Итак, в главе 1

Изучили две новые математические модели: числовая окружность и числовая окружность на координатной плоскости.

Познакомились с понятиями тригонометрических функций числового и углового аргумента.

Изучили новое свойство функций — периодичность.

Научились строить графики функций $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; изучили свойства этих функций.

Выяснили, как, зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(mx)$.

Вопросы

1. Что такое числовая окружность? Чему равна длина числовой окружности, длина её полуокружности, длина её четверти?

2. Каким уравнением задаётся числовая окружность, расположенная в координатной плоскости xOy?

3. Сформулируйте определение косинуса и синуса числа.

4. Сформулируйте определение тангенса и котангенса числа.

5. Запишите основное тригонометрическое тождество.

6. Что такое угол в 1 радиан? Сколько градусов (примерно) составляет угол в 1 радиан?

7. Как градусную меру дуги (центрального угла) перевести в радианную и обратно?

8. Какую функцию называют периодической? Что такое период функции, основной период функции?

9. Чему равен основной период функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$?

10. Чему равен основной период функции: $y = \sin kx$, $y = \cos kx$, $y = \operatorname{tg} kx$, $y = \operatorname{ctg} kx$?

11. Как называют графики функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$? Перечислите свойства этих функций.

12. Как называют графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$? Перечислите свойства этих функций.

13. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$?

14. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$?

Тест

1. Укажите значения t, соответствующие координатам точки $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

а) $\frac{3\pi}{4}$ б) $\frac{15\pi}{4}$ в) $-\frac{\pi}{4}$ г) $-\frac{5\pi}{4}$

2. Найдите значение выражения $\cos(-\pi) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

3. Установите соответствие между радианной и градусной мерами дуги числовой окружности.

А. $\frac{13\pi}{6}$ Б. $\frac{11\pi}{4}$ В. $\frac{5\pi}{2}$

1) $495°$ 2) $390°$ 3) $450°$

4. Зная, что $\cos t = 0{,}96$ и $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, найдите $\sin t$.

5. Расположите числа $\cos 2$, $\cos 5$, $\cos 3$, $\cos 4$ в порядке возрастания:

а) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 2$, $\cos 5$
б) $\cos 5$, $\cos 2$, $\cos 4$, $\cos 3$
в) $\cos 5$, $\cos 4$, $\cos 3$, $\cos 2$
г) $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 5$

6. Решите уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $\pm\frac{5\pi}{6} + \pi n$
б) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
в) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
г) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

7. Найдите период функции $y = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.

8. Укажите формулу, которая задаёт график функции, изображённый на рисунке 100.

а) $y = \sin 2x$ б) $y = \cos\frac{x}{2}$ в) $y = 2\sin x$ г) $y = 1{,}5\sin\frac{x}{2}$

9. Найдите область значений функции $y = 3\cos x + 2$.

10. Решите неравенство $\left(\sqrt{3} - 2\right)\operatorname{tg} x \geqslant 2 - \sqrt{3}$.

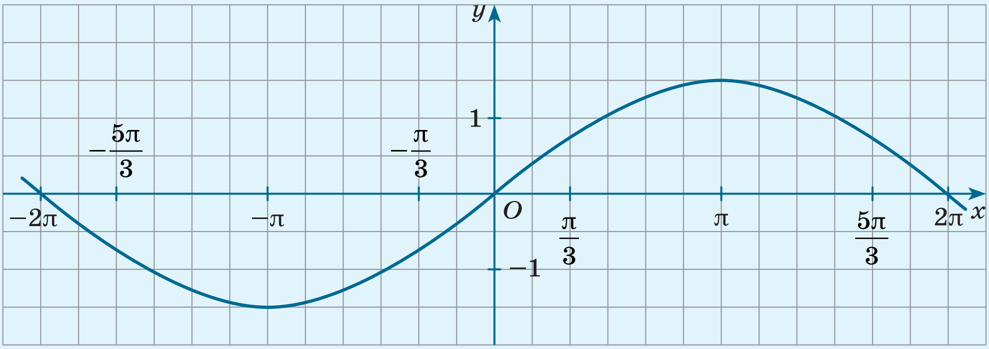

Рис. 100

Дополнительные задачи

В следующих задачах рассмотрены движения минутной и часовой стрелок на часах с круговым циферблатом[1].

1. Сколько полных оборотов сделает минутная стрелка за время:
а) с 12:00 до 13:00;
б) с 13:00 до 15:00;
в) с 17:00 до 24:00;
г) с 19:00 сегодня до 8:00 завтра;
д) с 23:00 сегодня до 12:00 послезавтра;
е) с 17:00 30 декабря до 7:00 2 января?

2. По числу n полных оборотов минутной стрелки и началу a отсчёта времени найдите конец b отсчёта или по концу b найдите начало a отсчёта времени.
а) $a = 12{:}15$, $n = 5$, $b = ?$;
б) $a = 13{:}30$, $n = 10$, $b = ?$;
в) $a = 14{:}45$, $n = 15$, $b = ?$;
г) $b = 8{:}05$, $n = 5$, $a = ?$;
д) $b = 9{:}10$, $n = 25$, $a = ?$;
е) $b = 10{:}15$, $n = 40$, $a = ?$.

3. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за время:
а) с 12:00 до 12:15;
б) с 15:00 до 15:30;
в) с 8:40 до 9:05;
г) с 9:10 до 10:05;
д) с 11:35 до 12:40;
е) с 23:59 до 00:11?

4. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за время:
а) с 12:00 до 13:00;
б) с 14:00 до 19:00;
в) с 15:30 до 23:00;
г) с 17:45 сегодня до 7:00 завтра;
д) с 8:15 сегодня до 6:00 завтра;
е) с 9:20 сегодня до 20:10 послезавтра?

---

[1] Все показания часов относятся к одному и тому же (сегодняшнему) дню, если специально не оговорено противное. Все часы идут правильно, стрелки движутся равномерно, без скачков.

5. Найдите величину угла (в градусах и в радианах) между минутной и часовой стрелками:

а) в 12:00; в) в 14:30; д) в 16:45;
б) в 13:00; г) в 15:30; е) в 19:10.

6. В 12:00 совпадают направления часовой и минутной стрелок. Пусть t — время на часах, когда впервые после 12:00 совпадут направления стрелок.

1) Проверьте, что:
а) $t >$ 13 ч 00 мин; б) $t >$ 13 ч 05 мин; в) $t <$ 13 ч 06 мин.
2) Найдите:
г) t;
д) время второго после 12:00 совпадения;
е) количество совпадений за сутки от 00:00 (включая) до 24:00 (не включая).

7. На часах восемь вечера.

1) Через сколько минут часовая и минутная стрелки совпадут по направлению:
а) в первый раз; б) во второй раз; в) в четвёртый раз?
2) Через сколько минут часовая и минутная стрелки будут противоположны:
г) в первый раз; д) в третий раз; е) в четвёртый раз?

8. Сколько на числовой окружности точек, у которых либо абсцисса, либо ордината равна:

а) 0; в) 0 или −1; д) −0,2 или 0,9;
б) 1; г) 0,5; е) 0,6 или 0,8?

9. На числовой окружности отметьте дуги, для всех точек которых и абсцисса, и ордината:

а) положительны; г) не меньше 0,7;
б) неотрицательны; д) не больше −0,4;
в) больше 0,5; е) больше 0,8.

10. На числовой окружности отметьте дуги, для всех точек которых или абсцисса, или ордината:

а) положительна; г) не меньше 0,7;
б) неотрицательна; д) не больше −0,4;
в) больше 0,5; е) больше 0,8.

Из истории математики

Тригонометрия в истории науки возникла значительно раньше тригонометрических функций в том виде, как сейчас мы их рассматриваем. Появление тригонометрии было обусловлено в первую очередь необходимостью вычислений в астрономии и географии. Движение Солнца и Луны, смена времён года, расчёт морских и наземных путей передвижения, составление календарей, подсчёт точного времени, определение размеров недоступных объектов — вот лишь небольшой перечень конкретных задач, приводящих к накоплению сведений о числовых функциях углов.

Основной интерес представляла пространственная, сферическая тригонометрия, а не более простой случай плоской тригонометрии. Ещё в Древнем Вавилоне (XX—XV вв. до н. э.) сведения о значениях тех или иных функциях угла собирались и хранились в виде клинописных таблиц. Именно с тех пор мы традиционно измеряем углы в градусах, минутах и секундах, т. е. используем шестидесятеричную систему счисления древних вавилонян. Хранение тригонометрических сведений в виде таблиц — ещё одна традиция, идущая с тех времён. Пожалуй, вплоть до эпохи 1970-х гг., до повсеместного использования электронных калькуляторов и компьютерных программ, использование тригонометрических таблиц («таблицы Брадиса») входило в перечень основных учебных навыков выпускников отечественных общеобразовательных школ.

В Древней Греции своеобразным итогом результатов по тригонометрии стали 13 книг «Математической системы» Клавдия Птолемея (первая половина II в. н. э.), которые известны под кратким названием «Альмагест». В ней изложена *геоцентрическая*[1] теория видимых движений планет и звёзд, представлена «тригонометрия хорд» как базовая вычислительная составляющая астрономии, приведены полные тригонометрические таблицы, составленные для углов, меняющихся с шагом в полградуса. Несколько ранее в трудах Гиппарха встречаются аналогичные таблицы для углов, кратных одной двенадцатой доли прямого угла, т. е. 7,5 градуса.

В Древней Индии и на Арабском Востоке версии тригонометрии хорд предлагались в большом числе работ различных учёных: «Пулиса-сиддханта», «Панча-сиддхантике» и «Сиддханта-широмани» в Ин-

[1] *Геоцентрическая* — Земля как центр Вселенной.

дии (V—XII вв.), «Книга о часовом инструменте, называемом солнечными часами», «Книга о науке звёзд», «Канон Масуда», «Собрание правил науки астрономии» в странах ислама (ок. X в.). Индийцы, например, стали регулярно использовать тень, которую отбрасывает вертикальный шест *гномон*, что позже привело их к тангенсам и котангенсам, которые первоначально как раз и назвали «тенями».

Индийские учёные IV—VI вв. н. э. для хорды, стягивающей дугу окружности, использовали термин «джива» (в переводе с санскрита — «тетива лука»). Позже мусульманские астрономы преобразовали его сначала в «джиба», а потом в «джайб» (*впадина*) (не было различения «и» и «й»). Позже, в Европе XII в. н. э. этот арабский термин без прямой связи с окружностями, углами и хордами перевели на латынь буквально, как *впадина* (словом *sinus*). В свою очередь, «косинус» (*cosinus*) — это дополнение, *complement*, синуса. Вообще, арабские математики X—XII вв. н. э. вычисляли синусы и тангенсы углов с поразительной точностью; например, синус половины градуса — верно до восьмого десятичного знака. Использовали они и окружность единичного радиуса, т. е. то, что мы стали называть «числовая окружность».

Отделение тригонометрии от астрономии в виде отдельного раздела науки традиционно связывают с трактатом персидского астронома Насир ад-Дин ат-Туси (1201—1274), жившего и работавшего на территории нынешнего Азербайджана. В его «Трактате о фигуре секущих» (1260 г.) в книге III были введены синусы, косинусы, доказана плоская теорема синусов, а в книге V решены разнообразные задачи сферической тригонометрии. Переводы этого трактата Ат-Туси оказали решающее влияние на развитие математики и, в частности, тригонометрии в средневековой Европе. Он стал базой для первых европейских учебников по тригонометрии, например для «Пяти книг о треугольниках всех видов» (1464 г.) немецкого астронома Иоганна Мюллера (Региомонтана).

Существенное влияние на развитие тригонометрии оказали работы польского астронома Николая Коперника (1473—1543), и в особенности его основной труд «О вращениях небесных сфер», в котором была представлена *гелиоцентрическая* система мира.

Системы плоской и пространственной тригонометрии в 1579 г. изложил Франсуа Виет (1540—1603) во второй части своего «Математического канона», а также в «Восьмой книге ответов на различные математические вопросы» (1593 г.). Отметим, что Виет, как правило, обходился в своём изложении без чертежей, поясняющих геометрическую сторону дела.

В дальнейшем математики XVII—XVIII вв. самым широким способом использовали тригонометрию для решения разнообразных математических и естественно-научных задач. Всё же основным для тригонометрии вкладом явились результаты Леонарда Эйлера (1707—1783), который ввёл и закрепил принятые доныне обозначения тригонометрических функций, расширил область их определения до всей числовой прямой и, более того, до комплексной плоскости. Пожалуй, после работ Эйлера тригонометрия как самостоятельная наука уже полностью сложилась и в дальнейшем использовалась или в учебных целях, или как технический аппарат, область применений и приложений которого оказалась практически необозримой. Всюду, где в естествознании приходится иметь дело с периодическими колебаниями или процессами, появляются и используются тригонометрические функции: от акустики и теории музыки до, скажем, геодезии и компьютерной графики.

В заключение несколько слов о терминологии. Само слово «тригонометрия» получается из двух греческих слов τρίγονο (*треугольник*) и μετρειν (*измерять*). Впрочем, ровно в таком виде его стали использовать с конца XVI в., после появления учебника немецкого богослова Бартоломея Питискуса (1561—1613) с таким названием. Всем привычная константа $\pi \approx 3{,}14159...$ хотя и происходит от греческих περιφερια — *периферия,* окружность, и περίμετρος — *периметр*, вовсе не есть наследие древнегреческой математики. Это обозначение для отношения площади круга к квадрату его диаметра стали использовать примерно с 1706 г. после сочинений английского математика Уильяма Джонса (1675—1749). Это число иррационально, более того, оно *трансцендентно*, т. е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. В частности, отсюда следует невозможность построения циркулем и линейкой квадрата той же площади, что и заданный круг (проблема «квадратуры круга», известная, как минимум, с III в. до н. э.). Трансцендентность π была доказана лишь в 1882 г. (Карл фон Линдеман, 1852—1939).