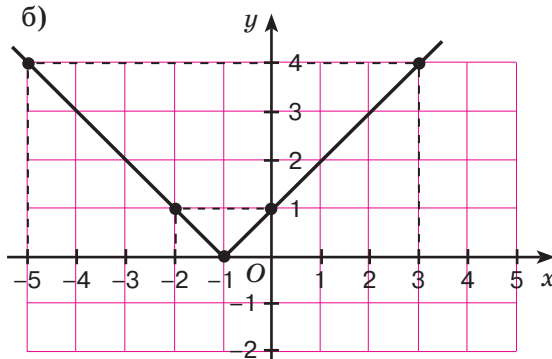
61 Функция задана формулой $y = \frac{17}{2x-3}$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 1, 3, -2.

62 Задайте функцию аналитически, используя ее график.

а)



б)



63 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{2}{589}$ и $\frac{4}{899}$;

б) $\frac{3}{287}$ и $\frac{5}{697}$;

в) $\frac{1}{559}$ и $\frac{2}{817}$.

64 Решите уравнение:

а) $(x - 7)^2 - 36 = 0$;

б) $(5y + 3)^2 - 81 = 0$;

в) $16(z - 3)^2 - 9z^2 = 0$.

65 Упростите выражение:

а) $x^4 - (4x^3y - 7x^2y^2 - xy^3) - (2y^4 + 6xy^3 - x^3y - y^4) - (-3x^3y + 6x^2y^2 - 5xy^3)$;

б) $5y^2(x + y) - 7y(x + y)^2 + 3(x + y)^3 + 2x^2y - (4(x + y)^3 - 8y(x + y)^2 + 4y^2(x + y))$.

66 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c .

а) $a = 54\,316$, $b = 54\,393$, $c = 11$;

б) $a = 154\,217$, $b = 154\,649$, $c = 18$.

67 а) Из двух филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши, расстояние между которыми равно 750 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Через 2 часа расстояние между ними было равно 450 км. Найти скорость, с которой ехали оба автомобиля, если скорость одного из них была в 1,5 раза больше скорости другого.

б) Когда Антон ехал на работу, то обратил внимание на то, что на встречной полосе образовалась пробка. Машины в пробке двигались со скоростью 5 км/ч. При этом Антон заметил, что путь от начала и до конца пробки занял у него 12 минут. Чему равна длина этой пробки, если Антон ехал со скоростью 60 км/ч?

68 Докажите, что:

а) $a^3 + 3a^2 + 2a$ для любого целого числа a делится на 3;

б) $b^4 + 2b^3 + b^2$ для любого целого числа b делится на 4.

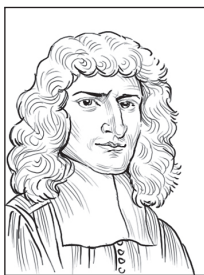
69 Докажите, что числа A и B имеют одинаковые остатки при делении на 7.

$$A = \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{225} \right) \cdot 9 + 0,16 \right] : \left(\frac{1}{3} - 0,3 \right); \quad B = (50 - 11,409 : 0,3) : \left(4,2 : 12 - 0,21 \cdot \frac{2}{3} \right).$$

C

70* Путешественник отправился из своего родного города A в самый удаленный от него город B . Из города B он отправился в самый удаленный от него город C и так далее. Докажите, что если C не совпадает с A , то путешественник, передвигаясь и далее таким способом, никогда не вернется домой.

3. Функциональная зависимость и кодирование информации*



*Математика – это непреложная основа наук
и плодотворный источник всяческой полезности
в человеческих делах...*

Исаак Барроу (1630–1677),
английский математик и физик

Как известно, кодирование информации необходимо для конфиденциальной передачи данных. Оно основано на том, что по определенному правилу меняется форма первоначального сообщения так, чтобы его смог прочесть только адресат, знающий правило, примененное при шифровке. Сегодня *криптография* (от др.-греч. *kryptos* – скрытый, *graphos* – писание) – наука о шифрах и их дешифровке – является основой информационной безопасности как отдельных компаний и корпораций, так и целых стран.

Фактически при кодировании информации задается некоторая функция, правило преобразования текста. Это правило называют **ключом** шифра. Например, каждой букве алфавита ставится в соответствие свой индивидуальный символ – цифра, буква, картинка, прочий знак. Данная функция преобразовывает исходное сообщение в зашифрованное.

Один из самых распространенных типов шифров, использовавшийся еще Юлием Цезарем, получил название **шифра сдвига**. Процесс кодирования в этом случае состоит в том, что каждой букве алфавита (далее мы будем говорить только о русском алфавите) ставится в соответствие другая буква, отстоящая от первоначальной на заданное ключом число позиций. Так, например, в шифре сдвига с ключом 6 алфавит сдвинут на 6 букв. Этот шифр можно задать следующей таблицей:

А	→	Ё	Ё	→	Л	Л	→	С	С	→	Ч	Ч	→	Э	Э	→	Г
Б	→	Ж	Ж	→	М	М	→	Т	Т	→	Ш	Ш	→	Ю	Ю	→	Д
В	→	З	З	→	Н	Н	→	У	У	→	Щ	Щ	→	Я	Я	→	Е
Г	→	И	И	→	О	О	→	Ф	Ф	→	Ъ	Ъ	→	А			
Д	→	Й	Й	→	П	П	→	Х	Х	→	Ы	Ы	→	Б			
Е	→	К	К	→	Р	Р	→	Ц	Ц	→	Ь	Ь	→	В			

Отметим, что знаки препинания и пробелы в шифровках обычно не ставятся. Имеющему ключ это не мешает прочесть текст, а тем, кому он не предназначен, создаст дополнительные трудности и, значит, сделает шифр более надежным. При этом текст передаваемого сообщения должен быть составлен таким образом, чтобы он понимался однозначно. Однако при желании можно зашифровать с помощью указанного шифра и знаки препинания, и пробелы. Для этого к алфавиту надо просто добавить желаемые символы и после этого производить сдвиг.

Для того чтобы разобраться с тем, как кодируется текст с использованием шифров этого типа, зашифруем с помощью шифра сдвига с ключом 6 следующую фразу:

КАЖДОМУ ЧЕЛОВЕКУ СВОЙСТВЕННО ОШИБАТЬСЯ, НО НИКОМУ,
КРОМЕ ГЛУПЦА, НЕ СВОЙСТВЕННО УПОРСТВОВАТЬ В ОШИБКЕ.

Получим следующую шифровку:

РЁМЙФТЩЭКФСЗКРЩЧЗФПЧШЗКУУФФЮОЖЁШВЧЕУФУОРФТЩ
РЦФТКИСЩХЬЁУКЧЗФПЧШЗКУУФЩХФЦЧШЗФЗЁШВЗФЮОЖРК.

Зашифрованная фраза мало похожа на оригинал, однако расшифровать ее не сложно. Ведь букв русского алфавита всего 33, а значит, существует всего 32 возможности сдвига. Поэтому, проверяя на первых буквах кода разные варианты сдвига, достаточно быстро можно найти ключ шифра.

Попробуем, например, прочитать зашифрованную с помощью шифра сдвига фразу:

ЖСФХГХСЪРСТУСФХСМНСЖ

Предположим, что ключ кода 1. Тогда букве Ж должна соответствовать стоящая перед ней буква Ё, букве С – буква Р, букве Ф – буква У. Начало нашей фразы получится ЁРУ. Судя по всему, ключ 1 не подходит.

Положив ключ кода 2, получим начало фразы ЕПТ, которое также не напоминает никакое слово русского языка. А взяв ключ кода 3, мы получим следующую фразу:

ДОСТАТОЧНО ПРОСТОЙ КОД

Таким образом, основным недостатком шифра сдвига является простота его расшифровки. В целях устранения этого недостатка был придуман тип шифров, называемый *шифром замены*. В нем каждой букве русского алфавита произвольным образом ставится в соответствие некий символ: буква, цифра, картинка и вообще произвольный знак. Например, возможен следующий ключ:

А	→	1	Ё	→	*	Л	→	7	С	→	?	Ч	→	9	Э	→	#
Б	→	С	Ж	→	5	М	→	0	Т	→	Д	Ш	→	№	Ю	→	\$
В	→	2	З	→	Б	Н	→	(	У	→	Ъ	Щ	→	Е	Я	→	&
Г	→	Р	И	→	)	О	→	4	Ф	→	8	Ъ	→	И			
Д	→	3	Й	→	+	П	→	Г	Х	→	!	Ы	→	К			
Е	→	А	К	→	В	Р	→	6	Ц	→	З	Ь	→	@			

Шифрование состоит в том, что буквы первоначального сообщения заменяются символами согласно ключу. Для тех, у кого есть ключ, написание и расшифровка сообщений достаточно просты. А вот без ключа расшифровать их непросто, так как количество возможных вариантов такого шифра равно

$$33! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33 \approx 9 \cdot 10^{36},$$

поэтому даже с помощью быстродействующего компьютера на дешифровку перебором вариантов будет потрачено столько времени, что сообщение уже будет неактуально.

И тем не менее такие шифры научились расшифровывать. Идея дешифровки состоит в том, что различные буквы русского языка встречаются в осмысленных текстах с разной частотой. Например, гласная А встречается чаще согласной М. Проанализировав частоту появления в текстах разных символов, были составлены таблицы средней частоты появления каждой буквы. Так, в приведенной ниже таблице указана средняя частота появления букв русского алфавита в тексте из 1000 букв. Из нее, например, видно, что на 1000 букв русского текста приходится в среднем 28 букв Л.



Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А, И	75	Е+Ё	88	Л	42	Р	48	Ц	5
Б, Ъ+Ъ	17	Ж	9	М	31	С	54	Ч	15
В	46	З, Ы	20	Н, Т	63	У	25	Ш, Ю	7
Г	16	Й	12	О	109	Ф	2	Щ, Э	4
Д	31	К	34	П	28	Х	11	Я	22

Анализируя с помощью данной таблицы частоту появления символов в зашифрованном тексте, а также их взаимное расположение и учитывая особенности построения слов русского языка, можно существенно сократить количество возможных вариантов ключей, а значит, сократить время перебора и в конечном счете расшифровать сообщение. В связи с этим ученые-криптографы до сих пор продолжают создавать разные виды шифров.

Одним из видов шифров, позволяющих усложнить расшифровку, являются *шифры перестановки*. В них исходный текст разбивается на группы, состоящие из одинакового числа букв. Внутри каждой группы буквы определенным образом переставляются.

Если группа достаточно длинная, то число возможных перестановок букв достаточно велико. К тому же пытающемуся расшифровать зашифрованные сообщения такого вида без ключа неизвестно, на группы какой длины разбивался текст. Поэтому расшифровка таких сообщений дело более сложное, хотя и возможное.

Зашифруем с помощью шифра перестановки следующую фразу:

**УМ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ НЕ ТОЛЬКО В ЗНАНИИ, НО И В УМЕНИИ
ПРИЛАГАТЬ ЗНАНИЕ НА ДЕЛЕ**

Начиная с первой буквы фразы, разобьем текст на группы по 10 букв в каждой. Затем нарисуем таблицу с 10 столбцами и в первой ее строке запишем числа от 1 до 10 в произвольном порядке. Теперь запишем в клетках таблицы по строчкам, начиная со второй строки, буквы шифруемого текста без пропусков и знаков препинания:

2	5	9	3	1	8	4	7	10	6
У	М	З	А	К	Л	Ю	Ч	А	Е
Т	С	Я	Н	Е	Т	О	Л	Ь	К
О	В	З	Н	А	Н	И	И	Н	О
И	В	У	М	Е	Н	И	И	П	Р
И	Л	А	Г	А	Т	Ь	З	Н	А
Н	И	Е	Н	А	Д	Е	Л	Е	

И наконец, выписывая буквы этой таблицы по столбцам в указанном порядке (сначала из столбца, отмеченного числом 1, затем – числом 2 и т. д.), мы получим следующую шифровку:

**КЕАЕААУТОИИНАННМГНЮОИИЬЕМСВВЛИЕКОРАЧЛИИЗЛ
ЛТННТДЗЯЗУАЕАЬНПНЕ**

Ключом к расшифровке текстов данного типа является набор цифр, указанный в первой строке таблицы. Зная его, получатель без труда расшифрует текст. Если же ключ не известен, восстановить исходный текст достаточно сложно, ведь буквы остались теми же и анализ частоты встречаемости букв здесь не поможет.

Тем не менее математические методы помогают расшифровывать и такие шифры без знания ключевого слова. Мы с вами пока этими методами, к сожалению, не владеем. Но для желающего что-то узнать не существует препятствий, и тот, кто захочет научиться этому, с радостью пройдет весь путь обучения и научится решать множество полезных и красивых задач.

К

71 Выполните вычисления и расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Вы узнаете название профессии, которая в буквальном переводе с итальянского языка означает «кладущий в ящик»:

К $5 \cdot 7 \cdot 3 - 35 \cdot 4$

Н $33 \cdot 34 - 34 \cdot 35$

С $(104 - 28) : 4$

Р $127 - 91 + 23 + 111$

О $52 + 68 - 22$

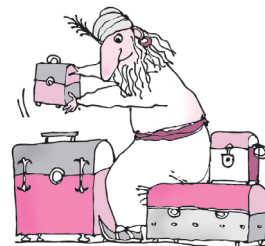
С $37 : 4 - 17 : 4$

Т $13 \cdot 21 - 29 \cdot 7$

А $(999 - 459) : 9$

А $(125 - 75) : 25$

И $98 \cdot 21 - 21 \cdot 128$



72

1) Прочитайте на стр. 20 учебника, как называется наука о шифрах и их дешифровке, что означает данное слово в переводе с древнегреческого.

2) Зашифруйте название науки о шифрах и их дешифровке, сопоставляя каждой букве этого слова некоторый вычислительный пример.

3) Прочитайте на стр. 20–22 учебника, как шифрование связано с понятием функции, что называется ключом шифра, какие бывают виды шифров.

73

Зашифруйте шифром сдвига с ключом 4 следующее высказывание великого древнегреческого философа и ученого Аристотеля:

ВСЕГО ПРИЯТНЕЕ ДЛЯ НАС ТЕ СЛОВА, КОТОРЫЕ ДАЮТ НАМ
КАКОЕ-НИБУДЬ ЗНАНИЕ

74

Расшифруйте высказывание одного из семи особо чтимых древнегреческих философов (семи мудрецов) Бианта Приенского, если известно, что оно зашифровано с помощью шифра сдвига:

ИШСЕГМЕЧЙСИЙОЦЧЖШГ.

75

Шифр замены задан следующим ключом:

А	→	☺
Б	→	*
В	→	α
Г	→	β
Д	→	θ
Е	→	γ

Ё	→	ε
Ж	→	κ
З	→	δ
И	→	η
Й	→	λ
К	→	μ

Л	→	π
М	→	σ
Н	→	τ
О	→	χ
П	→	φ
Р	→	ψ

С	→	ω
Т	→	!
У	→	↑
Ф	→	↓
Х	→	←
Ц	→	↔

Ч	→	∞
Ш	→	≡
Щ	→	☀
Ъ	→	♥
Ы	→	♠
Ь	→	♣

Э	→	♦
Ю	→	♪
Я	→	□

Зашифруйте с его помощью высказывание известного итальянского ученого Джордано Бруно:

СТРЕМЛЕНИЕ К ИСТИНЕ – ЕДИНСТВЕННОЕ ЗАНЯТИЕ,
ДОСТОЙНОЕ ГЕРОЯ

76

Зашифруйте шифром перестановки с ключом 78145236 высказывание известного английского ученого и философа Роджера Бэкона:

ТОТ, КТО НЕ ЗНАЕТ МАТЕМАТИКИ, НЕ МОЖЕТ УЗНАТЬ
НИКАКОЙ ДРУГОЙ НАУКИ И ДАЖЕ НЕ МОЖЕТ ОБНАРУЖИТЬ
СВОЕГО НЕВЕЖЕСТВА

- 77 Расшифруйте высказывание крупнейшего французского философа, писателя и историка Вольтера, зная, что оно зашифровано шифром перестановки с ключом 514362:

ИНЕШБЬУЕДВЛЕОТСОВВХЗИНКЕТИЕШДЙНААЬЛЛРТГЬЮДБХО

- 78 Используя таблицу частоты появления букв в текстах, расшифруйте высказывание немецкого философа Вильгельма Гумбольдта, если известно, что оно зашифровано шифром замены и знаком * обозначена буква О, а символом С – буква А:

AB@!\$&@@@& ☼C@1!91 *DC☼E\$CF! @C G&K*\$&DC !CD*&
2KC5*!\$*J@*& \$K91@9& DCD*& @*K@N& *DC☼E\$C&! @C
PJ9J*QA *@9 JC@@@&9\$CF! BJCG@*& @C@!J*&@9& P*@!&P&@@*
*2K&5GCF! @*5J&\$CF! P*Q@9BCF! QAT

- π 79 Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми ни другими? Определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицание.

- Частное от деления числа 75 само на себя равно 1.
- Существуют целые числа, которые при делении их на себя дают в частном 2.
- Все целые числа при делении их на себя дают в частном 3.
- Существует такое целое число, которое в сумме с 6 дает 17.
- Число 3 является решением уравнения $3x - 9 = 0$.
- Все решения уравнения $(x + 3)(2x - 9) = 0$ могут быть записаны как обыкновенные дроби.
- Число 4 меньше 5.
- Все рациональные числа, меньшие 5, больше (-100) .
- Существуют рациональные числа, меньшие 7 и большие 2.

- 80 Упростите выражение:

- $(2a^2 - (3a^2 - 4) + 2a^2 - (2 + a^2))^2$;
- $(3x - y)^3 - (3x + y)^3$;
- $p^2(q - r) + r(1 - p) + p(pr + r) - pq(p + 1)$;
- $(m + 2)(3 - m) + (4 - m)(m + 1) + (m - 4)(m + 4)$.



- 81 Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

- $\frac{55x^{12}y^{34}z^{23}}{11x^{11}y^{35}z^{22}}$;
- $\frac{36p^{10}q^{15} - 54p^8q^{12}}{18p^{10}q^{12}}$;
- $\frac{81a^{54}b^{33}c^{65}}{27a^{56}b^{34}c^{65}}$;
- $\frac{21a^4b^8 + 49a^8b^4}{35a^5b^5}$;
- $\frac{102m^{69}n^{35}k^{70}}{6m^{78}n^{70}k^{34}}$;
- $\frac{32x^4y^6 - 40x^8y^9}{56x^6y^6 - 24x^8y^8}$.

- 82 а) Два числа относятся одно к другому как 5 к 7. Если меньшее из них разделить на 3, то результат будет на 16 больше частного большего числа и числа 9. Найдите эти числа.

- б) Отец завещал трем своим сыновьям крупную сумму денег. Наследство было разделено между старшим, средним и младшим сыновьями в отношении 9 : 7 : 3. Какую сумму денег завещал отец своим сыновьям, если младший получил 270 тыс. р.?

83 Выполните указанное действие по модулю m :

- а) $9 + 7, m = 4$; г) $74 - 11, m = 5$; ж) $4 \cdot 9, m = 13$;
 б) $11 + 15, m = 9$; д) $35 - 96, m = 6$; з) $48 \cdot 52, m = 17$;
 в) $26 + 38, m = 7$; е) $49 - 85, m = 11$; и) $6^7, m = 19$.

84 Найдите остаток от деления a на b :

- а) $a = 298^{892}, b = 11$; б) $a = 564^{465}, b = 7$; в) $a = 351^{153}, b = 6$.

85 Зашифруйте шифром сдвига с ключом 7 следующее высказывание известного французского математика Рене Декарта:

ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ УСОВЕРШЕНСТВОВАТЬ УМ, НАДО
БОЛЬШЕ РАЗМЫШЛЯТЬ, ЧЕМ ЗАУЧИВАТЬ

86 Расшифруйте высказывание итальянского физика, философа и математика Галилео Галилея, если известно, что оно зашифровано с помощью шифра сдвига.

КЦИЦШРЪДЧЫЪЗХХЦЫФММЪЙЩЖТРСКИЦШРЪДЖЩХЦХМФХЦКРМ

87 Шифр замены задан следующим ключом:

А	→	1	Ё	→	7	Л	→	С	С	→	І	Ч	→	О	Э	→	U
Б	→	2	Ж	→	8	М	→	D	Т	→	J	Ш	→	P	Ю	→	V
В	→	3	З	→	9	Н	→	E	У	→	K	Щ	→	Q	Я	→	W
Г	→	4	И	→	!	О	→	F	Ф	→	L	Ъ	→	R			
Д	→	5	Й	→	A	П	→	G	Х	→	M	Ы	→	S			
Е	→	6	К	→	B	Р	→	H	Ц	→	N	Ь	→	T			

Зашифруйте с его помощью высказывание известного английского физика Уильяма Гроуе:

ИСТИННАЯ НАУКА НЕ ЗНАЕТ НИ СИМПАТИЙ, НИ АНТИПАТИЙ:
ЕДИНСТВЕННАЯ ЦЕЛЬ ЕЁ – ИСТИНА

88 Зашифруйте шифром перестановки с ключом 951427836 высказывание известного немецкого философа Фридриха Ницше:

КТО ХОЧЕТ НАУЧИТЬСЯ ЛЕТАТЬ, ТОТ ДОЛЖЕН СПЕРВА НАУЧИТЬСЯ
СТОЯТЬ, И ХОДИТЬ, И БЕГАТЬ, И ЛАЗИТЬ, И ТАНЦЕВАТЬ: НЕЛЬЗЯ СРАЗУ
НАУЧИТЬСЯ ПОЛЕТУ

89 Расшифруйте высказывание древнегреческого философа Платона, зная, что оно зашифровано шифром перестановки с ключом 3572461.

ИВНТНСМИНБОЖСЛНОСЕЕЕВАТУАСГЕТООСОСНВАЧИДНТОСЬ
ИЙТЗОНЕЕАНР

90 Расшифруйте высказывание известного итальянского художника и ученого Леонардо да Винчи, если известно, что оно зашифровано шифром замены и символ А обозначает букву Т, символ В – букву А, а символ Т – букву С:

ABC D⊙ CBC FGHIGJ⊙KL⊙ FLJL N⊙O PQGRGISTARLV
FW⊙RWBJB⊙ATV R TCPXKG⊙ FLABKL⊙ ABC OBKVAL⊙ KBPCGY
N⊙O TAWBTAL OBTGWV⊙A FBZVAS CGAGWBV TABKGRLATV
K⊙TFGTGNKGY PTRBLRBAS AG XAG GKB FGHIGJB⊙A

91 Упростите выражение:

а) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$;

б) $5p^2 - q(p + q) - (3(-q^2 + p^2 - 2pq) - (-4pq - 4(q^2 + 2pq)))$.

92 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{18a^9b^7 + 24a^7b^9}{36a^7b^7}$; б) $\frac{75m^{57}n^{69}k^{39}}{25k^{39}m^{58}n^{68}}$; в) $\frac{45x^9y^5 - 54x^7y^6}{27x^7y^7 - 63x^9y^9}$.

93 В пончиковой компании Антона и Ксюши часть прибыли за 2010 год решили потратить на выплаты дивидендов собственникам. Было принято решение разделить ее между Антоном, Ксюшей и прочими акционерами в отношении 5 : 4 : 2. Какую сумму денег получил Антон, если выплаты прочим акционерам составили 120 тыс. р.?

94 Выполните указанное действие по модулю m :

а) $12 + 16, m = 5$; в) $26 - 51, m = 8$; д) $21 \cdot 19, m = 15$;

б) $39 + 41, m = 9$; г) $44 - 97, m = 7$; е) $4^8, m = 11$.

95 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 417^{714}, b = 7$; б) $a = 318^{813}, b = 11$; в) $a = 596^{695}, b = 5$.

С

96* Встретились два бывших одноклассника – биолог и математик. Биолог предложил математику определить возраст его сыновей и сообщил, что произведение полных лет трех его сыновей равно 36. Математик на это ему ответил, что этих данных ему недостаточно, чтобы определить возраст каждого из его детей. Тогда биолог сообщил, что сумма возрастов его детей равна номеру школы, в которой они учились. Математик на это ответил, что и этих данных ему мало. Хитрый биолог добавил тогда, что старший его сын рыжий. После этого математик правильно определил возраст сыновей биолога. Сможете ли вы определить возраст сыновей биолога и номер школы, в которой учились биолог и математик?

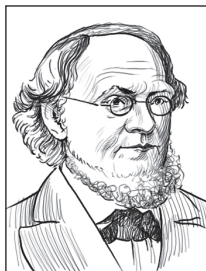
97* В университете имени М.В. Ломоносова преподаватели Антонова, Бирюкова, Кузьмина, Дудкин, Иванов и Филатов преподают шесть разных предметов: высшую математику, физику, программирование, отечественную историю, общую психологию и английский язык. Известно, что:

1. Преподаватели программирования и общей психологии – женщины.
 2. Иванов старше Филатова, но преподавателем он работает меньше, чем преподаватель высшей математики.
 3. Будучи студентами, Антонова и Бирюкова учились в педагогическом институте. Все остальные преподаватели окончили университет имени М.В. Ломоносова.
 4. Филатов – отец преподавателя физики.
 5. Преподаватель английского языка старше всех, при этом преподавателем он работает дольше всех.
 6. Преподаватель английского языка работает в университете им. М.В. Ломоносова с того момента, как окончил его. Преподаватели психологии и отечественной истории – его бывшие студенты.
 7. Антонова старше преподавателя программирования.
- Определите, кто какой предмет преподает.



§ 2. Линейные процессы и линейная функция

1. Прямая пропорциональность



Математика – это наука о связи величин.

Герман Гюнтер Грассман (1809–1877),
немецкий физик, математик и филолог

Решая задачи и наблюдая за поведением различных величин на практике, мы видели, что между некоторыми из них существуют определенные зависимости. Так, пройденный путь зависит от скорости и времени движения, площадь круга зависит от его диаметра, площадь квадрата зависит от длины его стороны и т. д.

При этом мы замечали, что у многих зависимостей, описывающих, казалось бы, совершенно разные процессы, имеется много общего. Например:

1) Если мы движемся с постоянной скоростью 70 км/ч, то при увеличении времени движения в два раза пройденный нами путь тоже увеличится в два раза.

2) Если мы покупаем помидоры по цене 70 р. за килограмм, то, увеличив массу покупки в два раза, мы заплатим за нее в два раза больше.

3) Если некоторый рабочий производит 70 деталей в час, то, увеличив время своей работы в два раза, он заметит, что количество сделанных им деталей также увеличилось в два раза.

И таких примеров можно привести огромное количество. Общее же у них то, что с увеличением (уменьшением) одной из величин в несколько раз другая величина увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Обобщенное описание и последующее исследование зависимостей между величинами позволяет создать общие способы решения разнообразных задач данного вида. Подобно тому, как изучение чисел позволяет нам применять их свойства, не задумываясь о том, что именно мы считаем – тетради, деньги, размеры дома или скорость ракеты.

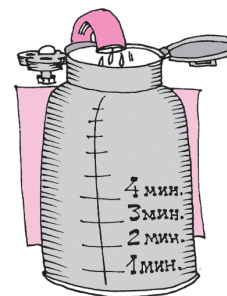
Мы уже знаем, что рассмотренный тип зависимости называется *прямо пропорциональной* зависимостью. Такая зависимость может быть записана с помощью единой формулы:

$$y = kx,$$

где x и y – соответствующие значения независимой и зависимой величин, а число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

При положительных k и x данное равенство показывает, что при увеличении (уменьшении) значения x в несколько раз значение y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Итак, мы можем дать следующее определение прямо пропорциональных величин.



Определение 1. Две величины x и y называются **прямо пропорциональными**, если они связаны формулой $y = kx$, где k – некоторое число. Число k называется **коэффициентом пропорциональности**.

Напомним, что название данной зависимости связано с тем, что, в соответствии с равенством $y = kx$, если $y_1 = kx_1$, а $y_2 = kx_2$, то

$$\frac{y_1}{x_1} = k, \frac{y_2}{x_2} = k \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Таким образом, величины y_1 , x_1 , y_2 и x_2 образуют пропорцию.

Прямо пропорциональная зависимость является одной из самых простых. Но большинство величин в реальной жизни ведут себя иначе. Например, сторона квадрата не прямо пропорциональна его площади: если увеличить сторону квадрата в 2 раза, его площадь увеличится не в 2, а в 4 раза. Но чтобы изучить поведение более сложных зависимостей, нам надо сначала разобраться с более простыми.

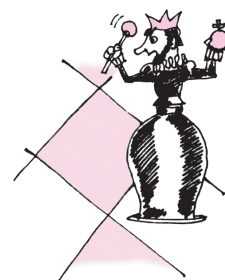
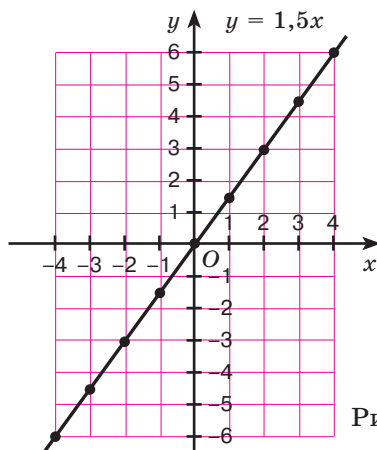
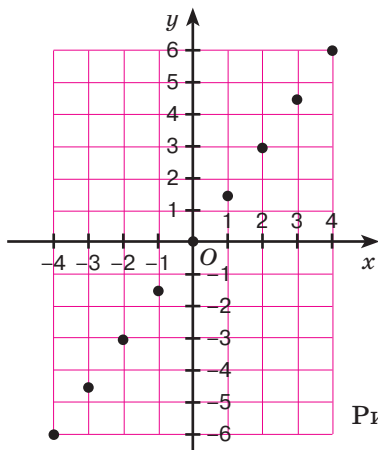
Во-первых, заметим, что, согласно равенству $y = kx$, каждому рациональному числу x сопоставляется единственное число y . Значит:

Прямо пропорциональная зависимость $y = kx$, где k – произвольное число, является функциональной зависимостью, или *функцией*. Областью определения данной функции являются все известные нам числа.

Построим график прямой пропорциональности, взяв в качестве примера зависимость $y = 1,5x$. Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-4,5	-3	-1,5	0	1,5	3	4,5	6

Затем отметим точки с вычисленными координатами $(x; y)$ на координатной плоскости Oxy (рис. 1).



Можно доказать, что все полученные точки принадлежат некоторой прямой (рис. 2), то есть верна следующая теорема.

Теорема. Графиком функции $y = kx$ является прямая линия.

Доказательство данной теоремы будет получено позднее в курсе геометрии, пока нам для этого не хватает знаний.

Так как график прямой пропорциональности – это прямая, а через две различные точки можно провести ровно одну прямую, то для построения графика функции $y = kx$ нам достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этой прямой.

Заметим, что при любом коэффициенте пропорциональности k , если $x = 0$, то и $y = 0$. Значит:

График функции $y = kx$ всегда проходит через начало координат – точку $O(0; 0)$.

Следовательно, чтобы построить график $y = kx$, нам надо найти еще лишь одну точку, принадлежащую этому графику. Например, чтобы построить график функции $y = -0,5x$, можно взять значение $x_1 = 4$, найти соответствующее значение $y_1 = -0,5 \cdot 4 = -2$, а затем провести прямую через полученную точку $(4; -2)$ и начало координат (рис. 3).

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм построения графика прямой пропорциональности.

Алгоритм построения графика функции $y = kx$

1. Отметить на координатной плоскости Oxy точку O с координатами $(0; 0)$.
2. Выбрать некоторое значение $x_1 \neq 0$.
3. Вычислить значение $y_1 = kx_1$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Через точки O и A провести прямую.

Расположение графика функции $y = kx$ на координатной плоскости зависит от знака коэффициента k . Так, если $k > 0$, то знаки соответствующих значений x и y всегда одинаковы, поэтому график $y = kx$ располагается в I и III координатных четвертях (рис. 4). Аналогично при $k < 0$ знаки x и y всегда различны, поэтому график данной функции располагается во II и IV координатных четвертях (рис. 5).

Если $k = 0$, то при всех значениях x значение $y = 0$. Значит, графиком прямой пропорциональности в этом случае является ось Ox .

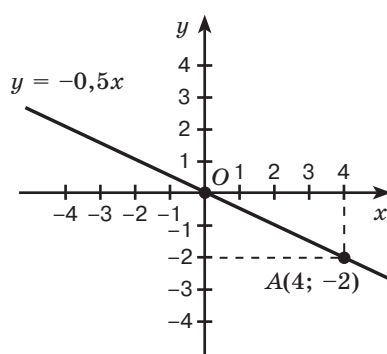


Рис. 3

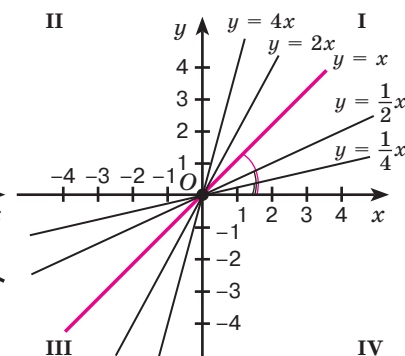


Рис. 4

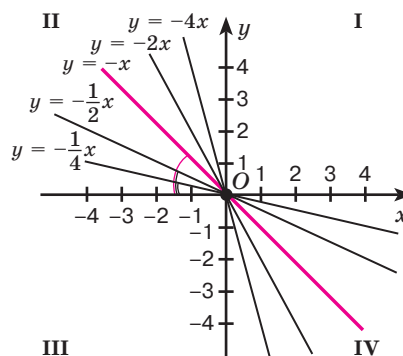


Рис. 5

Наблюдая за тем, как при изменении k ведет себя график прямой пропорциональности, можно заметить различные закономерности, например:

1) Если $k \neq 0$, то областью значений прямой пропорциональности является множество всех известных нам чисел, а если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа 0.

2) График функции $y = x$ ($y = -x$) является биссектрисой I и III (II и IV) координатных углов.

3) С увеличением $|k|$ острый угол между графиком $y = kx$ и осью абсцисс Ox увеличивается (график становится «круче»), а с уменьшением $|k|$ — уменьшается (график более «пологий»).

Можно наблюдать и многие другие закономерности расположения графика прямой пропорциональности $y = kx$: например, его симметрия относительно начала координат; особенности его расположения относительно координатных осей и другие.

К

98

Функции заданы таблично. Задайте эти функции формулами и постройте их графики в одной системе координат Oxy .

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

б)

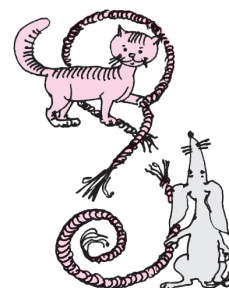
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

в)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

г)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Чему равно множество значений каждой из этих функций? Через какую общую точку проходят все их графики?

99

1) Запишите формулу зависимости длины пути в км, пройденного с постоянной скоростью 3 км/ч, от времени движения в часах. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

2) Запишите формулу зависимости стоимости в р. пользования Интернетом по цене 500 р. в месяц от количества месяцев подключения к Интернету. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Зачем нужны обобщенные описания процессов? Задайте предыдущие две зависимости единой обобщенной формулой. Как называется такая зависимость? Почему? Какие ее общие свойства вам известны? Найдите ее область определения и докажете, что она является функцией.

4) Сопоставьте свои выводы с определением и выводами на стр. 27–28 учебника.

100

Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности k .

- а) $y = -2x$; в) $y = 0,5x$; д) $y = x : 7$; ж) $y = 3x^2$; и) $y = 0 \cdot x + 4$;
 б) $y = x + 3$; г) $y = 0 \cdot x$; е) $y = 2 : x$; з) $y = 5x$; к) $y = 0 - 3x$.

- 101** 1) Запишите формулу зависимости стоимости покупки яблок по цене 1,5 тыс. р. за центнер от массы купленных яблок. Докажите, что данная зависимость является прямой пропорциональностью, и постройте ее график. Что вы замечаете?
- 2) Какое минимальное количество точек нужно отметить на координатной плоскости для построения графика прямой пропорциональности? Почему? Какие точки лучше взять?
- 3) Исходя из своих наблюдений, составьте алгоритм построения графика прямой пропорциональности.
- 4) Сравните свои выводы и алгоритм с выводами и алгоритмом на стр. 28–29 учебника.

- 102** Пользуясь алгоритмом построения графика прямой пропорциональности, постройте на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если:

а) $k = 1$; $k = 3$; $k = \frac{1}{3}$; $k = 6$; $k = \frac{1}{6}$; б) $k = -1$; $k = -3$; $k = -\frac{1}{3}$; $k = -6$; $k = -\frac{1}{6}$.

Что вы замечаете? Сравните свои выводы с выводами на стр. 29–30 учебника.

- 103** Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:

а) $k = 2,3$; б) $k = -6,7$; в) $k = -1,9$; г) $k = 5,6$; д) $k = -6,4$.

- 104** Определите коэффициент пропорциональности функции $y = kx$, проходящей через точку А. Опишите расположение ее графика в координатной плоскости.

а) А (2; 10); в) А (0,5; -2); д) А (-4; 0,5); ж) А (1,2; 6);
б) А (-3; 12); г) А (-0,4; -8); е) А (3; -1,5); з) А (-7; -1,4).

- 105** 1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = x$ и $y = -x$ и два графика прямой пропорциональности, один из которых проходит через точку А, а другой – через точку В. Задайте данные функции аналитически (формулой). Что вы замечаете?

а) А (4; 1), В (4; -1); в) А (4; 10), В (-4; 10); д) А (-3; -8), В (3; -8);
б) А (-2; 8), В (2; 8); г) А (5; -2), В (-5; -2); е) А (4; 1,5), В (-4; 1,5).

2) Проанализируйте расположение на координатной плоскости каждого из построенных графиков и их взаимное расположение.

- 106** 1) Прямая пропорциональность задана таблицей. Определите коэффициент пропорциональности данной зависимости и найдите недостающие в таблице значения. Задайте зависимость аналитически (формулой) и постройте ее график.

а)

x	-5		-1	0	2	4
y		-6		0	4	

в)

x	-6		-2	2		5
y	1,5	1			-0,75	

б)

x	-8		-2	0	2	6
y		9	3	0		

г)

x	-4		-1	3	5	6
y		6			-15	

2) При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

107 График прямой пропорциональности проходит через точку $A(p; q)$. Найдите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения данного графика на координатной плоскости. Затем постройте график и проверьте свои выводы.

- а) $p = 2, q = -2$; в) $p = -5, q = 2,5$; д) $p = 1, q = 0,3$;
 б) $p = 3, q = 1,5$; г) $p = -8, q = -1,6$; е) $p = 0,25, q = -2$.

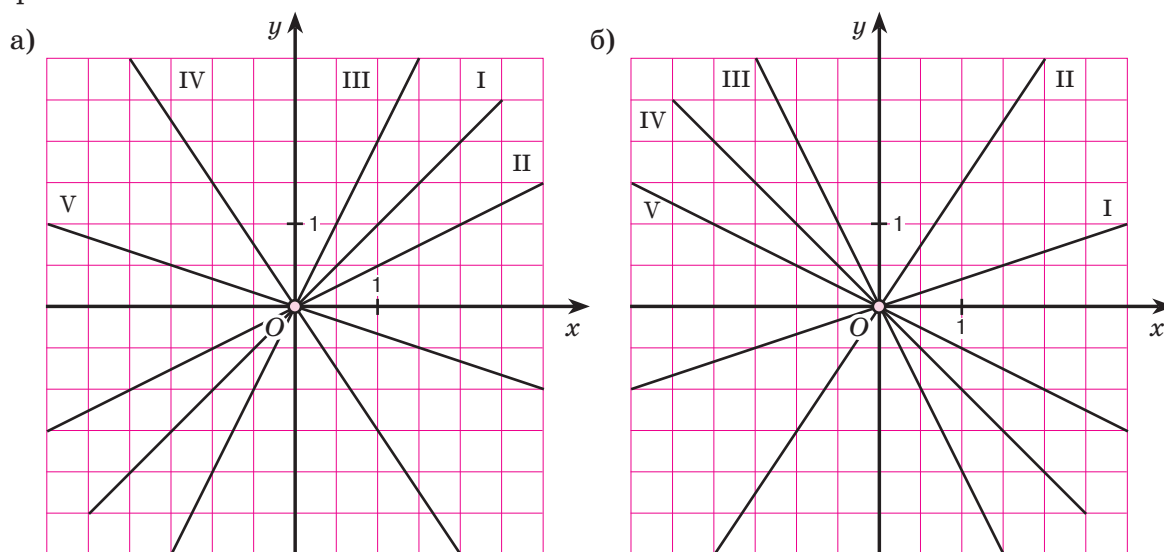
108 Для прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

- а) $k = 0,5; a = 6,5; b = -1,5$; в) $k = \frac{1}{7}; a = 1,4; b = -2$; д) $k = 3; a = 4; b = 15$;
 б) $k = -2; a = -2,5; b = 8$; г) $k = -0,4; a = -2,5; b = 4$; е) $k = -\frac{5}{9}; a = -1,8; b = -3,5$.

109 Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:

- а) $k = 2, A(0; 2), B(-3; -6)$; г) $k = -3, A(-2; 6), B(3; 9)$;
 б) $k = 0,4, A(0,4; 0), B(-2; 0,8)$; д) $k = -1, A(-4; 4), B(0,5; -0,5)$;
 в) $k = 4, A(0; 0), B(-1,5; 6)$; е) $k = -0,5, A(-0,5; 2), B(4; 2)$.

110 Задайте аналитически (формулой) каждую из функций, представленных на графике:



111 График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку A . Проходит ли он через точку B ?

- а) $A(4; 2), B(-6; 3)$; в) $A(8; -2), B(12; -3)$; д) $A(-2; -0,5), B(-4; -1)$;
 б) $A(-9; 4,5), B(7; 3,5)$; г) $A(-1,5; 6), B(-2; -8)$; е) $A(5; 1), B(-6; -1,2)$.

112 Прямая проходит через начало координат и точку A . Является ли эта прямая графиком функции $y = kx$, если:

- а) $k = 3, A(2; 6)$; в) $k = 4, A(-2; -8)$; д) $k = -1,5, A(3; -4)$;
 б) $k = -2, A(-1; -2)$; г) $k = -0,5, A(2; -1)$; е) $k = 2,1, A(3; 6,3)$?

π **113** Вычислите отношения:

- а) $2,6 : 5,2$; б) $9 : 0,06$; в) $0,7 : 2\frac{1}{3}$; г) $2,25 : 0,9$.

114

Точка C принадлежит отрезку AB . Что показывают отношения $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AB}{AC}$? Какие еще отношения можно составить?

115

Измерьте длины сторон треугольников ABC и DBE и вычислите отношения $\frac{DB}{AB}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{DE}{AC}$ (рис. 6). Что вы замечаете? Как можно назвать данные величины?

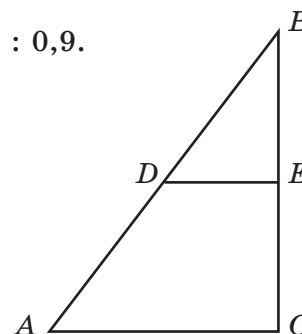


Рис. 6

116

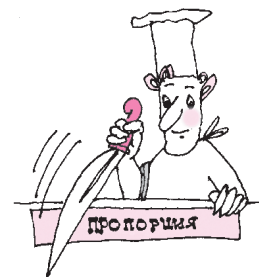
Прочитайте пропорцию разными способами: $5 : 10 = 6 : 12$. Назовите ее крайние члены, средние члены, основное свойство пропорции. Докажите, что опять получится пропорция, если:

- а) поменять местами крайние члены;
 б) поменять местами средние члены;
 в) заменить каждое отношение обратным.

Какие еще преобразования помогут получить из этих же чисел новую пропорцию?

117

Дана пропорция: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Какие другие пропорции, членами которых являются те же числа a , b , c и d , можно записать?

**118**

Решите уравнение:

- а) $\frac{0,8}{x} = \frac{0,21}{\frac{7}{8}}$; б) $3,6 : \frac{9}{1,1} = 0,44 : y$; в) $\frac{2}{2a+1} = \frac{2a-1}{40}$; г) $\frac{2d+16}{3d} = \frac{d}{6}$.

119

Решите задачу методом пропорций:

- а) На пошив 12 одинаковых платьев израсходовали 49,8 м ткани. Сколько таких же платьев можно сшить из 74,7 м этой ткани?
 б) Для окраски 15 м^2 пола требуется 2,1 кг краски. Сколько краски потребуется для окраски пола прямоугольной комнаты длиной 6,3 м и шириной 4,5 м?
 в) Из 158 л молока получается 3,2 кг сливочного масла. Сколько нужно взять молока, чтобы приготовить 16 кг сливочного масла?
 г) Маятник часов делает 198 качаний за 2 мин 24 с. Сколько качаний он сделает за 3 мин 12 с.?

120

Не проводя вычислений, сравните значения числовых выражений:

- а) $|195 - 271| \cdot |189 - 193|$ и $(195 - 271)(189 - 193)$;
 б) $|512 - 415| \cdot |277 - 396|$ и $(512 - 415)(277 - 396)$;
 в) $(213 - 378) \cdot |567 - 613|$ и $|213 - 378| \cdot (567 - 613)$;
 г) $|476 - 245| \cdot (345 - 678)$ и $(476 - 245) \cdot |345 - 678|$.



121 Решите уравнение:

а) $|x - 2010| + |2010 - x| = 2012$; б) $|x - 365| + |2x - 730| = 36$.

122 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) 399^{993} ; б) $514^{415^{10}}$.

123 Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности k .

а) $y = 1,2x$; в) $y = 0 \cdot x$; д) $y = 8 : x$; ж) $y = -4x^2$; и) $y = 5x + 6$;

б) $y = -2x + 1$; г) $y = 3x + 0$; е) $y = x : 15$; з) $y = x$; к) $y = -0,8x^3$.

124 Пользуясь алгоритмом построения графика прямой пропорциональности, постройте на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если:

$k = 1$; $k = -1$; $k = 2$, $k = -2$, $k = \frac{1}{2}$; $k = -\frac{1}{2}$.

Какие закономерности в расположении данных графиков вы наблюдаете?

125 Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:

а) $k = 7,8$; б) $k = -3,5$; в) $k = -9,6$; г) $k = 2,4$.

126 1) В таблице задана прямая пропорциональность. Определите коэффициент пропорциональности данной зависимости и найдите недостающие в таблице значения. Задайте зависимость аналитически (формулой) и постройте ее график.

а)

x	-5		-1	0	3	4
y		-12	-3	0		

б)

x	-8		-4	-2	1	3
y		9		3		

2) При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

127 График прямой пропорциональности проходит через точку $A(p; q)$. Найдите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения данного графика на координатной плоскости. Затем постройте график и проверьте свои выводы.

а) $p = -5$, $q = 5$; б) $p = 3$, $q = -9$; в) $p = -4$, $q = -1,6$.

128 Определите коэффициент пропорциональности функции $y = kx$, проходящей через точку A . В каких координатных четвертях расположен ее график?

а) $A(3; 12)$; б) $A(1,5; -3)$; в) $A(-7; 3,5)$; г) $A(1,8; 9)$.

129 Для прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $k = 3$; $a = 4$; $b = -5$; в) $k = -0,8$; $a = -1,5$; $b = 3$;

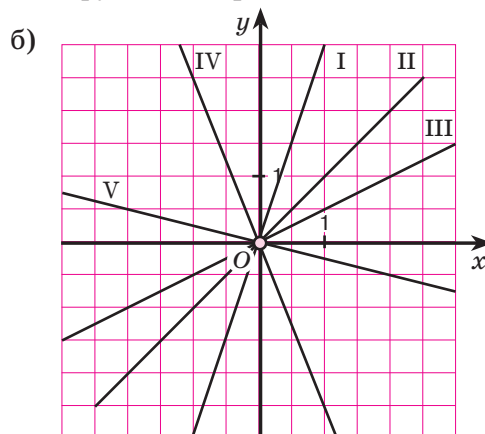
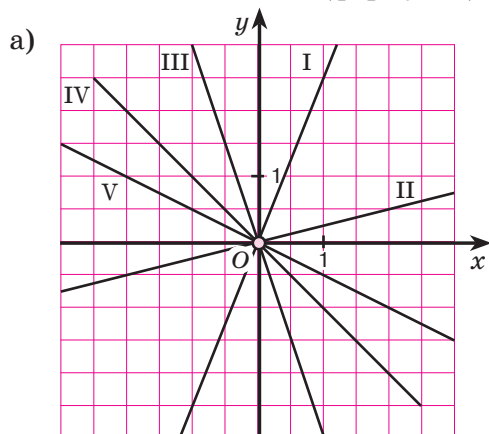
б) $k = -1,5$; $a = -3$; $b = 6$; г) $k = 5$; $a = 2$; $b = 7$.

130 Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:

а) $k = 0,3$, $A(0; 4)$, $B(-1; -0,3)$; в) $k = -0,4$, $A(-2; 8)$, $B(3; -1,2)$;

б) $k = 1,2$, $A(0,5; 0,6)$, $B(-1; -1,2)$; г) $k = -2,1$, $A(-3; 6,3)$, $B(0,7; -0,3)$.

131 Задайте аналитически (формулой) каждую из функций, представленных на графике:



132 График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку А. Проходит ли он через точку В?

- а) А (6; -2), В (-12; 4); б) А (5; 2,5), В (-7; 3,5); в) А (-4; -1), В (2; 0,5).

133 Дана пропорция: $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$. Какие другие пропорции, членами которых являются те же числа x, y, m и n , можно записать?

134 Решите уравнение:

- а) $x : 2,8 = 1\frac{2}{7} : 3,6$; б) $\frac{25}{10,8} = \frac{y}{0,54}$; в) $\frac{k+1}{2} = \frac{8}{k+1}$; г) $\frac{c+4}{2} = \frac{15c+24}{9c}$.

135 Решите задачи методом пропорций:

а) В пончиковой компании Антона и Ксюши для выпечки 270 кг пончиков расходуют 217,5 кг муки. Сколько муки нужно приготовить для выпечки 801 кг пончиков?

б) Из 0,3 тонны свежего винограда изготавливают 35 кг изюма для пончиков. Сколько изготовят изюма из 2,1 тонны свежего винограда?

136 Решите уравнение:

- а) $|x - 3| + |3 - x| = 16$; б) $|x - 516| + |516 - x| = 1032$.

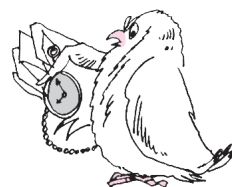
137 Определите, какой цифрой оканчивается число:

- а) 429^{924} ; б) $356^{653^{14}}$.

138 Найдите остаток от деления А на В:

$$A = \left(54\frac{3}{5} : 2\frac{1}{2} - 20\frac{8}{15} \cdot 7\frac{1}{2}\right) : \left(3\frac{13}{21} \cdot 8\frac{2}{5} - 29\frac{2}{5}\right) + \frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{5} - \frac{21}{25};$$

$$B = \frac{7}{9} \cdot 1\frac{2}{7} + 43\frac{3}{4} : 11\frac{2}{3} - 3\frac{18}{25} + 1\frac{1}{45} \cdot \left(37\frac{1}{2} : 2\frac{1}{12} - 1\frac{3}{23} \cdot 9\right) - \frac{3}{100}.$$



139* Кого больше, спортсменов или школьников, и во сколько раз, если каждый десятый школьник – спортсмен, а каждый сотый спортсмен – школьник?

140* Андрей и Толик весят вместе 40 кг, Толик и Миша – 50 кг, Миша и Ваня – 90 кг, Ваня и Дима – 100 кг, Дима и Андрей – 60 кг. Сколько весит Андрей?

2. Линейная функция и ее график



Математик, так же как художник или поэт, создает узоры. И если эти узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей.

Годфри Харолд Харди (1877–1947),
английский математик

Разобравшись с прямой пропорциональностью, рассмотрим теперь более сложную зависимость между величинами. Для этого решим следующую задачу.

Задача. Тане надо купить x тетрадей и альбом. Одна тетрадь стоит 25 р., а один альбом – 200 р. Сколько денег должна заплатить Таня за всю покупку?

Решение:

Чтобы узнать стоимость Таниной покупки, надо сложить стоимость тетрадей и альбома. Тетради стоят $25x$ рублей, а альбом – 200 р. Значит, всего Таня должна заплатить $25x + 200$ рублей.

Анализируя полученное выражение, мы замечаем, что зависимость между количеством купленных тетрадей и стоимостью всей покупки не является прямой пропорциональностью – она не может быть описана формулой $y = kx$. Но ее можно записать в виде $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа. Зависимости такого вида называются *линейными*.

Определение 1. Зависимость между величинами x и y называется **линейной**, если данные величины связаны формулой $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа.

В рассмотренной нами выше задаче для каждого натурального значения x мы можем найти соответствующее значение стоимости покупки:

если $x = 1$, то $25x + 200 = 25 \cdot 1 + 200 = 225$ рублей;

если $x = 2$, то $25x + 200 = 25 \cdot 2 + 200 = 250$ рублей и т. д.

В общем случае равенство $y = kx + b$ каждому рациональному числу x сопоставляет единственное число y . Значит, линейная зависимость является функциональной (то есть функцией). А областью определения данной функции, которая получила название *линейной*, являются все известные нам числа.

Определение 2. Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется **линейной функцией**.

Рассмотрим частные случаи функции $y = kx + b$, когда k и (или) b принимают значения, равные нулю:

Значения коэффициентов	Вид функции	Особенности функции
$b = 0$	$y = kx$	Прямая пропорциональность
$k = 0$	$y = b$	Графиком является прямая $y = b$, параллельная оси Ox .
$k = 0, b = 0$	$y = 0$	Графиком является ось Ox .

Таким образом, если $b = 0$, то линейная функция превращается в прямую пропорциональность, а если $k = 0$, то графиком линейной функции является прямая $y = b$,

параллельная оси абсцисс Ox . Если же $k = 0$ и $b = 0$ одновременно, то ее графиком является сама ось абсцисс Ox .

Согласно определению, линейными являются, например, следующие функции:

$$y = 0,5x + 3; y = 2x; y = -0,7x; y = -4x - 1; y = 2; y = -0,1.$$

Чтобы построить график функции, например, $y = 0,5x + 3$, построим сначала знакомый нам график прямой пропорциональности $y = 0,5x$. Это прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 0)$ и $(2; 1)$ (рис. 7).

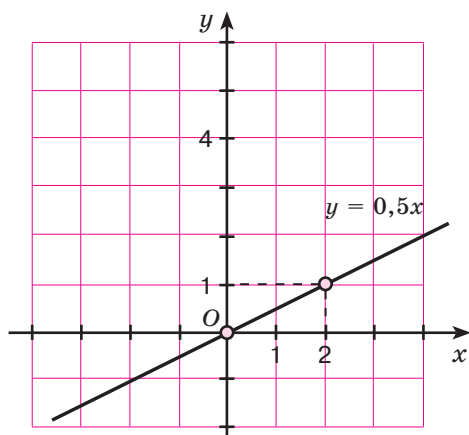


Рис. 7

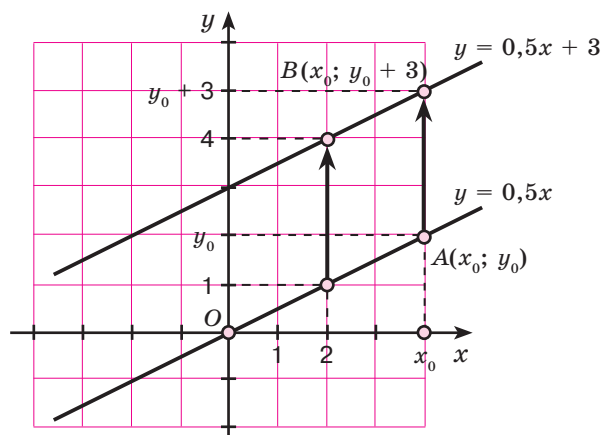


Рис. 8

Для того чтобы построить график функции $y = 0,5x + 3$, заметим, что он получается сдвигом графика $y = 0,5x$ вдоль оси Oy на 3 единицы вверх (рис. 8). Действительно, найдем значение этих функций в произвольной точке x_0 :

Функция	Значение аргумента	Значение функции	Соответствующая точка графика
$y = 0,5x$	x_0	$y_0 = 0,5x_0$	$A(x_0; y_0)$
$y = 0,5x + 3$	x_0	$0,5x_0 + 3 = y_0 + 3$	$B(x_0; y_0 + 3)$

Таким образом, ордината любой точки B графика $y = 0,5x + 3$ на 3 единицы больше, чем ордината точки A графика $y = 0,5x$ с той же абсциссой x_0 . Значит, если мы сделаем параллельный перенос графика $y = 0,5x$ на 3 единицы вверх вдоль оси Oy , то получим график $y = 0,5x + 3$.

Аналогично рассуждая, можно показать, что

График линейной функции $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, может быть получен из графика функции $y = kx$ путем его параллельного переноса вдоль оси Oy на b единиц вверх, если b – положительно, или на $|b|$ единиц вниз, если b – отрицательно.

Итак, график линейной функции также является прямой. Значит, как и в случае прямой пропорциональности, для его построения нам достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этому графику.

Построим, например, график функции $y = -\frac{x}{3} - 1$. Мы можем построить этот график двумя способами.

Способ 1

Этот способ удобен, когда нами уже построен график $y = -\frac{x}{3}$.

Так как коэффициент b нашей линейной функции равен $-1 < 0$, то график функции $y = -\frac{x}{3} - 1$ получается из графика функции $y = -\frac{x}{3}$ параллельным переносом вдоль оси Oy на $|-1| = 1$ единицу вниз (рис. 9).

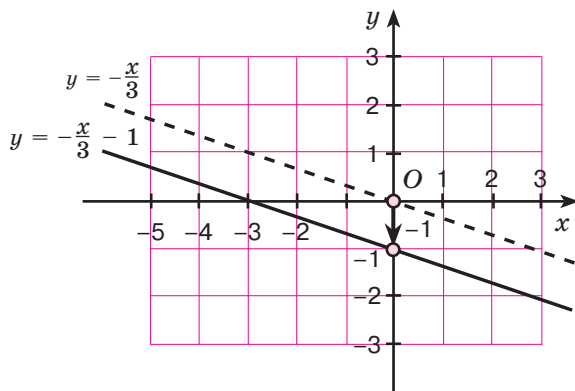


Рис. 9

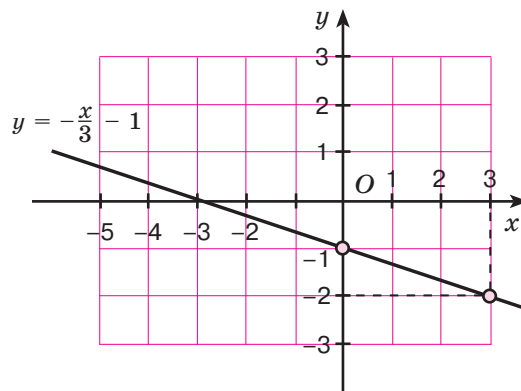


Рис. 10

Способ 2

Этот способ удобен для построения произвольного графика линейной функции.

Найдем две точки, принадлежащие графику функции $y = -\frac{x}{3} - 1$.

Обычно выбирают одну точку с абсциссой 0, а вторую — произвольно, с учетом удобства вычислений, например:

$$\text{если } x = 0, \text{ то } y = \frac{1}{3} \cdot 0 - 1 = -1,$$

$$\text{если } x = 3, y = -\frac{1}{3} \cdot 3 - 1 = -2.$$

Значит, указанный график проходит через точки с координатами $(0; -1)$ и $(3; -2)$.

Построим эти две точки и проведем через них прямую. Полученная прямая и будет являться графиком указанной зависимости (рис. 10).

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм построения графика линейной функции.

**Алгоритм построения графика функции $y = kx + b$**

1. Выбрать два различных значения x : x_1 и x_2 .
2. Вычислить значение $y_1 = kx_1 + b$.
3. Вычислить значение $y_2 = kx_2 + b$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Отметить на координатной плоскости Oxy точку B с координатами $(x_2; y_2)$.
6. Через точки A и B провести прямую.

Отметим, что данный алгоритм построения графика линейной функции может использоваться при любых k и b . А значит, с его помощью может быть построен и график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ (случай, когда $b = 0$), и график прямой $y = b$ (случай, когда $k = 0$).

Способ построения графика линейной функции с помощью графика прямой пропорциональности дает возможность провести *исследование взаимного расположения графиков линейной функции*.

Графики линейных функций $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$ могут быть получены параллельным переносом вдоль оси Oy одного и того же графика $y = kx$ (рис. 11). При этом прямые $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$ будут параллельны одной и той же прямой $y = kx$, а, значит, параллельны друг другу. Поэтому, графики линейных функций с одинаковыми коэффициентами при x , параллельны.

Если линейные функции имеют разные коэффициенты при x , то прямые будут пересекаться.

Понятно, что если *все* коэффициенты линейных функций будут одинаковы, то их графики будут совпадать.

Это можно отразить в следующей таблице:

Связь между коэффициентами функций	Взаимное расположение графиков
$k_1 \neq k_2$	Прямые пересекаются
$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$	Прямые параллельны
$k_1 = k_2, b_1 = b_2$	Прямые совпадают

Отметим, что коэффициент при x принято называть *угловым коэффициентом*, потому что угол, образованный лучом Ox и частью прямой, расположенной в верхней полуплоскости, зависит только от этого коэффициента.

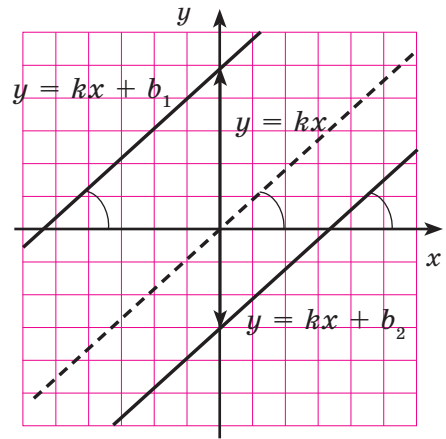


Рис. 11

К

141

1) Из приведенных ниже функций выберите те, которые являются прямой пропорциональностью:

$$y = 4x - 2; \quad y = -\frac{x}{3}; \quad y = 5x^2; \quad y = 9 : x; \quad y = x; \quad y = -x + 1; \quad y = 2x.$$

2) Для каждой из выбранных функций назовите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения ее графика на координатной плоскости. Постройте все данные графики на одной координатной плоскости и проверьте правильность своих рассуждений.

142

1) а) На овощной базе было 5 т картофеля. Ежедневно на базу привозили по 2 т картофеля. Запишите формулу зависимости количества картофеля на базе в тоннах от количества дней завоза картофеля.

б) После того как Михаил прошел 4 км, он пошел со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости длины пути в километрах, пройденного Михаилом, от времени его движения со скоростью 3 км/ч (в часах).

в) До начала наполнения бассейна в нем было 3 м³ воды. После включения насоса в него ежечасно стало поступать 0,5 м³ воды. Запишите формулу зависимости объема воды в бассейне в м³ от времени работы насоса в часах.

г) Температура воды в чайнике равна 20 °С. После того как чайник поставили на огонь, температура воды в нем стала ежеминутно повышаться на 10 °С. Запишите формулу зависимости температуры воды в чайнике в °С от времени его нагревания в минутах.

2) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их все с помощью одной общей формулы. Является ли эта зависимость функциональной?

3) Рассмотрите частные случаи построенной зависимости, когда один или сразу оба коэффициента равны нулю. Что вы замечаете? Сравните свои наблюдения и выводы с выводами на стр. 36 учебника.

143

Выберите из предложенных зависимостей между переменными y и x линейные функции, запишите их в виде $y = kx + b$ и определите коэффициенты k и b . Найдите область определения и область значений этих функций.

а) $y = -x + 5$;

г) $y = x : 2$;

ж) $y = -8$;

б) $y = 4 - 3x$;

д) $y = 7 : x - 2$;

з) $y = x^2 + 5$;

в) $y = 12x$;

е) $y = 0,5x + 1$;

и) $y = \frac{5 - 8x}{2}$.



144

1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$. Что вы замечаете? Сопоставьте свои выводы с выводами на стр. 37 учебника.

2) Найдите два способа построения графика линейной функции и примените их для построения графика функции $y = -\frac{x}{3} - 1$.

3) Используя свой опыт построения графика функции $y = -\frac{x}{3} - 1$, составьте общий алгоритм построения графика линейной функции и сравните его с алгоритмом, приведенным на стр. 38 учебника.

145

Линейная зависимость задана аналитически (формулой). Заполните таблицу и постройте ее график. В точках с какими координатами этот график пересекает ось абсцисс, ось ординат? В каких координатных четвертях он расположен?

а) $y = x + 2$

в) $y = -2x + 3$

д) $y = 0,4x - 2$

x	0	-4
y		

x	0	-2
y		

x	0	5
y		

б) $y = -x + 4$

г) $y = 3x - 5$

е) $y = -2\frac{1}{3}x - 4$

x	0	4
y		

x	0	2
y		

x	0	-3
y		

146

Пользуясь формулой, задающей линейную зависимость, заполните пустые клетки таблицы:

а) $y = 3x - 9$

б) $y = -6x + 7$

в) $y = 0,5x - \frac{2}{3}$

x	-1	
y		-6

x	2,5	
y		0

x	1	
y		-2

147

Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = -1$. Составьте таблицу и запишите в ней результаты вычислений.

а) $f(x) = 2x + 7$;

в) $f(x) = 9 - 4x$;

д) $f(x) = 1,5x - 2$;

ж) $f(x) = 6x - 13$;

б) $f(x) = -3x + 8$;

г) $f(x) = 0,5x + 3$;

е) $f(x) = 11 - 3,5x$;

з) $f(x) = 15 - 9x$.

148 Постройте график функции $y = f(x)$. При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

а) $f(x) = x - 2$; б) $f(x) = -2x + 3$; в) $f(x) = -0,5x + 1,5$; г) $f(x) = 0,8x - 4$.

149 Постройте график функции. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = x - 3$; $a = -5$; $b = -2$; в) $f(x) = -0,5x + 4$; $a = -2$; $b = 6$;

б) $f(x) = -2x - 1$; $a = -2$; $b = 5$; г) $f(x) = 1,5x + 2$; $a = 4$; $b = -2,5$.

150 Постройте график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $a \leq x \leq b$. Отметьте цветным карандашом на оси Ox область определения, а на оси Oy – область значений данной функции.

а) $f(x) = 4x + 3$, если $a = -2$, $b = 1$; в) $f(x) = -3x + 1$, если $a = -2$, $b = 3$;

б) $f(x) = 5 - 2x$, если $a = -1$, $b = 5$; г) $f(x) = 0,5x + 2$, если $a = -4$, $b = 2$.

151 Постройте на одной координатной плоскости графики трех данных функций. Что вы замечаете?

а) $y = -x$; $y = -x + 1$; $y = -x - 2$; б) $y = 2x$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 4$.

Определите по графикам, на сколько единиц изменяется (уменьшается или увеличивается) значение функции, если значение аргумента увеличивается на 1, уменьшается на 2.

152 1) Как расположены относительно прямой $y = 5x$ графики функций:

$$y = 5x - 1; \quad y = 5x + 2; \quad y = 5x - 6; \quad y = 5x + 4?$$

2) Как расположены относительно прямой $y = -7x$ графики функций:

$$y = 6 - 7x; \quad y = -7x - 9; \quad y = -7x + 11; \quad y = -3 - 7x?$$

153 1) Как по графику функции $y = kx$ найти значение коэффициента k ?

2) Проанализируйте взаимное расположение графиков линейных функций на рис. 12 и задайте данные функции аналитически (формулами).

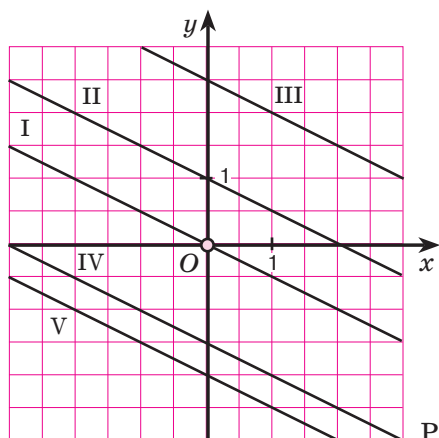


Рис. 12

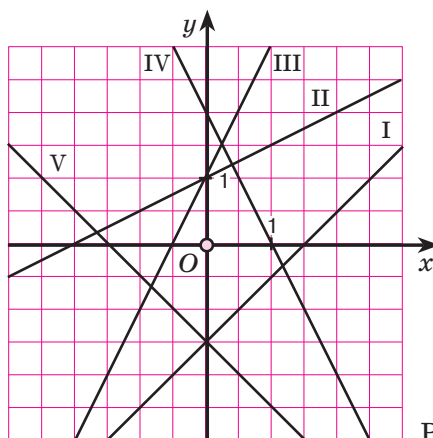


Рис. 13

154 Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя получившийся график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:

- а) $k = 1, b = -4$; в) $k = -3, b = 2$; д) $k = 4, b = -2$;
б) $k = 0,5, b = 6$; г) $k = -1, b = -3$; е) $k = -1,5, b = 8$.

Определите по графикам, на сколько единиц изменяется значение функции, если значение аргумента увеличивается на 2, уменьшается на 1.

155 Задайте формулой каждую из функций, графики которых представлены на рис. 12.

156 Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A .

- а) $f(x) = -6x - 11, A(-2; 1)$; в) $f(x) = 2,8x + 10, A(5; 4)$;
б) $f(x) = -7x + 30, A(-4; 2)$; г) $f(x) = -5 + 9x, A(6; 49)$.

157 При каких значениях b график функции $y = 3x + b$ проходит через точку A ?

- а) $A(1; 4)$; б) $A(-1; -5)$; в) $A(2; 12)$; г) $A(-3; 0)$.

158 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy .

- а) $f(x) = 2x + 12$; в) $f(x) = 2,8x - 7$; д) $f(x) = 1,1x + 4,4$;
б) $f(x) = -3x + 21$; г) $f(x) = -6x - 4,2$; е) $f(x) = -15x - 4,5$.

159 На одной координатной плоскости Oxy постройте графики линейных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найдите координаты их точки пересечения.

- а) $f(x) = 2x - 1, g(x) = -x + 2$; в) $f(x) = -x + 3, g(x) = 1,5x - 2$;
б) $f(x) = 6 - 3x, g(x) = 2x - 4$; г) $f(x) = -0,5x + 1, g(x) = -5 - 2x$.

160 Постройте график функции $y = 2x - 4$ и определите по графику, как изменяется значение функции y , когда:

- а) x возрастает от 2 до 5; в) x убывает от 3 до -2;
б) x убывает от 1 до -1; г) x возрастает от -3 до 4.

161 В одной координатной плоскости постройте графики линейных функций:

- а) $y = 2; y = -1; y = 5; y = -1,7; y = 0$; б) $y = 1; y = 4,2; y = -3,6; y = -2,5$.

Для каждой функции определите значения коэффициентов k и b .

162 Найдите три точки, принадлежащие графику функции $y = f(x)$, координаты которых являются целыми числами.

- а) $f(x) = 0,5x + 1,5$; б) $f(x) = 4,2x - 3,6$; в) $f(x) = 2,7x + 8,1$.

163 В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + b$, если:

- а) $k > 0, b > 0$; в) $k < 0, b > 0$; д) $k > 0, b = 0$; ж) $k = 0, b > 0$;
б) $k > 0, b < 0$; г) $k < 0, b < 0$; е) $k < 0, b = 0$; з) $k = 0, b < 0$.

164 Определите знаки k и b , если график линейной функции $y = kx + b$ расположен в следующих четвертях координатной плоскости:

- а) в I, II и III четвертях; в) в I, III и IV четвертях;
б) в I, II и IV четвертях; г) во II, III и IV четвертях.

165 Может ли график линейной функции располагаться на координатной плоскости только:

- а) в I и II четвертях; в) в I и IV четвертях; д) во II и IV четвертях;
 б) в I и III четвертях; г) во II и III четвертях; е) в III и IV четвертях?

166 В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	-1	4	1

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	7	-2	-1	5

167 Постройте на одной координатной плоскости Oxy графики:

$$y = 4x; \quad y = 2 - 5x; \quad y = 4x - 3; \quad y = -2 - 5x; \quad y = 4x + 3; \quad y = -5x.$$

Какие из этих прямых пересекаются? Какие прямые параллельны друг другу?

Можно ли было определить взаимное расположение графиков, не выполняя построений? Сравните свои предположения с выводами на стр. 39 учебника.

168 Не выполняя построения графиков функций, определите, какие из графиков параллельны, какие пересекаются, а какие совпадают:

- а) $y = 2x + 3$; в) $y = -2x + 5$; д) $y = 5 + 3x$; ж) $y = 3 + 2x$;
 б) $y = 3x + 2$; г) $y = 2x$; е) $y = 2x - 5$; з) $y = 5x + 3$.

π

169 Вычислите рациональным способом:

- а) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{12}$; в) $3\frac{9}{14} \cdot 7 + 2\frac{5}{18} \cdot 9$; д) $35\frac{5}{6} : 5 + 42\frac{7}{12} : 7$;
 б) $5\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} - 1\frac{5}{18}$; г) $7\frac{4}{5} \cdot 5 - 6\frac{9}{16} \cdot 8$; е) $54\frac{9}{10} : 9 - 72\frac{8}{15} : 8$.

170 Запишите в стандартном виде многочлен, противоположный данному:

- а) $2a + 3b + 4c + (2b - 3c + 4d) - (2c + 3d - 4a)$;
 б) $4,25p^2q - 3,75pq^2 - (-1,3pq^2 + 2,8p^2q)$;
 в) $3m^2 - 1 + (6m^4 - 5m^2 + 2) - (2m^4 - 3m^2 - 5)$;
 г) $0,75y^2 + (0,75xy^2 - 0,8yx^2 - 1,2y^2) - (0,3xy^2 - 0,2yx^2 + 0,25xy^2)$.

171 Найдите сумму многочленов P и Q и запишите получившийся многочлен в стандартном виде:

- а) $P = 2,1x^3 + 3 + (6 - 4x^3)$, $Q = (0,5x^3 + 0,4x^2) - (0,4x^3 - 0,5x^2)$;
 б) $P = 0,2a^2 + 0,25b^2 - (5,1a^2 + 0,5b^2)$, $Q = (0,6a^2 + 0,7b^2) + (0,4a^2 - 0,3b^2)$;
 в) $P = 5p^2 + 6pq + 4q^2 - (7p^2 + 3pq + 5q^2)$, $Q = 4p^2 - 6pq + 9q^2 + (-3p^2 + 7pq - 8q^2)$;
 г) $P = 3x^2y + 3y^2x - 3y^3 - (2x^2y + y^2x - 2y^3)$, $Q = 6x^2y + 7y^2x - 9y^3 - (5x^2y + 7y^2x - 6y^3)$.

172 Решите уравнение:

- а) $x + \frac{2x - 7}{2} - \frac{3x + 1}{5} = 5 - \frac{x + 6}{2}$; в) $\frac{x - 4}{5} + \frac{3x - 2}{10} = \frac{2x + 1}{3} - 7$;
 б) $\frac{2y - 5}{6} + \frac{y + 2}{4} = \frac{5 - 2y}{3} - \frac{6 - 7y}{4} - y$; г) $\frac{4y}{3} - 17 + \frac{3y - 17}{4} = \frac{y + 5}{2}$.

173 Смешали 300 г воды и 60 г соли. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация соли в котором 10%?

174 Смешали 30 л 45%-го раствора кислоты с 10 л 60%-го раствора той же кислоты. Определите процентную концентрацию кислоты в получившемся растворе.

175 Сумма двух рациональных чисел равна 2490. Найдите эти числа, если 6,5% одного из них равны 8,5% другого.

176 Разность двух рациональных чисел равна 438. Найдите эти числа, если 2,25% одного из них равны 8% другого.

177 Решите уравнение:

а) $3|x - 2| + 5|x - 4| = 10$; б) $6|x + 4| + 7|x - 3| = 15$.

178 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) $918^{819^{18}}$; б) $676^{676^{21}}$.

Д

179 Линейная зависимость задана аналитически (формулой). Заполните таблицу и постройте ее график. В каких точках этот график пересекает ось абсцисс, ось ординат? В каких координатных четвертях он расположен?

а) $y = -x - 2$

x	0	-3
y		

б) $y = 2x - 5$

x	0	3
y		

в) $y = -0,6x + 4$

x	0	-5
y		

180 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$. Составьте таблицу и запишите в ней результаты вычислений.

а) $f(x) = 6x - 8$;

б) $f(x) = -0,4x + 2$;

в) $f(x) = -3x - 7$.

181 Постройте график функции $y = f(x)$. При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

а) $f(x) = x + 3$;

б) $f(x) = -2x - 4$;

в) $f(x) = 0,5x + 2$.

182 Постройте график функции. Найдите по графику: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = -3x - 6$; $a = -3$; $b = 9$;

б) $f(x) = 1,5x + 5$; $a = -4$; $b = 11$.

Проверьте точность своих ответов с помощью вычислений.

183 Постройте график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $a \leq x \leq b$. Отметьте цветным карандашом на оси Ox область определения, а на оси Oy — область значений данной функции.

а) $f(x) = -x + 1$, если $a = -4$, $b = 3$;

б) $f(x) = 1,2x - 3$, если $a = -5$, $b = 0$.

184 Не строя график функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A .

а) $f(x) = 6x - 7$, $A(3; -11)$;

в) $f(x) = -3x + 12$, $A(-5; -3)$;

б) $f(x) = 4,2x + 3$, $A(1; 7,2)$;

г) $f(x) = -9x - 7$, $A(-6; -47)$.

185 Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя получившийся график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:

а) $k = -2, b = 1$; б) $k = 1, b = 4$; в) $k = -\frac{2}{3}, b = -3$; г) $k = 0, b = 2$.

186 При каких значениях b график функции $y = -2x + b$ проходит через данную точку?

а) $A(1; 2)$; б) $B(-1; -4)$; в) $C(2; 3)$; г) $D(-2,5; 0)$.

187 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :

а) $f(x) = 3x + 15$; б) $f(x) = 3,2x - 16$; в) $f(x) = 1,3x + 3,9$.

188 В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-13	5	-3	-2	7

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-2	5	4	11

189 Найдите сумму многочленов P и Q и запишите ее как многочлен стандартного вида:

а) $P = 4a^2 - 7 + (8 - 2a^2)$, $Q = (7a + 4a^2) - (4a - 7a^2)$;

б) $P = 3b^2 + 4bc - (3b^2 - 2bc - 4b^2)$, $Q = -5b^2 - 3bc + (9b^2 - 7bc - 5b^2)$.

190 Решите уравнение:

а) $\frac{3x-2}{11} - \frac{x}{3} = \frac{3x-5}{7} - \frac{5x-3}{9}$; б) $\frac{5y+1}{6} + \frac{3y-1}{5} = \frac{9y+1}{8} - \frac{1-y}{3}$.

191 Для приготовления глазури для пончиков в пончиковой компании Антона и Ксюши смешали 500 кг воды и 200 кг сахара. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация сахара в котором 5%?

192 Сумма выручек двух филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши за март была равна 765 тыс. р. Найдите выручку каждого из этих филиалов, если известно, что 15% выручки одного филиала равно 10% от выручки другого.

193 Решите уравнение: $7|x+4| - 9|x-7| = 21$.

194 Определите, какой цифрой оканчивается число: $217^{712^{31}}$.

195 Постройте график функции $y = Ax + B$, где

$A = (0,1955 + 0,187) : 0,085 + 15,76267 : (100,6 + 42,697) - 1,51$;

$B = (86,9 + 667,6) : (37,1 + 13,2) : 3 + (9,09 - 9,0252) \cdot (25,007 - 12,507) - 0,81$.

196* Докажите, что среди любого количества людей в некотором зале хотя бы двое имеют одинаковое число знакомых среди присутствующих.