А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

АЛГЕБРА

8 КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2020

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М79

М79 **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 8 класс. Методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 45, [3] с. : ил. — ISBN 978-5-9963-5332-3.

В пособии представлено примерное тематическое планирование учебного материала в 8-м классе, методические рекомендации ко всем главам учебника «Алгебра» для 8-го класса авторского коллектива под руководством А. Г. Мордковича, а также решения некоторых упражнений повышенной сложности и дополнительных упражнений.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9963-5332-3

Предисловие

Настоящее пособие предназначено тем учителям математики, которые в своей практической работе опираются на УМК, созданный авторским коллективом под руководством А. Г. Мордковича:

- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева*. Алгебра. 8 класс. **Учебник** для общеобразовательных организаций;
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова*. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы. **Примерные рабочие программы;**
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов*. Алгебра. 8 класс. **Методическое пособие для учителя;**
- *М. В. Шуркова*. Алгебра. 8 класс. **Контрольные работы;**
- *М. В. Шуркова*. Алгебра. 8 класс. **Рабочая тетрадь.**

В первом разделе пособия представлено примерное тематическое планирование материала в 8-м классе; второй раздел посвящен методическим рекомендациям ко всем главам учебника «Алгебра. 8 класс». В третьей части рассмотрены решения некоторых упражнений повышенной сложности и дополнительных упражнений.

Примерное тематическое планирование

8 класс

(из расчета 3 ч в неделю, всего 102 ч)

Параграф	Тема	Кол-во часов
	Глава 1. Множество действительных чисел (16 ч)	
1	Множества, их элементы и подмножества	1
2	Операции над множествами	2
3	Рациональные числа	1
4	Познакомимся с квадратными корнями	2
5	Иррациональные числа	1
6	Действительные числа и числовая прямая	1
7	Свойства числовых неравенств	2
8	Линейные неравенства	2
9	Модуль действительного числа. Функция $y = \|x\|$	2
10	Приближенные значения действительных чисел	1
	Контрольная работа № 1	1
	Глава 2. Алгебраические дроби (17 ч)	
11	Определение алгебраической дроби	1
12	Основное свойство алгебраической дроби	2
13	Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями	1
14	Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями	3
	Контрольная работа № 2	1
15	Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень	2
16	Преобразование рациональных выражений	3
17	Понятие степени с любым целочисленным показателем	2

Продолжение таблицы

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
18	Стандартный вид положительного числа	1
	Контрольная работа № 3	1
Глава 3. Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратных корней (12 ч)		
19	Функция $y = \sqrt{x}$, ее график и свойства	2
20	Свойства квадратных корней	2
21	Тождество $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	1
22	Вынесение множителя из-под знака квадратного корня. Внесение множителя под знак квадратного корня	2
23	Преобразование иррациональных выражений	4
	Контрольная работа № 4	1
Глава 4. Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$ (15 ч)		
24	Функция $y = kx^2$, $k > 0$	2
25	Функция $y = kx^2$, $k < 0$	1
26	Как построить график функции $y = f(x + l)$, если известен график функции $y = f(x)$	2
27	Как построить график функции $y = f(x) + m$, если известен график функции $y = f(x)$	1
28	Как построить график функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$	2
29	Функция $y = ax^2 + bx + c$	3
30	Функция $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$	2
31	Функция $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$	1
	Контрольная работа № 5	1
Глава 5. Квадратные уравнения (19 ч)		
32	Основные понятия, связанные с квадратными уравнениями	2
33	Формула корней квадратных уравнений	3

Окончание таблицы

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
34	Частный случай формулы корней квадратных уравнений	1
35*	Квадратные уравнения с параметром	2
	Контрольная работа № 6	1
36	Рациональные уравнения	2
37	Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций	3
38	Теорема Виета	2
39	Разложение квадратного трехчлена на линейные множители	2
	Контрольная работа № 7	1
Глава 6. Вероятности случайных событий (13 ч)		
40	Испытания с равновозможными исходами	3
41	Случайные события. Вероятность противоположного события	3
42	Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий	3
43	Испытания с конечным числом исходов. Последовательные независимые испытания и повторения испытаний	3
	Контрольная работа № 8	1
	Итоговое повторение	10

Методические рекомендации по работе с учебником «Алгебра. 8 класс»

Глава 1. Множество действительных чисел

Глава 1 начинается с параграфа, который называется «Множества, их элементы и подмножества». Ясно, что никакая теория множеств здесь не рассматривается. Основной акцент делается на тех понятиях, которые непосредственно нужны для курса алгебры, для записи ответов при решении различных уравнений и неравенств. Поэтому отрабатываются в первую очередь понятие принадлежности элемента множеству, способы перечисления элементов множества, разные способы описания множеств. В следующем параграфе речь идет об объединении и пересечении множеств.

Основной результат § 3 «Рациональные числа»: рациональные числа и бесконечные десятичные периодические дроби — одно и то же. Сделаем несколько замечаний по поводу того приема обращения бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную, который показан в учебнике (см. пример на с. 22 в § 3).

1. Учитель должен понимать, что в этой процедуре есть скользкий (с формально-математической точки зрения) момент: ниоткуда не следует, что при умножении *бесконечной* десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. запятая передвигается вправо соответственно на один, два, три знака и т. д.; этот вывод был получен в курсе математики 5—6-го классов лишь для *конечных* десятичных дробей. Сказать об этом школьникам или нет — дело учителя. Прийти к указанному выводу можно на примерах: скажем, дополнить некоторыми рассуждениями пример, рассмотренный в § 3 на с. 20. Его результат $\frac{11}{6} = 1{,}83333...$. Выполнив деление углом для дроби $\frac{110}{6}$, т. е. $\frac{55}{3}$, получим 18,3333...; выполнив деление углом для дроби $\frac{11\,000}{6}$, получим 1833,3333... . Отмечаем, что в первом случае запятая сдвигается на один знак вправо, а во втором — на три знака.

2. Не всегда различные по записи бесконечные периодические десятичные дроби приводят к разным обыкновенным дробям. Это относится к дробям с девяткой в периоде. Например, для дроби 1,2(9) имеем:

$$x = 1{,}2999...;\ 10x = 12{,}999...;$$
$$100x = 129{,}999...;\ 90x = 129 - 12 = 117;$$
$$x = \frac{117}{90} = 1{,}3 = 1{,}3000... .$$

Итак, 1,2(9) = 1,3(0). Аналогично можно показать, что 2,35(9) = 2,36(0); 3,(9) = 4,(0) и т. д. Короче говоря, дробь с девяткой в периоде — это конечная десятичная дробь (или бесконечная с нулем в периоде); для ее записи достаточно отбросить всю периодическую часть бесконечной дроби, увеличив при этом на единицу цифру, предшествующую периодической части.

3. Известен формально более корректный способ обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь: с помощью формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$. Например, для дроби 1,5(23) соответствующие вычисления выглядят следующим образом:

$$1{,}5(23) = 1{,}5 + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \frac{23}{100\,000\,000} + ... =$$
$$= 1{,}5 + \frac{23}{1000} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{3}{2} + \frac{23}{990} = \frac{754}{495}$$

(результат, естественно, тот же, что получен в примере из § 3).

Определенные трудности могут возникнуть у учащихся при изучении **§ 4**, где не только вводится новый термин (квадратный корень), новое обозначение, но и имеется несколько достаточно серьезных моментов методологического плана. Это и первый пример доказательства методом от противного, это и технически трудное для соответствующего возраста доказательство иррациональности числа $\sqrt{5}$

(сам термин «иррациональное число» пока не вводится, это будет сделано в следующем параграфе). Вероятно, в большинстве случаев требовать от учащихся самостоятельного проведения доказательств иррациональности таких чисел, как $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$, не следует, но показать им серьезное математическое рассуждение полезно.

В конце **§ 4** с опережением учащимся сообщаются формулы корней квадратного уравнения. Дело в том, что в геометрии раньше, чем в алгебре, начинают применять теорему Пифагора. Конечно, у учащихся в активе есть приемы решения квадратных уравнений, известные им еще из курса алгебры 7-го класса (графические приемы, разложение на множители), и в принципе этим и можно было бы пока ограничиться. Однако хотелось бы побыстрее сообщить им практическое значение нового понятия — квадратного корня, т. е. усилить мотивационный фон изучения нового материала.

В учебнике понятие арифметического корня упомянуто лишь вскользь, поскольку для квадратных корней оно, по сути дела, лишено смысла: в курсе алгебры 7—9-го классов нет «неарифметического» квадратного корня. Всюду в дальнейшем мы говорим просто «квадратный корень», а не «арифметический квадратный корень». Не следует перегружать учащихся терминами, тем более если они не работают.

Изучая **§ 5** («Иррациональные числа»), обращаем внимание учащихся на общий вывод: если n — натуральное число, то $\sqrt{n}$ либо натуральное, либо иррациональное число. Этот вывод послужит им источником придумывания иррациональных чисел.

Разговор в **§ 6** о свойствах арифметических операций, об отношении порядка ($<$, $>$) — не повторение старого, ведь до сих пор все это применялось лишь по отношению к рациональным числам; теперь же перешли в более широкую числовую область: мы имеем дело с действительными числами.

Очень емким по количеству информации является **§ 9**: определение, свойства, геометрический смысл модуля действительного числа, уравнения типа $|x - a| = b$, решение которых основано на геометрическом смысле выражения $|x - a|$, график функции $y = |x|$.

В учебнике функция $y = |x|$ рассматривается как существенный элемент в ряду основных школьных функций. Поэтому в системе упражнений в соответствующем параграфе предусмотрена работа по традиционным для нашей концепции изучения функций направлениям (*инвариантное ядро*), о которых мы говорили в методическом пособии для 7-го класса. Напомним, что в наших учебниках для 7—11-го классов такое ядро, инвариантное относительно класса функций, состоит из шести направлений (компонентов):

- графическое решение уравнений (неравенств);
- отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- преобразование графиков;
- функциональная символика;
- кусочно-заданные функции;
- чтение графика.

Глава 2. Алгебраические дроби

В главе 2, где изучаются алгебраические дроби, содержится достаточно традиционный с методической точки зрения материал. Обратим внимание лишь на последние два параграфа главы: мы сочли целесообразным именно здесь ввести понятие степени с любым целочисленным показателем и присовокупить к этому разговор о стандартном виде положительного числа, что имеет практическое значение.

Глава 3. Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратных корней

Напомним, что линия, связанная с изучением функций, в нашем курсе приоритетная — об этом мы подробно говорили в методическом пособии для 7-го класса. Изучение квадратичной функции (глава 4) предшествует изучению квадратных уравнений (им посвящена глава 5). Точно так же будет обстоять дело и во всех других случаях, например, изучение тригонометрии в 10-м классе будет начинаться с тригонометрических функций, а тригонометрические формулы появятся позднее. Та же методическая линия обнаруживается и в главе 3: изучению свойств квадратных корней предшествует изучение функции $y = \sqrt{x}$.

В **§ 20** при работе с квадратными корнями действует договоренность: все переменные принимают только неотрицательные значения. Мы посчитали нецелесообразным сразу вводить формулу $\sqrt{a^2} = |a|$: пусть школьники сначала научатся вычислять квадратные корни, привыкнут к их свойствам. Упомянутая же, трудно усваиваемая учащимися формула появится в следующем параграфе.

Глава 4. Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$

Эта глава является непосредственным продолжением и развитием тем «Линейная функция», «Функция $y = x^2$», «Функция $y = \sqrt{x}$». Построение графиков функций $y = kx^2$, $y = ax^2 + bx + c$ особых методических комментариев не требует, мы на этом здесь не останавливаемся; поговорим лишь о том, что принципиально отличает наш учебник от других в изложении указанного материала.

В **§ 24** введено нетрадиционное для общеобразовательной школы понятие ограниченности функции (снизу, сверху). Это сделано не ради самого понятия ограниченности (по большому счету в школе без него можно обойтись), а скорее по причинам психолого-педагогического характера. Чем больше свойств функций знает ученик (хотя бы на наглядно-интуитивном уровне), тем любопытнее для него процесс чтения графика, процесс перевода графической модели на обычный язык. Образно выражаясь, при изучении математики имеется то, что можно назвать «черным хлебом», и то, что можно назвать «пирожными». «Черный хлеб» — это то, без чего нельзя обойтись (область определения, область значений функции, четность, монотонность и иные традиционные «школьные» свойства функций). Без «пирожных» (ограниченность, выпуклость и различные «изюминки» в других разделах школьного курса алгебры) обойтись можно, но они украшают повседневную рутинную реальность. Ограниченность, выпуклость, непрерывность функции введены для развития речи, для поддержания интереса к математике, для создания приятного эмоционального фона при ее изучении. Однако существует и более существенная причина появления в нашем курсе понятия ограниченной функции.

Уровень трудности восприятия того или иного математического понятия часто зависит, говоря языком математики, от числа «навешанных» кванторов, явно или неявно фигурирующих в определении понятия (без кванторов нет практически ни одного математического определения). Речь идет о кванторе существования $\exists$ и кванторе общности $\forall$. Так, в определении четной или нечетной функции присутствует лишь один квантор: функция $y = f(x)$ называется четной, если $(\forall\, x \in D(f))\ f(-x) = f(x)$; функция называется нечетной, если $(\forall\, x \in D(f))\ f(-x) = -f(x)$. Это, так сказать, «одноканторное» определение, определение первого уровня трудности, с ним особых проблем у учащихся не возникает. В традиционной программе школьного курса алгебры имеются три свойства функций, связанные с двумя кванторами: периодичность, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения. Как правило, все они без всякой предварительной подготовки вводятся в курсе алгебры и начал математического анализа (10—11-й классы), причем первым появляется наиболее трудное — определение периодичности. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если *существует* такое отличное от нуля число T, что *для всех x* из области определения функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. В кванторах:

$$(\exists\, T \neq 0)(\forall\, x \in D(f))\ f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Чуть проще (хотя бы потому, что имеет понятную геометрическую иллюстрацию) выглядит двухкванторное определение наибольшего или наименьшего значений функции на промежутке X: $(\exists\, x_0 \in X)(\forall\, x \in X)\ \ f(x_0) \geqslant f(x)$ (здесь $f(x_0) = y_{\text{наиб}}$). Понятия наибольшего и наименьшего значений функции используются в нашем курсе начиная с 7-го класса: учащиеся, сами того не подозревая, постепенно приучаются к восприятию двухкванторных (а значит, достаточно сложных) определений математических понятий (опираясь на геометрическую наглядность).

Примерно так же обстоит дело с ограниченностью функции: функция ограничена снизу (сверху), если *весь* ее график расположен выше (ниже) *некоторой* горизонтальной прямой $y = m$; курсивом дано то, что связано с кванторами. Формальное определение функции, ограниченной, например, снизу, выглядит так: $(\exists\ m \in \boldsymbol{R})(\forall\ x \in D(f))\ f(x) > m$. Таким образом, в нашем курсе определение ограниченности функции, кроме информационной значимости, имеет и существенную логико-методическую окраску (осознание учащимися структуры математических определений), т. е. имеет воспитательную ценность.

В **§ 28** приведены два алгоритма построения графика функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$.

Первый алгоритм построения графика функции $\boldsymbol{y = f(x + l) + m}$

1. Построить график функции $y = f(x)$.
2. Осуществить параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|l|$ единиц масштаба влево, если $l > 0$, и вправо, если $l < 0$.
3. Осуществить параллельный перенос полученного на втором шаге графика вдоль оси Oy на $|m|$ единиц масштаба вверх, если $m > 0$, и вниз, если $m < 0$.

Второй алгоритм построения графика функции $\boldsymbol{y = f(x + l) + m}$

1. Перейти к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -l$, $y = m$, т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-l; m)$.
2. К новой системе координат «привязать» график функции $y = f(x)$.

Более удачным, на наш взгляд, является второй алгоритм, но это не означает, что все ученики должны применять его на практике; пусть некоторые пользуются первым алгоритмом. Более того, если и первый алгоритм вызывает затруднения (в основном из-за наличия в нем символов $|l|$ и $|m|$), то есть смысл заменить первый алгоритм совокупностью двух правил, выделенных в § 26 и § 27.

В **§ 29**, где речь идет о построении графика квадратичной функции, делается акцент не на отыскании координат вершины параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, а на отыскании уравнения оси симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$. Во-первых, построение оси параболы само по себе значимо с геометрической точки зрения: наличие оси параболы дает учащемуся возможность найти одну-две пары симметричных относительно оси точек параболы, которые используются как контрольные точки для более точного изображения эскиза графика. Во-вторых, зная уравнение оси $x = x_0$, ученик сможет найти ординату вершины параболы по формуле $y_0 = f(x_0)$, более важной, на наш взгляд, для понимания сути дела, чем требующая специального запоминания формула $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

В последних двух параграфах главы 4 речь идет о функции $y = \frac{k}{x}$ (в одном параграфе для случая $k > 0$, в другом — для случая $k < 0$). Эта функция обладает специфическими свойствами, требующими особого осмысления, — наличие асимптот, наличие двух ветвей, наличие центра симметрии и двух осей симметрии.

Глава 5. Квадратные уравнения

Предполагается, что к началу систематического изучения этой главы учащиеся уже имеют представление о том, что такое квадратное уравнение (этот термин был введен в учебнике для 7-го класса), имеют представление о графическом методе их решения, который в простейших случаях применялся уже в 7-м классе, в более сложных случаях — в теме «Квадратичная функция» (см. пример 4 в § 29). Далее, учащимся знаком метод разложения на множители, который в ряде случаев также дает возможность решить квадратное уравнение (о чем не раз шла речь в курсе алгебры 7-го класса). С этого «смотра достижений» естественно начать **§ 33**. Самое главное — осознать вместе с учащимися проблемную ситуацию, связанную с решением квадратных уравнений. Для этого надо выявить недостатки метода разложения на множители и графического метода.

Метод разложения на множители применим не всегда, а графический метод в большинстве случаев может дать представление лишь о приближенных значениях корней. Таким образом, появляется необходимость найти алгоритм решения квадратных уравнений, не зависящий от эвристик метода разложения на множители и от ненадежности, приблизительности графического метода. После этого учащимся и будет сообщена (и обоснована) формула корней квадратного уравнения, которую они при правильной подаче материала воспримут как «подарок судьбы».

В **§ 33** выводится общая формула корней квадратного уравнения, а в **§ 34** выводится упрощенная формула корней квадратного уравнения (для случая четного коэффициента при x). Почему в учебнике общая и частная формулы разведены по разным параграфам? Опыт показывает, что если эти формулы дать одновременно, то учащиеся, как правило, вторую формулу игнорируют, они не хотят запоминать две формулы, понимая, что в принципе всегда можно обойтись одной (общей формулой), к которой еще нужно привыкать. Поэтому мы и даем им возможность сначала привыкнуть к общей формуле корней квадратного уравнения. Если они накопят достаточный опыт в работе с общей формулой, то смогут оценить те преимущества, которые дают им возможность использовать «четную» формулу (для чего, кстати, в § 34 в качестве примера фигурирует уравнение, решенное в предыдущем параграфе по общей формуле). Таким образом, частная формула не навязывается школьникам, а рекомендуется им как более «интеллигентная».

Обратим внимание на **§ 35**, где рассматриваются квадратные уравнения с параметром. Такие уравнения (а в 9-м классе и неравенства с параметром) естественным образом вплетаются в общую ткань изложения в учебнике и имеются в системе упражнений, начиная с 7-го класса, но достаточно мягко и ненавязчиво. Учащиеся не должны воспринимать задачи с параметрами как нечто «чересчур страшное».

§ 36 посвящен решению рациональных уравнений. В конце этого параграфа осуществлено первое в нашем курсе достаточно робкое вхождение в теорию равносильности уравнений. Пусть школьники постепенно привыкают к двум случаям возможного появления посторонних корней: когда в уравнении содержатся алгебраические дроби или когда применяется метод возведения в квадрат обеих частей уравнения. Пусть они постепенно начнут понимать, в каких случаях нужно делать проверку найденных корней, начнут осознавать, что принципиальная проверка корней — необходимый этап решения уравнения (в двух упомянутых случаях). Что же касается технической проверки (т. е. столь любимой многими учителями проверки правильности вычислений и преобразований), то в нашем курсе она не приветствуется, поскольку, по сути дела, является бессмысленной.

На наш взгляд, восьмиклассники должны иметь представление о том, что при решении уравнений выполняют разные преобразования: член уравнения переносят из одной части уравнения в другую с противоположным знаком; обе части уравнения умножают или делят на одно и то же отличное от нуля число; освобождаются от знаменателя, т. е. заменяют уравнение $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ уравнением $p(x) = 0$; обе части уравнения возводят в квадрат. Учащиеся должны обратить внимание на то, что первые два из указанных выше преобразований оставляют корни уравнения в целости и сохранности (равносильные преобразования), а в результате двух других преобразований могут появиться посторонние корни (неравносильные преобразования), поэтому все найденные корни надо проверять.

О важности **§ 37**, где речь идет о текстовых задачах, говорить не приходится. В очередной раз отметим, что в нашей концепции реализуется идея математического моделирования, и решение всех текстовых задач оформляется в виде трех этапов математического моделирования. Приступая к первому этапу — этапу составления математической модели, мы как бы осуществляем синхронный перевод текста задачи с обычного языка на математический. На втором этапе решается математическая модель, которая составлена на первом этапе. Эта модель в данный период времени представляет собой рациональное уравнение. Для рационального уравнения имеется свой алгоритм решения, который в качестве последнего шага включает в себя проверку найденных корней (с целью отбросить те из них, которые обращают в нуль знаменатель дроби). На третьем этапе, где формулируется ответ на вопрос задачи, фактически также приходится делать проверку, но уже смысловую. Например, число –3 может быть корнем рационального уравнения, но не удовлетворять условиям, если за x принималось, скажем, время. Таким образом, есть два вида проверки, но ученики часто путают *принципиальную проверку* (проверку того, не является ли найденный корень посторонним для уравнения) и *смысловую проверку* (по условиям задачи), а если и не путают, то часто смешивают все в одну кучу. Явное выделение трех этапов математического моделирования позволит избежать указанных неприятностей: на втором этапе осуществляется принципиальная проверка, а на третьем — смысловая. В разобранных в этом параграфе примерах показано, как проверка по модели отделяется от смысловой проверки.

Глава 6. Вероятности случайных событий

В 7-м классе было начато знакомство учеников со статистической составляющей всей стохастической линии курса алгебры основной школы. В 8-м классе начинается систематическое знакомство с вероятностной составляющей. Мы намеренно избегаем в названии главы термина «Теория вероятностей», так как ни о какой *теории* на этом этапе речи быть не может. Для начала достаточно простейших правил и приемов подсчета вероятностей и знакомства с несколькими первоначальными терминами. В целом изложение начинается с классического определения вероятности, а заканчивается подсчетом вероятностей случайных событий в испытаниях с произвольным конечным числом (не обязательно равновозможных) исходов. Глава состоит из четырех параграфов:

§ 40 «Испытания с равновозможными исходами»;

§ 41 «Случайные события. Вероятность противоположного события»;

§ 42 «Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий»;

§ 43 «Испытания с конечным числом исходов. Последовательные независимые испытания и повторения испытаний».

Объем параграфов невелик. Без учета текста упражнений это, соответственно, 4, 5, 7 и 9 страниц. В последнем случае увеличение связано с тем, что § 43 состоит, как это следует из его названия, из двух частей, из которых во второй представлены примеры, подтверждающие содержательность материала первой части (общее определение вероятности). Лаконичность соответствует второму принципу развивающего обучения — изложению материала в довольно быстром темпе. Как во всем УМК, выдержаны третий и четвертый принципы — определения и формулировки теоретических положений подготавливаются в результате разбора конкретных примеров. Дифференцированность обучения (пятый принцип развивающего обучения) реализуется через систему упражнений: в каждом параграфе по 12 упражнений, состоящих из заданий «а»—«е», т. е. по 72 разнообразных вопроса по учебному материалу, к тому же задачи разделены на базовые, повышенного (синее подчеркивание) и высокого (красное подчеркивание) уровня сложности.

Первый параграф главы, **§ 40**, хотя и тривиален по «научно-теоретическому» содержанию, но представляется нам чрезвычайно важным. В нем на вероятностном материале систематически развивается и поддерживается общая концепция построения курса алгебры: подчеркнутое разделение и взаимосвязь между реальными ситуациями и их теоретическими (математическими) моделями. А именно вопрос о статистической обработке уже полученных данных — это вопрос, относящийся к (в той или иной мере) реальному событию, здесь глагол в условии стоит в прошедшем времени и относится к уже произошедшему событию. Например, «...*получены* такие данные... Найдите частоту...». А вот вопрос и ответ о вероятности случайного события носят характер прогноза, они относятся к оценке предполагаемого, условного, действия. В этом случае глаголы в тексте или будущего времени («...монета *выпадет*...»), или относящиеся к действию, условно совершаемому в настоящем времени («...монету *бросают*...»). Задача об отыскании вероятности — это всегда задача, решаемая для какой-то *математической модели* реальной ситуации, а не для самой реальной ситуации. В частности, равновозможность выпадения «орла» или «решки» при бросании монеты (выпадения 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросании игрального кубика) не следует на этом этапе никак обосновывать. Равновозможность исходов здесь предполагается заранее: это свойство моделей, в которых решаются эти задачи. Точно так же постоянство скорости пешехода в задачах на движение есть априорное свойство той простейшей (линейной) модели, в которой решается эта задача.

Разумеется, эти тонкости — не предмет подробного обсуждения в 8-м классе. На трех уроках, отводящихся на **§ 40** по тематическому планированию, речь идет об очень простых вещах: подсчет числа исходов испытания, подсчет числа исходов, благоприятствующих наступлению события, вычисление вероятности события. Основной технический момент, на который следует обратить внимание и хорошо отработать при решении упражнений, — чисто комбинаторный. Это *дерево вариантов* как один из самых наглядных способов организованного перебора вариантов. Отметим, к этому моменту не предполагается, что основное комбинаторное *правило умножения* известно. Оно появится позже, в § 42, а здесь ученики должны накопить опыт общения с перебором и отбором вариантов.

Упражнения разбиты на группы по 2—3, относящиеся к одной и той же ситуации. В каждом упражнении 6 заданий «а»—«е», первые из которых совсем легкие. Но затем сложность (монотонно) увеличивается, и в пункте «е» может уже стоять вопрос, ответ на который без предварительного «разгона» может оказаться непростым делом. Например, рассмотрим последний из номеров серии заданий 40.3—40.5.

40.5. Наудачу выбирают целое неотрицательное число, которое меньше ста. Какова вероятность того, что выбранное число окажется:

а) четным;

б) нечетным;

в) кратным пяти;

г) кратным семи;

д) нечетным и кратным семи;

е) или четным, или кратным пяти?

Ясно, что задания «а» и «б» — простой устный счет, «в» — устный счет; в пункте «г», наверное, надежнее всего выписать все 15 чисел, в «д» — оставить из них нечетные, а вот в «е» потребуется уже некоторое рассуждение. Содержательно это упражнение, разумеется, есть пропедевтика изучения формул вероятностей произведения и суммы событий.

Следующий параграф **(§ 41)** в основном «лингвистический». В нем вводятся термины *случайное, элементарное, достоверное, невозможное, противоположное* события и доказана самая простая вероятностная формула $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Пожалуй, самый тонкий момент в нем — это переход от слов «исход испытания» к термину «элементарное событие». Для людей, привыкших к теоретико-множественному пониманию математики, такой переход не составляет особых трудностей. Но вряд ли к ним можно причислить восьмиклассников: у них элементы теории множеств только начались в 8-м классе. Мы не рекомендуем резко «рубить концы» и после § 41 вовсе забыть о термине «исход испытания»: во многих текстовых формах условий задач этот термин уместнее, чем некое «э.с.». В то же время при формулировках определений и доказательствах многих теоретических утверждений удобнее говорить именно об элементарных событиях. Кроме того, и нормативные требования к результатам обучения предполагают знакомство с термином «элементарное событие».

Название **§ 42** «Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий» состоит из двух позиций. Первая из них чисто комбинаторная и по значению своему — ключевая для всей стохастической линии в целом. Вторая — вероятностная, тоже важная, («...конечная аддитивность вероятностной меры...»), но носит куда более служебный характер. Грубо говоря, ученик, не почувствовавший здесь, как правило умножения «работает» в конкретных примерах, с большой вероятностью не поймет в дальнейшем ничего про повторения, перестановки, сочетания, сложные вероятности и т. п. В то же время привыкнуть к использованию правила сложения при подсчете вероятностей у него будет еще много возможностей. Более того, правило сложения будет сформулировано еще и в § 43, а в терминах «сумма событий» — в 9-м классе. А в 8-м классе мы вообще обходимся без *алгебры событий* — их произведений и сумм. Так что при обучении основной акцент в этом параграфе делаем именно на правило умножения.

В заключительном **§ 43** дано общее определение вероятности события как суммы вероятностей составляющих его элементарных событий и на этом уровне повторены уже известные факты. Для дальнейшего все же основное значение имеет вторая часть § 43 о независимых повторениях испытаний с двумя исходами. Эта долгая содержательная линия, «вырастающая» из правила умножения. Она только намечается в 8-м классе, здесь же появляются «успех» и «неудача», но испытаний Бернулли пока нет. Они отложены до 9-го класса, где появится формула Бернулли, до 10-го класса, где она будет доказана, и до 11-го класса, где будет рассказано о нормальных распределениях и теореме Бернулли — простейшей форме *закона больших чисел.* На уровне 8-го класса основные учебные моменты:

— по таблице (по описанию) распределения вероятностей подсчитать вероятность события;

— для двукратных и трехкратных повторений конкретного испытания с двумя исходами составить дерево вариантов и подсчитать вероятность события.

Решение некоторых упражнений

2.14. На школьной спартакиаде каждый из 30 учеников 8-го класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в высоту. Оба норматива выполнили 9 учеников, а 13 учеников выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив по прыжкам в высоту. Сколько учеников выполнили норматив:

а) по бегу;

б) по прыжкам в высоту;

в) по прыжкам в высоту, но не выполнили норматив по бегу?

Решение. Составим (нарисуем) графическую модель — круги Эйлера. В красном круге — те, кто сдал норматив по бегу, пусть их будет x учеников. В синем круге — те, кто сдал норматив по прыжкам, пусть их будет y учеников. В сине-красном пересечении кругов пусть будет z учеников. Тогда «красных, но не синих» учеников будет $x - z$, а общее количество учеников равно $x + y - z$. По условию $x + y - z = 30$, $z = 9$, $x - z = 13$. Значит,

$$x = 22,\ y = 17,\ y - z = 8.$$

Ответ: а) 22; б) 17; в) 8.

2.16. В средней школе каждый учащийся изучает английский или французский язык со 2-го класса. В 5-м классе учащиеся по желанию могут начать изучать второй язык. Таким образом, среди учащихся 2—9-х классов 675 учащихся изучают английский язык, 428 — французский, 185 — оба языка. Сколько учащихся школы изучают иностранные языки?

Решение. Аналогично упражнению 2.14 общее количество изучающих иностранные языки равно:

$$x + y - z = 675 + 428 - 185 = 918.$$

2.18. Учащимся 8-го класса, в котором учится 40 человек, на каникулы было дано задание прочитать книги A, B и C. После каникул оказалось, что книгу A прочитали 25 учеников, книгу B — 22 ученика, книгу C — 22 ученика; одну из книг A или B прочитали 33 ученика, одну из книг A

или C — 32 ученика, одну из книг B или C — 31 ученик. Полностью задание выполнили только 10 учеников класса. Сколько учеников:

а) прочитали только по одной книге;

б) прочитали две книги;

в) не прочитали ни одной из указанных книг?

Решение. Тех, кто прочел и A, и B, было $25 + 22 - 33 = 14$ человек. Тех, кто прочел и A, и C, было $25 + 22 - 32 = 15$ человек. Тех, кто прочел и B, и C, было $22 + 22 - 31 = 13$ человек.

Рассмотрим множества из этих 14 и этих 15 человек. В их пересечении по условию 10 человек. Значит, в их объединении (те из A, кто прочел еще книгу) $14 + 15 - 10 = 19$ человек. Оставшиеся $25 - 19 = 6$ человек из A прочли только A.

Рассмотрим множества из этих 14 и этих 13 человек. В их пересечении по условию 10 человек. Значит, в их объединении (те из В, кто прочел еще книгу) $14 + 13 - 10 = 17$ человек. Оставшиеся $22 - 17 = 5$ человек из B прочли только B.

Рассмотрим множества из этих 15 и этих 13 человек. В их пересечении по условию 10 человек. Значит, в их объединении (те из C, кто прочел еще книгу) $15 + 13 - 10 = 18$ человек. Оставшиеся $22 - 18 = 4$ человека из C прочли только C.

Всего получается $6 + 5 + 4 = 15$ учеников, прочитавших ровно одну книгу. Ровно две книги прочитали соответственно $14 - 10 = 4$, $15 - 10 = 5$, $13 - 10 = 3$ ученика. Всего 12 учеников.

Итак, 10 человек прочитали все, 12 человек прочли ровно две книги, 15 человек прочитали ровно одну книгу.

Соответственно, $40 - (10 + 12 + 15) = 3$ ученика не прочли ничего.

Ответ: а) 15; б) 12; в) 3.

2.19. Каждый старшеклассник может посещать один из трех факультативов: по математике, по физике или по химии. При этом по желанию каждый может посещать одновременно два или три факультатива одновременно. Таким образом, факультатив по математике посещают 235 учащихся, по физике — 186, по химии — 160. Кроме того, факультатив по математике и по физике одновременно посещают 90 учащихся, по физике и по химии — 75, по математике и по химии — 112, три факультатива сразу посещают 28 учащихся. Сколько всего учащихся в старших классах?

Решение. Условно обозначим М = 235, Ф = 186, Х = 160 — число тех учеников, которые ходят соответственно на математику, на физику, на химию. Аналогично, обозначим МФ = 90, ФХ = 75, МХ = 112 — число тех учеников, которые посещают два соответствующих предмета. МФХ = 28 — количество тех, кто ходит на все факультативы.

Тогда на математику или физику ходит $235 + 186 - 90 = 331$ ученик, а на химию ходят Х = 160. Для ответа на вопрос надо из суммы $331 + 160 = 491$ вычесть число П тех, кто ходит и на химию, и на математику или физику. Но

$$\text{П} = \text{МХ} + \text{ФХ} - \text{МФХ} = 112 + 75 - 28 = 159.$$

Получаем ответ: $491 - 159 = 332$ ученика.

2.25. В цех поступил заказ на 74 детали. Сначала несколько дней работал первый рабочий, а затем продолжил выполнение заказа второй рабочий, причем второй рабочий изготавливал в день на 2 детали больше, чем первый. Сколько деталей в день изготавливал каждый рабочий, если заказ был выполнен за 15 дней?

Решение. Первый рабочий изготавливал в день x деталей и работал y дней. Второй рабочий изготавливал в день $(x + 2)$ детали и работал $(15 - y)$ дней. Значит,

$$xy + (x + 2)(15 - y) = 74.$$

По сюжету задача простая, трудность — в нестандартности математической модели, которая представляет собой уравнение с двумя переменными. После преобразований получаем

$$15x = 44 + 2y,\ x \in \boldsymbol{N},\ y \in \boldsymbol{N}.$$

Рассуждаем так: $15x$ — четное число (поскольку оно равно $44 + 2y$), значит, для x имеем такие возможности: $x = 2, 4, 6, \ldots$. Если $x = 2$, то $y = -7$ — это нас не устраивает. Если $x = 4$, то $y = 8$. Если $x = 6$, то $y = 23$, что нас также не устраивает, поскольку, согласно условию, $y < 15$; тем более не удовлетворяют условию задачи значения $x = 8, 10, 12, \ldots$.

Итак, условиям задачи удовлетворяет единственная пара (4; 8). Это значит, что первый рабочий изготавливает в день 4 детали, а второй — 6 деталей.

5.8. Докажите, что на графике функции $y = x\sqrt{3}$ имеется только одна точка, у которой абсцисса и ордината — целые числа.

Решение. Точка (0; 0) принадлежит графику заданной функции. Предположим, что есть еще одна точка с целочисленными координатами (a; b), принадлежащая графику функции $y = x\sqrt{3}$. Тогда $b = a\sqrt{3}$, $\sqrt{3} = \dfrac{b}{a}$, т. е. $\sqrt{3}$ — рациональное число, что неверно. Вывод: наше предположение неверно, т. е. других точек с целочисленными координатами на графике функции $y = x\sqrt{3}$ нет.

5.9. Докажите, что на графике функции $y = x\sqrt{2} + \sqrt{2}$ имеется только одна точка, у которой абсцисса и ордината — целые числа.

Решение. Точка (–1; 0) принадлежит графику заданной функции. Предположим, что есть еще одна точка с целочисленными координатами (a; b), принадлежащая графику функции $y = x\sqrt{2} + \sqrt{2}$. Тогда $b = a\sqrt{2} + \sqrt{2}$, $\sqrt{2} = \dfrac{b}{a+1}$, т. е. $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно. Вывод: наше предположение неверно, т. е. других точек с целочисленными координатами на графике функции $y = x\sqrt{2} + \sqrt{2}$ нет.

7.17. Сравните числа:

г) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ и $\sqrt{5} + 2$;

д) $\sqrt{10} - \sqrt{7}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{6}$;

е) $3\sqrt{10} - 2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$.

Решение. г)

$$a = \sqrt{2} + \sqrt{7},\ b = \sqrt{5} + 2;$$

$$a^2 = 9 + 2\sqrt{14},\ b^2 = 9 + 4\sqrt{5};\ 2\sqrt{14} = \sqrt{56},\ 4\sqrt{5} = \sqrt{80}.$$

Значит,

$$2\sqrt{14} < 4\sqrt{5};\ a^2 < b^2;\ a < b.$$

д) $a = \sqrt{10} - \sqrt{7}$, $b = \sqrt{11} - \sqrt{6}$.

Имеем: $\sqrt{10} < \sqrt{11}$, $-\sqrt{7} < -\sqrt{6}$. Сложив эти два неравенства, получим $a < b$.

е) $a = 3\sqrt{10} - 2\sqrt{5}$, $b = 4\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$; $3\sqrt{10} = \sqrt{90}$, $4\sqrt{7} = \sqrt{112}$. Значит, $3\sqrt{10} < 4\sqrt{7}$. Аналогично $2\sqrt{5} < 3\sqrt{3}$ и, соответственно, $a < b$.

8.22. е) При каких значениях параметра p система неравенств $\begin{cases} x < p, \\ x \geqslant -3 \end{cases}$ имеет ровно пять целых решений?

Решение. Если $p \leqslant -3$, то система неравенств не имеет решений; если $p > -3$, то решением служит полуинтервал $[-3; p)$. Этому полуинтервалу должно принадлежать ровно пять целых чисел — это числа $-3, -2, -1, 0, 1$. Значит, $p > 1$. В то же время число 2 уже не должно принадлежать полуинтервалу, т. е. не должно выполняться неравенство $p > 2$. Это значит, что $p \leqslant 2$.

Ответ: $1 < p \leqslant 2$.

18.15. г) Найдите порядок произведения, частного и суммы чисел $7{,}987 \cdot 10^{-6}$ и $3{,}157 \cdot 10^{-5}$.

Решение. $a = 7{,}987 \cdot 10^{-6}$, $b = 3{,}157 \cdot 10^{-5}$;

1)

$$ab = 7{,}987 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}157 \cdot 10^{-5} =$$
$$= (7{,}987 \cdot 3{,}157) \cdot 10^{-11} = c \cdot 10 \cdot 10^{-11} = c \cdot 10^{-10},$$
$$c = 7{,}987 \cdot 0{,}3157,\ 0 < c < 1.$$

Порядок числа ab равен -10.

2) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7{,}987 \cdot 10^{-6}}{3{,}157 \cdot 10^{-5}} = c \cdot 10^{-1}$; $c = \dfrac{7{,}987}{3{,}157}$, $0 < c < 1$.

Порядок числа $\dfrac{a}{b}$ равен -1.

3)

$$a + b = 7{,}987 \cdot 10^{-6} + 3{,}157 \cdot 10^{-5} =$$
$$= (7{,}987 + 31{,}57) \cdot 10^{-6} = 39{,}557 \cdot 10^{-6} =$$
$$= 3{,}9557 \cdot 10^{-5}.$$

Порядок числа $a + b$ равен -5.

Ответ: -10, -1 и -5.

21.8. е) Найдите значение выражения $\sqrt{96-14\sqrt{47}}$.

Решение.

$$\sqrt{96-14\sqrt{47}}=\sqrt{49+47-14\sqrt{47}}=$$
$$=\sqrt{7^2-2\cdot 7\cdot\sqrt{47}+\left(\sqrt{47}\right)^2}=\sqrt{\left(7-\sqrt{47}\right)^2}=$$
$$=\left|7-\sqrt{47}\right|=7-\sqrt{47}.$$

21.14. Упростите выражение $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

Решение. 1) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}=2\sqrt{2}+1$.

2) $2+\left(2\sqrt{2}+1\right)=2\sqrt{2}+3$.

3) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1$.

4)

$$\sqrt{10+8\left(\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt{18+8\sqrt{2}}=\sqrt{16+2+2\cdot 4\cdot\sqrt{2}}=$$
$$=\sqrt{4^2+2\cdot 4\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(4+\sqrt{2}\right)^2}=4+\sqrt{2}.$$

Ответ: $4+\sqrt{2}$.

24.21. а) Постройте график функции

$$y=\frac{3x^3-3x^2}{x-1}$$

и найдите значения параметра p, при которых прямая $y=p$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Фактически речь идет о графике функции $y=3x^2$, $x\neq 1$. Это парабола с выколотой точкой (1; 3). Прямая $y=p$ имеет с графиком ровно одну общую точку в двух случаях: когда она проходит через вершину параболы (это будет при $p=0$) и когда она проходит через выколотую точку (это будет при $p=3$).

Ответ: $p=0$, $p=3$.

35.9. а) При каких значениях параметра p среднее арифметическое корней уравнения $x^2-(p^2-1)x+7p=0$ равно 4?

Решение. а) Имеем: $x_{1,2} = \dfrac{p^2 - 1 \pm \sqrt{(p^2-1)^2 - 28p}}{2}$;

$x_1 + x_2 = p^2 - 1$. По условию $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 4$, значит, $p^2 - 1 = 8$, $p = \pm 3$.

Если $p = 3$, то заданное уравнение принимает вид $x^2 - 8x + 21 = 0$. Корней у этого уравнения нет, значит, и о их среднем арифметическом говорить не приходится, т. е. указанное значение параметра нам не подходит.

Если $p = -3$, то заданное уравнение принимает вид $x^2 - 8x - 21 = 0$. Корни у этого уравнения есть, указанное значение параметра нам подходит.

Ответ: $p = -3$.

36.15. Решите уравнение, используя метод введения новой переменной:

в) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3$;

г) $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 9 = 0$.

Решение. в) Перемножив в левой части уравнения выражения в крайних скобках и выражения в средних скобках, получим: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 3$. «Проявилась» новая переменная $y = x^2 + 5x + 4$, с помощью которой уравнение можно записать в виде $y(y + 2) = 3$, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. И остается решить уравнения

$$x^2 + 5x + 4 = 1, \quad x^2 + 5x + 4 = -3.$$

г) Положим $y = x + \dfrac{1}{x}$, тогда

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,\ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Относительно новой переменной заданное уравнение принимает следующий вид:

$$2(y^2 - 2) - 7y + 9 = 0;$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{5}{2}.$$

И остается решить уравнения $x + \dfrac{1}{x} = 1$, $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$.

Практически все упражнения к «стохастической» главе 6 на самом деле именно упражнения, а не задачи, т. е. для их решения вполне достаточно лишь следовать решению примеров из параграфов главы. Приведем несколько решений, в которых такое следование требует, быть может, несколько большей аккуратности.

36.20. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -|x+3|+2, & -7 \leqslant x < 1; \\ (x-1)^2 - 2, & 1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.

б) Найдите значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет единственный корень.

в) Укажите область значений функции.

г) Решите неравенство $f(x) \leqslant -2$.

Решение. а) График заданной кусочной функции построим в три этапа.

Первый этап. Строим график функции $y = -|x + 3| + 2$. Для этого пунктиром проводим прямые $x = -3$, $y = 2$ и к этой вспомогательной системе координат «привязываем» график функции $y = -|x|$. График изображен на рисунке 1. Выделяем часть построенного графика на полуинтервале $[-7; 1)$.

Второй этап. Строим график функции $y = (x - 1)^2 - 2$. Для этого пунктиром проводим прямые $x = 1$, $y = -2$ и к

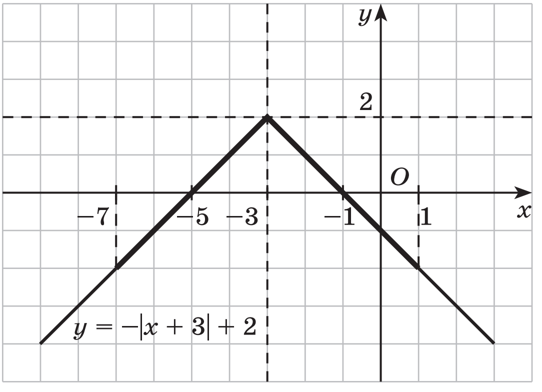

Рис. 1

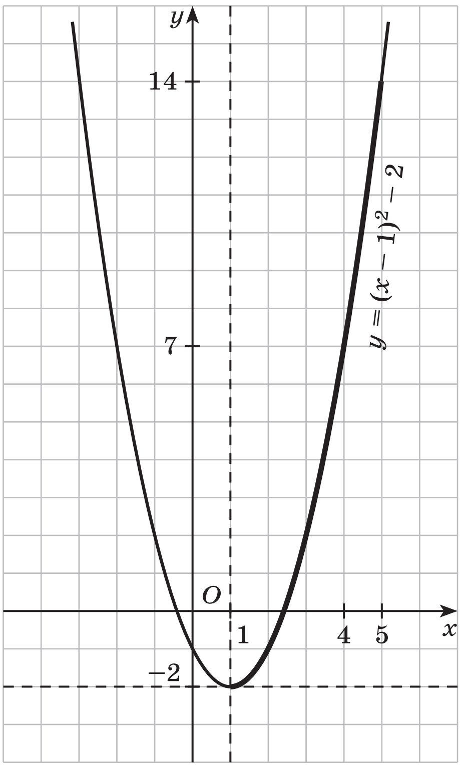

Рис. 2

этой вспомогательной системе координат «привязываем» график функции $y = x^2$. График изображен на рисунке 2. Выделяем часть построенного графика на отрезке [1; 5].

Третий этап. Обе выделенные части помещаем в одной системе координат. График заданной кусочной функции изображен на рисунке 3.

б) Мысленно проводим горизонтальную прямую $y = p$, начиная, например, с $y = -3$, и постепенно поднимая ее вверх, смотрим, сколько точек пересечения с построенным графиком она имеет: сначала ни одной, затем две (при $p = -2$), затем три (при $-2 < p < 2$), затем две (при $p = 2$), затем одну (при $2 < p \leqslant 14$) и, наконец, ни одной (при $p > 14$). Нас интересует случай одной точки пересечения. Это будет при $2 < p \leqslant 14$.

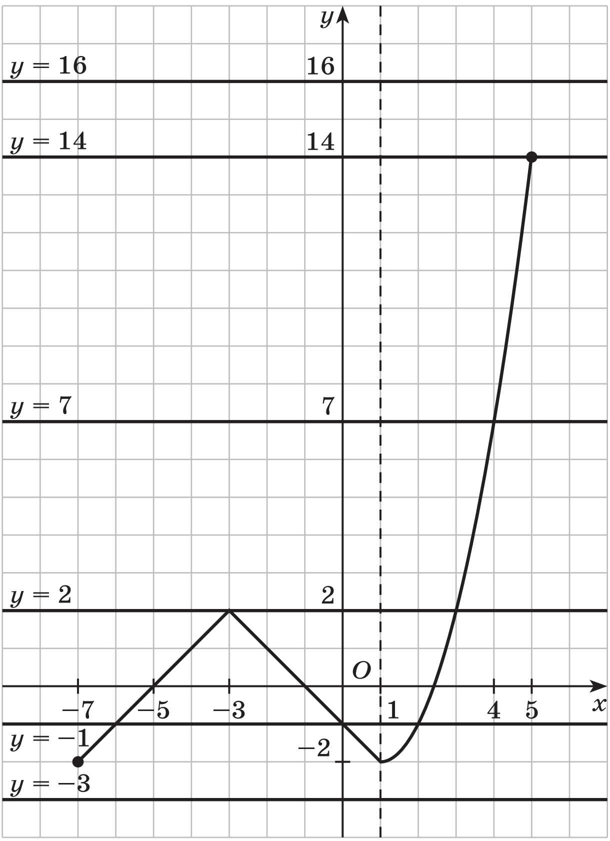

Рис. 3

в) Спроектировав график функции на ось ординат, получим отрезок $[-2; 14]$, это и есть область значений функции.

г) Прямая $y = -2$ имеет с графиком две общие точки, их абсциссы -7 и 1. Ниже этой прямой точек графика нет. Значит, $x = -7$, $x = 1$ — решения неравенства $f(x) \leqslant -2$.

37.8. а) Вкладчик положил в банк 100 000 р. под некоторый процент годовых. В начале второго года хранения банк увеличил процент годовых на 2 %. Под какой процент были положены деньги, если после двух лет хранения денег в банке вкладчик получил 118 800 р.?

Решение. Пусть деньги были положены под x %. Для краткости вместо 100 000 будем писать a. В конце первого года вклад (с процентами) составил $\left(a+\frac{x}{100}a\right)$ р. В начале следующего года процент по вкладу равен $x + 2$, значит, в конце второго года вклад составил

$$\left(a+\frac{x}{100}a\right)+\frac{x+2}{100}\left(a+\frac{x}{100}a\right)=a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+2}{100}\right)=$$
$$=\frac{a}{10000}(x+100)(x+102) \text{ р.}$$

Учтя, что $a = 100\ 000$ и что в конце второго года хранения вклад составил 118 800 р., приходим к уравнению

$$10(x + 100)(x + 100) = 118\ 800,$$
$$\text{т. е. } (x + 100)(x + 102) = 11\ 880.$$

Математическая модель ситуации составлена.

Решим полученное уравнение:

$$x^2 + 202x + 10\ 200 = 11\ 880,$$
$$x^2 + 202x - 1680 = 0,$$
$$x_{1,2} = -101 \pm \sqrt{101^2 + 1680} = -101 \pm \sqrt{11\,881} = -101 \pm 109,$$
$$x_1 = 8,\ x_2 = -210.$$

Ясно, что подходит только первый корень.

Ответ: 8 %.

40.12. Составляют квадратичную функцию $y = ax^2 + c$. Сначала наудачу выбирают старший коэффициент $a \in \{-1;\ 1;\ 2\}$, затем свободный коэффициент $c \in \{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$. После этого изображают соответствующую параболу. Какова вероятность того, что полученная парабола:

а) не пересечет ось Oy;

б) будет симметрична относительно оси Oy;

в) будет иметь общую точку с осью Ox;

г) коснется оси Ox;

д) пересечет ось Ox в двух точках;

е) пройдет через точку (1; 0)?

Решение. Перед упражнением 40.12 дано упражнение 40.11 с тем же начальным условием. Так что уже предполагается, что дерево вариантов нарисовано и общее число $N = 12$ всех парабол уже найдено, как и число разных парабол специальных видов.

а) Всякая парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересечет ось Oy в точке $(0; c)$. Так что здесь — невозможное событие, вероятность равна нулю.

б) Событие достоверно, так как $y = ax^2 + c$ — четная функция. Ответ: 1.

в) Посчитаем. Для $a = -1$ подходят $c = 0, 1, 2$. Для $a = 1$ подходят $c = -1, 0$. Для $a = 2$ также подходят $c = -1, 0$. Всего 7 из 12 вариантов. Ответ: $\frac{7}{12}$.

г) Для таких парабол — это то же, что и для случая «a — любое, $c = 0$». Ответ: $\frac{3}{12} = 0{,}25$.

д) Здесь произошло событие из пункта «в», но не событие из пункта «г». Вероятность равна $\frac{7-3}{12} = \frac{1}{3}$.

е) Событие наступит только при $0 = a + c$. Всего 2 случая. Ответ: $\frac{1}{6}$.

41.11. Из набора домино наудачу достают одну «доминошку». Найдите вероятность того, что:

а) на ней записано число 6;

б) на ней нет числа 4;

в) это «дубль»;

г) это не «дубль»;

д) на ней есть или 2, или 3;

е) на ней нет ни 6, ни «пустышки».

Решение. Типичный пример усложнения от пункта «а» к пункту «е».

Всего есть $N = 28$ «доминошек».

а) В паре с числом 6 может стоять любое число от 0 до 6. Всего 7 вариантов. Ответ: $\frac{7}{28} = 0{,}25$.

б) Это событие противоположно событию «есть число 4». Ответ: $1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

в), г) «Дублей» 7 штук, остальных «доминошек» — 21 штука. Ответы: 0,25 и 0,75.

д) Сосчитаем кости с числом 2, их 7 штук. Сосчитаем кости с числом 3, их тоже 7 штук. Но кость $\{2;\ 3\}$ посчитана дважды. Значит, всего есть $7 + 7 - 1 = 13$ вариантов. Ответ: $\frac{13}{28}$.

е) Рассмотрим противоположное событие «есть или 6, или 0». Его вероятность находится, как в д). Значит, нужная вероятность равна $\frac{15}{28}$.

42.12. Наудачу называют число от 1 до 100. Какова вероятность того, что оно окажется:

а) двузначным;
б) кратным 11;
в) меньше 18;
г) не меньше 81;
д) или меньше 17, или больше 71;
е) удаленным от 50 на расстояние больше 9?

Решение. Всего есть $N = 100$ исходов.

а) Двузначных чисел — 91.
б) Чисел, кратных 11, — 9.
в) 1, 2, ..., 17; всего 17 чисел.
г) 81, 82, ..., 100; всего 20 чисел.
д) 1, 2, ..., 16, 72, 73, ..., 100; всего

$$16 + (100 - 71) = 45 \text{ чисел.}$$

е) 1, 2, ..., 40, 60, 61, ..., 100; всего

$$40 + (100 - 59) = 81 \text{ число.}$$

Теперь надо каждый из результатов вычислений разделить на 100.

Ответ: а) 0,91; б) 0,09; в) 0,17; г) 0,2; д) 0,45; е) 0,81.

42.15. Найдите, какой процент от всех трёхзначных чисел составляют числа, у которых первая цифра больше третьей.

Решение. Всего трехзначных чисел 900 (от 100 до 999). Рассмотрим последовательно 9 случаев: когда цифра сотен равна 1, 2, 3, ... 9.

Если цифра сотен 1, то цифра единиц 0. При этом цифра десятков может быть любой — от 0 до 9. Таким образом, в рассматриваемом случае имеется 10 трехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи. Вот они:

$$100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190.$$

Если цифра сотен 2, то цифра единиц 0 или 1. При этом опять таки и в том и в другом случае цифра десятков может быть любой — от 0 до 9. Таким образом, в рассматриваемом случае имеется $10 + 10 = 20$ трехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи. Вот они:

$$200, 210, ..., 290, 201, 211, ..., 291.$$

Рассуждая аналогично, получим, что при первой цифре 3 будет 30 интересующих нас трехзначных чисел, при первой цифре 4 — 40 чисел и т. д.; при первой цифре 9 будет 90 чисел.

Таким образом, всего будет

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = 450 \text{ чисел.}$$

Имеем: $\dfrac{450}{900} = \dfrac{50}{100} = 50\,\%$.

Ответ: 50 %.

43.11. На выходе из третьего уровня компьютерного «квеста» изображен лотерейный барабан. В нем 6 белых и 4 черных шара. Шар из барабана случайно выкатывает программа «квеста». Если выпадает белый шар, то игрок попадает на четвертый уровень, а если черный — то на второй уровень. Играют 1 раз в день. Какова вероятность того, что игрок, выходя с третьего уровня:

а) и сегодня, и завтра, и послезавтра попадет на четвертый уровень;

б) и сегодня, и завтра, и послезавтра попадет на второй уровень;

в) за три раза будет иметь ровно один переход на четвертый уровень;

г) за три раза будет иметь ровно один переход на второй уровень;

д) за три раза будет иметь хотя бы один переход на четвертый уровень;

е) за три раза будет иметь переходов на четвертый уровень больше, чем на второй?

Решение. Пусть «успех» У — выход на четвертый уровень, «неудача» Н — выход на второй уровень. Вероятность p «успеха» равна 0,6. Вероятность q «неудачи» равна 0,4.

а) $P(\text{УУУ}) = P(\text{У}) \cdot P(\text{У}) \cdot P(\text{У}) = 0{,}6^3 = 0{,}216$;

б) $P(\text{ННН}) = P(\text{Н}) \cdot P(\text{Н}) \cdot P(\text{Н}) = 0{,}4^3 = 0{,}064$;

в)

$$P(\{\text{УНН, НУН, ННУ}\}) = \\ = P(\text{УНН}) + P(\text{НУН}) + P(\text{ННУ}) = 3pq^2 = 0{,}288;$$

г) $P(\{\text{НУУ, УНУ, УУН}\}) = 3p^2q = 0{,}432$;

д) Противоположное событие — «три перехода на второй уровень», см. пункт «б». Ответ: 0,936.

е)

$$P(\{\text{УУУ, НУУ, УНУ, УУН}\}) = p^3 + 3p^2q = \\ = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648.$$

43.12. Вероятность того, что в 9:00 на светофоре горит красный, желтый или зеленый сигнал, оценивается так:

К	Ж	З	
50 %	10 %	40 %	Сумма = 100 %

Оцените вероятность (в процентах) того, что сигнал светофора в 9:00:

а) завтра, послезавтра и послепослезавтра будет красным;

б) завтра будет зеленым, послезавтра красным, послепослезавтра — желтым;

в) завтра будет красным, а в следующие два дня — зеленым;

г) все три дня будет желтым;

д) завтра будет зеленым, а в следующие два дня — не зеленым;

е) хотя бы один день из трех будет зеленым.

Решение. Это упражнение на систематическое применение правила:

при последовательном и независимом проведении трех испытаний вероятность того, что в первом из них наступит событие A, во втором — событие B, а в третьем — событие C, равна произведению $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ вероятностей этих событий.

а) $P(К) \cdot P(К) \cdot P(К) = 0{,}5^3 = 0{,}125$;

б) $P(З) \cdot P(К) \cdot P(Ж) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$;

в) $P(К) \cdot P(З) \cdot P(З) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$;

г) $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$;

д) $0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$;

е) Противоположное событие — «всегда красный или желтый». Его вероятность равна $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$. Значит, искомая вероятность равна $1 - 0{,}216 = 0{,}784$.

Ответ: а) 12,5 %; б) 2 %; в) 8 %; г) 0,1 %; д) 14,4 %; е) 78,4 %.

Дополнительные задачи

Дополнительные задачи в нашем УМК в целом выдержаны в том же ключе, что и упражнения к соответствующим главам. Лишь в отдельных случаях их формулировки выглядят несколько необычно для курса алгебры 8-го класса. Вот несколько примеров.

К главе 1

11. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{0{,}nnnn\ldots} = 0{,}mmmm\ldots;$$

n и m — цифры.

Решение. Так как

$$0{,}aaaa\ldots = a \cdot 0{,}1111\ldots = \frac{a}{9},$$

то

$$\frac{n}{9} = \frac{m^2}{81},\ m^2 = 9n.$$

Перебор 10 возможных случаев дает ответ: $n = 0$, $m = 0$; $n = 1$, $m = 3$; $n = 4$, $m = 6$; $n = 9$, $m = 9$.

12. Увеличится или уменьшится десятичная дробь 0,(23459) в результате:

а) удаления 15-й цифры;

б) удаления 104-й цифры;

в) удаления 203-й цифры;

г) удаления цифр, начиная с 1001-й и заканчивая 10 001-й;

д) вставки цифры 7 между 9-й и 10-й цифрами;

е) вставки цифры 1 между 87-й и 88-й цифрами?

Решение. Дробь $x = 0{,}2345923459...$ периодична с периодом 5.

а) 15-я цифра — это 9. После удаления получаем $0{,}23459234592345 23459... < x$, так как первые 14 цифр одинаковы, а 15-я слева (2) меньше 15-й справа (9).

б) 104-я цифра — это 5. После удаления получаем

$$0{,}\underbrace{23459\ \ldots\ 23459}_{100}2349\ 23459\ldots > x\ldots,$$

так как первые 103 цифры одинаковы, а 104-я слева (9) больше 104-й справа (5).

в) Аналогично. Ответ — увеличится.

г) И 1001-я, и 10 001-я цифры — первые в периоде (23459). Значит, удалено будет целое число периодов и после этого еще цифра 2. Получаем

$$0{,}\underbrace{23459\ \ldots\ 23459}_{1000}3459\ 23459\ldots > x.$$

д) $0{,}2345923457923459\ 23459... < x$.

е) $0{,}\underbrace{23459\ \ldots\ 23459}_{85}231459\ 23459\ldots < x$.

К главе 2

14. Найдите все значения x, для которых:

а) порядок числа x и порядок числа $2x$ равны нулю;

б) порядок числа x и порядок числа $2x$ равны -1;

в) порядок числа x равен 1, а порядок числа $2x$ равен 2;

г) порядок числа x равен 2, а порядок числа $3x$ равен 3;

д) порядок числа x равен 4, а порядок числа $x + 7$ равен 5;

е) порядок числа x равен -1, а порядок числа $0{,}4x$ равен -2.

Решение. а) Условие «порядок x равен нулю» означает, что $x = a \cdot 10^0 = a$, $1 \leqslant a < 10$. Условие «порядок $2x$ равен нулю» означает, что $2x = b \cdot 10^0 = b$, $1 \leqslant b < 10$. Значит, $1 \leqslant x < 5$.

б) Надо предыдущий ответ «уменьшить» на порядок, т. е. в 10 раз. Значит, $0{,}1 \leqslant x < 0{,}5$.

в) $x = a \cdot 10^1 = 10a$, $1 \leqslant a < 10$, $10 \leqslant x < 100$.

$$2x = b \cdot 10^2 = 100b,\ 1 \leqslant b < 10,\ 100 \leqslant 2x < 200,$$
$$50 \leqslant x < 100.$$

Значит, $50 \leqslant x < 100$.

г) Аналогично пункту «в». Ответ: $333\frac{1}{3} \leqslant x < 1000$.

д) $x = a \cdot 10^4$, $10^4 \leqslant x < 10^5$ и $10^5 \leqslant x + 7 < 10^6$. Ответ: $10^5 - 7 \leqslant x < 10^5$.

е) $10^{-1} \leqslant x < 1$ и $10^{-2} \leqslant 0{,}4x < 10^{-1}$, $\frac{1}{40} \leqslant x < \frac{1}{4}$. Ответ: $0{,}1 \leqslant x < 0{,}25$.

К главе 4

3. Числа a, b и c выбирают из множества $\{-1; 0; 1\}$. Сколько всего можно составить квадратичных функций вида:

а) $y = ax^2 + a$;
б) $y = ax^2 + c$;
в) $y = ax^2 + bx$;
г) $y = 2x^2 + bx + c$;
д) $y = (a + b)x^2$;
е) $y = ax^2 + bx + c$?

Решение. Это упражнение на прямой перебор, на правило умножения и определение квадратичной функции.

а) Таких функций две: $y = -x^2 - x$, $y = x^2 + x$.

б) Для выбора a есть два варианта -1 и 1. Для выбора c — три варианта. Ответ: 6.

в) Аналогично пункту «б».

г) Для выбора b и для выбора c есть по три варианта. Ответ: 9.

д) Коэффициент $a + b$ принимает значения -2, -1, 0, 1, 2. Будет 4 квадратичные функции.

е) По правилу умножения получаем ответ: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

6. Числа a, b произвольно выбирают из множества $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ и составляют функцию вида $y = ax^2 + bx$.

Какова вероятность того, что полученная функция окажется:

а) квадратичной;

б) линейной;

в) постоянной;

г) возрастающей;

д) квадратичной и ограниченной снизу;

е) квадратичной и ограниченной сверху?

Решение. Всего есть $N = 5 \cdot 5 = 25$ вариантов составления функции.

а) Квадратичной одна будет в $k = 4 \cdot 5 = 20$ случаях.

б) Линейной — в остальных $25 - 20 = 5$ случаях.

в) Постоянной — в единственном случае $a = b = 0$.

г) Возрастающей — только если она линейная с положительным коэффициентом b. Два случая.

д) $a \in \{1; 2\}$, $b \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, 10 случаев.

е) Аналогично пункту «д», 10 случаев.

Теперь надо каждый из результатов вычислений разделить на 25.

Ответ: а) 0,8; б) 0,2; в) 0,04; г) 0,08; д) 0,4; е) 0,4.

18. Найдите значение k, при котором наибольшее значение функции $y = \dfrac{k}{x-3}$ на отрезке:

а) $[4; 7]$ равно 5;

е) $[-7; 1]$ равно 100.

Решение. График — гипербола. Вертикальная асимптота $x = 3$. На всех указанных отрезках функция монотонна и ее наибольшее значение равно наибольшему из значений в концах отрезка.

а) При $k > 0$ функция на отрезке $[4; 7]$ убывает. Значит, $y(4) = \dfrac{k}{4-3} = k = 5$.

При $k < 0$ функция на отрезке $[4; 7]$ всегда отрицательна и не может равняться 5.

е) При $k > 0$ функция на отрезке $[-7; 1]$ отрицательна и не может равняться 100.

При $k < 0$ функция на отрезке $[-7; 1]$ возрастает и

$$y(1) = \frac{k}{1-3} = 100,\ k = -200.$$

К главе 5

4. Найдите знак старшего коэффициента и знак линейного коэффициента квадратичной функции $y = f(x)$, если:

а) $f(1) = f(3) = 0$, $f(2) > 0$;

б) $f(-1) = f(-5) = 0$, $f(-2) < 0$;

в) $f(-1) = f(-5) = 0$, $f(-6) > 0$;

г) $f(-1) = f(-5) = 1$, $f(1) < 0$;

д) $f(-1) = f(5) = 3$, $f(1) < 2$;

е) $f(1) < 1$, $f(5) = 5$, $f(4) > 7$.

Решение. а)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-1)(x-3),\ f(2) = -a > 0.$$

Значит, $a < 0$, $b = -4a > 0$.

б), в) Рассуждение аналогично пункту «а». Ответ: $a > 0$, $b > 0$.

г)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x+1)(x+5) + 1,$$
$$f(1) = 12a + 1 < 0.$$

Значит, $a < 0$, $b = 6a < 0$.

д) Рассуждение аналогично пункту «г». Ответ: $a > 0$, $b < 0$.

е)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-5)(x-x_2) + 5,$$
$$b = -a(5 + x_2),$$
$$\begin{cases} f(1) = -4a(1-x_2) + 5 < 1, \\ f(4) = -a(4-x_2) + 5 > 7, \end{cases} \quad \begin{cases} a(1-x_2) > 1, \\ a(4-x_2) < -2. \end{cases}$$

Значит,

$$1 + 3a < a(1-x_2) + 3a = a(4-x_2) < -2,$$
$$3a < -3,\ a < -1 < 0.$$

Далее,

$$1 - x_2 < \frac{1}{a},\ x_2 > 1 - \frac{1}{a} > 1,\ 5 + x_2 > 6 > 0,$$
$$b = -a(5 + x_2) > 0.$$

6. Пусть $ac \neq 0$.

а) Докажите, что уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ имеют одинаковое число корней.

б) Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеют разные знаки. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

в) Разность корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 3. Сколько корней имеет уравнение $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$?

г) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень. Сколько корней имеет уравнение $4ax^2 + 2bx + c = 0$?

д) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень. Сколько корней имеет уравнение $cx^2 - (b + 1)x + a = 0$ при $b < -0{,}5$?

е) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + (2b + 1)x + 4c = 0$ при $b < -0{,}25$?

Решение. а) У этих квадратных уравнений одинаковый дискриминант.

б) Дискриминант второго уравнения в 4 раза больше дискриминанта первого, которое по условию имеет два корня. Значит, и второе уравнение имеет два корня.

в) Первое уравнение имеет два корня. Значит, $b^2 > 4ac$ и поэтому $b^6 > 64a^3c^3$. Проверим, что дискриминант $b^6 - 4a^3c^3$ второго уравнения положителен. Это очевидно при $ac < 0$, а при $ac > 0$ следует из $b^6 > 64a^3c^3 > 4a^3c^3$. Значит, и второе уравнение имеет два корня.

г) Дискриминант второго уравнения в 4 раза больше дискриминанта первого. Значит, и второе уравнение имеет единственный корень.

д) По условию $b^2 = 4ac$. Дискриминант второго уравнения равен $(b + 1)^2 - 4ac = (b + 1)^2 - b^2 = 2b + 1 < 0$. Корней нет.

е) $(2b + 1)^2 - 16ac = 4(b^2 - 4ac) + 4b + 1 < 0$. Корней нет.

К главе 6

Дополнительные задачи к главе 6, в принципе, не слишком отличаются от упражнений самой главы. Каждая из дополнительных задач имеет свой «прообраз» среди упражнений главы и по существу отличается от нее лишь несколько более высоким техническим уровнем.

8. В тестовой части компьютерной программы по алгебре есть задание, в котором при нажатии клавиши «Ввод» датчик случайных чисел выбирает k из чисел -2, -1, 0, 1, 2 и выбирает b из чисел 1, 2, 3, 4, 5, а на мониторе строится график функции $y = kx + b$. Какова вероятность того, что эта прямая:

а) пересечет ось ординат;

б) пересечет ось ординат выше точки (0; 2);

в) пересечет ось ординат ниже точки (0; 3);

г) не имеет общих точек с Ox;

д) пересечет вторую координатную четверть;

е) пройдет выше точки (1; 1)?

Решение. Всего есть $N = 5 \cdot 5 = 25$ вариантов для прямой $y = kx + b$.

а) В любом из случаев прямая пересечет ось Oy в точке $(0; b)$. Вероятность равна 1.

б) По условию $b > 2$, $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $b \in \{3; 4; 5\}$. Вероятность равна $\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 5} = 0{,}6$.

в) Рассуждение аналогично пункту «б». Ответ: 0,4.

г) $k = 0$, $b \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Вероятность равна 0,2.

д) Так как прямая пересекает Oy в точке $(0; b)$ выше начала координат, то эта прямая всегда пересечет и вторую координатную четверть. Ответ: 1.

е) По условию $k \cdot 1 + b > 1$, $k + b > 1$. Остается перебрать случаи:

$$k = -2,\ b \in \{4; 5\};\ k = -1,\ b \in \{3; 4; 5\};$$
$$k = 0,\ b \in \{2; 3; 4; 5\};\ k \in \{1; 2\},\ b \in \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Всего: $2 + 3 + 4 + 10 = 19$.

Ответ: 0,76.

10. Иван, Илья, Игорь в указанном порядке друг за другом, независимо друг от друга сдают экзамен на получение водительских прав. По одному из разделов экзамена в программе компьютера заложены 15 вопросов, из которых 3 считаются трудными. Из этого раздела каждому достается один вопрос. Какова вероятность того, что из этого раздела трудный вопрос достанется:

а) всем троим;

б) только Ивану и Игорю;

в) только Ивану;

г) Ивану;

д) не Ивану;

е) только двоим?

Решение. Пусть «успех» У — выбор нетрудного вопроса, «неудача» Н — выбор трудного вопроса. Вероятность p «успеха» равна $\dfrac{12}{15} = 0{,}8$. Вероятность q «неудачи» — 0,2.

а) $P(\text{ННН}) = P(\text{Н}) \cdot P(\text{Н}) \cdot P(\text{Н}) = 0{,}2^3 = 0{,}008$.

б) $P(\text{НУН}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}032$.

в) $P(\text{НУУ}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}128$.

г)

$$P(\{\text{НУУ, НУН, ННУ, ННН}\}) =$$
$$= qp^2 + q^2p + q^2p + q^3 = q(p + q)^2 = 0{,}2.$$

д) $P(\{\text{УНУ, УУН, УНН}\}) = 2p^2q + q^2p = pq(2p + q) = 0{,}288$.

е) $3pq^2 = 2{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}096$.

Замечание. Если условие пункта «д» интерпретировать как «Ивану достался нетрудный вопрос», то ответ будет 0,8 по аналогии с пунктом «г». Все же условие пункта «д» «трудный вопрос достанется не Ивану» правильнее понимать как «трудный вопрос выпадет Илье или Игорю».

Содержание

Учебно-методическое издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

Алгебра
8 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Редактор *С. В. Бахтина*
Художественное оформление *А. А. Павлов*
Внешнее оформление *Н. А. Новак*
Компьютерная верстка: *А. А. Павлов*
Корректор *С. О. Никулаев*

Подписано в печать 20.02.20. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 2,79. Тираж 300. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3
тел. (495)181–53–44, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Приобрести книги издательства
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
можно в магазине по адресу:
Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181–60–77, e-mail: shop@blbz.ru
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются
Коммерческим департаментом издательства:
тел. (495)181–53–44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано в

Для заметок

Для заметок