

Глава 3

Дроби

§ 1. Понятие дроби

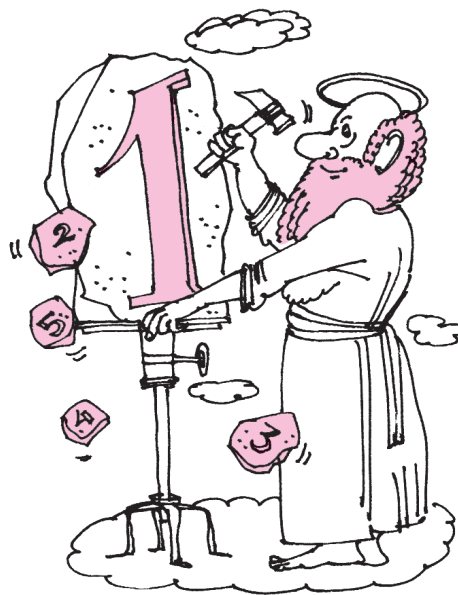
С самых древних времен для решения жизненно важных вопросов людям приходилось считать предметы и измерять величины, то есть отвечать на вопрос «Сколько?»: сколько овец в стаде, сколько мер зерна собрано с поля, сколько верст от села до уездного центра и т. д. Так появились **числа**. Как иногда в шутку говорят математики, «Бог создал натуральные числа, а все остальное – дело рук человеческих».

Однако для ответа на вопрос «Сколько?» натуральных чисел очень часто не хватало. Так, убив мамонта и разделив его поровну, 10 охотников не могли сказать, «сколько мамонтов» получил каждый. И еще долгое время после того, как мамонты вымерли, разделив три лепешки поровну на пятерых своих детей, их мама не могла сказать, сколько же лепешек получил каждый. Человечеству понадобилось придумать новые – **дробные** – числа, то есть придумать дроби.

Для ответа на более сложные вопросы – например, сколько овец в двух стадах, у кого из двух земледельцев урожай больше – понадобилось научиться складывать числа, сравнивать их между собой. Так постепенно, в течение тысячелетий, формировалось понятие числа. Люди учились называть и записывать числа, проводить с ними вычисления и создали тот пласт математической культуры, который в дальнейшем был назван **арифметикой**.

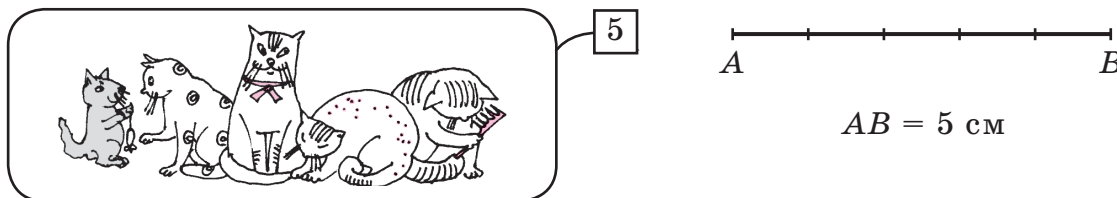
Значительную часть этого многовекового пути мы уже прошли в начальной школе – подобно тому, как за 9 месяцев каждый из нас из зародыша превратился в человека, проделав путь, на который природе понадобились миллионы лет.

Теперь нам предстоит «прожить» еще несколько веков развития математики и прежде всего изучить арифметику дробных чисел – научиться сравнивать дроби между собой, совершать с ними арифметические действия, а главное – использовать эти числа при решении практических задач. Но вначале нам необходимо вспомнить некоторые важные сведения о натуральных числах и дробях, известные из начальной школы.



1. Натуральные числа и дроби.

Натуральные числа служат, прежде всего, для счета предметов. Они получаются и при измерении величин, – но только тогда, когда выбранная мерка укладывается в измеряемой величине целое число раз. Например, число 5 – это количество кошек на рисунке и длина отрезка AB в сантиметрах:



Множество натуральных чисел обозначают буквой N . Это множество бесконечно: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Как нам уже известно, для записи натуральных чисел обычно пользуются **десятичной позиционной системой** записи чисел.

Любые два натуральных числа можно сравнить по величине, можно сложить или перемножить. Действия сложения и умножения натуральных чисел обладают следующими **основными свойствами**:

$a + b = b + a$ – **переместительное** свойство сложения;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ – **сочетательное** свойство сложения;

$ab = ba$ – **переместительное** свойство умножения;

$(ab)c = a(bc)$ – **сочетательное** свойство умножения;

$(a + b)c = ac + bc$ – **распределительное** свойство умножения относительно сложения.

Натуральные числа можно не только складывать и умножать, но и вычитать и делить. Мы уже знаем, что на множестве натуральных чисел N :

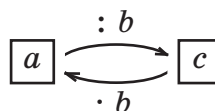
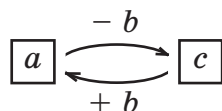
Разность чисел a и b – это такое число c , что $b + c = a$.

Частное чисел a и b – это такое число c , что $bc = a$.

Это **определения** разности и частного натуральных чисел. С помощью знака равносильности их можно записать так:

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$$

$$a : b = c \Leftrightarrow cb = a$$



Вычитание и деление являются **обратными действиями** по отношению к сложению и умножению соответственно, то есть:

$$(a - b) + b = a$$

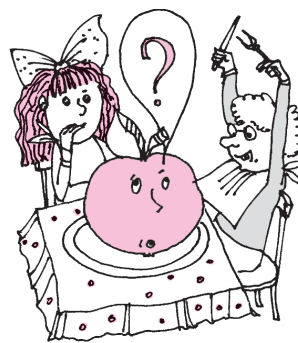
$$(a : b) \cdot b = a$$

$$(a + b) - b = a$$

$$(a \cdot b) : b = a$$

(при условии, что данные действия вычитания и деления выполнимы на множестве N).

В отличие от сложения и умножения, вычитание и деление натуральных чисел можно выполнить не всегда. Например, нельзя число 7 разделить на 2 – нет такого натурального числа c , для которого $c \cdot 2 = 7$.



С другой стороны, на практике 7 одинаковых яблок можно разделить поровну между 2 детьми. Но в этом случае неизбежно появляется половина яблока – *дробное* число яблок, для математического обозначения которого вводится дробь $\frac{1}{2}$. Тогда при дележе яблок каждый получит 7 половинок, или $\frac{7}{2}$ от целого яблока, и мы видим, что применение дробных чисел позволяет ответить на вопрос «Сколько?» и в тех случаях, когда натуральных чисел недостаточно.

Для того чтобы математическая теория могла отвечать на практические вопросы, во всех таких случаях вводятся в рассмотрение новые – *дробные* – числа, или дроби.

Дробь – это запись вида $\frac{m}{n}$, где $m \in N$, $n \in N$. С помощью дробей можно представить результат деления любого натурального числа на любое натуральное число, например:

$$7 : 2 = \frac{7}{2}, \quad 3 : 7 = \frac{3}{7}, \quad 16 : 24 = \frac{16}{24}.$$

И вообще, для любых натуральных чисел m и n можно записать:

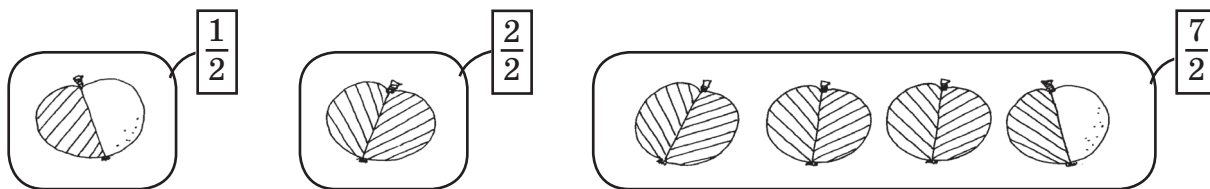
$$m : n = \frac{m}{n}.$$

В дроби $\frac{m}{n}$ (читается: «эм на эн» или «эм энных») число m , находящееся *над* чертой, называется **числителем**, а число n , находящееся *под* чертой, – **знаменателем**. Знаменатель показывает, на сколько равных частей разделили единицу («целое»), а числитель показывает, сколько таких частей взяли. Черту дроби можно понимать как знак деления. Если натуральные числа дополнить нулем, то, взяв $m = 0$, будем считать, что $0 : n = \frac{0}{n}$ ($n \neq 0$).

Если числитель дроби равен ее знаменателю, то $n : n = \frac{n}{n} = 1$.

Если числитель дроби меньше знаменателя, то дробь называют **правильной**, а если он больше или равен знаменателю, то дробь называют **неправильной**.

Например, дробь $\frac{1}{2}$ – правильная, а дроби $\frac{2}{2}$ и $\frac{7}{2}$ – неправильные:



Правильные дроби меньше 1, а неправильные – больше или равны 1.

При делении 7 яблок на двоих детей ответ можно получить и другим способом: раздать каждому по 3 яблока и одно оставшееся разделить пополам. Тогда каждый получит по $3 + \frac{1}{2}$, или, как обычно записывают, $3\frac{1}{2}$ яблока. Вторая запись при этом называется **смешанным числом** (или **смешанной дробью**) – «целое число + дробь».

Ясно, что при любом из рассмотренных способов дележа каждый получит одно и то же количество яблок, значит, числа $\frac{7}{2}$ и $3\frac{1}{2}$ равны: $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. При этом оба числа могут быть преобразованы друг в друга по следующим правилам.

Чтобы преобразовать неправильную дробь в смешанное число, числитель делят на знаменатель с остатком: частное дает целую часть, остаток – числитель, а делитель – знаменатель дробной части.

В нашем примере:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 - \text{знаменатель дробной части} \\ - 6 & 3 - \text{целая часть} \\ \hline 1 & 1 - \text{числитель дробной части} \end{array}$$



Обратно, чтобы записать смешанное число в виде неправильной дроби, можно:

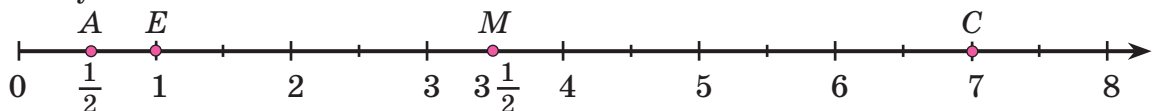
- 1) знаменатель умножить на целую часть;
- 2) к произведению прибавить числитель дробной части;
- 3) полученную сумму записать в числитель, а знаменатель оставить без изменений. А именно:

$$3\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Эти правила можно использовать для любых смешанных чисел и неправильных дробей. Например, $\frac{39}{7} = 5\frac{4}{7}$, так как при делении 39 на 7 получается частное 5 и остаток 4. Обратно, $5\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 5 + 4}{7} = \frac{39}{7}$.

Если числитель неправильной дроби делится на знаменатель без остатка, то эта дробь преобразовывается в натуральное число: $\frac{18}{3} = 18 : 3 = 6$.

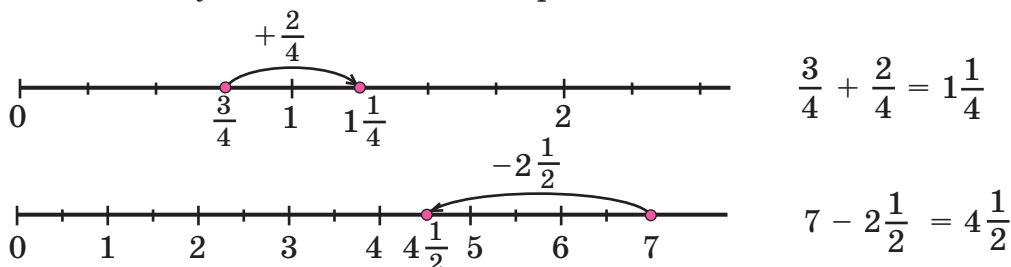
Натуральные и дробные числа можно изображать точками **числового (координатного) луча**. Это луч, на котором расположены числа по следующему правилу: выбран единичный отрезок, начало луча соответствует числу 0, а все остальные точки соответствуют числам, равным расстояниям от этой точки до начала луча.



Число, соответствующее некоторой точке числового луча, называется **координатой** этой точки. Например, координатой точки E является число 1, координатой A – число $\frac{1}{2}$, координатой M – число $3\frac{1}{2}$, а координатой C – число 7. Пишут: $E(1)$, $A(\frac{1}{2})$, $M(3\frac{1}{2})$, $C(7)$.

По расположению двух точек на числовом луче можно сравнивать числа: **большее из двух чисел расположено правее, а меньшее – левее.**

На числовом луче можно также изображать сложение и вычитание чисел:



Вместе с тем числовой луч обычно используют для сравнения, сложения и вычитания чисел тогда, когда числа несложно изобразить. А если нет? Алгоритмы сравнения и операций над натуральными числами и числом 0 нам уже хорошо известны. Мы познакомились также с некоторыми правилами сравнения дробей, научились складывать и вычитать дроби с одинаковыми знаменателями. А вот остальные действия с дробными числами и их свойства нам еще предстоит изучить.

К

1 Какие высказывания истинны, а какие – ложны? Какие – общие, а какие – типа «хотя бы один»?

- Любое натуральное число в десятичной позиционной системе счисления можно записать с помощью десяти цифр.
- Некоторые натуральные числа записываются с помощью трех цифр.
- Из двух натуральных чисел больше то, у которого больше первая цифра.
- Некоторые четырехзначные натуральные числа больше некоторых пятизначных натуральных чисел.
- Существует наименьшее натуральное число.
- Существует наибольшее натуральное число.
- Все натуральные числа больше единицы.
- Каждое натуральное число на единицу меньше следующего за ним.
- Натуральное число может быть больше своего квадрата.

2

- Запиши подряд три раза число 3560. Прочитай получившееся число. Сколько в его записи классов? Сколько разрядов?
- Что означает цифра 3 в записи получившегося числа? Какая цифра в разряде сотен миллионов? Сколько в нем всего сотен миллионов?
- Назови разряды, в которых записаны нули. Можно ли пропустить нули в записи числа?
- Какие различные системы записи чисел ты знаешь? Как записать римскими цифрами число 3560?

3 Запиши цифрами число: 1) следующее за числом восемьсот пять миллионов двести семьдесят девять тысяч девятьсот девяносто девять; 2) предшествующее числу семьдесят четыре миллиарда пятьдесят шесть миллионов две тысячи девятьсот; 3) предшествующее числу 35 001 400 000; 4) следующее за числом 192 939 495 999.

4 В числах вместо некоторых цифр стоят звездочки. Можно ли их сравнить?
1) $*1***$ и $9**$; 2) $27**$ и $30**$; 3) $99***$ и $*8***$; 4) $***5$ и $***6$.

5 Прочитай определение и назови определяемое понятие:

Произведением числа a на число b ($b > 1$) называется сумма b слагаемых, каждое из которых равно a :

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ раз}}, \text{ где } a, b \in N$$

Почему при $b = 1$ и $b = 0$ данное определение не имеет смысла? Как определяется понятие произведения в этих случаях? Запиши эти определения в виде буквенных равенств.

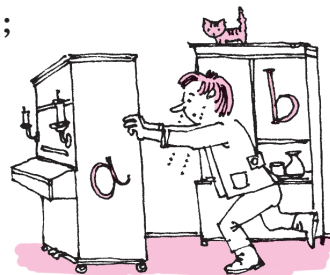
6 Прочитай в тексте данного пункта учебника определения разности и частного. Пользуясь ими, найди, если возможно, значения выражений: $a - 0$, $a - a$, $a : 1$, $a : a$, $0 : a$, $a : 0$. Какое из данных выражений не имеет смысла?

7 Счет-тест (10 мин)

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1) $938\,790\,475 + 13\,076\,225\,542$; | 3) $67\,190 \cdot 40\,500$; |
| 2) $210\,521\,052\,105 - 209\,286\,484\,215$; | 4) $5\,925\,100\,800 : 976$. |

8 Запиши в тетрадь буквенные равенства, выражающие свойства сложения и умножения: переместительное, сочетательное, распределительное – и объясни их смысл. Используя эти свойства, реши примеры наиболее удобным способом:

- 1) $201 + 202 + 203 + 204 + 205 + 206 + 207 + 208 + 209$;
- 2) $400 + (24\,589 + 927) + (3600 + 73 + 411)$;
- 3) $4 \cdot 5 \cdot 376 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 2$;
- 4) $2 \cdot (14 \cdot 2 \cdot 8) \cdot (125 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5)$;
- 5) $974 \cdot 385 + 5 \cdot 385 + 385 \cdot 21$;
- 6) $5084 \cdot 23 + 5084 + 976 \cdot 5084$.



9 а) Составь и расположи в порядке возрастания все возможные трехзначные числа, которые можно записать с помощью цифр 7, 1, 9 (цифры в записи числа не повторяются).

б) Составь и расположи в порядке убывания все возможные пятизначные числа, которые можно записать с помощью трех четверок и двух нулей.

10 Используя все цифры, причем каждую только один раз, составь и прочитай наименьшее возможное натуральное число, в разряде сотен миллионов которого стоит цифра 5, а единицы разряда десятков тысяч отсутствуют.

11 Прочитай число 39 052 784. Зачеркни три цифры так, чтобы получилось: 1) наименьшее возможное натуральное число; 2) наибольшее возможное натуральное число.

12 В сказочном государстве Бусирия люди знают только натуральные числа и 0, умеют их складывать и вычитать, а «умножают» их по бусирскому правилу:

$$a \otimes b = ab + a + b.$$

Представь себя учеником бусирской школы и выполни контрольную работу:

1) Вычисли значения выражений:

$$2 \otimes 3, 4 \otimes 9, 0 \otimes 712, 5 \otimes 8, 2 \otimes 8 + 3 \otimes 8.$$

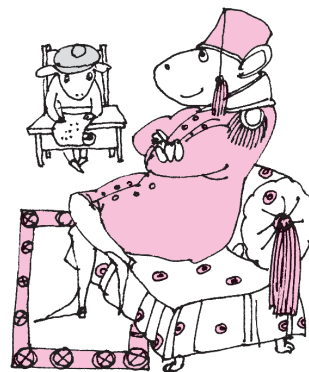
2) Докажи, что бусирское умножение « $\otimes$ » обладает переместительным свойством.

3) Выясни, обладает ли оно сочетательным свойством.

4) Проверь, выполняется ли распределительное свойство:

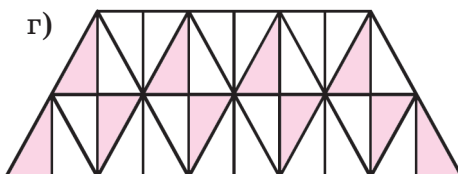
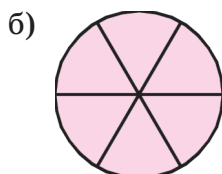
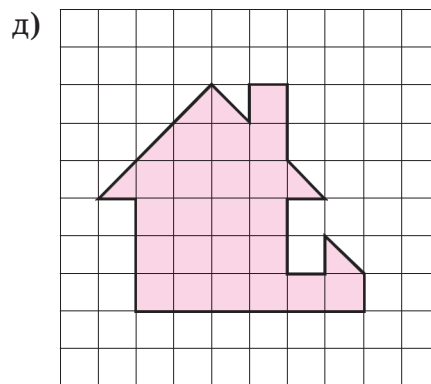
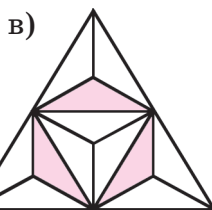
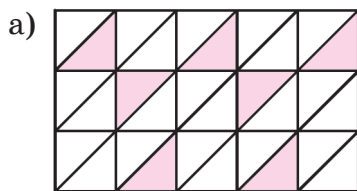
$$(a + b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c.$$

5) Какое число обладает свойством единицы (при обычном умножении: $a \cdot 1 = a$)? А свойством нуля ($a \cdot 0 = 0$)?



13 Что обозначают числитель и знаменатель дроби? Нарисуй чертеж, иллюстрирующий дробь: а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{4}{4}$; в) $\frac{7}{6}$.

14 Запиши с помощью дробей, какие части фигур закрашены. Какие из этих частей можно выразить натуральными числами, а какие – с помощью процентов?



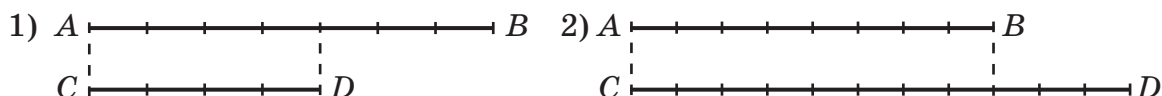
- 15** Прочитай дроби. Какая дробь в каждой из групп *a*, *b* и *в* может быть «лишней»? Обоснуй свой выбор.

а) $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{11}{13}$; б) $\frac{25}{7}, \frac{15}{14}, \frac{10}{21}, \frac{47}{18}$; в) $\frac{7}{13}, \frac{13}{13}, \frac{28}{13}, \frac{39}{11}$.

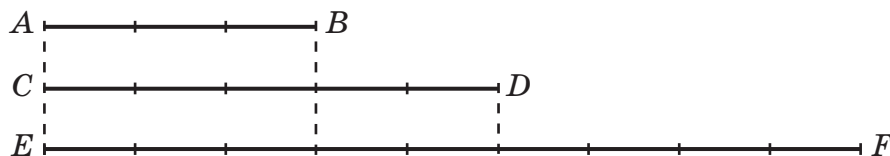
- 16** Запиши с помощью дроби:

- 1) Какую часть метра составляют 1 дм, 9 дм, 1 см, 27 см?
- 2) Какую часть тонны составляют 1 кг, 16 кг, 1 ц, 85 ц?
- 3) Какую часть часа составляют 1 мин, 3 мин, 1 с, 49 с?

- 17** Какую часть отрезка *AB* составляет отрезок *CD*? Какую часть отрезка *CD* составляет отрезок *AB*?



- 18** Какую часть каждый из отрезков *AB*, *CD* и *EF* составляет от других отрезков? Сделай записи.



- 19** Найди множество значений переменной x ($x \in N$), при которых:

- а) дробь $\frac{x-4}{7}$ будет правильной; б) дробь $\frac{6}{x+2}$ будет неправильной.

- 20** Какие высказывания истинны? К ложным общим высказываниям приведи контрпримеры.

- а) Всякая правильная дробь меньше 1.
- б) Неправильная дробь всегда больше 1.
- в) Некоторые неправильные дроби меньше 1.
- г) Любая правильная дробь меньше любой неправильной.
- д) Неправильная дробь может быть меньше 2.

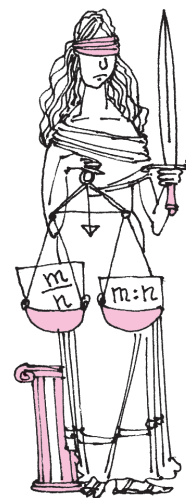
- 21** Запиши частные $3:25$, $17:6$, $4:1$, $20:2$, $7:7$ в виде дроби, а дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{24}{11}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{72}{9}$, $\frac{45}{45}$ в виде частного.

- 22** Реши уравнения:

1) $\frac{x}{15} = 5$; 2) $\frac{96}{y} = 16$; 3) $\frac{k-2}{17} = 8$; 4) $\frac{336}{n+29} = 7$.

Образец:

$$\frac{a}{8} = 2 \Leftrightarrow a = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow a = 16$$



- 23** 1) Ленту длиной 3 метра разрезали на 4 равные части. Сколько метров в каждой части?

- 2) Пловец за 7 секунд проплыл 5 метров. С какой скоростью он плыл?

24 Сколько седьмых долей в единице? Представь единицу в виде дроби со знаменателем 5, 67, 89, 100, n .

25 Сколько пятых долей в числе 3? Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, k замени равными им дробями сначала со знаменателем 9, затем – 11, а затем – со знаменателем 100. Как записать с помощью знака процента сотые доли величины?

26 1) Нарисуй числовой луч, приняв за единицу 8 клеток тетради. Отметь на нем числа $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{17}{8}$.

2) Сравни дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{8}$. Как сравнить дроби с помощью числового луча?

3) Сравни дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$. Вспомни правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями. Пользуясь им, сравни дроби $\frac{19}{78}$ и $\frac{53}{78}$.

4) Сравни дроби $\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{8}$. Запиши две какие-нибудь дроби с одинаковыми числителями и сравни их.

5) Представь дробь $\frac{17}{8}$ в виде смешанного числа.

27 1) Выдели целую часть из дробей $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{19}{6}$. Проиллюстрируй решение с помощью числового луча.

2) Выдели целую часть из дробей $\frac{38}{7}$, $\frac{45}{12}$, $\frac{54}{18}$, $\frac{231}{100}$, $\frac{586}{125}$, $\frac{9769}{1000}$.

28 1) 19 кг халвы разложили поровну в 4 коробки. Сколько килограммов халвы положили в каждую коробку?

2) Из 40 м ткани сшили 9 одинаковых костюмов. Сколько метров ткани пошло на каждый костюм?

29 Знак какого арифметического действия пропущен в записи смешанного числа между его целой и дробной частью?

30 1) Представь смешанные числа $1\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{5}$, $3\frac{2}{5}$, $4\frac{3}{5}$ в виде неправильных дробей. Проиллюстрируй решение на числовом луче.

2) Представь в виде неправильных дробей числа $1\frac{7}{9}$, $5\frac{2}{5}$, $7\frac{9}{13}$, $15\frac{4}{7}$, $10\frac{21}{47}$.

31 Счет-тест (5 мин)

1) $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$;

3) $2 + \frac{4}{7}$;

5) $6\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5}$;

7) $5\frac{2}{7} - 2\frac{5}{7}$;

2) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$;

4) $5 - \frac{3}{4}$;

6) $12\frac{7}{9} - 4\frac{5}{9}$;

8) $1\frac{8}{11} + 6\frac{3}{11}$.

- 32** Числа на карточках записываются по общему правилу. Найди его и заполни клетки со знаком вопроса.

$3\frac{1}{7}$	$5\frac{4}{7}$	$2\frac{3}{7}$
----------------	----------------	----------------

$1\frac{4}{5}$	?	$4\frac{3}{5}$
----------------	---	----------------

?	$8\frac{5}{9}$	$3\frac{7}{9}$
---	----------------	----------------

- 33** Найди расстояние между точками A и B координатного луча, если:

- 1) $A(28\ 715)$, $B(103\ 600)$; 2) $A(3\frac{5}{19})$, $B(7\frac{1}{19})$; 3) $A(8\frac{2}{5})$, $B(1\frac{4}{5})$.

- π 34** Запиши число, представленное в виде суммы разрядных слагаемых:

- 1) $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6$; 3) $5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 4$;
2) $8 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10 + 5$; 4) $4 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2$.

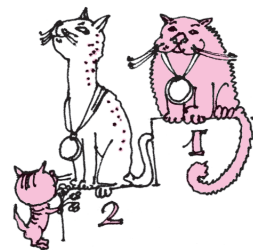
- 35** Представь в виде суммы разрядных слагаемых числа, используя степени числа 10: а) 7984, б) 42 012; в) 505 050; г) 9 090 909; д) 123 456 789; е) 4 400 040 004.

- 36** Найди методом *проб и ошибок* число: 1) квадратом которого является 1764; 2) кубом которого является 2197. Можно ли ответить на вопрос с одной попытки?

- 37** 1) $(863 + 256 \cdot 0) \cdot (214 : 214) - 1 \cdot 863$;
2) $0 \cdot (996 + 7008 \cdot 32 - 74\ 359) + 785 : 1 - (543 - 543) : 9374$;
3) $[596 - 0 : 1249 + (188 : 188) \cdot 4] : 1 + (712 - 60\ 928 : 952) \cdot (38 - 38)$;
4) $72 \cdot (49 : 49) - [(7602 : 14 \cdot 36) \cdot (6815 - 6815) - 0 : 325 + 12 : 1] \cdot 1$.

- 38** Запиши в виде буквенных равенств правила вычитания числа из суммы и суммы из числа и реши с их помощью примеры первого столбика. Перепиши полученные равенства, заменив в них знак «+» на знак « $\cdot$ », а знак «−» на знак «:». Какие правила получились? Используй их для решения примеров второго столбика.

- а) $(283 + 195) - 83$; д) $(29 \cdot 720) : 72$;
б) $(549 + 678) - 478$; е) $(18\ 000 \cdot 56) : 18$;
в) $756 - (256 + 36)$; ж) $1250 : (125 \cdot 5)$;
г) $842 - 396 - 4$; з) $(2430 : 5) : 2$.



- 39** Переведи условие задачи на математический язык:

- 1) На выставке кошек представлены кошки сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород. Сиамских кошек в 2 раза больше, чем ангорских, персидских – в 3 раза больше, чем сиамских, а сибирских – на 13 меньше, чем персидских. Сколько кошек каждой породы на выставке, если всего их 77?
2) На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок на 3 больше, чем двоек, троек на одну меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 человека?

40 1) Если задуманное число вычесть из числа 777, результат уменьшить в 7 раз, а затем увеличить на 7, то получится число, которое на 7 больше, чем наименьшее трехзначное число. Найди задуманное число.

2) Задумали число, разделили на него 555, полученное частное вычли из 55, результат увеличили в 5 раз и получили число, в 10 раз большее квадрата числа 5. Какое число задумали?

41 1) В классе 28 учеников. Девочки составляют $\frac{4}{7}$ количества всех учеников класса. Сколько девочек в классе?

2) В шахматном турнире приняли участие 48 человек, что составило 6% всех учеников школы. Сколько учащихся в этой школе?

3) В танцевальном ансамбле 32 танцора. Из них 8 человек уехали на гастроли. Какая часть участников ансамбля уехала на гастроли?

42 1) Рабочий получил за месяц k рублей. 14% этих денег он истратил на ремонт квартиры. Сколько денег пришлось ему заплатить за ремонт?

2) Маляр покрасил m рам, что составило $\frac{2}{5}$ всех рам, которые ему надо покрасить за день. Сколько рам он должен покрасить в этот день?

3) В автобусном парке n машин. Из них 7 машин ремонтируется. Какая часть всех машин находится в ремонте?

43 Русские изобретатели отец и сын Черепановы построили первый паровоз в 1834 году. Он проезжал 1 км за 4 мин. Какое расстояние проезжал этот паровоз за 1 минуту? Вырази его скорость в километрах в час. Во сколько раз паровоз Черепановых шел медленнее современных поездов, средняя скорость которых составляет примерно 90 км/ч?

44 Скорость катера 24 км/ч. Успеет ли он за 15 мин проплыть 8000 м?

45 Построй 3 угла, в сумме образующих развернутый угол, так, чтобы первый из них был в 2 раза больше второго, а третий – в 3 раза больше первого.

46 Напиши все возможные натуральные числа, составленные с помощью двух пятерок и пяти нулей. Расположи их в порядке убывания. Представь каждое из полученных чисел в виде суммы разрядных слагаемых.

47 1) $79\,797\,979 + x = 1\,067\,452\,300$; 3) $x : 9307 = 8640$;
2) $x - 544\,544 = 11\,756\,686$; 4) $4\,540\,200 : x = 564$.

48 Математический фокус

Запиши четырехзначное число, у которого каждая последующая цифра на 1 больше предыдущей. Затем запиши число теми же цифрами, но в обратном порядке. Вычти из большего числа меньшее. Повтори это еще 3 раза, беря иные числа, и сравни полученные результаты. Что ты замечаешь?



49 Переведи условие задачи на математический язык:

На изготовление свитера, шапки и шарфа израсходовали 555 г шерсти, причем на шапку ушло в 5 раз меньше шерсти, чем на свитер, и на 5 г больше, чем на шарф. Сколько шерсти израсходовали на каждое изделие?

- 50** 1) Какую часть километра составляют 1 м, 58 м, 1 дм, 439 дм?
 2) Какую часть квадратного метра составляют 1 дм², 214 дм², 1 см², 75 см²?
 3) Какую часть центнера составляют 1 кг, 9 кг, 1 г, 547 г?
 4) Какую часть суток составляет 1 ч, 5 ч, 1 мин, 32 мин?

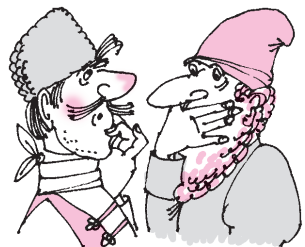
51 С одной пасеки собрали 1350 кг меда, что составляет $\frac{5}{8}$ меда, собранного со второй пасеки. На какой пасеке было больше ульев и на сколько, если с каждого улья получили по 90 кг меда?

52 Выдели целую часть дробей: $\frac{176}{9}$; $\frac{237}{28}$; $\frac{413}{64}$.

53 Представь смешанное число в виде неправильной дроби: $9\frac{2}{7}$; $4\frac{5}{42}$; $2\frac{9}{96}$.

54 Расшифруй скороговорку. Повтори ее 10 раз подряд.

Т $\frac{7}{9} + 3\frac{2}{9}$;	А $15\frac{2}{9} - (7\frac{1}{9} + 4\frac{5}{9})$;
О $9 - 5\frac{1}{4}$;	И $(2\frac{5}{7} + 8\frac{2}{7}) - 4\frac{7}{8}$;
Р $1\frac{7}{8} + 2\frac{6}{8}$;	Х $(4\frac{2}{5} + 3\frac{4}{5}) - (12 - 8\frac{1}{5})$;
П $4\frac{5}{7} - 1\frac{6}{7}$;	С $12\frac{6}{11} - (5\frac{4}{11} + 6\frac{9}{11} - 2\frac{3}{11})$.



$3\frac{5}{9}$	$4\frac{5}{8}$	$4\frac{2}{5}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$	$3\frac{3}{4}$	$4\frac{2}{5}$	$4\frac{5}{8}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{7}{11}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{7}{11}$	$6\frac{1}{8}$	$2\frac{6}{7}$

55 Реши уравнения:

1) $\frac{450}{x} = 9$; 2) $\frac{y}{7} = 9$; 3) $\frac{9+a}{9} = 23$; 4) $\frac{504}{b-18} = 72$.

56 Лодка проплыла по реке 300 м за 2 мин. Во сколько раз скорость лодки меньше скорости теплохода, плывущего по той же реке в том же направлении со скоростью 27 км/ч? Через сколько времени теплоход догонит лодку, если сейчас между ними 36 км?

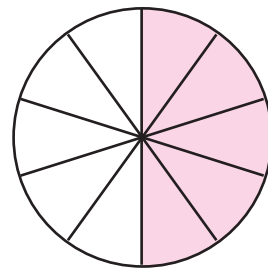
57* Дедка вдвое сильнее бабки, бабка втрое сильнее внучки, внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее кошки, кошка вшестеро сильнее мышки. Дедка, бабка, внучка, Жучка и кошка вместе смышкой могут вытащить репку, а без мышки – не могут. Сколько надо позвать мышек, чтобы они смогли сами вытащить репку?

58* Продолжи ряд на две фигуры, сохраняя закономерность:



2. Основное свойство дроби. Преобразование дробей.

На рисунке закрашена $\frac{1}{2}$ круга. В каждой половине содержится $\frac{5}{10}$ круга. Обе дроби равны между собой, но при этом числитель и знаменатель второй дроби в 5 раз превышает числитель и знаменатель первой дроби.



Полученное равенство можно записать двумя способами:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} \quad \text{или} \quad \frac{5}{10} = \frac{5 : 5}{10 : 5} = \frac{1}{2}.$$

Это верно и для любых других дробей. Действительно, для натуральных чисел ранее было доказано, что $a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$ и $a : b = (a : n) : (b : n)$ (п. 2.4.5). С другой стороны, нам известно, что знак деления можно заменить чертой дроби (п. 3.1.1). Таким образом, приходим к выводу:

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \quad a, b, n \in N$$

Мы получили утверждение, которое называют **основным свойством дроби**. С его помощью можно преобразовывать дроби.

Второе равенство позволяет упрощать дроби, например:

$$\frac{36}{44} = \frac{36 : 4}{44 : 4} = \frac{9}{11}.$$

Такое преобразование называют **сокращением дроби**. В примере мы сократили дробь $\frac{36}{44}$ на 4. Полученную дробь $\frac{9}{11}$ сократить нельзя, так как 9 и 11 – взаимно простые числа (то есть $\text{НОД}(9; 11) = 1$). Дробь, числитель и знаменатель которой являются взаимно простыми числами, называется **несократимой**.

Каждую дробь можно единственным образом записать в виде несократимой дроби. Для этого нужно сократить ее на **наибольший общий делитель числителя и знаменателя**. Например, $\text{НОД}(245, 15) = 5$. Поэтому, разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{245}{15}$ на 5, мы получим равную ей несократимую дробь.

$$\text{Запись обычно ведут так: } \frac{245}{15} = \frac{49}{3}.$$

На практике часто удобно не вычислять НОД числителя и знаменателя, а проводить сокращение дроби последовательно, например:

$$\frac{210}{315} = \frac{70}{105} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

(сначала сократили на 3, а потом на 5 и на 7). При этом, разумеется, для нахождения общих делителей полезно использовать признаки делимости.

Можно также раскладывать числитель и знаменатель дроби на множители, причем не обязательно простые:

$$\frac{750}{1200} = \frac{75}{120} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} = \frac{5}{8}.$$

Таким образом, основное свойство дроби позволяет упрощать запись дроби. Но иногда для выполнения некоторого действия ее, наоборот, приходится усложнять. Например, чтобы сравнить дроби $\frac{1}{15}$ и $\frac{2}{5}$, можно числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{5}$ умножить на число 3:

$$\overset{3}{\frac{2}{5}} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}.$$

И поскольку $\frac{1}{15} < \frac{6}{15}$, то, значит, и $\frac{1}{15} < \frac{2}{5}$.

Замену дроби равной ей дробью с новым знаменателем называют **приведением дроби к новому знаменателю**. А число, на которое умножается числитель и знаменатель данной дроби, называют **дополнительным множителем**.

Любую дробь можно привести к знаменателю, *кратному* знаменателю этой дроби. Приведем, например, дробь $\frac{4}{7}$ к знаменателю 56:

1) Найдем дополнительный множитель: $56 : 7 = 8$.

2) Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{4}{7}$ на дополнительный множитель:

$$\overset{8}{\frac{4}{7}} = \frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{32}{56}.$$

Для приведения двух или нескольких дробей к общему знаменателю выбирают знаменатель, кратный всем знаменателям данных дробей. При этом для простоты вычислений знаменатель лучше выбирать как можно меньший, а для этого нужно взять **наименьшее общее кратное** знаменателей всех получившихся дробей.

Например, для дробей $\frac{11}{6}$, $\frac{7}{15}$ и $\frac{3}{8}$ вычисляем сначала НОК $(6, 15, 8) = 120$.

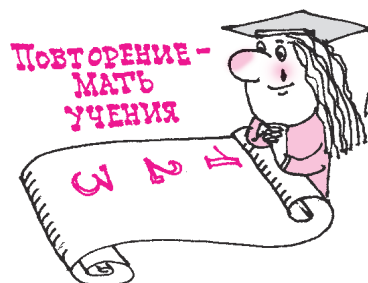
Дополнительными множителями для данных дробей будут соответственно частные $120 : 6 = 20$, $120 : 15 = 8$, $120 : 8 = 15$, поэтому:

$$\overset{20}{\frac{11}{6}} = \frac{11 \cdot 20}{6 \cdot 20} = \frac{220}{120}, \quad \overset{8}{\frac{7}{15}} = \frac{7 \cdot 8}{15 \cdot 8} = \frac{56}{120}, \quad \overset{15}{\frac{3}{8}} = \frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 15} = \frac{45}{120}.$$

Тем самым мы привели три заданные дроби к наименьшему общему знаменателю.

Итак, чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, можно:

- 1) найти наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей;
- 2) найти дополнительный множитель для каждой дроби;
- 3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.



И еще одно важное замечание. Основное свойство дроби показывает, что всякое целое или дробное число можно записать в виде дроби бесконечным числом способов, например:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots; \quad \frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{15}{12} = \frac{20}{16} = \dots; \quad \frac{23}{100} = \frac{230}{1000} = \frac{2300}{10000} = \dots$$

К

59 Начерти координатный луч, приняв за единичный отрезок 12 клеток.

Отметь на нем точку $A(\frac{4}{6})$. Какими еще дробями может быть выражена координата точки A ? Приведи три примера и запиши соответствующие равенства.

60

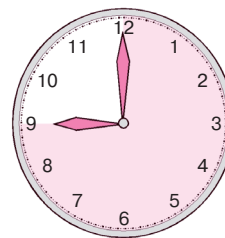
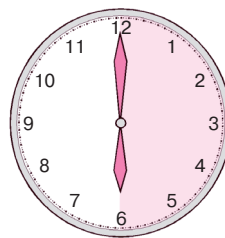
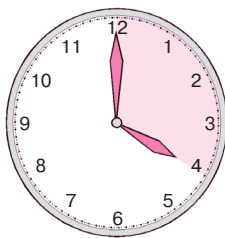
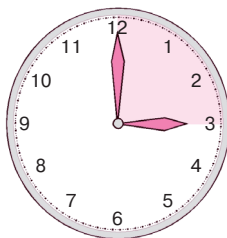
Объясни равенство дробей сначала с помощью рисунка, а потом с помощью основного свойства дроби:

а) $\frac{1}{4} = \frac{15}{60};$

б) $\frac{1}{3} = \frac{20}{60};$

в) $\frac{1}{2} = \frac{30}{60};$

г) $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}.$



61

Докажи истинность высказываний:

а) $\frac{7}{15} = \frac{42}{90};$

б) $\frac{80}{35} = \frac{16}{7};$

в) $\frac{7}{12} = \frac{56}{96};$

г) $\frac{42}{140} = \frac{3}{10}.$

62

1) Умножь числитель и знаменатель каждой дроби $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{15}{13}, \frac{7}{1}$ на 4.

2) Раздели числитель и знаменатель каждой дроби $\frac{20}{45}, \frac{35}{60}, \frac{80}{55}, \frac{95}{5}$ на 5.

63

Найди такие значения переменных x и y , при которых данные предложения становятся истинными высказываниями:

1) $\frac{3}{5} = \frac{x}{15}, \frac{6}{11} = \frac{24}{x}, \frac{x}{40} = \frac{7}{8};$

2) $\frac{7}{y} = \frac{21}{36}, \frac{1}{4} = \frac{y}{32}, \frac{24}{30} = \frac{12}{y}.$

64 1) Приведи каждую дробь к знаменателю 6 и найди сумму: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

2) Найди сумму и разность дробей, приведя их к общему знаменателю:

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{8} - \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{5} - \frac{2}{15}, \quad \frac{3}{7} + \frac{5}{28}.$$

65 1) Приведи каждую дробь к числителю 6 и сравни дроби: $\frac{18}{75}$ и $\frac{3}{56}$.

2) Сравни дроби, приведя их к общему числителю или знаменателю:

$$\frac{1}{2} \text{ и } \frac{4}{13}, \quad \frac{2}{5} \text{ и } \frac{3}{10}, \quad \frac{8}{12} \text{ и } \frac{4}{5}, \quad \frac{2}{3} \text{ и } \frac{5}{7}.$$

66 Сколько в $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ содержится: а) двенадцатых долей; б) восемнадцатых долей; в) тридцать шестых долей?

67 Можно ли дробь $\frac{6}{15}$ заменить равной ей дробью:

- а) с числителем 48, 31, 2, $6a$;
б) со знаменателем 60, 76, 5, $30b$?



68 1) Что означает выражение «сократить дробь»? Сформулируй определение *несократимой дроби*.

2) Какие возможны способы сокращения дробей? Сократи дробь $\frac{42}{720}$ тремя различными способами. Какой из них тебе понравился больше?

69 Сократи дроби:

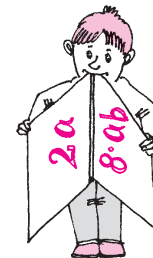
а) $\frac{125}{75}, \frac{75}{100}, \frac{24}{360}, \frac{125}{1000}, \frac{42}{320}$; б) $\frac{75}{300}, \frac{33}{243}, \frac{820}{41}, \frac{45}{900}, \frac{105}{1200}$.

70 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

а) $\frac{15 \cdot 3}{7 \cdot 10}, \frac{9 \cdot 5}{5 \cdot 21}, \frac{21 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 105}, \frac{19 \cdot 8 \cdot 11}{12 \cdot 57 \cdot 7}$;

б) $\frac{2a}{8ab}, \frac{15mkt}{34mt}, \frac{18dcm}{45bdmk}, \frac{xy}{4mpty}$;

в) $\frac{mn^2}{mnk}, \frac{3a^2b}{6ab}, \frac{4c}{8c^2d}, \frac{15xy^2}{20x^2yz}$.



71 Докажи, что сократимы дроби: а) $\frac{360}{945}, \frac{624}{768}, \frac{3950}{350}$; б) $\frac{1260}{1980}, \frac{5184}{5472}, \frac{4140}{9315}$.

Сократи их, разложив сначала числитель и знаменатель на множители.

72 Объясни, почему несократимы дроби: $\frac{5}{49}, \frac{18}{193}, \frac{41}{67}, \frac{2007}{2008}$.

73 Запиши частные $48 : 72, 14 : 56, 40 : 64$ в виде несократимых дробей.

74 Отметь на координатном луче точки $A\left(\frac{100}{300}\right)$, $B\left(\frac{120}{240}\right)$, $C\left(\frac{300}{180}\right)$, $D\left(\frac{84}{72}\right)$.

75 1) Запиши множество натуральных значений переменной x , при которых дробь $\frac{x}{12}$ является правильной несократимой дробью.

2) Запиши множество натуральных значений переменной y , при которых дробь $\frac{18}{y}$ является неправильной сократимой дробью.

76 Какие из высказываний общие, а какие типа «хотя бы один»? Докажи или опровергни их.

1) Дробь, числитель и знаменатель которой кратны 3, сократима.

2) Все дроби, большие $\frac{2}{3}$, сократимы.

3) Существует сократимая дробь, числитель и знаменатель которой простые числа.

4) Всякая дробь при сокращении уменьшается.

5) Некоторые сократимые дроби равны $\frac{1}{2}$.

6) Неправильная дробь после сокращения может стать правильной.

7) Дробь несократима *тогда и только тогда*, когда разность между ее числителем и знаменателем равна 1.

77 1) Какую часть часа составляют 5 мин, 12 мин, 15 мин, 40 мин, 45 мин?

2) Какую часть суток составляют 3 ч, 6 ч, 12 ч, 15 ч, 18 ч?

3) Какую часть центнера составляют 5 кг, 10 кг, 20 кг, 25 кг, 50 кг, 75 кг?

4) Какую часть тонны составляют 8 ц, 30 кг, 125 кг, 250 кг, 500 кг, 800 кг?

78 Один оператор набрал 48 страниц текста за 9 ч, а другой – 68 страниц за 12 ч. Кто из них работает быстрее?

79 Из 42 м полотна сшили 10 одинаковых пододеяльников, а из 33 м – 15 одинаковых простыней. Сколько полотна идет на комплект, в который входит 1 простыня и 1 пододеяльник?

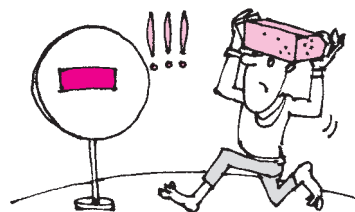


80 Как разделить сумму, разность и произведение на число? Пользуясь свойствами делимости, докажи или опровергни высказывания:

а) $\frac{5 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{18}_6} = \frac{5 \cdot 1}{6} = \frac{5}{6}$; б) $\frac{5 + \cancel{3}^1}{\cancel{18}_6} = \frac{5 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Проверь с помощью вычислений.

Можно ли сократить дробь $\frac{5-3}{18}$?



- 81** Применив распределительный закон, представь числитель в виде произведения, а затем сократи дробь:

а) $\frac{15 \cdot 9 - 15 \cdot 6}{9 \cdot 30}$; б) $\frac{17 \cdot 4 + 17 \cdot 9}{34 \cdot 52}$; в) $\frac{18 \cdot 7 + 18 \cdot 3}{1200}$; г) $\frac{24 \cdot 11 - 24 \cdot 3}{300}$.

Образец:

$$\frac{32 \cdot 5 + 32 \cdot 9}{160 \cdot 28} = \frac{32 \cdot (5 + 9)}{160 \cdot 28} = \frac{\overset{1}{\cancel{32}} \cdot \overset{1}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{160}} \cdot \underset{2}{\cancel{28}}} = \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}$$

- 82** Докажи, что дроби несократимы:

а) $\frac{39}{100}$; б) $\frac{111}{2500}$; в) $\frac{13\ 013}{20\ 480}$; г) $\frac{25 + 49 \cdot 2}{35}$; д) $\frac{38}{18 \cdot 8 - 19 \cdot 3}$.

- 83** Разложи на множители числитель, а затем сократи дробь:

1) $\frac{4a + 4b}{8c}$; 2) $\frac{3x - 6y}{12x}$; 3) $\frac{a^2 + ac}{a^2}$ ($a \neq 0$); 4) $\frac{9m^2 - m^2}{5mn}$ ($m, n \neq 0$).

- 84** Знаменатель дроби равен: а) 18; б) 100. Дробь сократили. Может ли знаменатель этой дроби после сокращения стать равным семи? Какие простые множители могут входить в разложение на множители нового знаменателя?

- 85** Сколько в числах 1, 7, 9, m содержится вторых, третьих, восьмых, пятнадцатых, сотых долей?

- 86** Приведи дробь:

а) $\frac{5}{7}$ к знаменателю 56; в) $\frac{9}{14}$ к знаменателю 42;
б) $\frac{3}{16}$ к знаменателю 80; г) $\frac{8}{15}$ к знаменателю 75.



- 87** Из ряда чисел выпиши те, которые могут быть общими знаменателями для указанных дробей:

а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{8}$ 6, 12, 24, 40, 48; в) $\frac{9}{10}$ и $\frac{7}{15}$ 20, 30, 45, 50, 60;
б) $\frac{7}{12}$ и $\frac{2}{9}$ 18, 24, 36, 72, 90; г) $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{14}$ 14, 16, 28, 56, 70.

- 88** Приведи к наименьшему общему знаменателю дроби:

а) $\frac{5}{16}$ и $\frac{3}{4}$; г) $\frac{4}{5}$ и $\frac{1}{6}$; ж) $\frac{4}{15}$ и $\frac{5}{12}$; к) $\frac{3}{56}$ и $\frac{7}{126}$;
б) $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{18}$; д) $\frac{8}{9}$ и $\frac{2}{7}$; з) $\frac{11}{12}$ и $\frac{17}{18}$; л) $\frac{15}{52}$ и $\frac{13}{78}$;
в) $\frac{11}{12}$ и $\frac{23}{60}$; е) $\frac{7}{8}$ и $\frac{6}{11}$; и) $\frac{23}{30}$ и $\frac{2}{45}$; м) $\frac{29}{180}$ и $\frac{35}{216}$.

89 Вырази следующие части величин в процентах:

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}$; б) $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{9}{20}, \frac{8}{25}, \frac{17}{50}, \frac{3}{2}$.

90 Сократи дроби, а затем приведи их к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{36}{54}$ и $\frac{55}{99}$; б) $\frac{707}{808}$ и $\frac{48}{60}$; в) $\frac{80}{3200}$ и $\frac{135}{162}$; г) $\frac{234}{468}$ и $\frac{75}{225}$.

91 Приведи дроби к наименьшему общему знаменателю. Если возможно, вначале сократи их.

а) $\frac{1}{2}, \frac{125}{150}$ и $\frac{28}{63}$; б) $\frac{4}{21}, \frac{16}{56}$ и $\frac{17}{35}$; в) $\frac{7}{12}, \frac{5}{18}, \frac{444}{777}$ и $\frac{120}{720}$.

92 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями и приведи их к наименьшему общему знаменателю:

1) $\frac{3a - ab}{ax}$ и $\frac{8c + 4c}{6cd}$; 2) $\frac{5n + n^2}{3n}$ и $\frac{4a^2 - 2a^2}{6ay}$; 3) $\frac{7(y + 2k)}{(y + 2k)bc}$ и $\frac{k^2 - ky}{5bk}$.

93 Игорь, Дима и Олег играли в игру. Игорь заработал $\frac{1}{4}$, а Дима – $\frac{3}{5}$ всех разыгранных очков. Какую часть всех очков заработал Олег? Вырази части выигрыша каждого из ребят в процентах. Кто из них выиграл?



94 Мировой океан разделяют на пять больших частей – океанов. Тихий океан занимает примерно $\frac{23}{50}$ всей поверхности Мирового океана, Атлантический – $\frac{6}{25}$, Индийский – $\frac{1}{5}$, а Северный Ледовитый океан – $\frac{1}{25}$. Вырази площади океанов земного шара в процентах от их общей площади. Какую часть всей поверхности океанов занимает пятый – Южный океан? Сколько способов ответа на последний вопрос ты сможешь найти?

95 1) Ира прошла 4 км за 48 мин, а ее брат прошел 2 км за 20 мин. Кто из них шел быстрее и на сколько?

2) 21 л молока разлили в 6 одинаковых бидонов, а 13 л кваса – в 4 одинаковые банки. Чья вместимость больше – бидона или банки, и на сколько?

π **96** Прочитай утверждения. Какие из них истинные, а какие – ложные? Обоснуй.

- 1) $\exists x \in \mathbb{N}: 4 \leq x < 5$; 3) $\exists m, n \in \mathbb{N}: m^2 + n^2 = 25$;
2) $\exists y \in \mathbb{N}: y < 1$; 4) $\exists k \in \mathbb{N}: k$ имеет ровно два различных делителя.

97 Найди НОД и НОК чисел: 1) 15, 20 и 75; 2) 150, 180 и 315.

98 Докажи, что сумма $750\,384 + 540 \cdot 121$: а) кратна 9; б) не делится на 5; в) делится на 2 и на 3; г) не кратна 10.

99 Верно ли, что разность $3000 \cdot 468 - 937\,200$: а) делится на 100; б) не делится на 1000; в) не кратна 9; г) делится на 4 и на 25?

100 Подбери вместо пропусков числа так, чтобы получились верные равенства:

1) $5 \cdot (4 + 7) = 5 \cdot \square + \square \cdot 7$;

4) $(35 + a) \cdot 2 = \square + 2a$;

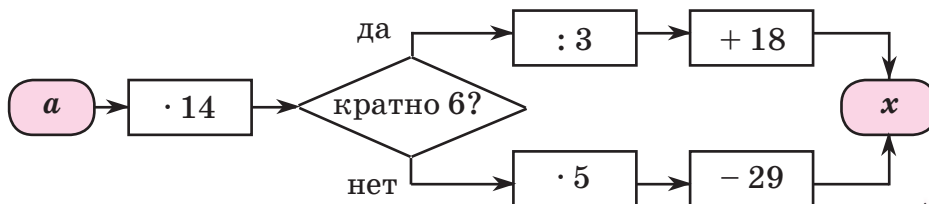
2) $\square \cdot (11 - 7) = \square - 21$;

5) $10 \cdot (\square - \square) = 140 - 10x$;

3) $(\square - \square) \cdot 20 = 80 - 60$;

6) $9c + \square = (9 + 1)c$.

101 Вычисли устно и расшифруй имя и фамилию гениального математика XIX века с удивительной и трагической судьбой.



a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x										
	В	И	Р	У	Г	Л	А	Э	Т	С

531	41	461	32	111	671	60

321	461	46	251	461



102 БЛИЦтурнир

1) Вася и Надя читают одну и ту же книгу. Васе осталось прочитать a страниц, а Наде b страниц. Сколько страниц прочитала Надя, если Вася прочитал 32 страницы?

2) Ученикам класса раздали по 3 простых и по 4 цветных карандаша, а всего d карандашей. Сколько роздано простых карандашей?

3) В синей папке в 5 раз больше листов, чем в красной. Сколько листов в красной папке, если в ней их на c меньше, чем в синей?

4) В пансионате отдыхают x взрослых, а детей – в 2 раза меньше. Все отдыхающие размещены поровну в четырех корпусах. Сколько человек проживает в каждом корпусе?

5) Один грузовик при полной загрузке перевозит n т груза за 6 рейсов, а другой – m т за 9 рейсов. За сколько рейсов, работая вместе, оба грузовика могут перевезти a т груза, если будут загружены полностью?

6) Яблоко, груша и банан весят вместе y г. Яблоко весит на 50 г меньше груши и на 80 г меньше банана. Сколько граммов весит яблоко?

103 Реши уравнения:

1) $140 - (x : 7 + 29) \cdot 4 = 12$;

3) $100 : [19 + (15x - 84) : 6] = 4$;

2) $720 : (5x - 12) - 56 = 34$;

4) $[72 - 64 : (40 - 8x)] \cdot 4 = 272$.

104 Прочитай выражения и найди их значения при $a = 5$, $b = 1$:

1) $(a - b)^2$; 2) $a^2 - b^2$; 3) $a - b^2$; 4) $(a + b)^3$; 5) $a^3 + b^3$; 6) $a + b^3$.

105 У натуральных чисел есть много удивительных свойств. Возьмем какое-нибудь натуральное число $n \in N$, например, $n = 6$. Запишем множество его делителей $D(6) = \{1; 2; 3; 6\}$ и для каждого элемента множества $D(6)$ запишем, сколько у него различных делителей: 1, 2, 2, 4. Полученные числа обладают следующей особенностью: сумма кубов этих чисел равна квадрату их суммы, то есть $1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2$. Проверь это равенство. Потом проверь указанное свойство для числа 12 и еще для какого-нибудь числа по своему выбору.

106 Вставь вместо звездочек подходящие цифры и сделай проверку:

$$\begin{array}{r} 1) \quad \begin{array}{r} 7 * 7 0 * 8 9 \\ + 1 * 4 3 * 0 5 * \\ \hline * 4 7 * 2 5 * 5 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad \begin{array}{r} * 0 0 * 1 * 0 8 \\ - 5 * 1 7 5 * 2 \\ \hline 3 * 7 0 * 2 4 * \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad \begin{array}{r} \quad \times 1 * 0 * * \\ \quad \quad * * 7 \\ \hline \quad 9 1 * 6 \\ + * * * * * \\ \hline * * * * 3 * * 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4) \quad \begin{array}{r} 1 8 * 6 * 3 * 0 \quad | \quad 5 * \\ * * 2 \\ \hline * 1 * \\ - * * * \\ \hline 4 * 2 \\ * * * \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$



107 Построй математические модели задач:

1) У Вити было на 80 р. больше, чем у Маши. Когда Витя потратил половину своих денег, у него стало на 10 р. меньше, чем было у Маши. Сколько денег было у Маши и Вити вместе первоначально?

2) В трех поселках живут 6000 жителей. Во втором поселке вдвое больше жителей, чем в первом, а в третьем на 500 жителей меньше, чем во втором. Сколько жителей во втором поселке?

3) Из города A в город B выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость велосипедиста на 30 км/ч меньше скорости мотоциклиста, поэтому он затратил на весь путь на 4 ч больше. С какой скоростью ехал мотоциклист, если расстояние между городами 90 км?

4) Пешеход должен был пройти 12 км за определенный срок, но он был задержан с выходом на 1 ч. Поэтому ему пришлось увеличить скорость на 1 км/ч. С какой скоростью шел пешеход, если он пришел вовремя?

108 Переменная x принимает значения из множества $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Зависимость y от x задается формулой: 1) $y = \frac{2x}{x+3}$; 2) $y = \frac{x+5}{3x}$. Найди множество значений переменной y и обозначь его A . Выпиши из множества A подмножество B правильных дробей.

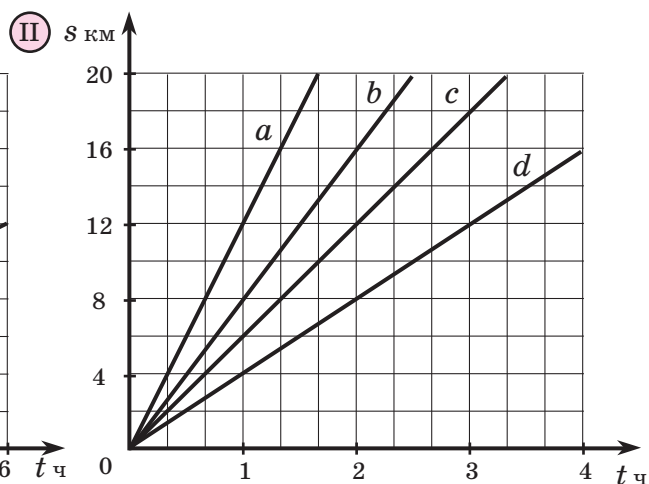
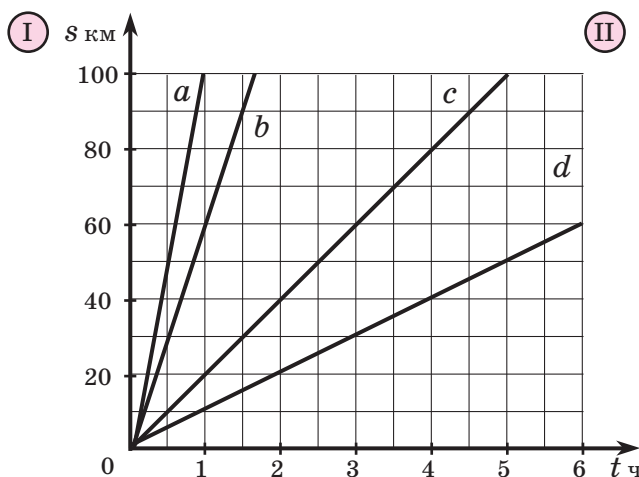
109 Старинные задачи

1) Один человек идет из первого города во второй и проходит в день по 40 верст, а другой человек идет навстречу ему из второго города и в день проходит по 30 верст. Расстояние между городами 700 верст. Через сколько дней путники встретятся, если вышли одновременно?

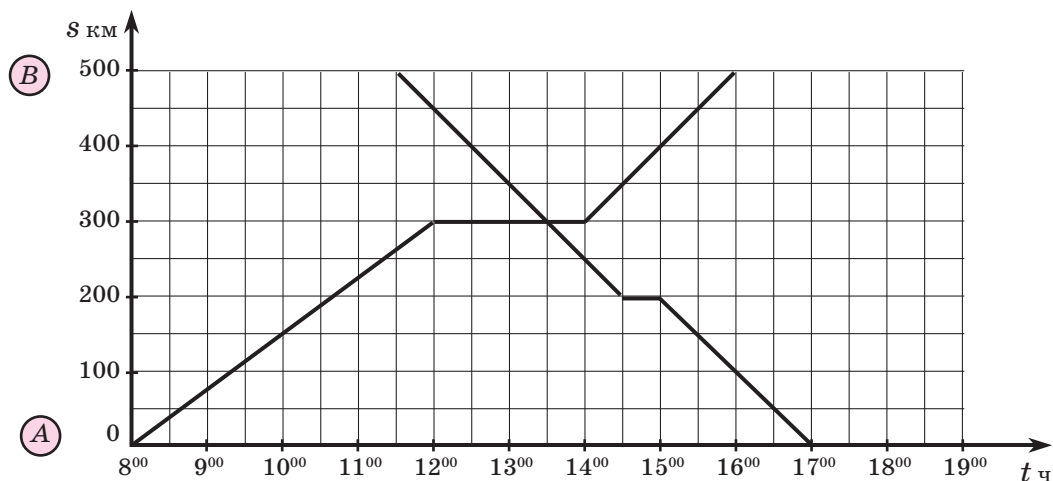
2) Некий юноша пошел из Москвы в Вологду. Он проходил в день по 40 верст. Через день вслед за ним был послан другой юноша, проходивший в день по 45 верст. На каком расстоянии от Москвы второй юноша догнал первого?

3) Собака усмотрела в 150 саженьях зайца, который пробегает в 2 минуты 500 сажен, а собака в 5 минут – 1300 сажен. Какое расстояние будет между собакой и зайцем через 10 мин? В какое время собака догонит зайца?

110 По графикам движения, приведенным на чертеже, определи скорость движения каждого объекта и запиши формулу, выражающую зависимость пройденного расстояния s от времени движения t .



111 На рисунке изображены графики движения двух автомобилей. Опиши по графикам их движение: время выезда, направление и скорость на всех участках пути, время и место их встречи, продолжительность остановок, время прибытия в пункт назначения.



112 Расстояние между пунктами A и B по шоссе 15 км. В 9 ч утра из A в B вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 1 ч 15 мин пути он сделал 45-минутный привал, а затем продолжил путь, снизив скорость до 3 км/ч. Пройдя 2 ч с этой скоростью, он сделал вторую остановку, которая длилась 15 мин, и оставшийся до пункта B путь вновь шел со скоростью 4 км/ч.

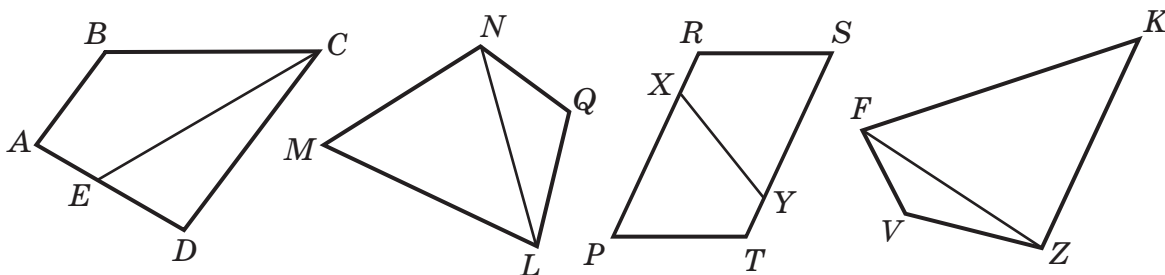
Из пункта B второй пешеход вышел навстречу первому в 10 ч утра со скоростью 6 км/ч. В 11 ч он сделал остановку на 45 мин. После остановки он шел до пункта A со скоростью 4 км/ч.

Построй графики движения пешеходов (1 ч – 4 клетки, 1 км – 1 клетка) и определи, когда и на каком расстоянии от пункта A произошла их встреча. Кто из них раньше пришел в пункт назначения и на сколько?

113 1) Прочитай определение и назови определяемое понятие:

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий любые две его несоседние вершины.

2) Какие из отрезков на чертеже являются диагоналями четырехугольников? Сколько всего диагоналей у четырехугольника? Можно ли отнести полученный вывод к прямоугольникам, квадратам? Почему?



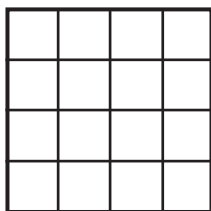
3*) Сколько диагоналей у пятиугольника, шестиугольника, семиугольника? Сформулируй *гипотезу* о числе диагоналей у n -угольника, проверь ее для $n = 3, 4, 5, 6$ и попробуй обосновать. Пользуясь установленной закономерностью, найди число диагоналей 100-угольника, 1000-угольника.

114 Докажи равенство:

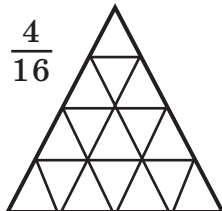
$$\frac{(20\,844 : 18 - 3384 : 36) \cdot 205 - (255 - 48)^2 + 24\,729}{240 \cdot 609 + 720 \cdot [114\,240 : (266\,000 : 4750) - 1531] - 1027 : 13 \cdot 160} = \frac{2}{5}.$$

Д

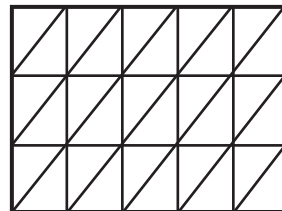
115 Перерисуй фигуры в тетрадь. Закрась части фигур, соответствующие указанным дробям. Какими еще дробями можно выразить закрашенные части фигур? Запиши ответ с помощью равенств.



$\frac{3}{8}$



$\frac{4}{16}$



$\frac{3}{15}$

116 Запиши в тетрадь равенства, вставляя вместо букв подходящие числа. Расшифруй известное высказывание великого Галилея:

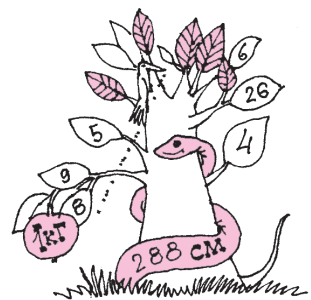
$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{3} = \frac{\text{Д}}{12}; & \frac{3}{4} = \frac{9}{\text{Я}}; & \frac{\text{З}}{45} = \frac{4}{9}; & \frac{15}{25} = \frac{\text{В}}{5}; & \frac{5}{\text{К}} = \frac{35}{42}; \\ \frac{\text{М}}{20} = \frac{1}{4}; & \frac{30}{\text{И}} = \frac{6}{11}; & \frac{5}{\text{Е}} = \frac{10}{14}; & \frac{1}{\text{А}} = \frac{18}{36}; & \frac{27}{30} = \frac{9}{\text{О}}; \\ \frac{28}{44} = \frac{7}{\text{Ы}}; & \frac{2}{9} = \frac{\text{Р}}{18}; & \frac{35}{63} = \frac{5}{\text{Т}}; & \frac{\text{П}}{39} = \frac{6}{13}; & \frac{4}{15} = \frac{\text{Г}}{60}. \end{array}$$

18	4	55	4	10	8	2

16	10	3	10	4	55	9

12	20	11	6	10	5

5	2	9	7	5	2	9	55	6	55



117 Сократи дроби:

1) используя признаки делимости: $\frac{105}{210}$, $\frac{1400}{600}$, $\frac{135}{162}$, $\frac{375}{500}$;

2) разложив сначала числитель и знаменатель на множители: $\frac{148}{592}$, $\frac{1386}{756}$.

118 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

1) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 28}{15 \cdot 49}$; 2) $\frac{12abd}{8bdx}$; 3) $\frac{m^2n}{6mn}$; 4) $\frac{29 \cdot 38 - 29 \cdot 23}{29 \cdot 60}$; 5) $\frac{3x + 3y}{21y}$.

119 Какую часть развернутого угла составляет угол: 1) 20° ; 2) 30° ; 3) 45° ; 4) 60° ; 5) 90° ; 6) 120° ; 7) 135° ; 8) 150° ? Проиллюстрируй ответ с помощью рисунков.

120 Приведи дроби с натуральными числителями и знаменателями к наименьшему общему знаменателю:

1) $\frac{14}{75}$ и $\frac{8}{15}$; 3) $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{8}$; 5) $\frac{8}{105}$ и $\frac{7}{135}$; 7) $\frac{5}{2a}$ и $\frac{8}{3a}$;
2) $\frac{9}{16}$ и $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{7}{32}$ и $\frac{13}{24}$; 6) $\frac{13}{25}$, $\frac{11}{15}$ и $\frac{3}{20}$; 8) $\frac{b}{8cd}$ и $\frac{n}{10d}$.

121 Приведи дроби с натуральными числителями и знаменателями к наименьшему общему знаменателю, сделав сначала сокращение:

1) $\frac{88}{275}$ и $\frac{36}{135}$; 2) $\frac{30}{540}$ и $\frac{875}{1750}$; 3) $\frac{8ab}{48bc}$ и $\frac{5bnk}{15cnk}$; 4) $\frac{9c - 9t}{9t}$ и $\frac{5a + 3a}{56at}$.

122 Найди неизвестные числа при следующих условиях:

- Если из утроенного неизвестного числа вычесть 16, то получим 17.
- Если к учетверенному неизвестному числу прибавить 39, то получим 67.
- Если от удвоенного неизвестного числа отнять 125, то получим квадрат числа 5.
- Если к неизвестному числу приписать справа нуль и новое число сложить с неизвестным, то в сумме получится 484.

123 Реши уравнения:

$$1) [(185 - 5x) \cdot 15 - 90] : 45 = 58;$$

$$2) [(8y - 98) : 2 + 56] \cdot 36 - 268 = 2000.$$

124 Найди множество A значений переменной x , при которых одновременно дробь $\frac{x}{7}$ будет правильной, а дробь $\frac{x}{4}$ — неправильной.

125 Построй математические модели задач:

1) В двух библиотеках 2280 книг. Когда первая библиотека передала второй 180 книг, во второй библиотеке оказалось книг в 2 раза больше, чем в первой. Сколько книг было первоначально в каждой библиотеке?

2) Экскурсанты переправлялись через реку в лодках. Если бы в каждую лодку село по 6 человек, то не хватило бы места для 4 человек. Если бы в каждую лодку село по 8 человек, то одна лодка оказалась бы свободной. Сколько было лодок и сколько экскурсантов?

3) Трое рабочих сделали 105 тумбочек. Первый рабочий сделал в 2 раза больше тумбочек, чем второй и третий вместе, а второй рабочий — на 5 больше, чем третий. Сколько тумбочек сделал каждый?

126 Числовой кроссворд

По вертикали:

a. $1985 \cdot 4070$

b. $54\,987\,480 : 687$

c. $1058 \cdot 2009$

d. $47\,569\,020 : 634$

e. $3600 \cdot 780$

По горизонтали:

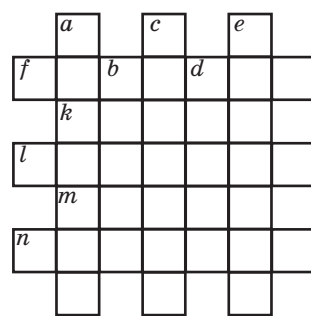
f. $5707 \cdot 540$

k. $540\,222\,500 : 7690$

l. $2\,930\,549 + 1\,874\,536$

m. $5\,555\,555 - 5\,461\,025$

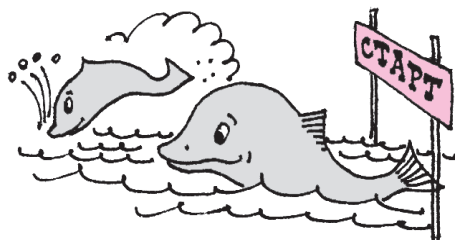
n. $17\,375 \cdot 144$



127 1) Из двух городов, расстояние между которыми 232 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Через 8 ч они встретились. Вычисли скорость второго велосипедиста, если первый ехал со скоростью 15 км/ч.

2) В 9 ч утра из поселка выехал автобус со скоростью 56 км/ч, а через час из того же поселка, но в противоположном направлении, выехал автомобиль со скоростью 72 км/ч. На каком расстоянии друг от друга окажутся автомобиль и автобус в полдень?

3) Два дельфина плывут в одном направлении. Скорость одного дельфина 200 м/мин, а другого — 300 м/мин. Сейчас между ними 700 м. На каком расстоянии друг от друга будут дельфины через 5 мин? Запиши формулу, выражающую зависимость расстояния между дельфинами d от времени движения t . (Рассмотри 2 случая.)



128 Докажи истинность высказывания:

$$\frac{207 \cdot 32 : 72 - (21\,140 : 7 - 43 \cdot 70)}{(4800 : 120 + 360) \cdot 8 : 10 - (503^2 - 3009) : 5000} \leq \frac{1}{3}.$$

129 На рисунке изображен график зависимости пути велосипедиста s от времени его движения t :



- 1) Сколько времени ехал велосипедист до первой остановки?
- 2) Какой путь он проехал до остановки?
- 3) Сколько времени велосипедист отдыхал?
- 4) С какой скоростью ехал велосипедист до остановки и после остановки?

130 Запиши в возрастающем порядке три дроби: а) с одинаковыми числителями; б) с одинаковыми знаменателями.

131* Последовательность (a_n) задана своими первыми тремя членами: 123456, 1234567, 12345678, ... Запиши и прочитай ее четвертый, пятый, шестой и десятый члены — a_4 , a_5 , a_6 , a_{10} — при сохранении указанной закономерности.

132* Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, а во втором — 18. На какое число делили?

133* Когда Гулливер попал в Лилипутию, он обнаружил, что там размеры всех вещей ровно в 12 раз меньше, чем на его родине. Сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечный коробок Гулливера?

134* Океанологи, проводя исследования в специально огороженной части водоема, выловили сетью 80 рыбин, поместили их и снова выпустили. На второй день они поймали 80 рыбин, среди которых оказалось 5 помеченных. Сколько всего рыбин в запруде, если помеченная рыба равномерно распределяется с остальной?



3. Сравнение дробей.

Как и натуральные числа, дроби можно сравнивать друг с другом. Проще всего сравнивать дроби с одинаковыми знаменателями.

Два правила сравнения дробей известны нам из начальной школы. Они следуют из самого понятия дроби. Действительно, если мы, например, делим некоторую сумму денег на несколько равных частей, то чем больше мы возьмем таких частей, тем больше денег нам достанется. Так, $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$. И вообще,

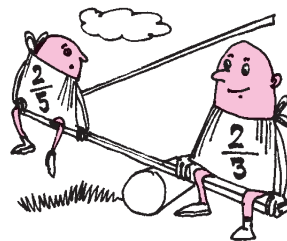


Из двух дробей с одинаковыми знаменателями меньше та дробь, у которой числитель меньше.

Легко сравнить и две дроби с одинаковыми числителями. Если мы делим предмет на большее число частей, то каждая часть получается меньше.

Например, $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$. Но тогда и несколько «маленьких» частей вместе меньше, чем такое же количество «больших» частей: $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$. И вообще,

Из двух дробей с одинаковыми числителями меньше та дробь, у которой знаменатель больше.



Но как сравнить две дроби, у которых и знаменатели и числители различны? Оказывается, это также несложно: благодаря *основному свойству дроби* мы всегда можем добиться, чтобы данные дроби имели или один и тот же знаменатель, или один и тот же числитель.

Сравним, например, $\frac{4}{9}$ и $\frac{5}{12}$. Приведем их к наименьшему общему знаменателю 36: $\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{16}{36}$, $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{15}{36}$. Так как $\frac{16}{36} > \frac{15}{36}$, то и $\frac{4}{9} > \frac{5}{12}$.

Еще проще было привести эти дроби к общему числителю:

$$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}, \quad \frac{5}{12} = \frac{20}{48}.$$

Ясно, что первая дробь больше – при равных числителях у нее знаменатель меньше.

Приведение к одинаковому числителю особенно полезно в случае, когда знаменатели дробей большие. Например, дроби $\frac{12}{331}$ и $\frac{6}{211}$ можно сравнить устно, если привести их к одинаковому числителю 12. Очевидно, что первая дробь больше, так как $\frac{12}{331} > \frac{12}{422}$.

Существует еще ряд «хитрых» приемов, с помощью которых можно просто сравнить две дроби. Например:

1) $\frac{112}{113} < \frac{113}{112}$, потому что первая дробь меньше 1, а вторая больше 1;

2) $\frac{23}{45} > \frac{33}{67}$, потому что первая дробь больше $\frac{1}{2}$, а вторая меньше $\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \dots < \frac{2008}{2009}$, потому что все данные дроби меньше 1 и отличаются от нее соответственно на $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2009}$. Иначе говоря, дроби последовательно приближаются к 1, и поэтому каждая следующая дробь больше предыдущей. Особенно хорошо это видно на числовом луче.

Сформулируем теперь **общее правило сравнения**, пригодное для любых дробей с натуральными числителями и знаменателями:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$

Обосновать это правило нетрудно. В самом деле, по основному свойству дроби $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$. Но $\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$ равносильно $ad < bc$ – по правилу сравнения дробей с одинаковыми знаменателями. Аналогичное правило получается и для знака « $>$ ».

Общее правило сравнения дробей очень удобно, так как для его применения достаточно лишь перемножить и сравнить натуральные числа. Но кто рискнет с его помощью сравнить 2008 дробей, рассмотренных выше? Поэтому, прежде чем применять общее правило, всегда полезно подумать и попробовать найти более короткий путь.

Из полученного общего правила сравнения дробей следует важное **условие равенства дробей**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Действительно, если при таком «перекрестном» умножении числителей и знаменателей полученные произведения оказались равными, то это означает, что ни одна из дробей не больше и не меньше другой, а значит, дроби равны.

Теперь мы можем легко сравнивать смешанные числа. При этом даже не нужно переводить их в неправильные дроби, например:

$$12\frac{3}{8} < 13\frac{13}{41}, \text{ потому что } 12\frac{3}{8} < 13;$$

$$12\frac{3}{8} > 12\frac{2}{7}, \text{ потому что } \frac{3}{8} > \frac{2}{7}.$$

Так можно сравнить любые две смешанные дроби.





135 Что меньше: $\frac{5}{9}$ или $\frac{8}{9}$? Что больше: $\frac{3}{8}$ или $\frac{7}{8}$? Запиши, пользуясь знаком равносильности, правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями.

136 Сравни дроби, приводя их к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{9}$; б) $\frac{11}{18}$ и $\frac{8}{15}$; в) $\frac{10}{27}$ и $\frac{7}{24}$; г) $\frac{25}{56}$ и $\frac{23}{48}$.

137 Приведи дроби $\frac{1}{6}, \frac{7}{15}, \frac{1}{12}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ к наименьшему общему знаменателю и расположи их: а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.

138 Существует ли число, расположенное между числами:

а) $\frac{1}{5}$ и $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{7}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; г) $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$?

139 Найди несколько значений x , удовлетворяющих неравенству:

а) $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{5}$; б) $\frac{4}{9} < x < \frac{5}{9}$. Сколько существует таких чисел?

140 Объясни, не приводя дроби к общему знаменателю, почему $\frac{1}{2} > \frac{1}{10}$, $\frac{3}{17} < \frac{3}{5}$. Запиши, пользуясь знаком равносильности, правило сравнения дробей с одинаковыми числителями.

141 Сравни дроби, приводя их к наименьшему общему числителю:

а) $\frac{9}{125}$ и $\frac{3}{43}$; б) $\frac{2}{111}$ и $\frac{5}{307}$; в) $\frac{4}{1001}$ и $\frac{6}{2005}$; г) $\frac{1}{750}$ и $\frac{2}{1429}$.

142 Приведи дроби $\frac{2}{9}, \frac{6}{41}, \frac{2}{11}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ к наименьшему общему числителю и расположи их: а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.

143 Определи, какая из дробей ближе к единице, и сравни их:

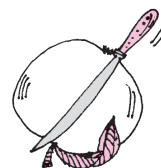
а) $\frac{8}{9}$ и $\frac{15}{16}$; б) $\frac{20}{21}$ и $\frac{17}{18}$; в) $\frac{93}{95}$ и $\frac{37}{39}$; г) $\frac{120}{123}$ и $\frac{85}{88}$.

144 Расположи дроби в порядке возрастания: а) $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{10}, \frac{8}{9}$; б) $\frac{3}{7}, \frac{1}{5}, \frac{11}{15}, \frac{55}{59}$.

145 Сравни с числом $\frac{1}{2}$ дроби: $\frac{3}{8}, \frac{10}{19}, \frac{22}{45}, \frac{41}{80}, \frac{245}{504}$.

146 Укажи наибольшую и наименьшую из дробей. Запиши дроби в порядке убывания.

а) $\frac{11}{20}, \frac{21}{40}, \frac{31}{60}$; б) $\frac{13}{24}, \frac{9}{16}, \frac{11}{20}$; в) $\frac{23}{48}, \frac{17}{36}, \frac{35}{72}$.



147 Сравни дроби наиболее удобным способом:

- 1) $\frac{13}{25}$ и $\frac{27}{50}$; 3) $\frac{6}{59}$ и $\frac{3}{29}$; 5) $\frac{19}{7}$ и $\frac{7}{19}$; 7) $5\frac{41}{98}$ и $7\frac{43}{100}$;
 2) $\frac{15}{77}$ и $\frac{10}{33}$; 4) $\frac{1}{64}$ и $\frac{2}{135}$; 6) $\frac{35}{36}$ и $\frac{36}{37}$; 8) $6\frac{9}{25}$ и $6\frac{8}{11}$.

148 Сравни дроби, пользуясь общим правилом сравнения дробей:

- а) $\frac{8}{25}$ и $\frac{4}{11}$; б) $\frac{9}{11}$ и $\frac{5}{7}$; в) $\frac{5}{13}$ и $\frac{9}{21}$; г) $\frac{7}{20}$ и $\frac{11}{30}$; д) $\frac{4}{45}$ и $\frac{3}{37}$.

Образец: $\frac{8}{25} \vee \frac{4}{11} \Leftrightarrow 8 \cdot 11 \vee 25 \cdot 4 \Leftrightarrow 88 \vee 100$

$$88 < 100 \Rightarrow \frac{8}{25} < \frac{4}{11}.$$

(Символ $\vee$ означает, что вместо него должен стоять один из знаков: $>$, $<$ или $=$.)

149 Из чисел ряда 3, 4, 9, 10 составь две дроби и сравни их наиболее удобным способом. Как еще можно сравнить эти дроби?

150 Известно, что a, b, c и d – натуральные числа, причем $a < b < c < d$. Сравни дроби:

- 1) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; 2) $\frac{d}{c}$ и $\frac{c}{d}$; 3) $\frac{c}{a}$ и $\frac{b}{d}$; 4) $\frac{a}{d}$ и $\frac{c}{b}$.

151 Найди x , если известно, что дроби равны:

- а) $\frac{x}{25}$ и $\frac{12}{15}$; б) $\frac{9}{24}$ и $\frac{x}{32}$; в) $\frac{18}{x}$ и $\frac{8}{16}$; г) $\frac{14}{21}$ и $\frac{22}{x}$.

Образец:

$$\frac{16}{x} = \frac{6}{15} \Leftrightarrow 16 \cdot 15 = x \cdot 6 \Leftrightarrow x = \frac{16 \cdot 15}{6} \Leftrightarrow x = 40$$

152 1) Митя записал дробь, знаменатель которой на 12 больше числителя, и после сокращения получил дробь $\frac{5}{6}$. Какую дробь записал Митя?

2) Ира задумала число, прибавила его к числителю и знаменателю дроби $\frac{11}{41}$, затем сократила полученную дробь и получила в результате $\frac{3}{8}$. Какое число задумала Ира?

153 1) 10 шагов Тани составляют 9 м, а 20 шагов Кати – 17 м. Чей шаг короче – Тани или Кати?

2) Алеша, Толя и Саша играли в баскетбол. Алеша сделал 5 бросков и попал 3 раза, Толя из 9 бросков попал 5 раз, а Саша из 15 бросков – 7 раз. Кто из мальчиков был более метким?



154 1) Автобус проезжает расстояние от города до деревни за 6 ч, а автомобиль – за 4 ч. Кто из них проедет большее расстояние – автобус за 5 ч или автомобиль за 3 ч?

2) Трехметровое бревно распилили на 7 равных частей, а пятиметровое – на 9. Части какого бревна длиннее?

155 Лев Толстой как-то заметил, что человек подобен дроби, числитель которой есть то, что человек представляет собой, а знаменатель – то, что он думает о себе. Как ты считаешь, какой дробью, правильной или неправильной, лучше быть? А себя ты какой дробью считаешь?

π 156 Найди общие утверждения и утверждения о существовании (типа «хотя бы один»). Докажи или опровергни их.

1) Существует правильная дробь со знаменателем 2.

2) Существует неправильная дробь с числителем 2.

3) Любая правильная дробь меньше любой неправильной.

4) Две дроби с равными знаменателями равны.

5) Дробь, числитель и знаменатель которой кратны 5, сократима.

6) Дробь сократима *тогда и только тогда*, когда ее числитель и знаменатель кратны 5.

7) Дробь сократима *в том и только в том случае*, когда ее числитель кратен знаменателю.

8) Дробь сократима, *если и только если* наибольший общий делитель числителя и знаменателя больше 1.

157 Прочитай высказывания. Найди и опровергни ложные высказывания. Докажи истинность остальных высказываний.

$$1) \exists x \in \mathbb{N}: x < \frac{1}{2};$$

$$3) \exists a, b \in \mathbb{N}: a^2 - b^2 = 7;$$

$$2) \exists y \in \mathbb{N}: y > \frac{1}{2};$$

$$4) \exists a, b \in \mathbb{N}: (a - b)^2 = 7.$$

158 Переведи на математический язык следующие утверждения, если буквами в них обозначены натуральные числа.

1) Число k кратно 4.

2) Число d кратно 5.

3) Число m четно.

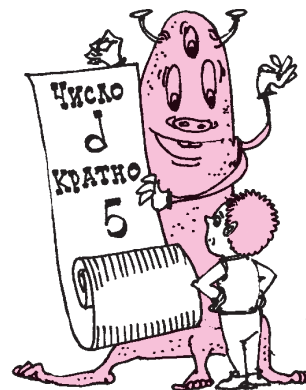
4) Число n нечетно.

5) При делении числа a на число b получается частное 3 и остаток 8.

6) При делении числа c на 9 получается частное q и остаток 1.

7) Существуют 2 натуральных числа, сумма квадратов которых меньше 20.

8) Существуют 2 натуральных числа, квадрат суммы которых равен 64.



159 Реши примеры и уравнения. Расшифруй имя английского писателя конца XIX века и название одного из самых известных его произведений.

С) $(52 : 13 + 7) \cdot 3$

Р) $(600 : 5 - 72) : 8 \cdot 60$

П) $80x - 540 = 180$

Н) $(12 - 5) \cdot 8 : 1$

О) $(90 - 450 : 9) : 8 \cdot 6$

И) $150 - 630 : x = 60$

К) $81 : (36 : 4) + 45$

Т) $200 : [(21 \cdot 7 + 13) : 40]$

Ю) $(260 - x) : 6 = 30$

Ь) $(40 \cdot 8) : 2 : 5$

Б) $[(420 : 7 \cdot 9 - 50) : 70] \cdot 6$

В) $(x : 7) \cdot 50 - 75 = 175$

Л) $(7 \cdot 4 - 27 : 3) \cdot 2$

Е) $32 - (70 \cdot 9 - 390) : 60$

Ш) $360 : (8x + 7x) = 6$

360	30	42	28	360	50

38	32	80	7	33

33	50	7	35	28	56	33	30	56

30	33	50	360	30	35

33	30	54	360	30	35	7	4

160 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

а) $\frac{70}{105}$; в) $\frac{3 \cdot 14 \cdot 62}{31 \cdot 10 \cdot 27}$; д) $\frac{8xyz}{24yz}$; ж) $\frac{n^2 + 2n}{12n}$;

б) $\frac{750}{1200}$; г) $\frac{56 \cdot 15 \cdot 38}{75 \cdot 16 \cdot 57}$; е) $\frac{30a^2}{12ab}$; з) $\frac{6a - 6b}{12}$.

161 Приведи к общему знаменателю дроби и найди их сумму ($a, b, c, d \in N$):

а) $\frac{4}{3}$ и $\frac{5}{a}$; б) $\frac{3}{a}$ и $\frac{2}{b}$; в) $\frac{a}{2}$ и $\frac{2}{b}$; г) $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Из примера г) выведи правило сложения дробей и сложи по этому правилу дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{3}{8}$. Можно ли упростить полученную дробь?

162 Сумма всех чисел в клетках квадрата равна 10. Какое число надо поставить в пустую клетку?

$2\frac{1}{7}$	$5\frac{4}{7}$
$\frac{3}{7}$	?

$1\frac{4}{5}$	$3\frac{2}{5}$
?	$2\frac{1}{5}$

$\frac{5}{9}$	?
$2\frac{7}{9}$	$1\frac{2}{9}$

?	$6\frac{8}{11}$
$\frac{2}{11}$	$2\frac{5}{11}$



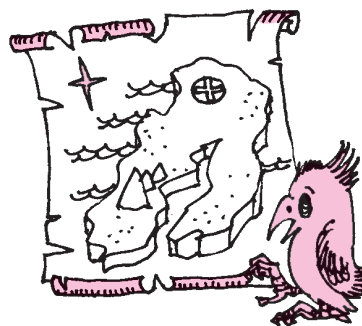
163 Найди значение выражения:

1) $a + 1\frac{5}{9} + 2\frac{7}{9} + \frac{2}{9}$, если $a = \frac{4}{9}, 1\frac{7}{9}, 2\frac{1}{9}$;

2) $b + \frac{8}{15} + 4\frac{1}{15} + 3\frac{7}{15}$, если $b = 5, 6\frac{11}{15}, 7\frac{4}{15}$.

164 Игра «Остров сокровищ»

1) На острове сокровищ была пещера, в которой Флинт спрятал свои сокровища. Вход в пещеру был тщательно замаскирован, и найти его мог только старый пират Бен Ган. Перед смертью Бен Ган решил оставить для потомков шифрованное письмо с описанием системы координат. Далее с помощью координат он зашифровал место, где спрятан клад:



Пещера с сокровищами находится в точке пересечения диагоналей четырехугольника, образованного четырьмя дубами: $(0; 1)$, $(2; 7)$, $(8; 5)$, $(5; 1)$.

Определи координаты входа в пещеру.

2) Нанеси на карту объекты: A – форт, B – бухта, C – склад, D – водопад, E – гора, F – форт, N – наблюдательная вышка и еще два каких-нибудь объекта M и K . Опиши их положение с помощью координат и сообщи эти координаты соседу по парте. Пусть он восстановит твою карту, а ты, в свою очередь, восстанови его карту. Кто сумел правильнее расшифровать местонахождение зашифрованных объектов?

165 1) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми равно 96 км. Скорость первого велосипедиста 15 км/ч. Чему равна скорость второго велосипедиста, если велосипедисты встретились через 3 ч? Какое расстояние будет между велосипедистами через 2 ч после встречи, если они продолжают движение?

2) По шоссе в одном направлении едут автомобиль и автобус. Автобус движется впереди со скоростью 60 км/ч, а автомобиль догоняет его со скоростью 75 км/ч. Сейчас между ними 45 км. Через сколько времени автомобиль перегонит автобус на 30 км?

166 Из двух городов, расстояние между которыми 320 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Скорость первого мотоциклиста равна 45 км/ч, а скорость второго составляет $\frac{7}{9}$ скорости первого. Пусть

d км – расстояние между мотоциклистами через t ч после выезда. Составь формулу, задающую зависимость d от t , рассмотрев два случая:

а) мотоциклисты еще не встретились;

б) встреча мотоциклистов уже произошла, но они продолжают движение.

167 Построй математическую модель задачи:

1) Вася идет из дома в школу. Если бы он шел со скоростью на 20 м/мин больше, то пришел бы в школу на 4 мин раньше, а если бы его скорость была на 12 м/мин меньше, он пришел бы в школу на 4 мин позже. С какой скоростью идет Вася, если расстояние от дома до школы 440 метров?

2) Расстояние между двумя пешеходами, идущими навстречу друг другу, 720 м. Скорость одного из них на 8 м/мин больше скорости другого. Найти скорость пешеходов, если известно, что они встретились через 6 мин.

3) Две лодки плывут по реке в одном направлении. Скорость лодки, плывущей впереди, составляет 80% скорости лодки, плывущей сзади. За 15 мин расстояние между ними уменьшилось с 800 м до 200 м. С какой скоростью плывут лодки?

168 Рассмотрим выражение: $10 - 2 + 4 - 1 + 5 - 7 - 2 + 11$. Как изменяет число 10 каждое действие? Сколько раз увеличивали число 10 и на сколько увеличили всего? Сколько раз уменьшали число 10 и на сколько уменьшили всего? Как изменится число 10 в результате всех операций? Зависит ли ответ от порядка, в котором эти операции выполняются?

169 Используя предыдущее задание, проанализируй образец и определи способ вычислений. Найди значения данных выражений таким же способом.

- а) $18 + 9 - 2 - 4 + 6 - 8 - 1 + 5 - 4$; в) $64 + 79 - 28 - 4 + 21 - 42 + 6 + 9 - 16$;
б) $30 - 7 - 4 + 9 - 6 + 3 + 7 - 8 + 2$; г) $45 - 26 - 3 + 17 + 20 - 24 + 5 + 3 - 8$.

Образец:

$$25 + \underline{27} - \underline{16} - \underline{9} + \underline{3} - \underline{4} - \underline{11} = 15$$

$$1) 27 + 3 = 30 (+)$$

$$3) 40 - 30 = 10 (-)$$

$$2) 16 + 9 + 4 + 11 = 40 (-) \quad 4) 25 - 10 = 15$$



170 1) На первых трех этажах шестиэтажного дома проживает 85 человек. На четвертом этаже на 4 жильца больше, чем на первом, на пятом – на 7 жильцов меньше, чем на втором, а на шестом – на 8 больше, чем на третьем. Сколько всего жильцов в этом доме?

2) В поезде 8 вагонов. В первых четырех едут 129 человек, в пятом вагоне на 3 человека больше, чем в первом, в шестом – на 5 человек меньше, чем во втором, а в седьмом и восьмом вагонах вместе столько же, сколько в третьем и четвертом. Сколько всего пассажиров в этом поезде?

171 Сравни дроби:

$$\frac{47\,428\,440 : 948 \cdot 56 - [(908^2 - 908 \cdot 2) : 24 - 32\,597]}{[(5689 \cdot 7002) : 3501 + (40\,280 - 39\,572)^2 + 87\,358] \cdot 4} \quad \text{и} \quad 1\frac{1}{3}.$$

172 Сравни дроби $\frac{4}{105}$ и $\frac{7}{120}$, приведя их: 1) к общему знаменателю; 2) к общему числителю.

- 173** а) Переведи смешанные числа в неправильные дроби и расположи их в порядке возрастания, сопоставив соответствующим буквам:

$$2\frac{3}{16}, 1\frac{6}{29}, 1\frac{9}{26}, 3\frac{8}{9}, 11\frac{2}{3}, 2\frac{9}{13}, 2\frac{11}{12}, 17\frac{1}{2}, 2\frac{1}{17}, 3\frac{2}{11}, 4\frac{3}{8}, 8\frac{3}{4}, 1\frac{11}{24}, 5\frac{5}{6}, 1\frac{8}{27}.$$

(К) (А) (Т) (Н) (Л) (О) (Н) (Б) (Р) (А) (Д) (Й) (У) (О) (Р)

- б) Выдели целую часть из неправильных дробей и расположи полученные смешанные числа в порядке убывания, сопоставив их соответствующим буквам:

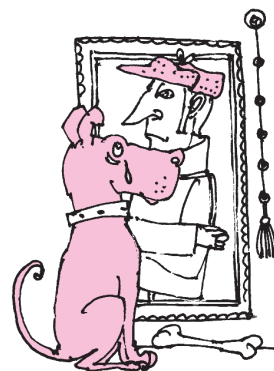
$$\frac{13}{5}, \frac{53}{10}, \frac{52}{9}, \frac{23}{5}, \frac{49}{8}, \frac{35}{9}, \frac{35}{11}, \frac{12}{5}, \frac{31}{9}, \frac{5}{4}, \frac{33}{5}, \frac{31}{7}, \frac{7}{4}, \frac{35}{8}, \frac{51}{8}, \frac{6}{5}, \frac{57}{10}.$$

(В) (А) (А) (Б) (Б) (К) (Р) (И) (Е) (Е) (С) (А) (Л) (С) (О) (Й) (К)

Расшифруй имя английского писателя конца XIX – начала XX века и название одного из его произведений.

- 174** Сравни дроби наиболее удобным способом:

$$\begin{aligned} 1) \frac{4}{5} \text{ и } \frac{17}{20}; \quad 3) \frac{2007}{2008} \text{ и } \frac{2008}{2009}; \quad 5) \frac{9}{11} \text{ и } \frac{4}{5}; \\ 2) \frac{2}{91} \text{ и } \frac{4}{179}; \quad 4) \frac{12345}{67890} \text{ и } \frac{98765}{43210}; \quad 6) 8\frac{1}{3} \text{ и } 4\frac{2}{3}. \end{aligned}$$



- 175** Сократи дроби, а затем сравни их:

$$1) \frac{52}{260} \text{ и } \frac{15}{195}; \quad 2) \frac{7 \cdot 15 \cdot 48}{25 \cdot 49 \cdot 24} \text{ и } \frac{8 \cdot 81 \cdot 59}{59 \cdot 45 \cdot 16}.$$

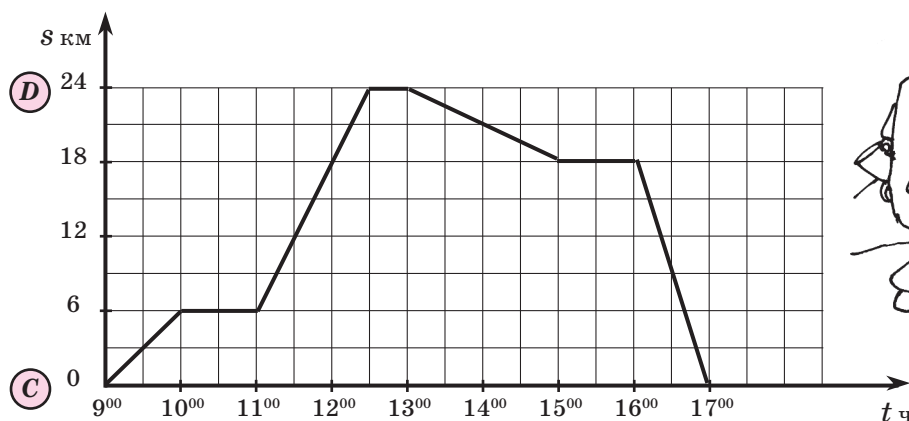
- 176** В 4-литровую кастрюлю с водой хозяйка бросила три столовые ложки соли, а в 3-литровую – две. Где раствор оказался более соленым?

- 177** По реке движется моторный катер со скоростью 225 м/мин, а впереди него в том же направлении плывет экскурсионный теплоход, скорость которого составляет $\frac{2}{3}$ скорости катера. Каким станет расстояние между теплоходом и катером через 15 мин, если сейчас между ними 3 км? Через сколько времени катер догонит теплоход? На каком расстоянии они окажутся через 10 мин после встречи, если будут продолжать движение?

- 178** Собака, почуяв приближение хозяина, побежала ему навстречу, когда он находился на расстоянии 150 м от дома. Через 10 с расстояние между ними сократилось до 50 м. С какой скоростью шел хозяин, если скорость собаки на 8 м/с больше скорости хозяина?



- 179** 1) По графику опиши движение путешественников (определи скорость и направление их движения на всех участках пути, количество и продолжительность остановок, продолжительность всего маршрута).



- 2) Как, не выполняя вычислений, определить, на каком участке пути скорость движения была наибольшей, а на каком – наименьшей?
- 3) На каком расстоянии от пункта C находились туристы через 3 ч после выхода? На каком расстоянии были они в это время от пункта D ?
- 4) В котором часу находились туристы на расстоянии 12 км от пункта C ?

- 180** Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями и приведи их к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{12}{32}$, $\frac{25}{80}$ и $\frac{222}{333}$; б) $\frac{5abd}{35ab}$ и $\frac{4xy}{2x^2}$.

- 181** Построй многоугольник $A_1A_2 \dots A_{28}$ по координатам его вершин:

$A_1(2; 14)$, $A_2(4; 14)$, $A_3(4; 15)$, $A_4(5; 15)$, $A_5(5; 16)$, $A_6(6; 16)$, $A_7(6; 9)$, $A_8(13; 9)$, $A_9(13; 10)$, $A_{10}(14; 10)$, $A_{11}(14; 0)$, $A_{12}(13; 0)$, $A_{13}(13; 6)$, $A_{14}(12; 6)$, $A_{15}(12; 0)$, $A_{16}(11; 0)$, $A_{17}(11; 6)$, $A_{18}(6; 6)$, $A_{19}(6; 0)$, $A_{20}(5; 0)$, $A_{21}(5; 6)$, $A_{22}(3; 6)$, $A_{23}(3; 3)$, $A_{24}(2; 3)$, $A_{25}(2; 7)$, $A_{26}(4; 7)$, $A_{27}(4; 12)$, $A_{28}(2; 12)$, A_1 .

Что получилось?

- 182** Сравни дроби:

$$\frac{[(90\,480 \cdot 364) : 312 : 104 : 29] \cdot (70\,000 - 69\,942 + 2)^2}{[1\,022\,200 : 3800 - (197\,745\,600 : 2080 - 18\,899) : 4009] \cdot 1092} \text{ и } \frac{6}{7}.$$

- 183*** В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают Карабасы и Барабасы. Каждый Карабас знаком с девятью Барабасами, а каждый Барабас знаком с десятью Карабасами. Кого в этой стране больше – Карабасов или Барабасов?



- 184* Тетушке Маше на три года меньше, чем Саше вместе с его ровесником Пашей. Сколько лет было Саше в то время, когда тетушке Маше было столько, сколько сейчас Паше?



- 185* Сравни дроби:

а) $\frac{41}{61}$ и $\frac{411}{611}$; б) $\frac{200200201}{200200203}$ и $\frac{300300301}{300300304}$.

Задачи для самопроверки

- 186 Запиши цифрами число: семь миллиардов сорок два миллиона пятьдесят шесть тысяч тридцать девять. Запиши предыдущее и последующее числа.

- 187 Сравни числа: а) 58 072 318 и 694 899; б) 35 240 648 и 35 240 715.

- 188 Вычисли: $[7070 \cdot 309 - 230 \cdot (168\,324 : 156) + 63\,540] : 2500$.

- 189 Сократи дробь $\frac{1485}{450}$ и выдели из нее целую часть.

- 190 Представь число $4\frac{5}{12}$ в виде дроби.

- 191 Приведи дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{8}{9}$ и $\frac{11}{18}$; б) $\frac{4}{15}$ и $\frac{3}{7}$; в) $\frac{7}{24}$ и $\frac{13}{30}$.



- 192 Сравни дроби:

а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{8}$; б) $\frac{17}{30}$ и $\frac{2}{3}$; в) $\frac{79}{68}$ и $\frac{5}{113}$; г) $\frac{11}{12}$ и $\frac{19}{20}$; д) $2\frac{3}{16}$ и $2\frac{9}{16}$.

- 193 Реши уравнения:

1) $x + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$; 2) $x - 2\frac{5}{7} = 1\frac{4}{7}$; 3) $6\frac{4}{9} - x = \frac{5}{9}$.

- 194 1) Отцу 42 года, а возраст сына составляет $\frac{2}{7}$ возраста отца. Сколько лет сыну?

2) В одном отрезе a м ткани, что составляет 30% длины второго отрезка. Чему равна длина второго отрезка?

3) Какую часть тонны составляют 125 кг?

- 195 С двух станций, расстояние между которыми 960 км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда – пассажирский и товарный. Скорость пассажирского поезда 90 км/ч, а товарного – на 20 км/ч меньше. Какое расстояние будет между поездами через 2 ч после выхода?

- 196 Из деревни в город вышел пешеход со скоростью 80 м/мин. Через 20 мин вслед за пешеходом выехал велосипедист, который догнал пешехода уже через 10 мин. С какой скоростью ехал велосипедист?

§ 2. Арифметика дробей

1. Сложение и вычитание дробей.

Складывать и вычитать дроби с одинаковыми знаменателями мы научились еще в начальной школе. Для сложения таких дробей нужно сложить числители, а знаменатель оставить прежним. На математическом языке это правило записывается следующим образом:

$$\text{Для любых натуральных чисел } a, b, c: \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

Аналогично, но чуть сложнее записывается правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\text{Для любых натуральных чисел } a, b, c \text{ при } a \geq b: \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

Что же касается дробей с разными знаменателями, то для их сложения или вычитания достаточно привести их к одному знаменателю. А это можно сделать на основании основного свойства дроби, например:

$$1) \frac{\overset{3}{9}}{10} + \frac{\overset{2}{14}}{15} = \frac{27 + 28}{30} = \frac{55}{30} = \frac{11}{6} = 1 \frac{5}{6}; \quad 2) \frac{\overset{7}{5}}{6} - \frac{\overset{3}{9}}{14} = \frac{35 - 27}{42} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

В ответе дробь обычно приводят к несократимому виду, а из неправильной дроби выделяют целую часть.

Для сложения и вычитания дробей верны изученные ранее свойства этих действий. Их использование иногда позволяет упрощать вычисления, например:

$$1) \frac{4}{99} + \frac{8}{25} + \frac{95}{99} + \frac{7}{25} = \left(\frac{4}{99} + \frac{95}{99} \right) + \left(\frac{8}{25} + \frac{7}{25} \right) = \frac{99}{99} + \frac{15}{25} = 1 + \frac{3}{5} = 1 \frac{3}{5};$$

$$2) \left(\frac{5}{6} + \frac{17}{49} \right) - \frac{17}{49} = \frac{5}{6} + \left(\frac{17}{49} - \frac{17}{49} \right) = \frac{5}{6} + 0 = \frac{5}{6}.$$

Сформулируем на математическом языке общие правила сложения и вычитания дробей. Пусть даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Их общим знаменателем может служить произведение bd – оно делится и на b , и на d . Поэтому

$$\frac{\overset{d}{a}}{b} + \frac{\overset{b}{c}}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Ясно, что вычитание возможно только в случае, когда числитель полученной дроби больше или равен нулю, то есть $ad - bc \geq 0$.

Заметим, что общий знаменатель bd для данных дробей далеко не всегда является наименьшим. Поэтому непосредственное применение этих правил часто ведет к более громоздким вычислениям.

К

197 Выполни действия:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$;	д) $\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$;	и) $\frac{7}{9} + \frac{5}{12}$;	н) $\frac{17}{20} + \frac{11}{15}$;
б) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$;	е) $\frac{2}{3} - \frac{4}{27}$;	к) $\frac{11}{12} - \frac{5}{18}$;	о) $\frac{19}{42} - \frac{5}{63}$;
в) $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$;	ж) $\frac{23}{25} + \frac{4}{5}$;	л) $\frac{3}{8} + \frac{19}{20}$;	п) $\frac{16}{21} + \frac{13}{15}$;
г) $\frac{5}{9} - \frac{3}{8}$;	з) $\frac{29}{60} - \frac{7}{30}$;	м) $\frac{5}{6} - \frac{8}{15}$;	р) $\frac{21}{22} - \frac{3}{55}$.

198 Найди значение выражения:

а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$;	г) $\frac{5}{24} - \frac{1}{60} - \frac{1}{40}$;	ж) $\left(\frac{7}{10} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)$;
б) $\frac{7}{8} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$;	д) $\frac{5}{14} + \frac{10}{21} - \frac{3}{4}$;	з) $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{9}\right) - \frac{5}{18}$;
в) $\frac{9}{10} - \frac{3}{5} + \frac{5}{7}$;	е) $\frac{5}{6} - \frac{3}{16} + \frac{5}{12}$;	и) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$.

199 Реши уравнения:

1) $x + \frac{3}{20} = \frac{5}{12} + \frac{2}{9}$;	3) $\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{8} + t\right) = \frac{11}{12} + \frac{7}{8}$;
2) $\frac{5}{7} - y = \frac{1}{54} + \frac{1}{9} - \frac{10}{27}$;	4) $\left(\frac{4}{5} - k\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$.

200 Найди значение выражения:

1) $\frac{a}{8} + \frac{3}{a}$, если $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

2) $\frac{b}{9} - \frac{b}{12}$, если $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

3) $\frac{c}{4} + \frac{c}{6} - \frac{3c}{8}$, если $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

201 Для дробей с общим знаменателем n запиши в буквенном виде и докажи:

- 1) переместительное свойство сложения;
- 2) сочетательное свойство сложения;
- 3) правило вычитания числа из суммы;
- 4) правило вычитания суммы из числа.

**202** Пользуясь свойствами сложения и вычитания дробей, вычисли наиболее удобным способом:

а) $\frac{13}{17} + \frac{5}{16} + \frac{4}{17} + \frac{7}{16}$;	в) $\left(\frac{29}{44} + \frac{1}{6}\right) - \frac{7}{44}$;	д) $\frac{35}{68} - \left(\frac{1}{68} + \frac{7}{22}\right)$;
б) $\left(\frac{11}{60} + \frac{9}{28}\right) + \left(\frac{5}{28} + \frac{19}{60}\right)$;	г) $\left(\frac{5}{8} + \frac{19}{36}\right) - \frac{1}{36}$;	е) $\frac{14}{39} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{39}\right)$.

203 Запиши для дробей в общем виде и докажи особые случаи сложения и вычитания с нулем. Для каждого случая придумай и реши соответствующие примеры.

204 Выполни сложение и вычитание дробей с натуральными числителями и знаменателями:

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{a}{x} + \frac{5}{y}; & 3) \frac{c}{k} + \frac{d}{2k}; & 5) \frac{p}{ab} + \frac{2q}{ac}; & 7) \frac{9}{5m} + \frac{a}{10k}; \\ 2) \frac{8}{m} - \frac{b}{n}; & 4) \frac{n}{4t} - \frac{7}{t}; & 6) \frac{d}{3y} - \frac{m}{6y}; & 8) \frac{2b}{xt} - \frac{c}{8x}. \end{array}$$

205 1) За день с лотка продано $\frac{9}{20}$ ц винограда и $\frac{3}{4}$ ц яблок, причем до обеда продано $\frac{7}{10}$ ц этих фруктов, а остальное – после обеда. Сколько центнеров винограда и яблок продано после обеда?

2) Велосипедист проехал в первый час $\frac{1}{4}$ пути, во второй час – $\frac{1}{5}$ пути, а в третий час – $\frac{3}{10}$ пути. Какую часть пути он проехал за 3 часа? Какую часть ему еще осталось проехать?

206 От веревки длиной $\frac{19}{20}$ м отрезали $\frac{1}{10}$ м. На сколько метров отрезанный кусок веревки меньше оставшегося?

207 1) Одна сторона треугольника равна $\frac{4}{5}$ дм, вторая – на $\frac{1}{10}$ дм длиннее первой, а третья – на $\frac{7}{20}$ дм короче второй. Чему равен периметр треугольника?

2) Ширина прямоугольника $\frac{1}{4}$ м, что на $\frac{3}{10}$ м меньше длины. Найди его периметр.

208 1) Через большую трубу бассейн наполняется за 6 ч, а через маленькую – за 14 ч. Первая труба проработала 1 ч, а вторая – 7 ч. Какую часть бассейна осталось наполнить?

2) Через большую трубу бассейн наполняется за 9 ч, а через маленькую – за 12 ч. Какую часть бассейна останется наполнить после 4 ч совместной работы обеих труб?

209 1) Двое рабочих выполнили задание за 6 ч. Если бы работал один первый рабочий, то он выполнил бы это задание за 10 часов. Какую часть работы выполнял за час каждый рабочий, если они работали с постоянной производительностью?

2) Мастер может выполнить задание за 3 ч, а его ученик – за 6 ч. Какую часть работы выполняют они за 1 час, работая вместе с той же производительностью?



- 210** 1) Из двух городов одновременно навстречу другу другу выехали 2 автомобиля. Один может проехать все расстояние между городами за 5 ч, а другой – за 4 ч. Какая часть первоначального расстояния будет между ними через 1 ч?
2) Реши предыдущую задачу для случая движения вдогонку.

- 211** 1) Запиши множество дробей, удаленных на числовом луче от дроби $\frac{7}{15}$ на $\frac{1}{3}$. Проиллюстрируй полученный ответ на чертеже.
2) Запиши с помощью двойного неравенства множество чисел x , удаленных на числовом луче от дроби $\frac{7}{15}$ меньше, чем на $\frac{1}{3}$. Докажи, что дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{19}{75}$, $\frac{101}{150}$, $\frac{875}{1500}$ принадлежат этому множеству.

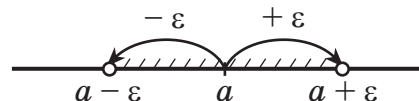
- 212** 1) Прочитай определение и назови определяемое понятие (буква ε читается: «эпсилон»):

«Множество точек числового луча, удаленных от точки a на расстояние меньше, чем ε , называется ε -окрестностью точки a ».

Изобрази с помощью числового луча ε -окрестность точки 3 при $\varepsilon = 1$.

- 2) Используя чертеж, установи, верно ли сделан перевод приведенного определения на математический язык:

Точка x принадлежит ε -окрестности точки $a \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$



- 3) Пользуясь определением ε -окрестности, запиши в виде двойного неравенства ε -окрестности точек:

$$\frac{4}{9}, \text{ если } \varepsilon = \frac{2}{9}; \quad \frac{3}{10}, \text{ если } \varepsilon = \frac{1}{5};$$

$$\frac{1}{2}, \text{ если } \varepsilon = \frac{1}{6}; \quad \frac{5}{12}, \text{ если } \varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Проиллюстрируй ответы на чертеже, подобрав подходящие единичные отрезки.

Для каждой ε -окрестности запиши по одному числу, которое ей принадлежит, и по одному числу, которое ей не принадлежит.



π

- 213** Докажи или опровергни утверждения:

- 1) $\exists x \in \mathbb{N}: \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$; 3) $\exists a \in \mathbb{N}: \frac{1}{3} < \frac{a}{12} < \frac{1}{2}$; 5) $\exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{3} < \frac{n}{8} < \frac{1}{2}$;
2) $\exists y \in \mathbb{N}: \frac{y}{2} < \frac{1}{2}$; 4) $\exists b \in \mathbb{N}: \frac{1}{3} < \frac{4}{b} < \frac{1}{2}$; 6) $\exists p, q \in \mathbb{N}: \frac{1}{3} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2}$.

214 Как изменяется дробь с увеличением и уменьшением числителя, знаменателя? Не выполняя преобразований, расположи дроби:

а) $\frac{3}{11}, \frac{5}{8}, \frac{1}{15}, \frac{2}{11}, \frac{1}{20}, \frac{4}{9}, \frac{6}{7}, \frac{2}{15}$ в порядке возрастания;

б) $\frac{3}{16}, \frac{7}{9}, \frac{3}{17}, \frac{7}{12}, \frac{1}{18}, \frac{5}{12}, \frac{2}{17}, \frac{5}{16}$ в порядке убывания.

215 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

а) $\frac{495}{4620}$; в) $\frac{25-5}{50}$; д) $\frac{45ac}{54abk}$; ж) $\frac{5d+10d}{15dn}$;

б) $\frac{22 \cdot 16 \cdot 45}{25 \cdot 64 \cdot 33}$; г) $\frac{9 \cdot 4 + 6 \cdot 4}{8 \cdot 81 - 8 \cdot 56}$; е) $\frac{12xz}{16xyz}$; з) $\frac{b^2 - 6b}{2a(b-6)}$.

216 Реши уравнения:

1) $\frac{15}{a+15} = \frac{3}{7}$; 2) $\frac{4}{5} = \frac{60-m}{40}$; 3) $\frac{5x-7}{12} = \frac{1}{4}$; 4) $\frac{2}{3} = \frac{30}{27+2y}$.

217 Составь выражения и найди их значения:

1) Сумма чисел $7\frac{5}{12}$ и $3\frac{11}{12}$.

2) Разность числа $5\frac{8}{13}$ и суммы чисел $1\frac{4}{13}$ и $2\frac{7}{13}$.

3) Сумма разности чисел $4\frac{5}{9}$ и $2\frac{7}{9}$ и разности чисел 6 и $1\frac{4}{9}$.

4) Разность суммы чисел $5\frac{3}{10}$ и 4 и разности чисел $3\frac{7}{10}$ и $2\frac{9}{10}$.

218 Как изменяется сумма при увеличении или уменьшении слагаемых? Как изменяется разность при изменении уменьшаемого и вычитаемого? Сравни выражения:

1) $a+8$ и $a+25$; 3) $56-c$ и $20-c$; 5) $m-12$ и $m-4$;

2) $42+b$ и $b+19$; 4) $d-7$ и $d-15$; 6) $39-n$ и $61-n$.

219 Перерисуй таблицы в тетрадь и определи, как изменяется сумма $a+b$ и разность $a-b$ при изменении a и b (знаком «+» условимся обозначать увеличение данного числа на c , а знаком «-» — уменьшение на c).

1)

a	b	$a+b$	$a-b$
+ 7	+ 3		
+ 7	- 3		
- 7	+ 3		
- 7	- 3		

2)

a	b	$a+b$	$a-b$
+ 1	+ 4		
+ 1	- 4		
- 1	+ 4		
- 1	- 4		

- 220** На соревнованиях по биатлону одновременно стартовали два лыжника: первый – со скоростью 320 м/мин, а второй – со скоростью 300 м/мин. Мишени находятся на расстоянии 4 км 800 м от места старта. На каком расстоянии от мишеней будет находиться второй лыжник в момент прибытия туда первого лыжника?



- 221** Два велосипедиста стартовали в одном заезде спортивных соревнований на дистанцию 12 км. Скорость первого велосипедиста 500 м/мин, а второго – на 20 м/мин меньше. Какое расстояние до финиша останется ехать второму велосипедисту в момент прибытия туда первого?

- 222** Два туриста двигались с одинаковой скоростью. Первый прошел 8 км, а второй – 12 км. Первый турист был в пути на 40 мин меньше второго. Сколько времени находился в пути второй турист?

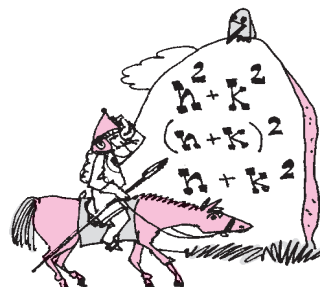
- 223** Миша и Алеша побежали навстречу друг другу, когда расстояние между ними было 180 м, и встретились через 15 с. До встречи Миша пробежал на 30 м больше, чем Алеша. С какой скоростью бежал каждый из них?

224 БЛИЦтурнир

- 1) Байдарка шла 3 ч со скоростью a км/ч, а остальное время – со скоростью b км/ч. Сколько часов она была в пути, если всего прошла s км?
- 2) Два муравья одновременно поползли от дерева в противоположных направлениях. Скорость первого муравья равна m см/с, а скорость второго составляет $\frac{5}{6}$ скорости первого. Через сколько секунд расстояние между ними будет равно k см?
- 3) Два катера плывут навстречу друг другу. Скорость первого катера равна x км/ч, что составляет 80% скорости второго катера. Сейчас между ними y км. На каком расстоянии друг от друга будут катера через 2 ч, если до этого времени они еще не встретятся?
- 4) Из поселка одновременно в одном направлении выехали два всадника. Через 20 мин расстояние между ними стало d м. Скорость всадника, который ехал быстрее, равна n м/мин. Чему равна скорость второго всадника?

- 225** Запиши выражения:

- 1) Произведение утроенного числа m и суммы чисел s и d .
- 2) Сумма квадратов чисел a и b .
- 3) Квадрат суммы чисел n и k .
- 4) Разность квадратов чисел a и 5.
- 5) Частное куба числа x и квадрата числа y .

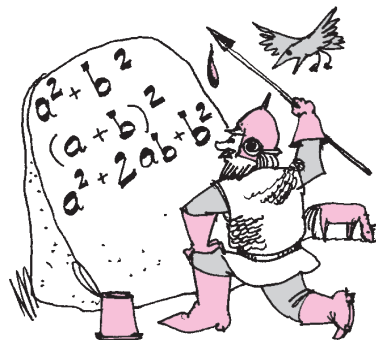


226 Прочитай выражения:

$$a^2 + b^2 \quad (a + b)^2 \quad a^2 + 2ab + b^2.$$

Перерисуй в тетрадь и заполни таблицу:

a	b	$a^2 + b^2$	$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
2	5			
1	9			
8	6			
7	4			



Что ты замечаешь? Подбери еще две пары значений a и b по собственному выбору и проверь свою гипотезу.

Существуют ли значения переменных a и b , при которых значения всех трех выражений будут равны?

227 Зависимость между переменными x и y задается формулой:

$$1) y = 2x; \quad 2) y = x + 2.$$

Составь таблицу соответствующих значений x и y при $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Построй координатный угол и отметь в нем точки (x, y) , координаты которых удовлетворяют данной зависимости. Что интересного в расположении этих точек?

228 1) Луна совершает полный оборот вокруг Земли за 27 сут. 7 ч 43 мин 11 с. Сколько это секунд?

2) Сатурн совершает полный оборот вокруг своей оси в течение 38 340 с, а Юпитер – в течение 35 400 с. Вырази это время в часах и минутах.

229 Выполни действия и вырази ответ в наиболее крупных единицах измерения:

$$1) (2 \text{ га } 8 \text{ а } 47 \text{ м}^2 - 51 \text{ а } 42 \text{ м}^2) : 15; \quad 3) (5 \text{ см } 8 \text{ мм} + 34 \text{ см } 7 \text{ мм}) \cdot 6400;$$

$$2) (5 \text{ кг } 16 \text{ г} + 4 \text{ кг } 784 \text{ г}) \cdot 250; \quad 4) (10 \text{ м}^3 - 3 \text{ м}^3 88 \text{ дм}^3) : 3600.$$

Д

230 Выполни действия:

$$1) \frac{5}{9} + \frac{3}{4}; \quad 3) \frac{13}{44} - \frac{7}{33}; \quad 5) \frac{4}{5} + \frac{7}{10} - \frac{5}{12};$$

$$2) \frac{19}{60} - \frac{3}{20}; \quad 4) \frac{17}{150} - \frac{1}{90}; \quad 6) \frac{9}{10} - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5} \right) + \frac{5}{8}.$$

231 Реши уравнения:

$$а) \frac{7}{8} - \left(x + \frac{5}{12} \right) = \frac{5}{24}; \quad б) \left(\frac{2}{15} + y \right) - \frac{7}{30} = \frac{1}{10}.$$



232 Пользуясь свойствами сложения и вычитания дробей, вычисли наиболее удобным способом:

а) $\frac{18}{19} + \frac{3}{7} + \frac{1}{19} + \frac{2}{7}$; б) $\left(\frac{29}{75} + \frac{5}{12}\right) - \frac{4}{75}$; в) $\frac{38}{51} - \left(\frac{4}{51} + \frac{11}{48}\right)$.

233 Приведи дроби к общему знаменателю и выполни действия (значения всех переменных – натуральные числа):

1) $\frac{m}{4} - \frac{3}{k}$; 2) $\frac{2}{d} + \frac{c}{n}$; 3) $\frac{7}{ab} + \frac{5}{b}$; 4) $\frac{1}{8x} - \frac{y}{6x}$.

234 1) Фермер с октября до января израсходовал $\frac{5}{16}$ годового запаса овса, а с января до апреля – на $\frac{1}{8}$ больше. Какая часть овса у него еще осталась?

2) Рабочий может выполнить производственное задание за 5 ч, а его ученик – за 8 ч. Какую часть работы останется выполнить после 2 ч их совместной работы?

235 Как изменяется сумма $a + b$ и разность $a - b$ при изменении a и b ? Перерисуй таблицы в тетрадь и заполни пропуски (см. № 219):

1)

a	b	$a + b$	$a - b$
+ 5	+ 2		
- 5	+ 2		
+ 5	- 2		
- 5	- 2		

2)

a	b	$a + b$	$a - b$
+ 8	+ 12		
- 8	+ 12		
+ 8	- 12		
- 8	- 12		

236 Сократи дроби, а затем расположи их в порядке возрастания ($a, b \in \mathbb{N}$):

$\frac{112}{392}$, $\frac{5 + 7}{14}$, $\frac{26 \cdot 8 \cdot 17}{51 \cdot 13 \cdot 24}$, $\frac{32 \cdot 3 + 32}{32 \cdot 7}$, $\frac{25ab}{15ba}$.

237 Реши уравнения:

1) $\frac{3}{4} = \frac{x - 9}{16}$; 2) $\frac{32 - y}{24} = \frac{5}{8}$; 3) $\frac{7}{11} = \frac{35}{40 + 3z}$.

238 22 января в 15 ч из Петропавловска-Камчатского в Тикси вышел ледокол со скоростью 18 км/ч. Вслед за ним 23 января в 19 ч вышел караван судов со скоростью 32 км/ч. Устойчивая радиосвязь между ледоколом и судами может быть установлена, когда расстояние между ними составит 70 км. Какого числа и в какое время это произойдет?



239 По шоссе навстречу друг другу едут автобус и мотоциклист. Скорость автобуса равна 900 м/мин, а скорость мотоциклиста составляет 75% скорости автобуса. Сейчас расстояние между ними равно 25 км 200 м. Через сколько времени они встретятся? Какое расстояние будет между ними через 4 мин после встречи, если они продолжают движение?

240 Задумано число. Если к нему прибавить $4\frac{2}{7}$, из полученной суммы вычесть $3\frac{1}{7}$, а разность вычесть из $8\frac{3}{7}$, то получится $2\frac{4}{7}$. Какое число задумано?

241 Найди значения выражений:

1) $(8 \text{ мин } 25 \text{ с} - 3 \text{ мин } 45 \text{ с}) \cdot 36$; 3) $(8 \text{ м}^2 4 \text{ см}^2 - 9 \text{ дм}^2 64 \text{ см}^2) : 260$;

2) $(5 \text{ ц } 2 \text{ кг} + 78 \text{ кг}) \cdot 5$;

4) $(5 \text{ м}^3 45 \text{ дм}^3 45 \text{ см}^3 - 5 \text{ м}^3 5 \text{ дм}^3 5 \text{ см}^3) : 40$.

242* Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, картину, корзину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка вместе. При этом каждый из предметов – картина, корзина и картонка – в отдельности весил больше, чем собачонка.

Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы.

При проверке оказалось, что если к собаке на весы добавить саквояж, то вместе они перевешивают диван, и то же самое происходит, если к собаке на весы добавить чемодан.

Докажи, что претензия дамы была справедлива.



243* Что больше:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ или $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ или $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$;

в) $\frac{1}{2005} + \frac{1}{2009}$ или $\frac{1}{2006} + \frac{1}{2008}$; г) $\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007}$ или $\frac{1}{2008} - \frac{1}{2009}$?

244* На волшебном дереве выросли 15 бананов и 20 апельсинов. Если сорвать один из плодов – вырастет такой же, если одновременно сорвать два одинаковых плода – вырастет апельсин, а если одновременно сорвать два разных плода – вырастет банан. Как надо срывать плоды, чтобы в какой-то момент на дереве остался ровно один плод? Какой это будет плод? Можно ли срывать плоды так, чтобы через некоторое время на дереве ничего не осталось?

245* Расшифруй ребус: $\text{К И С} + \text{К С И} = \text{И С К}$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.



2. Сложение и вычитание смешанных чисел.

Из начальной школы нам известно, что при сложении смешанных чисел можно сначала сложить целые части, а затем – дробные части. Это следует из переместительного и сочетательного свойств сложения:

$$1\frac{3}{8} + 4\frac{1}{8} = \left(1 + \frac{3}{8}\right) + \left(4 + \frac{1}{8}\right) = (1 + 4) + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) = 5 + \frac{4}{8} = 5\frac{4}{8} = 5\frac{1}{2}.$$

Записывают короче:

$$1\frac{3}{8} + 4\frac{1}{8} = 5\frac{3+1}{8} = 5\frac{4}{8} = 5\frac{1}{2}.$$

Если дробные части смешанных чисел имеют разные знаменатели, то их предварительно приводят к общему знаменателю. А из дробной части суммы, если она окажется больше 1, выделяют целую часть:

$$3\frac{5}{6} + 2\frac{11}{12} = 5\frac{10+11}{12} = 5\frac{21}{12} = 5\frac{7}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

Таким образом, чтобы сложить смешанные числа, можно:

- 1) привести дробные части к наименьшему общему знаменателю;
- 2) сложить отдельно целые и дробные части;
- 3) если необходимо, сократить дробную часть;
- 4) если дробная часть суммы окажется неправильной дробью, выделить из нее целую часть и полученное число прибавить к целой части суммы.

Аналогично вычитание смешанных чисел сводится к вычитанию (если это возможно) отдельно целых частей и дробных частей:

$$4\frac{9}{11} - 2\frac{6}{11} = \left(4 + \frac{9}{11}\right) - \left(2 + \frac{6}{11}\right) = (4 - 2) + \left(\frac{9}{11} - \frac{6}{11}\right) = 2 + \frac{3}{11} = 2\frac{3}{11}.$$

Как и при сложении, запись упрощают, а дробные части, в случае необходимости, приводят к общему знаменателю:

$$7\frac{5}{6} - 5\frac{8}{15} = 2\frac{25-16}{30} = 2\frac{9}{30} = 2\frac{3}{10}.$$

Если дробные части «не вычитаются» (в уменьшаемом дробная часть меньше, чем в вычитаемом), то из целой части уменьшаемого можно «занять» единицу:

$$9\frac{2}{3} - 3\frac{11}{12} = 8\frac{8}{12} - 3\frac{11}{12} = 8\frac{20}{12} - 3\frac{11}{12} = 5\frac{9}{12} = 5\frac{3}{4}.$$

Итак, чтобы вычесть смешанные числа, можно:

- 1) привести дробные части к наименьшему общему знаменателю;
- 2) если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, «занять» единицу из целой части;
- 3) вычесть отдельно целые и дробные части;
- 4) если необходимо, сократить дробную часть.

По приведенным правилам можно проводить также совместные вычисления с дробями, натуральными числами и смешанными числами, например:

$$2\frac{3}{5} + 7 = 9\frac{3}{5}, \quad 3\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = 3\frac{2}{8} = 3\frac{1}{4}, \quad 11 - 2\frac{6}{7} = 10\frac{7}{7} - 2\frac{6}{7} = 8\frac{1}{7}.$$

К

246 Вычисли суммы и найди, что общего в примерах каждого столбика:

- 1) $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{4}$; 3) $5\frac{9}{10} + 2\frac{4}{5}$; 5) $2\frac{5}{12} + 3 + 1\frac{19}{30}$; 7) $\frac{15}{34} + 3\frac{6}{17} + 5\frac{1}{2}$;
 2) $1\frac{4}{9} + 3\frac{2}{7}$; 4) $6\frac{7}{12} + 4\frac{31}{48}$; 6) $7 + 1\frac{29}{40} + 2\frac{17}{30}$; 8) $2\frac{1}{25} + \frac{5}{6} + 1\frac{11}{75}$.

247

Вычисли разности. Что общего в примерах каждого столбика?

- 1) $1 - \frac{7}{9}$; 5) $6\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$; 9) $5\frac{7}{12} - 2\frac{2}{15}$; 13) $2\frac{3}{5} - 1\frac{6}{7}$;
 2) $3 - \frac{4}{5}$; 6) $3\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$; 10) $4\frac{11}{14} - 3\frac{2}{7}$; 14) $10\frac{1}{3} - 5\frac{4}{9}$;
 3) $8 - 2\frac{1}{6}$; 7) $9\frac{11}{16} - \frac{7}{24}$; 11) $3\frac{13}{44} - 1\frac{7}{33}$; 15) $8\frac{4}{13} - 3\frac{9}{26}$;
 4) $5 - 4\frac{2}{3}$; 8) $4\frac{15}{49} - \frac{3}{14}$; 12) $9\frac{11}{60} - 3\frac{13}{80}$; 16) $7\frac{4}{25} - 2\frac{3}{4}$.

248

Найди значения выражений:

- 1) $15 - 7\frac{3}{5} + 0 + 2\frac{7}{8}$; 3) $\left(7\frac{4}{9} - 2\frac{3}{10}\right) + \left(1\frac{7}{9} + 4\frac{2}{9} - 5\frac{1}{2}\right)$;
 2) $8\frac{5}{12} + \frac{5}{6} - 5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}$; 4) $5\frac{1}{2} - \left(1\frac{3}{14} + \frac{11}{21}\right) + \left(4\frac{5}{12} - 2\right)$.

249

На вершине горы, возвышающейся на $784\frac{5}{12}$ м над уровнем моря, поставлена башня высотой $38\frac{1}{25}$ м. На крыше башни стоит громоотвод, высота которого равна $3\frac{4}{5}$ м. На какой высоте над уровнем моря находится шпиль этого громоотвода?

250

В семье пятеро сыновей. Старшему $11\frac{3}{4}$ лет, а каждый следующий младше предыдущего на $2\frac{7}{12}$ года. Сколько лет младшему сыну? Через сколько лет в семье родится следующий сын, если эта закономерность сохранится?

251

Запиши два смешанных числа так, чтобы выполнялось одно из условий:

- 1) одно из чисел больше другого на $4\frac{7}{8}$;
 2) разность чисел равна меньшему числу;
 3) сумма чисел равна натуральному числу.



252 Реши уравнения:

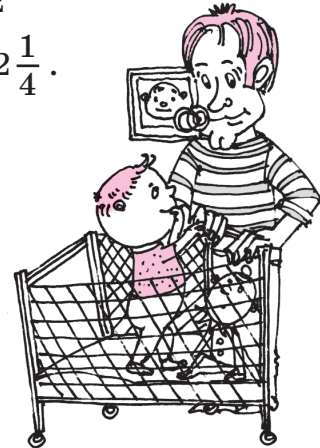
$$1) (4 - x) + 1\frac{1}{5} = 3\frac{7}{60}; \quad 3) 1\frac{2}{3} + \left(t - 2\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{24} + 5\frac{1}{2};$$

$$2) 4\frac{3}{5} + \left(y - 2\frac{5}{6}\right) = 5\frac{2}{3}; \quad 4) \left(7\frac{1}{12} - k\right) - 1\frac{1}{3} = 6\frac{13}{18} - 2\frac{1}{4}.$$

253 Отцу $42\frac{2}{3}$ года. Мать моложе отца на $3\frac{1}{4}$ года.

Когда родился сын, матери было $24\frac{5}{12}$ года, а когда родилась дочь – $27\frac{1}{3}$ лет.

- 1) Сколько сейчас лет сыну и дочери?
- 2) На сколько лет сын старше дочери?
- 3) Сколько лет было отцу, когда родились его сын и дочь?



254 Садовник собрал клубнику с четырех грядок. С первой собрал $1\frac{4}{5}$ кг, со второй – на $\frac{1}{4}$ кг больше, чем с первой, с третьей – на $\frac{1}{2}$ кг больше, чем с первых двух вместе, а с четвертой – на $2\frac{3}{10}$ кг меньше, чем с третьей. Сколько килограммов клубники собрал он со всех четырех грядок?

255 Перерисуй таблицу в тетрадь и определи, как изменяется сумма $a + b$ и разность $a - b$ при указанных изменениях a и b :

1)

a	b	$a + b$	$a - b$
$+ 5\frac{1}{2}$	$+ 4\frac{1}{2}$		
$- 5\frac{1}{2}$	$+ 4\frac{1}{2}$		
$+ 5\frac{1}{2}$	$- 4\frac{1}{2}$		
$- 5\frac{1}{2}$	$- 4\frac{1}{2}$		

2)

a	b	$a + b$	$a - b$
$+ 2\frac{3}{8}$	$+ 3\frac{1}{4}$		
$- 2\frac{3}{8}$	$+ 3\frac{1}{4}$		
$+ 2\frac{3}{8}$	$- 3\frac{1}{4}$		
$- 2\frac{3}{8}$	$- 3\frac{1}{4}$		

256 Выполни действия наиболее простым способом:

$$1) 3\frac{19}{24} + \left(5\frac{1}{9} + 1\frac{5}{24}\right); \quad 3) 7\frac{16}{35} - \left(3\frac{11}{35} + 4\frac{1}{56}\right);$$

$$2) \left(1\frac{5}{8} + 4\frac{8}{17}\right) + \left(\frac{9}{17} + 2\frac{3}{8}\right); \quad 4) \left(4\frac{56}{789} + 1\frac{5}{6}\right) - 4\frac{56}{789}.$$

257 Вычисли: $\frac{1}{7} + \frac{5}{7}$; $\frac{3}{11} + \frac{7}{11}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $2\frac{3}{8} + 1\frac{1}{8}$. Как ты думаешь, какая из сумм может быть лишней?

258 Вычисли: $1 - \frac{1}{2}$; $2 - \frac{1}{3}$; $3 - \frac{1}{4}$; $4 - \frac{1}{5}$... Какие числа будут получаться, если продолжить эту цепочку разностей, сохраняя правило? Чему равна разность, стоящая на 100-м месте?

259 Вычисли: а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{16}$; ... б) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$; $\frac{1}{7} - \frac{1}{14}$; ...

Продолжи цепочку выражений, сохраняя правило. Можно ли, не вычисляя, сказать, какие ответы будут получаться дальше?

260 1) Прочитай задачу: «В классе a девочек и c мальчиков. По болезни сегодня отсутствуют b девочек и d мальчиков. Сколько учащихся сегодня присутствует на занятиях?»

Что означают выражения:

$$(a + c) - (b + d) \text{ и } (a - b) + (c - d)?$$

2) Из равенства

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$$

сформулируй правило вычитания суммы из суммы. Используй это правило для вычисления разности $5\frac{8}{11} - 2\frac{4}{11}$.

3) Исходя из правила вычитания суммы из суммы, докажи равенство:

$$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

Замени в нем знак «+» на знак «•», а знак «-» на знак «:». Что получилось? Что получится, если заменить в новом равенстве знак деления на черту дроби?

4) Замени в равенстве $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$ знак «+» на знак «•», а знак «-» на знак «:». Переведи получившееся высказывание с математического языка на русский. Что получится, если в новом равенстве заменить знак деления на черту дроби? Сформулируй *гипотезу* об истинности этих высказываний и попробуй ее доказать.



261 1) Представь $\frac{3}{4}$ в виде дроби со знаменателем 8, 20, 36, 56, 96.

2) Можно ли дробь $\frac{2}{5}$ привести к знаменателю 45, 82, 120, 514, 8075?

262 Сократимы ли дроби: $\frac{123}{321}$, $\frac{123456}{654321}$, $\frac{123456789}{987654321}$?

263 В числителе дроби стоит число 123456789101112131415...272829, а в знаменателе – число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке: 92827262...321. Сократима ли эта дробь?

264 Докажи или опровергни высказывания:

- 1) $\exists n \in N$: дробь $\frac{2n+1}{2}$ сократима; 3) $\exists n \in N$: дробь $\frac{3n+1}{2}$ сократима;
 2) $\exists n \in N$: дробь $\frac{2n+1}{2}$ несократима; 4) $\exists n \in N$: дробь $\frac{3n+1}{2}$ несократима.

265 Могут ли быть сократимыми дроби ($m, n, k \in N$):

$$\frac{2n+1}{4}, \frac{3n-1}{6}, \frac{2n+1}{15}, \frac{3n+1}{25}, \frac{2n+1}{2n}, \frac{2n+1}{2n-1}, \frac{2n+1}{2k}, \frac{5n+3}{7m-1}?$$

Какие из этих дробей не могут оказаться натуральными числами?

266 1) Сократи дроби, представляя степени в виде произведений (значения всех переменных – натуральное число):

$$\frac{a}{a^2}, \frac{b^3}{b^2}, \frac{c^2}{c^4}, \frac{d^5}{d}, \frac{m^4}{m^8}, \frac{n^7}{n^5}, \frac{p^3}{p^6}, \frac{q^{10}}{q^7}, \frac{x^8}{x^{11}}, \frac{y^9}{y^6}.$$

Как найти ответ, не выписывая произведений?

2) Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

$$\frac{a^n}{a^{n+2}}, \frac{b^{k+5}}{b^3}, \frac{c^m}{c^4} (m > 4), \frac{d^n}{d^{12}} (n < 12), \frac{x^p}{x^q} (p > q), \frac{y^p}{y^q} (p < q).$$

267 1) Сравни данные дроби, подбирая натуральное или дробное число, расположенное между ними:

а) $\frac{38}{23}$ и $\frac{98}{47}$; в) $\frac{238}{107}$ и $\frac{623}{345}$; д) $\frac{612}{111}$ и $\frac{8586}{1401}$;
 б) $\frac{23}{38}$ и $\frac{47}{98}$; г) $\frac{107}{238}$ и $\frac{345}{623}$; е) $\frac{111}{612}$ и $\frac{1401}{8586}$.

Образец: $\frac{531}{124} < \frac{697}{125}$, так как $\frac{531}{124} < 5 < \frac{697}{125}$



2) Сравни примеры каждого столбика. Что ты замечаешь?

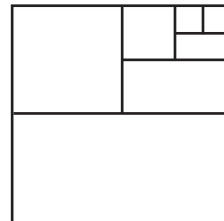
Закончи предложение:

Если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то... ($a, b, c, d \in N$)

268 Придумай, как, используя рисунок, доказать, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} < 1?$$

На сколько левая часть неравенства меньше правой?



269 БЛИЦтурнир

1) Велосипедист едет со скоростью s м/мин. На встречу ему движется автобус. Расстояние между ними за 5 мин сократилось на d м. Чему равна скорость автобуса?

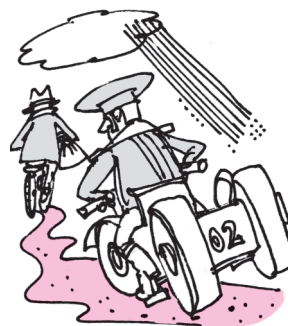
2) Милиционер преследует нарушителя. За 8 мин расстояние между ними сократилось на k м. Сейчас между ними s м. Через сколько времени милиционер догонит нарушителя?

3) Путешественник прошел за первый день a км, за второй — $\frac{3}{4}$ расстояния, пройденного в первый день, а за третий день — 70% этого же расстояния. Какое расстояние прошел путешественник за 3 дня?

4) Площадь комнаты равна b м², что составляет 40% площади второй комнаты. На сколько площадь второй комнаты больше площади первой?

5) Длина аквариума n дм, ширина — в 2 раза меньше, а высота — на 3 дм меньше длины. Сколько воды требуется налить в пустой аквариум, если уровень воды должен быть ниже верхнего края аквариума на 1 дм?

6) Один маляр может покрасить забор за x ч, а другой — за y ч. Какую часть забора смогут они покрасить за 2 ч, работая вместе с той же производительностью?



270 1) Пользуясь рисунком, объясни, почему верно равенство:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Выведи из этого равенства правило умножения суммы на сумму.

	a	b
c		
d		

2) Выполни умножение и упрости полученные выражения:

$$\begin{array}{lll} (x + 3) \cdot (x + 2), & (5 + t) \cdot (5 + t), & (a + b)^2, \\ (4 + y) \cdot (1 + y), & (k + 3) \cdot (k + 3), & (c + d)^2. \end{array}$$

Проанализируй ответы последнего столбика и придумай правило вычисления квадрата суммы двух чисел.

271 Переведи условие задачи на математический язык:

1) Длина садового участка прямоугольной формы на 10 м больше его ширины. Его площадь решили увеличить на 400 м². Для этого длину увеличили на 10 м, а ширину на 2 м. Чему равна площадь нового участка?

2) Под строительную площадку отвели прямоугольный участок, длина которого на 25 м больше его ширины. При утверждении плана застройки длину участка увеличили на 5 м, а ширину — на 4 м, в результате площадь участка увеличилась на 300 м². Чему равна площадь образовавшейся строительной площадки?

272 Построй математическую модель задачи и реши ее *методом перебора*:

1) Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если эти цифры поменять местами, то получится число, которое на 27 меньше исходного. Найти эти числа.

2) Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, составляет $\frac{4}{7}$ исходного числа. Найти эти числа.

273 Построй отрезки MN и PQ и найди координаты их точки пересечения:

1) $M(5; 0)$, $N(0; 15)$, $P(0; 6)$, $Q(8; 0)$; 2) $M(4; 0)$, $N(0; 8)$, $P(0; 5)$, $Q(10; 0)$.

Что интересного в расположении концов отрезков? Чем характеризуются координаты точек, расположенных на оси абсцисс, на оси ординат?

Д

274 Выполни действия:

$$1) 7\frac{4}{21} + 2\frac{1}{6}; \quad 3) 3\frac{7}{30} - \left(4\frac{1}{6} - 1\frac{2}{15}\right) + \left(4\frac{5}{9} - 4\frac{5}{9}\right);$$

$$2) 3\frac{5}{36} - 1\frac{19}{45}; \quad 4) 2\frac{7}{12} + 6\frac{8}{9} - \left(5 - 1\frac{7}{36} - 3\frac{1}{3}\right).$$

275 Реши уравнения:

$$1) \left(x + 2\frac{3}{13}\right) - 1\frac{7}{26} = 4\frac{5}{39}; \quad 2) 8\frac{7}{18} - \left(1\frac{11}{15} + y\right) = 3\frac{4}{15} + 2\frac{13}{45}.$$

276 Найди значение выражения наиболее удобным способом:

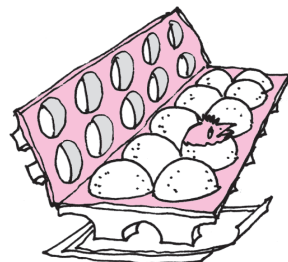
$$а) 2\frac{9}{49} + \left(7\frac{3}{85} + 3\frac{40}{49}\right); \quad б) \left(5\frac{16}{39} + 1\frac{6}{11}\right) - 2\frac{16}{39}; \quad в) 7\frac{13}{14} - \left(2\frac{13}{14} + 4\frac{17}{25}\right).$$

277 Камень, брошенный вниз со склона ущелья, пролетает в первую секунду $4\frac{9}{10}$ м, а в каждую следующую секунду на $9\frac{4}{5}$ м больше, чем в предыдущую.

Определи глубину ущелья, если камень коснулся дна ущелья через 3 с.

278 В числителе дроби записали произведение всех четных чисел первого десятка, а в знаменателе – произведение всех нечетных чисел первого десятка. Приведи эту дробь к несократимому виду.

279 Килограмм масла стоит 180 р., что составляет 90% стоимости килограмма мяса. Стоимость пакета молока составляет 20% стоимости килограмма мяса, или $\frac{4}{5}$ стоимости десятка яиц. Сколько надо заплатить за три десятка яиц?



280 Сократи дроби: 1) $\frac{3^2}{3^5}$; 2) $\frac{7^4}{7}$; 3) $\frac{a^3}{a^6}$ ($a \in N$); 4) $\frac{b^8}{b^4}$ ($b \in N$).

281 Как изменяется сумма $a + b$ и разность $a - b$ при указанных изменениях a и b ?

1)

a	b	$a + b$	$a - b$
$+ 2\frac{3}{7}$	$+ 1\frac{2}{7}$		
$+ 2\frac{3}{7}$	$- 1\frac{2}{7}$		
$- 2\frac{3}{7}$	$+ 1\frac{2}{7}$		
$- 2\frac{3}{7}$	$- 1\frac{2}{7}$		

2)

a	b	$a + b$	$a - b$
$+ 1\frac{1}{2}$	$+ 5\frac{1}{3}$		
$+ 1\frac{1}{2}$	$- 5\frac{1}{3}$		
$- 1\frac{1}{2}$	$+ 5\frac{1}{3}$		
$- 1\frac{1}{2}$	$- 5\frac{1}{3}$		

282 Прочитай выражение и преобразуй его в сумму (см. № 270):

- 1) $(a + 9)(b + 4)$; 2) $(x + 5)(2 + x)$; 3) $(m + n)^2$; 4) $(c + 3)^2$.

283 Переведи условие задачи на математический язык:

У прямоугольника длина на 8 см больше ширины. После того как длину увеличили на 5 см, а ширину уменьшили на 4 см, его площадь уменьшилась на 40 см². Найти стороны данного прямоугольника.

284 Сумма цифр двузначного числа равна 14. Когда эти цифры поменяли местами, получили число, которое на 36 меньше исходного. Найди эти числа.

285 1) Построй четырехугольник $ABCD$, если $A(0; 3)$, $B(5; 6)$, $C(10; 3)$, $D(5; 0)$, и найди координаты точки пересечения его диагоналей.

2) Сколько осей симметрии имеет четырехугольник $ABCD$?

3) Измерь углы четырехугольника $ABCD$. Что ты замечаешь?

4) Найди как можно больше свойств этого четырехугольника.

286* Существует ли двузначное число, в 2 раза большее произведения своих цифр?

287* В одном классе обучается меньше чем 50 учащихся. На Тверской улице проживает $\frac{1}{7}$ учащихся этого класса, на Петровке – $\frac{1}{3}$, на Малой Бронной – $\frac{1}{2}$ и на Большой Дмитровке – остальные ученики. Сколько учеников проживает на Большой Дмитровке?

288* «Ну, погоди!» – зарычал Волк, заметив в 30 м Зайца, и бросился за ним, когда тому оставалось бежать до места укрытия 250 м. Догонит ли Волк Зайца, если он пробегает за минуту 600 м, а Заяц – 550 м?

