Глава 5

Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул

В 8-м классе мы познакомились с простейшими задачами на нахождение вероятностей случайных событий. В большинстве из них подсчёт основан на формуле $P(A) = \dfrac{N(A)}{N}$ из классического определения вероятности; N — число всех равновозможных между собой исходов (элементарных событий), $N(A)$ — число тех из них, в которых наступает интересующее нас событие A.

В простых ситуациях нахождение N и $N(A)$ — простая задача. В более сложных случаях сложными получаются и задачи на нахождение N и $N(A)$. Для их решения нужны новые *комбинаторные* приёмы и методы, которые помогают при подсчёте числа различных комбинаций, соединений, сочетаний, перестановок и т. п. тех или иных элементов некоторых множеств. Раздел математики, в котором изучаются такие приёмы, методы, формулы, называется *комбинаторикой*.

§ 36. Правило умножения и основные комбинаторные формулы

Основное для нас комбинаторное правило — это *правило умножения*. Напомним, как оно выглядит для выбора предметов, скажем, трёх типов.

> Если предмет первого типа можно выбрать n способами, после каждого из которых предмет второго типа можно выбрать k способами, после чего предмет третьего типа можно выбрать m способами, то тройку предметов первого, а затем второго и третьего типов можно выбрать nkm способами.

Разумеется, так же следует поступать и для последовательного выбора предметов двух, четырёх, пяти и т. д. типов. Начнём с примера использования этого правила в задаче о *размещении*.

Пример 1 Есть пять бочек и пять пробок — № 1, № 2, № 3, № 4, № 5. Сколькими способами можно разместить для закупорки:

а) пробку № 1 в одну из бочек;

б) пробки № 1, 2, 3 поочерёдно в три бочки;

в) все пробки поочерёдно по всем бочкам?

Решение. а) Пробкой № 1 можно закупорить одну из пяти бочек. Ответ — пять способов.

б) Если одна бочка уже закупорена, то для пробки № 2 остаётся четыре способа, а после этого для пробки № 3 — три способа. По правилу умножения получаем ответ: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов.

в) Если три бочки уже закупорены, то для пробки № 4 остаются две бочки и, соответственно, два способа её размещения. Для последней пробки № 5 выбор единствен — ею надо закупорить последнюю из оставшихся бочек. По правилу умножения получаем ответ: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов.

И ответы, и решения не изменятся, если пробки заменить абстрактными элементами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, обойтись вообще без бочек и говорить о поочерёдном (*упорядоченном*) выборе какого-то числа этих элементов. Более того, в общем виде это же рассуждение можно повторить и для упорядоченного выбора k элементов из n заданных элементов.

Теорема 1. Число способов поочерёдного (упорядоченного) выбора k элементов из n заданных равно произведению k подряд идущих натуральных чисел, большее из которых равно n.

Действительно, первый по порядку элемент можно выбрать n способами, после его выбора второй элемент можно выбрать $(n - 1)$ способами, ..., для последнего, k-го по счёту элемента останется $n - (k - 1) = n - k + 1$ способов. Остаётся применить правило умножения.

А как записать теорему 1 в виде короткой формулы? Для этого надо число способов, о котором в ней идёт речь, *обозначить* каким-то специальным символом и дать ему *название*.

Определение 1. Число способов поочерёдного (упорядоченного) выбора k элементов из n заданных называют **числом размещений** из n по k и обозначают A_n^k[1].

Теперь теорема 1 выглядит так:

$$\boxed{A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).}$$

Пример 2 Сколькими способами можно поочерёдно выбрать: а) двух баскетболистов из пяти на площадке; б) трёх хоккеистов из шести; в) четырёх футболистов из одиннадцати?

Решение. а) Здесь $n = 5$, $k = 2$. По теореме 1 получаем

$$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ способов.}$$

б) Здесь $n = 6$, $k = 3$. По теореме 1 получаем

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ способов.}$$

в) Здесь $n = 11$, $k = 4$ и вычисления сложнее:

$$A_{11}^4 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920 \text{ способов.}$$

У теоремы 1 есть очень важный, специальный случай, когда следует поочерёдно выбрать *все* n элементов из n заданных. Тогда говорят не об упорядоченном выборе n элементов из n заданных, а проще — об упорядочении всех n заданных элементов.

Теорема 2. Число способов, которыми можно упорядочить n заданных элементов, равно произведению подряд идущих натуральных чисел от 1 до n.

Действительно, в этом случае

$$k = n,$$
$$n - k + 1 = n - n + 1 = 1$$

и

$$A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

[1] A — от англ. *arrangement* — размещение, расстановка.

Иметь для A_n^n два одинаковых индекса n, верхний и нижний, немного бессмысленно. В математике обходятся одним.

Определение 2. Число способов, которыми можно упорядочить n заданных элементов, называют **числом перестановок** из n и обозначают P_n [1].

Теперь теорема 2 выглядит так:

$$\boxed{P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.}$$

Правую часть последнего равенства в математике тоже специально *обозначают* и специально *называют*.

Определение 3. Произведение подряд идущих натуральных чисел от 1 до n называют **факториалом**[2] **числа** n и обозначают $n!$ (читают: «эн факториал»); кратко: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$.

Последовательность $c_n = n!$ можно задать рекуррентно: $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n \cdot (n+1)$, $n > 1$. Это пример очень быстро возрастающей последовательности, которая возрастает быстрее любой геометрической прогрессии. Например, 10! больше, чем 3,5 миллиона, 15! равно примерно 1,3 триллиона, а 100! — это число, состоящее из 158 цифр. Несколько первых значений $n!$ приведены в таблице.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320

Пример 3 Сколькими способами:

а) четыре туриста могут разойтись со старта по одному на четыре стороны света;

б) можно составить школьное расписание на пять уроков в день из пяти заданных предметов;

в) можно съесть обед из трёх блюд в произвольном порядке;

г) шесть человек могут сесть по одному на шесть стульев?

[1] P — от англ. *permute*, *permutation* — переставлять, перестановка.
[2] Факториал — от лат. *factor* (один из вариантов перевода — множитель).

Решение. а) Пронумеруем стороны света: восток — № 1, юг — № 2, запад — № 3, север — № 4. Тогда каждый способ «расхождения» четырёх туристов — это их нумерация числами от 1 до 4, т. е. перестановка множества из четырёх элементов. По теореме 2 получаем ответ: $P_4 = 4! = 24$. Аналогично получаем остальные ответы: б) $P_5 = 5! = 120$; в) $P_3 = 3! = 6$; г) $P_6 = 6! = 720$.

Понятие «факториал» позволяет переформулировать теоремы 1 и 2 в виде совсем кратких формул.

Теорема 3. а) $P_n = n!$; б) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. а) $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ по теореме 2, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ по определению. Значит, $P_n = n!$.

б) По теореме 1

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$

$$= \frac{(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)) \cdot ((n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Числа A_n^k размещений и формула $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ будут для нас вспомогательными моментами для дальнейших рассуждений. Куда более важными будут числа *сочетаний*, которые связаны с одновременным (неупорядоченным) выбором нескольких элементов из n заданных.

Определение 4. Число способов выбора k элементов из n заданных без учёта порядка выбираемых элементов называют **числом сочетаний из n по k** и обозначают C_n^k [1].

Например, две конфеты из пяти можно выбрать C_5^2 способами, тройку из шести хоккеистов можно выбрать C_6^3 способами, семь стаканов из двадцати стаканов на подносе можно выбрать C_{20}^7 способами, лотерейный билет в «Спортлото 6 из 49» можно заполнить C_{49}^6 способами и т. п.

[1] C — от англ. *combination* — комбинация; C_n^k читают: «цэ из эн по ка».

Пример 4 Доказать тождества: а) $C_n^n = 1$; б) $C_n^1 = n$; в) $C_n^{n-1} = n$; г) $C_n^k = C_n^{n-k}$ при $0 < k < n$.

Решение. а) Есть только один способ одновременно выбрать n элементов из n заданных: сразу выбрать все эти n заданных элементов. Значит, $C_n^n = 1$.

б) Один из n заданных элементов можно выбрать ровно n способами. Значит, $C_n^1 = n$.

в) Способов выбрать группу из $n - 1$ элементов столько же, сколько способов оставить в стороне, не выбрать единственный остающийся элемент. Поэтому $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$.

г) Допустим, вы производите свой выбор k элементов из n заданных без учёта порядка, а ваш двойник, антипод, производит «антивыбор». Он выбирает все $n - k$ элементов, которые не выбрали вы. Тогда число способов C_n^k вашего выбора — такое же, как и число способов C_n^{n-k} «антивыбора» вашего двойника. Поэтому $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Замечание. Тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$ при $k = n$ выглядит так: $C_n^n = C_n^0$. Но что такое C_n^0? Как сосчитать число выборов 0 элементов из n данных? Тут нужно, как говорят в математике, доопределение. По нему $C_n^0 = 1$. Это вполне соответствует здравому смыслу, ведь **не** выбрать ни одного из n данных элементов можно только одним способом, а именно как раз ничего не выбирая. Итак, $C_n^n = 1$ исходя из рассуждений в пункте «а», а $C_n^0 = 1$ — по доопределению. В итоге $C_n^k = C_n^{n-k}$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n$.

Теорема 4. а) $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$; б) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ при $0 < k < n$.

Доказательство. а) Проведём два испытания. Первое — выбор k элементов из n данных без учёта их порядка. Оно имеет C_n^k исходов по определению 4. Второе испытание — упорядочивание выбранных k элементов. Оно имеет P_k исходов по теореме 2. По правилу умножения число всех исходов такого «двойного» испытания равно $C_n^k \cdot P_k$. Однако каждый из результатов такого «двойного» испытания — это упорядоченный выбор k элементов из n данных. А число всех таких выборов равно как раз A_n^k (см. определение 1). Поэтому $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$.

б) Применим теорему 3: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $P_k = k!$.

Значит,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Замечание. Равенство $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ при $k = 0$ выглядит так: $C_n^0 = \dfrac{n!}{0! \cdot n!}$, а при $k = n$ симметрично получается $C_n^n = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!}$. Но что такое $0!$ — «нуль факториал»? Снова используем доопределение: $0! = 1$, и тогда оба равенства $C_n^0 = \dfrac{n!}{0! \cdot n!}$ и $C_n^n = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!}$ верны. В итоге $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n$.

Пример 5 Сколькими способами можно: а) выбрать две конфеты из пяти; б) выбрать тройку из шести хоккеистов; в) выбрать шесть стаканов из десяти; г) заполнить билет в лотерее «Спортлото 6 из 49»?

Решение. По теореме 4 получаем:

а)

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10;$$

б)

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5 \cdot 6)}{6 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 20;$$

в)

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210;$$

г)

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$$

$$= 44 \cdot 3 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 49 = 13\,983\,816 \text{ —}$$

почти 14 миллионов. Разумеется, без калькулятора такой подсчёт сделать было бы затруднительно.

Ответ: а) 10; б) 20; в) 210; г) 13 983 816 способов.

Упражнения

36.1. Вычислите число размещений:

а) A_5^2; в) A_5^4; д) A_7^4;

б) A_5^3; г) A_7^2; е) A_{10}^3.

36.2. Вычислите число перестановок:

а) P_2; в) P_5; д) P_8;
б) P_4; г) P_7; е) P_{10}.

36.3. Преобразуйте числовое выражение и найдите его значение:

а) $4! + 4$; в) $6! + 5!$; д) $\frac{7!}{5!}$;

б) $5! - 5$; г) $\frac{5!}{5}$; е) $\frac{8!}{3! \cdot 5!}$.

36.4. В поезде n вагонов. На перроне стоят k продавцов мороженого, $k \leqslant n$. Сколькими способами они могут распределиться по одному в вагоны, если важно, кто в какой вагон сел, и:

а) $n = 2$, $k = 1$; г) $n = 4$, $k = 2$;
б) $n = 3$, $k = 1$; д) $n = 5$, $k = 5$;
в) $n = 3$, $k = 2$; е) $n = 10$, $k = 4$?

36.5. Сколькими способами:

а) четыре машины могут выехать из села по одной из четырёх выходящих из него дорог;
б) можно выбрать порядок выполнения четырёх заданий контрольной работы;
в) можно съесть обед из четырёх блюд в произвольном порядке;
г) Веру, Валю, Витю и Вову можно по одному вызвать к доске для ответа;
д) можно каждый из четырёх кругов раскрасить в один из четырёх цветов (без повторений цвета);
е) можно каждый из четырёх кругов раскрасить в один из четырёх цветов (повторения допускаются)?

36.6. Решать 5 задач на контрольной работе можно в разном порядке. Найдите число:

а) всех порядков решения задач;
б) всех порядков решения задач, при которых задачу № 1 решают первой;
в) всех порядков решения задач, при которых задачу № 5 решают последней;

г) всех порядков решения задач, при которых задачу № 1 решают первой или второй;
д) всех порядков решения задач, при которых задачу № 1 решают не первой;
е) всех порядков решения задач, при которых задачу № 1 решают не первой, а задачу № 5 — не последней.

36.7. Решите неравенство:
а) $3 < k! < 10$;
б) $7 < m! < 27$;
в) $100 < n! < 200$;
г) $500 < x! < 1000$;
д) $1000 < y! < 10\,000$;
е) $10\,000 < z! < 100\,000$.

36.8. Решите уравнение:
а) $(n + 1)! = 3n!$;
б) $(k - 1)! = 4(k - 2)!$;
в) $(m - 5)! = 7(m - 6)!$;
г) $x! + 7(x - 1)! = 66$;
д) $(y - 2)! = 90(y - 4)!$;
е) $(z + 3)! = 210z!$.

36.9. На сколько нулей оканчивается число:
а) $5!$;
б) $6!$;
в) $9!$;
г) $10!$;
д) $15!$;
е) $29!$?

36.10. Вычислите:
а) C_5^2;
б) C_5^3;
в) C_6^2;
г) C_7^3;
д) C_8^6;
е) C_9^4.

36.11. Докажите, что:
а) $C_n^1 = n$;
б) $C_n^{n-1} = n$;
в) $C_{k+3}^{k+2} = k + 3$;
г) $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$;
д) $C_{m+1}^{m-1} = \dfrac{m(m+1)}{2}$;
е) $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

36.12. Члены футбольной команды (вратарь, 3 защитника, 5 полузащитников и 2 нападающих) играли друг с другом в шашки. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий:
а) сыграл вратарь;
б) сыграли нападающие;
в) сыграли защитники (между собой);
г) сыграли защитники с полузащитниками;
д) сыграли не защитники (между собой);
е) было сыграно всего?

36.13. В кружке по математике занимаются 6 учеников из 9 «А» класса, 7 учеников из 9 «Б» и 8 учеников из 9 «В». На олимпиаду выбирают троих. Сколькими способами можно выбрать:

а) троих, по одному из каждого класса;
б) одного из класса «А», двоих из класса «Б»;
в) одного из класса «А» или «Б», двоих из класса «В»;
г) всех из 9 «А» класса;
д) всех из 9 «В» класса;
е) всех из всего кружка?

36.14. Сколькими способами можно выбрать:

а) 3 конфеты из 5 конфет, лежащих на тарелке;
б) 4 груши из лежащих на подносе 7 груш;
в) 3 яблока и 4 груши из лежащих на подносе 5 яблок и 7 груш;
г) треугольник с вершинами в вершинах заданного правильного шестиугольника;
д) три цифры из цифр десятичной системы счисления;
е) по 3 участника из двух команд по 5 человек?

36.15. Одиннадцать футболистов строятся перед началом матча. Первым стоит обязательно капитан, вторым — обязательно вратарь, а остальные строятся случайным образом. Сколько существует способов построения?

Упражнения для повторения

36.16. Есть ли среди представленных уравнений пары равносильных уравнений? Назовите их, объясните свой выбор:

а) $x^3 - y^2 + 2y + 1 = 0$, $y = \sqrt{x^3 + 2} + 1$, $x = \sqrt[3]{(y-1)^2 + 2}$;

б) $x|y| = -6$, $|y| = -\dfrac{6}{x}$, $xy + 4 = -2$;

в) $y^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$, $x = \sqrt{y^3 + 2} + 2$, $y = \sqrt[3]{(x-2)^2 - 2}$;

г) $|x|y = 8$, $y = \dfrac{8}{|x|}$, $xy - 5 = 3$.

36.17. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 3y^2 = -8, \\ y + 2x = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y^2 = 70, \\ x + 2y = 5\sqrt{5}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 33, \\ y + 2x = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 4y^2 = 36, \\ 3x - 2y = 4\sqrt{3}. \end{cases}$