А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

АЛГЕБРА

7 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2020

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М79

М79 **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 7 класс. Методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 47, [1] с. — ISBN 978-5-9963-5331-6.

В пособии представлена авторская концепция курса «Алгебра. 7—9 классы», примерное тематическое планирование учебного материала в 7-м классе, методические рекомендации ко всем главам учебника «Алгебра» для 7-го класса авторского коллектива под руководством А. Г. Мордковича, а также решения некоторых упражнений главы 7 «Описательная статистика».

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9963-5331-6

Предисловие

Настоящее пособие предназначено тем учителям математики, которые в своей практической работе опираются на УМК, созданный авторским коллективом под руководством А. Г. Мордковича:

- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева*. Алгебра. 7 класс. **Учебник** для общеобразовательных организаций;
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова*. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы. **Примерные рабочие программы;**
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов*. Алгебра. 7 класс. **Методическое пособие для учителя;**
- *М. В. Шуркова*. Алгебра. 7 класс. **Контрольные работы;**
- *М. В. Шуркова*. Алгебра. 7 класс. **Рабочая тетрадь.**

В первом разделе пособия представлена концепция курса «Алгебра. 7—9 классы», во втором разделе — примерное тематическое планирование материала в 7-м классе; третий раздел посвящен методическим рекомендациям ко всем главам учебника «Алгебра. 7 класс» и решению ряда упражнений главы 7 «Описательная статистика».

Концепция курса «Алгебра. 7—9 классы» для общеобразовательной школы

Исходные положения нашей концепции можно сформулировать в виде двух тезисов:

1. *Математика в школе — не наука и даже не основы науки, а учебный предмет.*

2. *Математика в школе — учебный предмет скорее гуманитарный, чем естественно-научный.*

Первый тезис означает, что в учебном предмете необязательно соблюдать законы математики как науки (например, такие: все начинается с аксиом, нельзя начинать изучение теории без строгого определения основного понятия, все утверждения надо доказывать и т. д.), зачастую более важны законы педагогики и психологии, постулаты теории развивающего обучения. Остановимся для примера на одном из самых трудных моментов в преподавании — введении определений (*как и когда* вводить то или иное сложное математическое понятие) и на выборе уровня строгости изложения в школьном курсе математики.

Если основная задача учителя — обучение, то он имеет право давать формальное определение любого понятия тогда, когда считает нужным. Если основная задача учителя — развитие, то следует продумать выбор места и времени (*стратегия*) и этапы постепенного подхода к формальному определению на основе предварительного изучения понятия на более простых уровнях (*тактика*). Таких уровней в математике можно назвать три: *наглядно-интуитивный*, когда новое понятие вводится с опорой на интуитивные или образные представления учащихся; *рабочий* (*описательный*), когда от учащегося требуется уметь отвечать не на вопрос «Что такое...», а на вопрос «Как ты понимаешь, что такое...»; *формальный*. Стратегия введения определений сложных математических понятий в наших учебниках базируется на положении о том, что выходить на формальный уровень следует при выполнении двух условий:

1) если у учащихся накопился достаточный опыт для адекватного восприятия вводимого понятия, причем опыт по двум направлениям: *вербальный* (опыт полноценного понимания всех слов, содержащихся в определении) и *генетический* (опыт использования понятия на наглядно-интуитивном и рабочем уровнях);

2) если у учащихся появилась потребность в формальном определении понятия.

Новый математический термин и новое обозначение должны появляться мотивированно, тогда, когда в них возникает необходимость — в первую очередь в связи с появлением новой математической модели. Немотивированное введение нового термина провоцирует запоминание (компонент обучения) без понимания (и, следовательно, без развития).

В истории математики то или иное понятие практически всегда проходило в своем становлении три указанные выше стадии (наглядное представление, рабочий уровень восприятия, формальное определение), причем переход с уровня на уровень зачастую был весьма болезненным и длительным по времени. Не учитывать этого нельзя в силу своеобразного «закона сохранения сложности»: если формирование раздела науки, понятия, утверждения и т. п. в реальной истории науки было долгим и сложным, а временами, быть может, и мучительным, то и при обучении излишняя простота изложения психологически дезориентирует учащихся, создавая ненужную иллюзию легкости. Детям нужно дать время хотя бы приблизительно, но пережить эту нетривиальность, деятельностно почувствовать ее, не спеша перейти с уровня на уровень.

Проиллюстрируем это положение примером из элементарной теории вероятностей.

В учебнике 8-го класса мы начинаем говорить о независимых повторениях испытаний (§ 43), там же впервые появляются термины «успех» и «неудача», но только на деятельностном уровне решения конкретных примеров 4 и 5.

В учебнике 9-го класса уже есть отдельный § 38 «Испытания с двумя исходами и их независимые повторения». В нем появляются таблицы распределения числа «успехов» при $n = 2$ и $n = 3$, закрепленные примерами 1—3, и ставится вопрос о распределении для произвольного n. Формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ приводится без доказательства, только как ответ на этот вопрос, и затем в примере 4 иллюстрируется ее применение при $n = 5$. Эта формула, кстати, показывает и важность предыдущего знакомства с комбинаторикой и числами C_n^k сочетаний. В учебнике 10-го класса число «успехов» интерпретируется уже как один из важнейших примеров случайной величины. При этом таблица распределения такой с.в. оказывается, во-первых, знакомой из 9-го класса, а во-вторых — связанной с биномом Ньютона. Кроме того, формула Бернулли теперь уже *доказывается*. Позже, в 11-м классе, мы работаем со знакомым теперь *биномиальным* распределением и в итоге приходим к, несомненно, кульминационному моменту — статистической устойчивости и закону больших чисел в формуле Бернулли. Тем самым локальная учебная линия «Испытания, формула и теорема Бернулли» оказывается распределенной по материалу четырех лет обучения с постепенным переходом от одного уровня сложности и абстрактности к другому, более высокому уровню.

В учебном предмете мы не обязаны все доказывать. Более того, в ряде случаев правдоподобные рассуждения или рассуждения, опирающиеся на графические модели, на интуицию, имеют для школьников более весомую развивающую и гуманитарную ценность, чем формальные доказательства. В нашем курсе все, что входит в программу, что имеет воспитательную ценность и доступно учащимся, доказывается. Если формальные доказательства мало поучительны и схоластичны, они заменяются правдоподобными рассуждениями (в основном это относится к изучению элементов математического анализа в 11-м классе). Наше кредо: с одной стороны, *меньше схоластики, меньше формализма, меньше «жестких моделей», меньше опоры на левое полушарие мозга*; с другой стороны, *больше геоме-*

трических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше «мягких моделей», больше опоры на правое полушарие мозга. Преподавать в постоянном режиме жесткого моделирования — легко, использовать в преподавании режим мягкого моделирования — трудно; первый режим — удел ремесленников от педагогики, второй режим — удел творцов.

В наших учебниках мы в той или иной степени старались реализовать *пять принципов развивающего обучения Л. В. Занкова*.

То, что теория занимает приоритетное положение (*первый принцип*), обсуждению не подлежит — это вообще характерная особенность учебной дисциплины под названием «математика». Наши учебники насыщены информацией, так что изучение материала должно проходить в быстром темпе (*второй принцип*). Основное внимание при изложении материала уделяется трудным местам курса; трудности не отметаются, а преодолеваются совместной работой с учащимися с помощью отыскания адекватных методических средств (*третий принцип*).

Наша трактовка *четвертого принципа* такова: ученик не развивается по-настоящему, если он *не осознает своего* развития, не осознает, что изученный на уроке материал имеет гуманитарную (а не только информационную) ценность лично для него. В нашем курсе это достигается за счет целесообразно организованного *проблемного обучения*. Есть три подхода к обучению математике, в той или иной степени ассоциирующихся с проблемным обучением: метод обучения с помощью задач, метод обучения с помощью создания проблемных ситуаций и собственно проблемное обучение. Метод обучения с помощью задач заключается в следующем: в начале урока учитель предлагает ученикам задачу, решить которую они пока не в состоянии. Он кое-что объясняет, вводит новые элементы теории, затем возвращается к исходной задаче и доводит ее до конца.

В принципе это вполне пригодный метод обучения, но у него есть один крупный недостаток — он не является личностно ориентированным. Задача, которая разбирается на уроке, нужна не ученику, а учителю. Учитель навязывает ее учащимся, поскольку это сделает процесс объяснения нового материала более комфортным для учителя. Примерно так же обстоит дело и с методом создания проблемных ситуаций. В проблемную ситуацию учащегося загоняет учитель и сам его из проблемной ситуации выводит, причем на том же уроке. При использовании указанных двух методов учащиеся, как правило, пассивны.

При правильном подходе к проблемному обучению ситуация иная. Во-первых, с проблемой должен непосредственно столкнуться сам учащийся. Решая задачу или проводя какие-то рассуждения, он должен лично убедиться в том, что что-то ему не по силам, поскольку он, видимо, чего-то не знает (в нашем курсе это, как правило, связано с выходом на новую математическую модель). Во-вторых, решение проблемы должно быть отсрочено по времени, проблема должна «отлежаться». Только при этих условиях, добравшись до решения проблемы, учащийся поймет, что он продвинулся в своем развитии, и получит определенные положительные эмоции.

Пятый принцип Л. В. Занкова (о развитии всех учащихся) означает дифференцированность в обучении. Подходы к решению этой проблемы мы наметили. Особенно ярко это видно в наших системах упражнений. Упражнения к каждому параграфу выстроены в трех уровнях. Два уровня — базовые, строго в рамках стандарта (простые задания и задания средней трудности), третий — задания повышенной сложности. Упражнения во многих случаях идут блоками, причем от номера к номеру добавляется только один новый дидактический компонент, который учитель легко обнаружит и поймет, надо ли ему в своем конкретном классе идти с предлагаемой авторами скоростью, не стоит ли кое-какие номера пропустить.

Обсудим второй тезис.

Математика — гуманитарный (общекультурный) предмет, который позволяет субъекту правильно ориентироваться в окружающей действительности и «ум в порядок приводит». Математика — наука о математических моделях. Модели описываются в математике специфическим языком (термины, обозначения, символы, графики, графы, алгоритмы и т. д.). Значит, надо изучать математический язык, чтобы мы могли работать с любыми математическими моделями. Основное назначение математического языка — способствовать организации деятельности (тогда как основное назначение обыденного языка — служить средством общения), а это в наше время очень важно для культурного человека. Поэтому в нашем курсе *математический язык* и *математическая модель* — ключевые слова в постепенном развертывании курса, его идейный стержень. В XXI в. владение хотя бы азами математического языка — непременный атрибут культурного человека.

Гуманитарный потенциал школьного курса алгебры мы видим, во-первых, в том, что владение математическим языком и математическим моделированием позволит учащемуся лучше ориентироваться в природе и обществе; во-вторых, в том, что математика по своей внутренней природе имеет богатые возможности для воспитания мышления и характера учащихся; в-третьих, в реализации в процессе преподавания идей развивающего и проблемного обучения; в-четвертых, в том, что уроки математики (при правильной постановке) способствуют развитию речи обучаемого не в меньшей степени, чем уроки русского языка и литературы.

Заметим, что желание способствовать реализации последнего тезиса и привело к тому, что наши учебники написаны весьма подробно, обстоятельно и где-то даже избыточно многословно, вопреки традиции излагать материал в школьных учебниках математики в телеграфно-инструктивной, информационно-авторитарной манере. Но есть и еще одна серьезная причина выбора нами мягкого стиля подачи теоретического материала в учебнике. Школа должна не только обеспечить учащегося необходимыми знаниями, но и организовать формирование самостоятельного деятельностного опыта нахождения, получения и отбора информации. А для этого, как минимум, необходима привычка, навык самостоятельного чтения и понимания учебных текстов, в первую очередь текстов учебников. Но сухо написанный учебник учащийся читать не будет.

Основу нашей методической концепции школьного курса алгебры 7—9-го классов и алгебры и начал математического анализа 10—11-го классов составляет *принцип приоритетности функционально-графической линии.*

Приоритетность функционально-графической линии выражается прежде всего в том, что, какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда осуществляется по жесткой схеме:

функция — уравнения — преобразования.

Раскроем методические особенности изучения функций в наших учебниках.

1) *Отказ от формулировки определения функции при первом появлении этого понятия.*

Поначалу, пока изучаются простейшие функции (линейная, обратная пропорциональность, квадратичная — в нашей программе это материал 7—8-го классов), следует отказаться от формального определения функции и ограничиться описанием, не требующим заучивания. Ничего страшного в этом нет, о чем свидетельствует и история математики. Многие математические теории строились, развивались и обогащались все новыми и новыми фактами и приложениями, несмотря на отсутствие определения основного понятия этой теории. Так было в теории пределов (до О. Коши), так было в теории действительного числа. Действительными числами оперировали многие века, не имея определения, и лишь в конце XIX в. появилось сразу несколько вариантов определения действительного числа (Р. Дедекинд, К. Вейерштрасс, Г. Кантор). Можно строить теорию, даже достаточно строгую, и при отсутствии строгого определения исходного понятия — во многих случаях это оправдано с методической точки зрения. Определение функции в школе необходимо ввести тогда, когда ученики накопят достаточный опыт в оперировании этим понятием. В нашей программе это предусмотрено в начале 9-го класса.

Далее, в конце 9-го класса общее понятие числовой функции удачно дополняется и понятием *случайной величины*. Это тоже числовая функция, вот только область ее определения — не числовое множество, а (конечное) множество всех элементарных событий (исходов) данного испытания. Это новое для учеников обстоятельство объясняется у нас в § 39 сначала в конкретных примерах 1—6, потом формулируется в виде определения и затем иллюстрируется примерами 7—9.

2) *Постепенное введение в программу свойств функций, подлежащих изучению, на различных уровнях строгости.*

Перечислим те свойства функций, которые на том или ином уровнях строгости изучаются в различных разделах школьного курса алгебры: область определения, область значений функции, монотонность, четность, периодичность, непрерывность, выпуклость, ограниченность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, дифференцируемость.

Естественно, учителей всегда беспокоят три вопроса:

— каким из этих понятий нужно дать в школе точное определение, а какие достаточно описать на наглядно-интуитивном или рабочем уровнях;

— как и когда давать то или иное формальное определение;

— если точное определение вводится позже первичного использования понятия, то каковы пропедевтика и динамика развития соответствующего понятия.

Эти вопросы далеко не праздные. Главная методическая ошибка — появление указанных свойств функций в более или менее полном объеме практически одновременно при изучении темы «Исследование функций с помощью производной» в курсе алгебры и начал математического анализа в 10—11-м классах, что вызывает понятные затруднения у учащихся (из-за переизбытка информации). Это и педагогическая ошибка. Дело в том, что каждый учитель реализует в своей педагогической деятельности различные программы: интереса, памяти, развития и т. д. Среди них значительное место занимает программа развития речи (включающая, в частности, правильное употребление терминов математического языка). Не следует забывать, что в реальной жизни употребление определенных терминов в речи со смутным их пониманием часто предшествует полноценному пониманию, которое приходит после привыкания к терминам. Поэтому мы считаем не только возможным, но и полезным употребление школьниками, начиная с 7-го класса, таких, например, терминов, как непрерывность функции, наибольшее и наименьшее значения функции, без знания строгих математических определений этих понятий, что и сделано в нашем учебнике «Алгебра» для 7-го класса. В 8-м классе на наглядно-интуитивном уровне мы ввели понятия выпуклости и ограниченности функции. И только в курсе алгебры 9-го класса, после накопления соответствующего опыта, мы выходим на формальный уровень определения таких понятий, как ограниченность функции, наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке и т. д.

В чем состоит принципиальная трудность для учащихся в усвоении этих, казалось бы, несложных математических понятий, почему мы считаем необходимым готовить базу для введения формальных определений? На наш взгляд, принципиальная трудность заключается в том, что неокрепший мозг ученика не в состоянии осмыслить наличие в одном определении двух кванторов — квантора общности («для всех», «для каждого», «для любого») и квантора существования («существует», «для некоторого») — в рамках одного предложения. «Существует» и «для любого» — это для него в определенном смысле противоречащие друг другу ситуации. С чем он встречается при определении понятия ограниченности или наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке? Вспомним соответствующие определения.

Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной снизу (сверху)*, если *все* значения функции больше (меньше) *некоторого* числа. Иными словами, если *существует* число m (соответственно M) такое, что *для любого* значения x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) > m$ (соответственно, $f(x) < M$). Число m (M) называют *наименьшим (наибольшим) значением функции* $y = f(x)$ *на множестве* $X \in D(f)$, если, во-первых, в X *существует* такая точка x_0, что $f(x_0) = m$ ($f(x_0) = M$); во-вторых, *для всех* x из X выполняется неравенство $f(x) \geqslant m$ (соответственно, $f(x) \leqslant M$). Опыт показывает, что двухкванторные определения трудны для восприятия большинства школьников, поэтому особенно важна опережающая формальное определение опора на наглядность. В такой ситуации работают оба полушария головного мозга ученика: и правое, отвечающее за образы, и левое, отвечающее за формально-логическое мышление. Введя понятия наименьшего (наибольшего) значения функции в 7-м классе, а понятие ограниченности функции в 8-м классе, мы как раз и используем геометрические образы. Например, ограниченность сверху трактуется геометрически: весь график расположен ниже некоторой прямой. В последнем предложении фактически имеются оба квантора — *весь* график ниже *некоторой* прямой. Геометрическая иллюстрация помогает учащемуся преодолеть логические трудности. Вот так постепенно его ум «в порядок приводится».

Приведем таблицу «стратегии и тактики» изучения свойств функций в нашем курсе алгебры для 7—9-го классов. *Стратегия* определяет время введения понятия (класс), а *тактика* — формирование уровней строгости предъявления понятия. В таблице приняты условные обозначения: **Н** — это значит, что соответствующее свойство функции вводится на наглядно-интуитивном уровне; **Р** — это значит, что свойство функции изучается на рабочем уровне, на уровне словесного описания, не загнанного в жесткую формальную конструкцию; **Ф** — означает формальное определение свойства.

Свойство	Класс		
	7-й	**8-й**	**9-й**
Область определения	**Н**	**Р**	**Ф**
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	**Н**	**Р**	**Ф**
Монотонность	**Н**	**Р**	**Ф**
Непрерывность	**Н**	**Н**	**Н**
Ограниченность	—	**Н, Р**	**Ф**
Выпуклость	—	**Н**	**Н**
Область значений	—	**Н, Р**	**Ф**
Четность	—	—	**Ф**

Сделаем некоторые комментарии к этой таблице. Во-первых, учитывая, что учащиеся 7—9-го классов более восприимчивы к новым математическим понятиям (представленным хотя бы в ознакомительном плане), чем учащиеся 10—11-го классов, мы все свойства функций, какие было можно, перенесли в основную школу; в старшей школе впервые появляются лишь три свойства функций (из одиннадцати) — периодичность, дифференцируемость и экстремумы. Далее следует обратить внимание на то, что фактически весь 7-й класс мы работаем с учащимися на наглядно-интуитивном уровне, весь 8-й класс — на рабочем уровне и только в 9-м классе выходим на формальный уровень. Поясним это на примере свойства монотонности функции.

В 7-м классе, изучая график линейной функции, мы обращаем внимание учащихся на то, что этот график иногда как бы идет «в горку», а иногда как бы спускается «с горки». В первом случае линейную функцию называют возрастающей, во втором — убывающей (наглядно-интуитивный уровень). Изучая в 8-м классе функцию $y = \sqrt{E}$ и квадратичную функцию, мы снова опираемся на наглядное представление о монотонности, но постепенно переходим на рабочий уровень: функция возрастает (убывает), если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. И только в 9-м классе после изучения свойств числовых неравенств мы даем формальное определение монотонности функции: функцию $y = f(x)$ называют возрастающей (убывающей) на множестве $X \subset D(f)$, если для любых x_1, x_2 из X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

3) Для понимания учащимися курса алгебры в целом прежде всего важно, чтобы они полноценно усвоили первичные модели (функции). Это значит, что нужно организовать их деятельность по изучению той или иной функции так, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель — функцию) системно, с различных сторон, в разных ситуациях. В то же время не должно складываться ощущение набора случайных сюжетов, различных для разных классов функций, это создает ситуацию дискомфорта в обучении. Возникает методическая проблема выделения в системе упражнений по изучению того или иного класса функций *инвариантного ядра, универсального для любого класса функций.*

В наших учебниках такое ядро, инвариантное относительно класса функций, состоит из шести направлений (компонентов):

- графическое решение уравнений (неравенств);
- отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- преобразование графиков;
- функциональная символика;
- кусочно-заданные функции;
- чтение графика.

Учащиеся постепенно привыкают к тому, что, какой бы новый класс функций они ни изучали, в системе упражнений обязательно будут упражнения, рассредоточенные по указанным шести блокам. Образно выражаясь, это шесть красок, с помощью которых изучаемая математическая модель — функция — становится емкой, цельной, понятной, красивой и привычной. Создается эффект предсказуемости деятельности, что делает совместную работу учителя и ученика на уроке достаточно комфортной. Раскроем методические особенности каждого из указанных направлений.

Графическое решение уравнений

Графический (или, точнее, функционально-графический) метод решения уравнений должен, на наш взгляд, всегда быть первым и одним из главных при решении уравнений любых типов. Неудобства, связанные с применением графического метода, как правило, и создают ту проблемную ситуацию, которая приводит к необходимости отыскания алгоритмов аналитических способов решения уравнения. Эта идея проходит у нас красной нитью через весь школьный курс алгебры.

Что дает этот метод для изучения той или иной функции? Он приводит ученика к ситуации, когда график функции строится не ради графика, а для решения другой задачи — для решения уравнения. График функции становится *не целью, а средством*, помогающим решить уравнение. Это способствует и непосредственному изучению функции, и ликвидации того неприязненного отношения к функциям и графикам, которое, к сожалению, характерно для традиционных способов организации изучения курса алгебры в общеобразовательной школе. В наших учебниках графический способ решения уравнения в большинстве случаев предшествует аналитическим способам. Учащиеся вынуждены применять его, привыкать к нему и относиться как к своему первому помощнику (они, образно выражаясь, обречены на дружбу с графическим методом), поскольку никаких других приемов решения того или иного уравнения к этому времени не знают. Опыт показывает, что графический метод решения уравнений им нравится, они чувствуют его полезность и красоту и в то же время ощущают проблемность ситуации, вызванную ненадежностью этого метода решения уравнения.

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке

Начиная с 7-го класса, мы предлагаем учащимся задания такого типа: найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x + 3$ на отрезке [1; 3]. Предполагается, что учащиеся построят график линейной функции $y = 2x + 3$, выделят часть графика на отрезке [1; 3] и по графику найдут наибольшее и наименьшее значения функции. В чем методическая ценность подобного задания?

Во-первых, это новая «игра» с функцией, когда график нужен не сам по себе, а для ответа на вопрос задачи (опять график — не цель, а средство).

Во-вторых, сами того не осознавая, учащиеся привыкают к оперированию двухкванторным, т. е. достаточно сложным, математическим понятием, восприятие которого требует как определенной подготовки, так и определенного уровня математической культуры (об этом мы уже говорили выше).

Преобразование графиков

Начиная с 8-го класса, какая бы функция ни изучалась, школьникам предлагается в системе упражнений выполнить то или иное преобразование графика.

Функциональная символика

Как только в 7-м классе появится запись $y = f(x)$, мы предлагаем учащимся примеры, нацеленные на осознание смысла этой записи, примеры на функциональную символику. Опыт показывает, что школьники часто не могут, например, исследовать функцию на четность не потому, что не знают определений четной или нечетной функции, а потому, что не понимают смысла записи $f(-x)$. Нередко учащиеся испытывают затруднения с производной также из-за чисто технических трудностей: не понимают смысла записи $f(x + \Delta x)$ и вследствие этого зачастую не могут составить выражение для приращения функции даже в достаточно простых случаях. Это означает, что соответствующая работа не была проведена учителем в 7—9-м классах. Поэтому считаем полезным включать в учебники задания следующего типа: для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, найти $f(a - 1)$, $f(a + 2)$, $f(3a)$, $f(5x)$, $f(-x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$ и т. п.

Кусочные функции

Для правильного формирования у учащихся как самого понятия функции, так и представления о методологической сущности этого понятия, полезно делать то, что до недавнего времени отсутствовало в большинстве школьных учебников. Речь идет о рассмотрении кусочных функций, т. е. функций, заданных различными формулами на разных промежутках области определения. Во многих случаях именно кусочные функции являются математическими моделями реальных ситуаций. Использование таких функций способствует преодолению обычного заблуждения учеников, отождествляющих функцию только с ее аналитическим заданием в виде некоторой формулы. В самом деле, чтобы задать функцию, надо указать область ее определения $D(f)$ и правило f, по которому каждому значению x из множества $D(f)$ сопоставляется определенное значение y. Если учащиеся имели дело с функциями, заданными аналитически одной формулой, заданными с помощью графика и особенно заданными различными формулами на разных промежутках, то они легче воспримут ту тонкость, которая содержится в определении («правило f»); менее вероятно при этом и отождествление ими «правила f» с «формулой f». Использование кусочных функций готовит как в пропедевтическом, так и в мотивационном плане понятие непрерывности. Использование на уроках кусочных функций дает возможность учителю сделать систему упражнений более разнообразной (что очень существенно для поддержания интереса к предмету у обучаемых), творческой (можно предложить учащимся самим сконструировать примеры). Отметим и воспитательный момент: это воспитание умения принять решение, зависящее от правильной ориентировки в условиях, это и своеобразная эстетика — оценка красоты графиков кусочных функций, предложенных разными учениками.

Чтение графика

Очень важно научить учащихся по графику описывать свойства функции, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной). Конечно, в 7-м классе этот перевод с одного языка на другой достаточно беден, но по мере появления новых свойств функций он становится все богаче (а значит, учащиеся видят, как они постепенно умнеют по мере изучения математики, что соответствует уже упомянутому выше принципу осознанности в теории развивающего обучения Л. В. Занкова). Наличие в курсе алгебры 9-го класса достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным, разнообразным (с литературной точки зрения), многоплановым. У ученика теперь имеется возможность составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику.

Попутно заметим, что в системе упражнений мы регулярно предлагаем учащимся по заданному графику восстановить аналитическое задание функции. Вообще переход от одного вида математической модели (аналитическая, графическая, вербальная) к другому происходит у нас в системе упражнений регулярно.

Примерное тематическое планирование

7 класс

(из расчета 3 ч в неделю, всего 102 ч)

Параграф	Тема	Кол-во часов
Глава 1. Математический язык. Математические модели (17 ч)		
1	Числовые и алгебраические выражения	3
2	Понятие о математическом языке	2
3	Свойства степеней с натуральными показателями	3
4	Понятие о математических моделях	2
5	Линейные уравнения с одной переменной	3
6	Координатная прямая	1
7	Числовые промежутки на координатной прямой	2
	Контрольная работа № 1	1
Глава 2. Линейная функция (13 ч)		
8	Координатная плоскость. Координаты точки на плоскости	1
9	Координатная плоскость. Построение точки на плоскости по заданным координатам	1
10	Линейные уравнения с двумя переменными	1
11	График линейного уравнения с двумя переменными	3
12	Что такое линейная функция	2
13	Линейная функция $y = kx$	2
14	Наименьшее и наибольшее значения линейной функции на заданном промежутке	1
15	Взаимное расположение графиков линейных функций	1
	Контрольная работа № 2	1

Продолжение таблицы

Параграф	Тема	Кол-во часов
Глава 3. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными (11 ч)		
16	Что такое система уравнений. Графический метод решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными	2
17	Решение систем линейных уравнений методом подстановки	3
18	Решение систем линейных уравнений методом алгебраического сложения	2
19	Системы линейных уравнений как математические модели реальных ситуаций	3
	Контрольная работа № 3	1
Глава 4. Функция $y = x^2$ (8 ч)		
20	Парабола	3
21	Графическое решение уравнений	1
22	Что означает в математике запись $y = f(x)$	2
23	Познакомимся с кусочными функциями	2
Глава 5. Одночлены и многочлены (17 ч)		
24	Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена	1
25	Сложение и вычитание одночленов	1
26	Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень	1
27	Деление одночлена на одночлен	1
	Контрольная работа № 4	1
28	Понятие многочлена. Стандартный вид многочлена. Алгебраическая сумма многочленов	2
29	Умножение многочленов	3
30	Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности	2
31	Формулы сокращенного умножения: разность квадратов	2

Окончание таблицы

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
32*	Формулы сокращенного умножения: разность кубов и сумма кубов	1
33	Деление многочлена на одночлен	1
	Контрольная работа № 5	1
Глава 6. Разложение многочленов на множители (11 ч)		
34	Разложение многочлена на множители методом вынесения общего множителя за скобки	2
35	Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения	3
36	Разложение многочленов на множители методом группировки	2
37	Сокращение алгебраических дробей	2
38	Тождества и тождественные преобразования	1
	Контрольная работа № 6	1
Глава 7. Описательная статистика (13 ч)		
39	Ряды числовых данных. Упорядочение, группировка, таблицы	3
40	Ряды нечисловых данных. Таблицы распределения частот	3
41	Диаграммы распределения данных	3
42	Числовые характеристики рядов данных	3
	Контрольная работа № 7	1
	Итоговое повторение	12

Методические рекомендации по работе с учебником «Алгебра. 7 класс»

Глава 1. Математический язык. Математические модели

Первая глава ориентирована на повторение материала 5—6-го классов, но появляются и новые термины, символы, образы, делается методическая переоценка того, что было изучено в младших классах. По большому счету нельзя начинать изучение нового предмета, не упомянув его основную идею, на раскрытие которой фактически ориентирован весь курс. Поэтому, повторяя материал курса математики 5—6-го классов, мы вводим новые термины «математический язык», «математическая модель», не давая им, естественно, строгого истолкования (эти понятия будут постепенно уточняться и постоянно пополняться новым содержанием вплоть до 11-го класса). Главная забота учителя состоит в том, чтобы школьники привыкли к этим терминам и включили их в свой рабочий словарь.

В главе 1 появляется термин «алгоритм» как синоним понятий «программа действий» или «четко определенный порядок ходов». При выработке алгоритмов полезно совместное творчество учителя и учащихся — в наших учебниках есть многочисленные образцы такой работы. Школьников следует постепенно и без нажима обучать схемам рассуждений, составлению и использованию алгоритмов, поскольку этим характеризуется современный стиль обучения математике практически на всех уровнях. Это не принижает творческой линии в математике и не делает менее значительным вклад математики в становление характера, мышления и общей культуры обучаемого, поскольку в типовых ситуациях поиск должен носить стандартизованный характер.

Согласно одному из положений теории поэтапного формирования умственных действий, при выполнении любого умственного действия человек опирается на конкретную систему ориентиров, и одним из основных путей, которые психология рекомендует для формирования полноценного представления об изучаемом понятии, является вооружение детей ориентировочной основой действий с этим понятием для решения соответствующих задач.

Обучать составлению и применению алгоритмов можно в разных разделах школьного курса математики, при этом важно, чтобы была выдержана единая линия, чтобы учитель соблюдал и учитывал основные требования к алгоритмам как к программам действий для решения задач определенного типа:

— каждая такая программа должна состоять из конечного числа обязательных шагов (*детерминированность*), идущих в определенном порядке (*последовательность*), причем каждый шаг состоит из выполнимых операций (*реальность*);

— эта программа должна иметь четкую ориентацию на вполне конкретный результат деятельности (*направленность*) и должна быть применима к любой задаче рассматриваемого типа (*массовость*).

Несколько слов о **§ 3**, посвященном свойствам степеней с натуральными показателями. Учащиеся еще не привыкли к таким терминам, как определение, теорема, доказательство. Следовательно, от учителя требуются аккуратность, постепенность и определенная тактичность. Вряд ли целесообразно уже на этом этапе изучения курса требовать от всех учеников умения воспроизводить доказательства всех свойств. В то же время игнорировать эти доказательства не стоит, тактика учителя должна быть гибкой, а подход к учащимся — дифференцированным.

К числу новых терминов, символов, обозначений относятся виды числовых промежутков (**§ 7**). При работе с числовыми промежутками мы обращаем внимание на то, чтобы учащиеся непринужденно связывали геометрическую и аналитическую модели промежутка, выбирали адекватное обозначение. От символической записи вида (3; 7) учащиеся должны уметь свободно перейти к геометрической модели — координатной прямой, на которой отмечены две светлые (незакрашенные) точки 3 и 7 и заштрихована часть прямой между ними, и к аналитической модели, т. е. к записи в виде двойного неравенства $3 < x < 7$. Точно так же от геометрической модели они должны уметь переходить к аналитической модели и к символической записи, а от аналитической модели — к геометрической модели и к символической записи. В учебнике имеется достаточное число примеров и упражнений на эту тему.

Глава 2. Линейная функция

В первых двух параграфах второй главы идет повторение всех терминов, связанных с декартовыми прямоугольными координатами на плоскости (абсцисса, ордината, ось абсцисс, ось ординат, начало координат, координатные углы). Известное учащимся правило отыскания координат точки на плоскости оформляется в виде алгоритма, при этом особо выделяются точки, лежащие на осях координат. Существенны два рассуждения, которые приводят к алгоритму отыскания точки по ее координатам. Принципиально важно, чтобы ученики поняли, что точка $M(a;\ b)$ есть точка пересечения прямых $x = a$ и $y = b$.

Ключевым параграфом главы 2 является **§ 10** о линейном уравнении с двумя переменными. Это напрямую связано с идейным стержнем всего курса — с математическим моделированием реальных процессов. Все-таки в действительности равномерные процессы чаще всего моделируются, выражаясь языком математического анализа, в неявном виде, т. е. в виде уравнения $ax + by + c = 0$, а не в явном виде, т. е. в виде линейной функции $y = kx + m$.

Поскольку определение функции будет дано только в 9-м классе, изменяется традиционная методика изложения темы «Линейная функция» — первой темы, связанной с понятием функции. Первой изучается тема «Линейные уравнения с двумя переменными» (§ 10). Рассматриваются задания следующего типа:

— найти какое-либо решение уравнения $ax + by = c$, например, уравнения $2x + 3y = 5$;

— найти решение уравнения $2x + 3y = 5$, зная, что $x = 2$, или зная, что $y = 0$, и т. п.;

— построить график уравнения $x + y = 3$ и с помощью графика указать несколько решений этого уравнения.

В **§ 12** внимание учащихся обращается на то, что график линейного уравнения с двумя переменными проще строить, если уравнение преобразовано к виду $y = kx + m$, для которого употребляется термин «линейная функция».

Если тема «Линейные уравнения с двумя переменными» отработана достаточно надежно, то с графиком линейной функции особых проблем не возникнет. Обратим внимание лишь на два обстоятельства. Первое обстоятельство — необходимость быстрого и уверенного перехода учеников от модели $ax + by + c = 0$ к модели $y = kx + m$. Второе обстоятельство связано с появлением терминов «наибольшее значение функции», «наименьшее значение функции», «возрастание», «убывание». Как было отмечено в первой части данного пособия, мы считаем не только возможным, но и полезным употребление школьниками, начиная с 7-го класса, некоторых терминов математического языка без знания строгих математических определений этих понятий. Например, учащимся предлагается построить график линейной функции $y = 2x + 4$, выделить его часть на отрезке $[1; 3]$, найти наибольшее и наименьшее значения линейной функции на этом отрезке. Примеры подобного рода позволят учителю решить сразу несколько проблем: во-первых, разнообразить систему упражнений; во-вторых, поставить учащихся в такие условия, когда построение графика является *не целью, а средством* для решения другой задачи, — такое смещение психологических акцентов способствует формированию навыков построения графика линейной функции; в-третьих, осуществить пропедевтику понятия наибольшего (наименьшего) значения функции. При этом надо видеть конечную цель: постепенно сформировать у учащихся понимание строгого определения указанного понятия (оно будет дано в 9-м классе), убедить их в том, что непрерывная функция на отрезке всегда достигает своего наибольшего и наименьшего значения (а на незамкнутом промежутке — не всегда).

Имеет смысл обратить внимание на одно принципиальное методическое обстоятельство. Учебник, о котором идет речь, — это не пособие для самообразования, это, как всякий школьный учебник, книга, которую ученик читает вместе с учителем, а не вместо того, чтобы слушать преподавателя (ясно, что ни один учебник не может заменить живое слово учителя). Если бы это было пособие для самообразования, то авторам пришлось бы выстраивать в каждом параграфе достаточно полную систему примеров с решениями, полную как по охвату материала, так и по степени нарастания трудности. В данном случае этого нет, количество примеров с подробными решениями весьма ограниченно, причем большинство из них многофункционально. Значит, подход к разобранным в тексте примерам требует в большинстве случаев дополнительной подготовительной работы учителя. Как правило, примеры, разобранные в тексте того или иного параграфа учебника, задают ориентир, который определяет уровень обязательных результатов обучения.

Глава 3. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Весь **§ 16** строится как логическое следствие предшествующего изложения и как обоснование необходимости продвижения вперед, поскольку старые знания в ряде случаев не обеспечивают успешного решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными. В остальном содержание главы 3 (метод подстановки, метод алгебраического сложения, задачи на составление систем двух линейных уравнений с двумя переменными) достаточно традиционно, хотя и не тождественно в методическом плане привычным способам подачи материала. В этом смысле следует обратить внимание:

— на равноправие трех методов решения систем (графический метод, метод подстановки, метод алгебраического сложения);

— на несколько упрощенную (по сравнению с другими школьными учебниками) методику изложения метода подстановки;

— на стандартное (только для наших учебников) оформление решения текстовых задач в виде трех этапов математического моделирования.

Отметим две задачи, представленные в системе упражнений **§ 19**.

19.13. а) Решите задачу и оцените реалистичность полученных результатов.

Вкладчик положил в два банка под разные проценты 200 тыс. р. и 100 тыс. р. соответственно, рассчитывая получить в конце года 560 тыс. р. Если бы вкладчик смог положить в оба банка одинаковые суммы по 200 тыс. р., то мог бы рассчитывать на получение 600 тыс. р. в конце года. Каковы процентные ставки в каждом банке?

Это в определенном смысле провокационное задание, ориентированное на здравый смысл. Нельзя, сделав вклад в 300 000 р., рассчитывать в конце года на почти стопроцентный прирост. Задание нереалистично — это ответ на вопрос задачи.

19.16. а) Алексей, Борис и Владимир решили покрасить забор. Алексей и Борис, работая вместе, могут покрасить этот забор за 3 ч, Борис и Владимир — за 4 ч, а Алексей и Владимир — за 6 ч. Сколько времени потребуется на покраску забора каждому мальчику в отдельности?

Решение. Основная трудность здесь заключается в том, что это первая самостоятельная встреча учащихся с так называемыми задачами на работу, где объем работы приходится принимать за единицу. В данном случае за x, y, z принимаем производительность труда, т. е. доли выполненной работы за единицу времени (за 1 ч), соответственно, Алексеем, Борисом и Владимиром. В условии сказано, что

Алексей и Борис, работая вместе, могут покрасить этот забор за 3 ч; это значит, что $3x + 3y = 1$. В условии сказано, что Борис и Владимир, работая вместе, могут покрасить этот забор за 4 ч; это значит, что $4y + 4z = 1$. В условии сказано, что Алексей и Владимир, работая вместе, могут покрасить забор за 6 ч; это значит, что $6x + 6z = 1$.

Таким образом, математическая модель задачи — система трех линейных уравнений с тремя переменными (новая достаточно сложная ситуация для семиклассников):

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1, \\ 4y + 4z = 1, \\ 6x + 6z = 1. \end{cases}$$

Можно решить систему методом подстановки, например, так: выразить z через y из второго уравнения, результат подставить в третье уравнение и полученное третье уравнение с переменными x, y рассмотреть совместно с первым уравнением исходной системы, откуда найдутся значения для x, y. Зная y, найдем и z. Но изящнее применить метод алгебраического сложения: вычесть удвоенное первое уравнение из третьего уравнения — получится $6z - 6y = -1$; затем решить систему $\begin{cases} 4y + 4z = 1, \\ 6z - 6y = -1 \end{cases}$ и т. д. В итоге получим: $x = \frac{1}{8}, y = \frac{5}{24}, z = \frac{1}{24}$.

Осталось ответить на вопрос задачи. Рассуждаем так: Алексей за 1 ч выполнит $\frac{1}{8}$ всей работы, значит, на всю работу ему потребуется 8 ч. Соответственно, Борису на всю работу потребуется $\frac{24}{5}$ ч, т. е. 4 ч 48 мин, а Владимиру — 24 ч.

Глава 4. Функция $y = x^2$

Функция $y = x^2$ изучается в 7-м классе,

— во-первых, для того чтобы школьник, целый год изучавший курс алгебры, не закончил этот год с убеждением, что в природе существуют только линейные функции; надо приоткрыть ему двери в дальнейшие разделы математики;

— во-вторых, эта функция помогает более глубокому изучению линейной функции, вовлекая ее в другие «игры»: графическое решение уравнений, построение графиков кусочных функций, функциональная символика, чтение графика — об этих направлениях, входящих в инвариантное ядро системы упражнений, мы подробно говорили в первой части данного пособия;

— в-третьих, изучение новых функций позволяет естественным образом подойти к одной из основных моделей всей математики — уравнению вида $y = f(x)$.

Обратим внимание на введение терминов «непрерывная функция» и «разрыв функции» в **§ 23**. В принципе свойство непрерывности функции в точке или на промежутке абсолютно понятно на наглядно-интуитивном уровне (график функции представляет собой сплошную линию). Поэтому представляется вполне оправданным употребление в 7-м классе термина «непрерывность» как эквивалента представления о сплошной линии, служащей графиком функции. На самом деле в математике все обстоит, как говорится, с точностью до наоборот: график функции изображается в виде сплошной линии (без проколов и скачков) только тогда, когда доказана непрерывность функции; при этом определение непрерывности функции, достаточно сложное и тонкое, опирается на теорию пределов. Ни в 7, ни в 8, ни в 9-м классах ввести это определение не удастся, поэтому мы вынуждены опираться на наглядно-интуитивные представления. В учебном предмете это оправдано. Постепенно накапливающаяся информация подготовит учащихся к восприятию основного результата математического анализа о непрерывности любой элементарной функции во всех точках ее области определения (но это произойдет позднее — в 11-м классе).

В **§ 21** формулируется алгоритм графического решения уравнения. Конечно, желательно, чтобы этот алгоритм выработали сами учащиеся с минимальной помощью учителя.

Такая работа полезна при оформлении любого алгоритма, поскольку позволяет ученику осознать этапы своей мыслительной деятельности, но следует считаться и с реалиями — не всегда эта работа пройдет в классе успешно и спокойно. Однако в данном случае мы как раз сталкиваемся с такой ситуацией, когда можно надеяться на более или менее успешную совместную деятельность ученика и учителя, причем доля первого может преобладать.

Ключевое положение не только в главе 4, но и, пожалуй, во всем курсе алгебры основной школы занимает **§ 22**, где впервые появляется столь широко распространенная в математике запись $y = f(x)$. Изложение этого материала на уроках потребует от учителя значительных педагогических и методических усилий, поскольку в **§ 22—23** содержится по крайней мере пять моментов, важных как с методологической, так и с методической точек зрения: соотношение $y = f(x)$, примеры на функциональную символику, кусочные функции, первое представление об области определения функции и первое представление о чтении графика. Из списка свойств функций, которые изучаются в многолетнем школьном курсе алгебры, в течение первого года изучения курса упоминаются четыре свойства: область определения, непрерывность, наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке, монотонность, причем все четыре — на наглядно-интуитивном уровне.

Область определения функции может быть естественной, и тогда она не указывается при задании функции; область определения функции может быть заданной, и тогда она указывается при задании функции. Первые функции, с которыми знакомятся учащиеся, — это функции $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$, рассматриваемые на всей числовой прямой. В этот момент говорить об области определения функции преждевременно. Представление о заданной (а не о естественной) области определения постепенно формируется с помощью рассмотрения кусочных функций, а также на основе задач об отыскании наибольших и наименьших значений функций на указанных промежутках. В соответствии с методическими особенностями реализации общей концепции нашего УМК, понятие отдельно задаваемой области определения появится в нашем курсе вместе с определением понятия функции, т. е. в 9-м классе.

Глава 5. Одночлены и многочлены

В главе 1 мы объяснили учащимся, что математика занимается математическими моделями и что для их составления нужно овладеть математическим языком. Но изучение любого языка начинается с освоения простейших символов этого языка — букв; таковыми в математике являются числа, переменные и степени переменных. Затем идут слоги — таковыми в математике являются одночлены. Это — преамбула к § 24—27.

Мы иногда (например, в § 15, в § 27) используем нетрадиционные для школы термины «корректное» и «некорректное» задание. Некорректное задание может быть двух видов. Первый — когда вопрос поставлен так, что на него в принципе нельзя дать ответ, т. е. когда задача в данной постановке вообще не решаема (например, задание: найти точки пересечения прямых $y = 2x + 1$ и $y = 2x + 5$; в то же время вопрос «Сколько точек пересечения имеют указанные прямые?» — вполне корректен). Второй вид — когда учащемуся предлагается задание, которое в данный момент не решаемо из-за недостатка знаний у того, кому предложено решить задачу. Задания второго вида, разумеется, неприемлемы, а вот наличие в процессе обучения некорректных заданий первого вида приносит несомненную пользу, так как у учащихся воспитывается способность критически анализировать ситуацию.

В **§ 27**, где изучается операция деления одночлена на одночлен, впервые упоминается (но не определяется) понятие алгебраической дроби (таких элементов опережающего обучения в наших учебниках, повторим еще раз, довольно много).

Дальнейшие параграфы главы 5 посвящены изучению основных понятий, связанных с многочленами, и арифметическим операциям над многочленами. В **§ 28** вводится довольно много новых понятий: многочлен, его стандартный вид, приведение подобных членов. В **§ 29—32** изложение достаточно традиционно. Что касается **§ 33** «Деление многочлена на одночлен», то если бы основное назначение курса «Алгебра–7» состояло только в сообщении учащимся определенного объема информации, этот параграф был бы не нужен, поскольку все факты, изложенные в нем, с гораздо большим успехом могут быть получены в теме «Сокращение алгебраических дробей» после изучения темы «Разложение многочленов на множители». В концепции же развивающего обучения указанный параграф, напротив, очень важен и необходим именно в данном месте курса как пропедевтика темы «Разложение многочленов на множители» и как осознание проблемной ситуации, разрешение которой будет получено при изучении алгебраических дробей в 8-м классе.

Глава 6. Разложение многочленов на множители

Ученик должен постоянно осознавать структуру изложения материала, понимать, почему главы и параграфы идут именно в таком порядке, ощущать логику повествования. В этом ему должны помогать и учебник, и учитель. Именно поэтому важна вводная часть **§ 34**, где на первый план выходит мотивация — зачем нам нужно уметь раскладывать многочлен на множители: например, для решения уравнений, для сокращения дробей, для рационализации вычислений. Мотивация, пропедевтика, проблемность — ключевые термины развивающего обучения.

В § 34 речь идет о разложении многочлена на множители методом вынесения общего множителя за скобки. Этот материал не является абсолютно новым для учащихся, первое знакомство с ним состоялось в § 29. В связи с этим имеет смысл упомянуть одно существенное психологическое обстоятельство, которое явно способствует успешности процесса обучения и которое, к сожалению, нередко игнорируется, особенно в процессе обучения математике. Известно, что с психологической точки зрения успешнее изучается тот объект, о котором учащийся уже что-то слышал, о чем имеет хотя бы смутное представление. По отношению ко всякому абсолютно новому объекту у него, даже помимо его желания, возникает более или менее сильная реакция неприятия, а иногда и отторжения (психологи используют иногда термин «стресс на новое»). Учитывая это, не следует опасаться пропедевтического (опережающего) упоминания терминов, приемов, методов, которые на самом деле будут изучаться много позже. Во всяком случае к указанному положению психологии отношение в учебнике весьма уважительное: опережающим образом вводятся многие термины (например, непрерывная функция, разложение многочлена на множители, алгебраическая дробь, квадратное уравнение).

Поскольку понятие вынесения общего множителя за скобки уже учащимся знакомо, основное назначение примера 1 из § 34 — не столько демонстрация метода, сколько совместная разработка соответствующего алгоритма, правила вынесения общего множителя за скобки.

После выработки правила сразу иллюстрировать его на достаточно сложных примерах, таких как пример 2 из § 34, нецелесообразно, сначала надо решить серию тривиальных подготовительных упражнений. Вообще примеры, разобранные в тексте учебника, в ряде случаев находятся на предельном уровне обязательных результатов обучения, т. е. на том уровне, к которому ученику придется прийти по ступенькам, созданным учителем.

В **§ 36** речь идет о методе группировки. Учащиеся должны понимать, что это эвристический, а не алгоритмический метод, т. е. удачную группировку нужно искать методом проб и ошибок. Естественно, что ошибок становится меньше и пробы осуществляются быстрее по мере накопления опыта. Далеко не всякая задача в математике решается с первого раза, надо учиться умению отказываться от неудачно выбранного способа решения. Именно в этом основная воспитательная ценность метода группировки.

Особо следует остановиться на появлении в **§ 36** примера решения квадратного уравнения (квадратные уравнения содержатся и в упражнениях). Конечно, квадратные уравнения не входят в обязательные результаты первого года изучения алгебры в школе, и учитель может все заготовки на перспективу опустить без ущерба для обучающей линии курса. Однако это обеднит эмоциональный фон курса, ослабит его развивающую линию. Известно, что вдохновляющим мотивом обучения является незатейливая педагогическая уловка, когда учитель говорит учащимся примерно следующее: «То, что мы сегодня с вами изучали, — материал старшего класса, но, смотрите, мы уже теперь иногда можем с этим материалом совладать». Это, на наш взгляд, способствует развитию интереса к математике. Квадратные уравнения встречаются в учебнике несколько раз: в связи с разложением многочлена на множители и в главе 4, когда квадратные уравнения решаются графически (с помощью отыскания точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = kx + m$).

Несколько слов о **§ 37**. Почему параграф, посвященный сокращению алгебраических дробей, помещен в учебнике для 7-го класса, тогда как вся тема «Алгебраические дроби» — тема 8-го класса? Имеется несколько причин.

Первая: понятие алгебраической дроби уже встретилось в учебнике в связи с проблемой деления многочленов.

Вторая: этот параграф важен в воспитательных целях, как явное выражение идей опережающего и развивающего обучения.

Третья (и, может быть, самая главная): одно дело, когда разложение на множители является *целью* решения примера, и совсем другое, когда разложение на множители является *средством* решения примера. Во втором случае происходит более полноценное усвоение, и в этом состоит психологическое значение примеров на сокращение алгебраических дробей именно в 7-м классе.

В **§ 38** впервые вводятся термины «тождество», «тождественно равные выражения», «тождественное преобразование выражения». Сначала тождество трактуется более узко, чем это традиционно принято в алгебре: оно определяется как равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных. Никакого упоминания о допустимых значениях переменных нет, поскольку для многочленов допустимыми являются любые значения переменных. И здесь самое время дополнить положения о концепции определений, принятой в наших учебниках, которые были приведены в первой части этого пособия, еще одним моментом.

Существуют математические понятия разного уровня сложности. Самые простые из них обычно определяются «с первого захода», и на эти определения в дальнейшем никто уже не «покушается». Таковыми являются, например, понятия степени с натуральным показателем, одночлена, многочлена.

Более сложные понятия не удается определить сразу: это значит, что ранее введенное определение оказывается не приспособленным к новой ситуации, и такое определение приходится корректировать. А самые сложные понятия в математике до более или менее строгого определения «вызревают» довольно долго.

Понимая это, следует признать, что существенной ошибкой является стремление обучающего сразу дать обучаемому определение любого нового понятия в законченной формулировке. Ведь тогда, во-первых, обучаемый не ощущает диалектики математики, ее жизненных соков; во-вторых, не учитывается исторический опыт: если человечество не сразу пришло к определению понятия, а двигалось по ступенькам, то и обучаемый должен пройти этот путь. Именно так обстоит дело с понятием тождества.

Здесь же (в § 38) после получения равенства $\frac{a(a+2)^2}{a^2(a-3)(a+2)}=\frac{a+2}{a(a-3)}$ обсуждается вопрос, является это равенство тождеством или нет. Введя выше термин «тождество», мы отметили, что тождество — это равенство, верное при любых значениях переменных. А про написанное выше равенство этого сказать нельзя, оно не имеет смысла при

$a = 0$, при $a = 3$, при $a = -2$, т. е. оно верно уже не при любых значениях переменной a. Указанные выше значения переменной a не являются допустимыми для выражений, входящих в рассматриваемое равенство. Если же ограничиться только допустимыми значениями переменной, то при любых таких значениях приведенное равенство будет верным. Учитывая подобную ситуацию, математики и уточняют понятие тождества: тождеством называют равенство, верное при любых *допустимых* значениях входящих в его состав переменных. В этом смысле написанное выше равенство является тождеством.

Глава 7. Описательная статистика

Вместо довольно длинного названия «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики» мы (в методической части) используем термин *стохастика,* или же стохастическая линия в обучении математике. Это относительно новая содержательная линия, введение которой началось примерно с 2003 г. Вопрос о том, в каком порядке и как именно следует методически грамотно излагать и сочетать в ней комбинаторную, вероятностную и статистическую составляющие, на данный момент по существу открыт.

В нашем УМК мы следуем порядку, предложенному в ПООП основного общего образования, и начинаем с элементов наивной статистики, хотя и не вполне разделяем ту точку зрения, в соответствии с которой изучение *статистики* обязано предшествовать и является самым надежным вариантом пропедевтики изучения *вероятностей случайных событий.* Глава 7 состоит из четырех параграфов и краткого введения, в котором подчеркнуто общее представление об описательной статистике: она состоит из сравнительно небольшого количества первоначальных приемов обработки и представления данных. Тезисно: статистика — это дизайн информации. Как и при всяком дизайне (обработке) данных, первоначальная информация может при этом процессе видоизменяться, становится более лаконичной, но менее точной и т. п.

В **§ 39** «Ряды числовых данных. Упорядочение, группировка, таблицы», первом параграфе главы 7, на привычных сюжетах семиклассников знакомят со способами получения данных и перечисления этих данных по порядку их получения. Подобное самостоятельное получение данных, с нашей точки зрения, является совершенно необходимым и отдельным этапом при первом знакомстве с элементами статистики.

Сначала речь идет о подсчете числа ответов при проведении теста в 7-м классе. Затем, в примере 1, данные получаются при устном нахождении и упорядочивании корней десяти линейных уравнений, т. е. на уже знакомом семиклассникам математическом материале. Заодно мы повторяем и закрепляем пройденное. Как вывод из решения этого примера, мы приходим к табличной форме (дизайну) представления данных — во многих случаях она оказывается более ясной и понятной. В примере 2 (результаты хоккейных игр) разбираются два способа составления таблиц распределения: через упорядочивание данных и без него, с помощью подсчета «по палочкам, по пяткам», идущим еще от практики безбумажных рыночных подсчетов в XVII—XVIII вв. Этот пример подсчетов в «единичной» системе счисления затем продолжается и развивается в упражнениях к параграфу. В кратком примере 3 закрепляется второй способ решения уже на более абстрактном уровне: по таблице подсчета «по палочкам» надо восстановить начальную информацию о данных. По существу, § 39 — это знакомство с простейшими терминами дескриптивной (описательной) статистики, которое закрепляется в 14 упражнениях, состоящих из шести пунктов («а»—«е» каждое).

Необходимо подчеркнуть, что логика построения заданий в пунктах «а»—«е» упражнений в стохастических главах нашего УМК, как правило, отличается от логики построения аналогичных заданиях в других главах: если в них чаще всего пункты «г», «д» и «е» есть «клоны», соответственно, пунктов «а», «б» и «в», то в стохастике задания «а»—«е» расположены в линейном порядке: от самых простых, устных, вопросов к более содержательным, финальным. Тем самым мы организуем здесь каждое упражнение как своего рода путеводитель, помогающий в итоге разобраться с итоговым вопросом.

Во избежание путаницы мы сознательно разделяем случай числовых данных (§ 39) и случай нечисловых (более научное название — *номинативных*) данных (см. **§ 40** «Ряды нечисловых данных. Таблицы распределения частот»). Такое разделение позволяет сделать более плавным и спокойным переход от традиционных глав учебника по алгебре к новому учебному материалу. Кроме того, это разделение фиксирует тот факт, что упорядочивать ряды данных слева направо имеет смысл только для числовых данных, а для нечисловых данных подобная обработка данных имеет излишнюю долю произвола. В частности, по этой причине для них естественней другой тип обработки: сбор сведений о них в таблице распределения.

Начало § 40 «запараллелено» с началом § 39: в тексте § 40 (до примера 1) изменены «имена» оценок теста из § 39. Тем самым произведен переход от чисел к символам (значкам). В итоге упорядочение ряда более наглядно, но удобно только для небольшого числа разных числовых данных (до 10). Таблицы более абстрактны, зато работают они для нескольких десятков данных, причем не обязательно числовых. С учебной точки зрения, основное статистическое понятие, рассматриваемое в § 40, — это *частота* конкретного (числового или нет) данного во всем ряду данных. Чтобы не перегружать семиклассников специальными терминами, мы намеренно не говорим об абсолютной и относительной частотах, а ограничиваемся одним понятием *частота*, она же — относительная частота. Как правило, при статистической обработке данных в основном содержательна только одна частота — относительная. Бóльшую часть упражнений § 40 составляют сюжетные задачи практико-ориентированного звучания. Хотя, конечно же, мы не забываем и о традиционных алгебраических объектах (см. № 40.11, 40.12), связанных с повторением свойств множества натуральных чисел и частотой того или иного типа чисел в пределах первой сотни. Заключительные упражнения этого параграфа составляют, на самом деле, пошаговые (от пункта «а» к пункту «г») планы небольших проектов самостоятельной обработки данных. Организовывать выполнение этих упражнений довольно естественно в малых группах по 3—4 ученика класса.

В **§ 41** «Диаграммы распределения данных» мы продолжаем знакомство с типами обработки и представления данных, рассказывая о *визуальном* дизайне информации: разнообразных диаграммах и графиках. В определенной степени последовательность ходов здесь повторяет общий подход к построению графиков функций в чисто алгебраических главах, когда от табличного или поточечного способа описания функции происходит переход к рисункам, чертежам, эскизам и графикам.

Разумеется, и в других учебных предметах (обществознании, физике, экономике и т. п.) встречаются различные диаграммы и в целом по визуализации информации можно составить отдельную монографию. Вообще формирование надлежащей статистической культуры учащихся — проблема интересная и важная, а решение ее социально необходимо. Но проводящаяся ныне политика решения этой проблемы в рамках исключительно (весьма насыщенного!) курса алгебры представляется нам малоперспективной: здесь нужны решения на более глобальном уровне. В тех временных рамках, которые представляются нам разумными, мы ограничиваемся, по существу, кратким перечислением способов визуализации, нужных терминов (столбиковые диаграммы, круговые диаграммы, многоугольники (полигоны) распределения) и рассказом о способах перехода от одного типа дизайна к другому.

Заключительный **§ 42** «Числовые характеристики рядов данных» по содержанию довольно традиционен (за последние 10 лет) для основной школы. В нем мы составляем своего рода «паспорт» данных, заменяя сами данные некоторыми обобщенными числовыми показателями: объем, размах, мода, медиана, среднее, дисперсия и т. п. Использование прямой аналогии с паспортом позволяет нам при изложении явно подчеркнуть, пожалуй, основной момент: замена информации на набор связанных с ней чисел — есть только одна из форм представления информации. При такой замене сама информация в заметной степени забывается и предлагаемый набор чисел лишь весьма приближенно позволяет восстановить первоначальные данные.

Уровень сложности изложения в этом параграфе не одинаков. Если про *объем* и *размах* говорится на уровне рассказа в конкретных случаях, то *мода* иллюстрируется графиками, а алгоритм вычисления *медианы,* кроме конкретных примеров, приводится уже и в случае произвольного количества числовых данных. Впрочем, основной упор в параграфе сделан на изучение среднего арифметического (среднего). Эта числовая характеристика относится к весьма небольшому числу математических объектов, которые имеют большое значение и в математике как науке, и в стохастике, и в практико-ориентированных приложениях математики, и в повседневной жизни, и в задачах математических олимпиад и соревнований. Например, практически каждый год задачи на среднее встречаются в заданиях ЕГЭ самого высокого уровня сложности. При изложении материала о среднем мы начинаем также с конкретных примеров, но переходим уже на уровень *формального* определения и двух теорем о приемах вычисления среднего значения. Для семиклассников основная сложность здесь, скорее всего, лингвистическая: у них еще нет никакого опыта общения с буквами с нижним индексом — x_4, y_5, a_n. По этой причине выписывание общей формулы $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}$ предшествует у нас два разобранных примера и доказательство двух теорем. И только после того, как необходимость общей формулы для среднего становится ясной, мы сообщаем ее, предварительно рассказав про x_4, y_5, a_n, ... Здесь мы следуем общей концепции: формализации общего важного понятия обязана предшествовать заметная подготовительная работа.

Следуя общим положениям ПООП о предметных результатах, мы сообщаем и о *дисперсии*, делая переход от того факта, что сумма отклонений от среднего равна нулю, к необходимости рассматривать сумму квадратов таких отклонений. Разумеется, даем и общую формулу, и разбираем пример 4, и даем упражнения. Но все-таки наличие в программе 7-го класса темы «Дисперсия» представляется нам совсем не очевидно необходимым: это не «семиклассный» уровень сложности. Несомненно, это базовая *мера изменчивости*, но вручную она нормально считается только при небольших объемах данных, а для содержательных случаев (больших объемов) было бы разумнее показать, как вычисляется дисперсия на компьютере, например на уроках информатики.

Решение некоторых упражнений главы 7

Содержательные сложности при решении этих упражнений маловероятны. Все-таки материал в основном ознакомительный и по существу — описательный. Возможны вопросы технического характера, например: «А как это записать?». Тут есть две крайности. С одной стороны, наличие правильного ответа есть вещь необходимая. В заметном числе задач по статистике для 7-го класса сам правильный ответ и есть решение. Но *всегда* ограничиваться *только* правильным ответом методически неверно: для проверки чаще всего нужно иметь и обоснование его получения. С другой стороны, неразумно и нереально требовать от семиклассника развернутого «сочинения» об этом обосновании.

Итак, нужны весьма краткие записи, по которым, однако, можно восстановить весь ход решения. В статистике довольно часто моментом, организующим решение, являются таблицы. Приведем несколько примеров.

39.10. а) Выпишите суммы цифр всех двузначных чисел от 31 до 50 включительно.

б) Сколько всего данных получилось?

в) Найдите наибольшее данное.

г) Найдите самое частое данное.

д) Найдите самое редкое данное.

е) Сколько получилось двузначных данных?

Решение. а) Составим таблицу, в первой строке которой запишем числа, а во второй — суммы цифр.

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
4	5	6	7	8	9	10	11	12	4
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
5	6	7	8	9	10	11	12	13	5

б) Всего 20 данных.

в) Наибольшее из них 13 (у числа 49).

г) Сумма 5 встретилась 3 раза, чаще других.

д) Это 13, встретилось один раз.

е) Всего 7, это 10, 11, 12, 10, 11, 12, 13.

39.13. Решите уравнения в «единичной» системе счисления ($1 = /$, $2 = //$, $3 = ///$, $4 = ////$, $5 = \cancel{////}$, ...):

а) $// + x = \cancel{////}$;

б) $/// + x = \cancel{////}\ ////$;

в) $\cancel{////}\ //// - x = ///$;

г) $//// + 2x = \cancel{////}\ \cancel{////}$;

д) $(x + //) + (2x - ///) = \cancel{////}\ \cancel{////}\ /$;

е) $/ - // + /// - //// + x = \cancel{////}$.

Решение. Уравнения перепишем в обычном виде и после этого решим их:

а) $2 + x = 5$, $x = 3$;

б) $3 + x = 9$, $x = 6$;

в) $9 - x = 3$, $x = 6$;

г) $4 + 2x = 10$, $x = 3$;

д) $(x + 2) + (2x - 3) = 11$, $x = 4$;

е) $1 - 2 + 3 - 4 + x = 5$, $x = 7$.

40.9. Таблицы распределения данных, частот и процентных частот собрали вместе, но часть информации оказалась утерянной:

Данное	X	Y	Z	T	
Повторения		10	2		Всего:
Частота	0,34				Сумма:
Частота, %		20		42	Сумма:

Восстановите информацию:

а) в столбце Y;

б) в ячейке «Всего»;

в) в итоговом правом столбце;

г) в столбце Z;

д) в столбце X;

е) в оставшихся ячейках.

Решение. а) Частота в 100 раз меньше процентной частоты. Значит, надо вписать 0,2.

б) Всего N данных. Получаем $\frac{10}{N} = 0{,}2$; $\frac{10}{N} = \frac{1}{5}$; $N = 50$.

в) Если T повторено t раз, то $\frac{t}{50} = 0{,}42$; $\frac{t}{50} = \frac{21}{50}$; $t = 21$.

г) Частота данного Z равна $\frac{2}{50} = 0{,}04$, в процентах равна 4.

д) Если X повторено x раз, то $\frac{x}{50} = 0{,}34$; $\frac{x}{50} = \frac{17}{50}$; $x = 17$. Процентная частота 34.

е) В итоге

Данное	X	Y	Z	T	
Повторения	17	10	2	21	Всего: 50
Частота	0,34	0,2	0,04	0,42	Сумма: 1
Частота, %	34	20	4	42	Сумма: 100

40.12. Для ряда целых чисел от 0 до 99 найдите частоту:

а) чисел, меньших 18; б) чисел, не превосходящих 19; в) чисел, больших 81; г) чисел, не меньших 80; д) чисел, отличающихся от 31 менее чем на 13; е) чисел из промежутка $[3{,}5;\ 20\sqrt{2}]$.

Решение. Всего есть $N = 100$ чисел.

а) 0, 1, 2, ..., 17; здесь $k = 18$ чисел; ответ: 0,18.

б) 0, 1, 2, ..., 18, 19; здесь $k = 20$ чисел; ответ: 0,2.

в) 82, 83, ..., 99; здесь $k = 99 - 81 = 18$ чисел; ответ: 0,18.

г) 80, 81, 82, ..., 99; здесь $k = 20$ чисел; ответ: 0,2.

д) $31 - 13 = 18$, $31 + 13 = 44$, т. е. это числа 19, 20, ..., 42, 43; их всего $43 - 18 = 25$; ответ: 0,25.

е) $20\sqrt{2} \approx 28{,}3$, т. е. это числа 4, 5, 6, ..., 27, 28; всего $28 - 3 = 25$; ответ: 0,25.

Обратите внимание, примеры подобраны так, что ответы — парные.

42.9. К набору чисел $\underbrace{-2, -2, \ldots, -2}_{10}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{5}$ приписывают n чисел, равных 2. Найдите наибольшее n, при котором медиана ряда:

а) равна -2;

б) отрицательна;

в) меньше 1;

г) равна 1;

д) меньше 2;

е) равна 2.

Решение. Получаем ряд $\underbrace{-2, -2, \ldots, -2}_{10}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{5}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n}$.

Если $n = 1$, то получаем ряд из 16 чисел, медиана равна полусумме 8-го и 9-го чисел, т. е. равна -2. С увеличением n медиана будет сдвигаться по ряду вправо.

а) Если $n = 4$, то получаем ряд из 19 чисел, медиана равна 10-му числу, и это последний раз, когда медиана равна -2. Ответ: 4.

б) Если $n = 5$, то медиана равна $(-2 + 1) : 2 < 0$. Если $n = 6$, то медиана равна 1. Ответ: 5.

в) Решение и ответ такие же, как и в пункте «б».

г) Последняя единица расположена на 15-м месте. Поскольку она находится посередине, то всего есть 29 чисел. Значит, $n = 14$.

д) Если $n = 15$, то медиана равна $(1 + 2) : 2 = 1{,}5$. Для больших n медиана равна 2. Ответ: 15.

е) Такого n не существует: если $n > 15$, то медиана равна 2.

42.20. Портной семь раз отмеряет ткань, отбрасывает наименьший и наибольший результаты и вычисляет дисперсию оставшихся результатов. По правилам отрезать можно, если дисперсия окажется меньше 0,09. Найдите дисперсию и определите, можно отрезать или нет, если портной получил следующие результаты:

а) 14,8; 15,2; 15; 14,5; 15,1; 15,4; 14,9;

б) 20,5; 19,6; 20,2; 19,4; 20,4; 20,3; 19,5.

Решение. а) Останутся 14,8; 15,2; 15; 15,1; 14,9. Среднее равно 75 : 5 = 15. Отклонения равны –0,2; 0,2; 0; 0,1; –0,1. Их квадраты: 0,04; 0,04; 0; 0,01; 0,01. Их среднее равно 0,1 : 5 = 0,02. Дисперсия меньше 0,09. Отрезать можно.

а) Останутся 19,6; 20,2; 20,4; 20,3; 19,5. Среднее равно 100 : 5 = 20. Отклонения равны 0,4; 0,2; 0,4; 0,3; –0,5. Их квадраты: 0,16; 0,04; 0,16; 0,09; 0,25. Их среднее равно 0,7 : 5 = 0,14. Дисперсия больше 0,09. Отрезать нельзя.

Содержание

Учебно-методическое издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

Алгебра
7 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Редактор *С. В. Бахтина*
Художественное оформление *А. А. Павлов*
Внешнее оформление *Н. А. Новак*
Компьютерная верстка: *А. А. Павлов*
Корректор *С. О. Никулаев*

Подписано в печать 28.11.19. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 2,79. Тираж 150. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3
тел. (495)181–53–44, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Приобрести книги издательства
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
можно в магазине по адресу:
Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181–60–77, e-mail: shop@blbz.ru
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются
Коммерческим департаментом издательства:
тел. (495)181–53–44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано в