Глава 1

Тригонометрические функции

§ 1. Что такое числовая окружность

Вам известно, что прямую, на которой заданы начальная точка O, масштаб (единичный отрезок) и положительное направление, называют *числовой прямой*. Любому действительному числу мы можем сопоставить единственную точку числовой прямой, и обратно: любая точка числовой прямой соответствует единственному числу. Например, числу 3 соответствует точка A, числу -2 соответствует точка B (рис. 1), и обратно: точке C соответствует число 5, а точке D — число -4 (рис. 2).

Но в реальной жизни приходится двигаться не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности, например, по беговой дорожке стадиона, стандартная длина которой равна 400 м (это, конечно, не окружность, но, идеализируя ситуацию, как принято в математике, её считают окружностью; более того, в обиходной речи называют даже кругом). Как и в случае с числовой прямой, здесь есть точка отсчёта (она расположена на линии старта), есть масштаб — 1 м, указывается направление движения — обычно против часовой стрелки (положительное направление). Так что вполне можно говорить не просто об окружности, а о *числовой окружности*. В зависимости от заданной дистанции (100 м, 200 м, 400 м, 800 м, 1500 м и т. д.) проводят линию финиша. Иными словами, любому числу соответствует единственная точка окружности (не только положительному числу, но и отрицательному — ведь забеги можно устраивать и

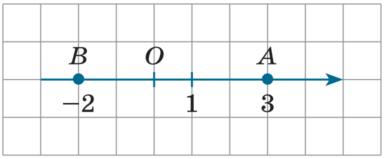

Рис. 1

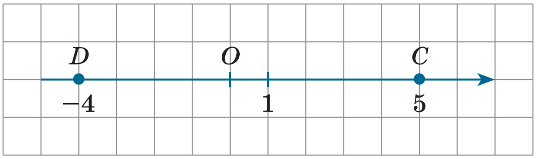

Рис. 2

в отрицательном направлении — в направлении по часовой стрелке). А вот обратное неверно: одна и та же точка окружности вполне может соответствовать разным числам. Например, для забегов на 400 м («один круг»), 800 м («два круга»), 10 000 м («двадцать пять кругов») проводят одну и ту же линию финиша, т. е. числам 400, 800, 10 000 соответствует одна и та же точка числовой окружности.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но мы будем использовать для этой цели окружность, радиус которой принимается за единицу измерения; такую окружность для краткости будем называть *единичной окружностью*. Это будет наша «беговая дорожка», её длина l равна 2π ($l = 2\pi R$; здесь $R = 1$), что составляет примерно 6,28.

На рисунке 3 изображена единичная окружность, проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB *первой четвертью*, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвёртой четвертью*. Длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

Пример 1 В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а дуга CD точками K и P — на три равные части (рис. 4). Чему равна длина дуги:

а) AM, MB; б) CK, KP, PD; в) AK, BP?

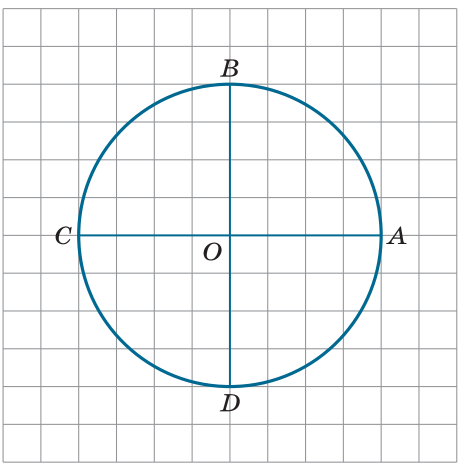

Рис. 3

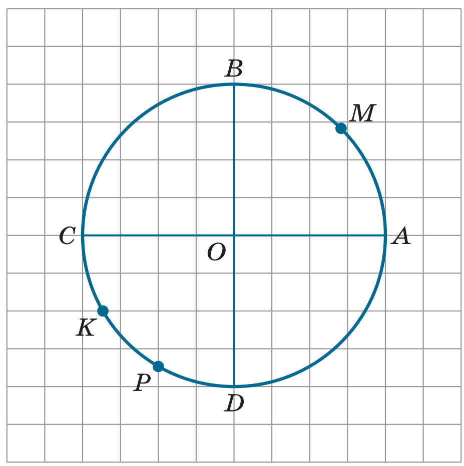

Рис. 4

Решение. Обычно дугу AB обозначают так: $\breve{AB}$, а длину дуги обозначают так: $|AB|$. Чтобы не усложнять записи, мы будем в обоих случаях писать просто AB, а из текста будет ясно, о чём идёт речь — о дуге или о её длине.

а) $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, $AM = MB = \frac{\pi}{4}$.

б) $CD = \frac{\pi}{2}$, значит, $CK = KP = PD = \frac{\pi}{6}$.

в) $AK = AC + CK = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$;

$BP = BC + CP = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Сформулируем определение числовой окружности, которым мы будем пользоваться в нашем курсе. Начальной точкой будем считать точку A — правый конец горизонтального диаметра (см. рис. 3).

Определение. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку единичной окружности (см. рис. 3) по следующему правилу.

1) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.

2) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении *против часовой стрелки* (положительное направление обхода окружности), пройдём по окружности расстояние AM, равное t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

3) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении *по часовой стрелке* (отрицательное направление обхода окружности), пройдём по окружности расстояние AM, равное $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью**.

Пример 2 Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

а) $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 8\pi$;

б) $-\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{7\pi}{4}$.

Решение. а) Точки, соответствующие заданным числам, мы найдём на рисунке 4. Смотрите: числу 0 соответствует точка A, числу $\frac{\pi}{4}$ — точка M — середина первой четверти, числу $\frac{\pi}{2}$ — точка B, числу π — точка C, числу $\frac{3\pi}{2}$ — точка D, числам 2π и 8π соответствует точка A, поскольку 2π — это один полный обход окружности, возвращаемся в начальную точку; 8π — это четыре полных обхода окружности, возвращаемся в начальную точку.

Осталось разобраться с числами $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Числу $\frac{7\pi}{6}$ соответствует точка K, поскольку, как мы видели в примере 1, $AK = \frac{7\pi}{6}$.

$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = AC + CK + KP = AP$; значит, числу $\frac{4\pi}{3}$ соответствует точка P.

б) Все заданные числа — отрицательные, значит, двигаться по окружности, выходя из точки A, будем в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке.

Число $-\frac{\pi}{2}$. Надо выйти из точки A и пройти по часовой стрелке путь длиной $\frac{\pi}{2}$. Но $\frac{\pi}{2}$ — длина четверти окружности, значит, попадаем в точку D.

Число $-\frac{2\pi}{3}$. Надо выйти из точки A и пройти по часовой стрелке путь длиной $\frac{2\pi}{3}$. Но $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$. Значит, после точки D надо ещё пройти путь $\frac{\pi}{6}$ — попадаем в точку P.

Число $-\frac{7\pi}{4}$. Можно рассуждать, например, так: $-\frac{7\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4}$; числу -2π соответствует точка A, значит, надо выйти из точки A

и пройти против часовой стрелки путь длиной $\frac{\pi}{4}$. Попадаем в точку M.

Обратите внимание, что в некоторые из точек, отмеченных на рисунке 4, мы при решении примера попадали не один раз. Например, точка A соответствовала числам 0, 2π, 8π, точка M — числам $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, точка P — числа $\frac{4\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$.

Вообще, справедливо следующее утверждение:

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то точка M соответствует и любому числу вида $t + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число n равно числу полных обходов окружности в ту или иную сторону. Если мы находимся в точке $M(t)$, то, выполнив ещё n полных обходов окружности в ту или иную сторону, мы снова окажемся в точке $M(t)$.

Таким образом, справедливо соотношение

$$M(t) = M(t + 2\pi n),\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Например, на рисунке 4 точка M соответствует числу $\frac{\pi}{4}$, значит, она соответствует любому числу вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; точка C соответствует числу π, значит, она соответствует любому числу вида $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и т. д.

В формуле (1) вместо n можно использовать и другие буквы (обычно латинского алфавита: k, m и т. д.). Более того, в дальнейшем мы, ради краткости, часто будет опускать в формуле (1) указания $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, ..., но, конечно, всегда будем иметь их в виду.

Нам очень пригодятся два макета числовой окружности:

первый макет — каждая из четырёх четвертей числовой окружности разделена на две равные части, и около каждой из имеющихся восьми точек записано её «имя» (рис. 5);

Макет № 1

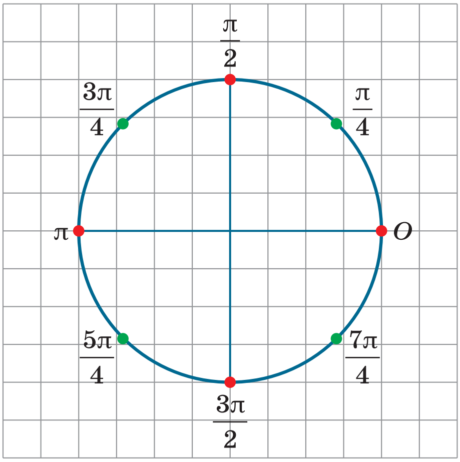

Рис. 5

Макет № 2

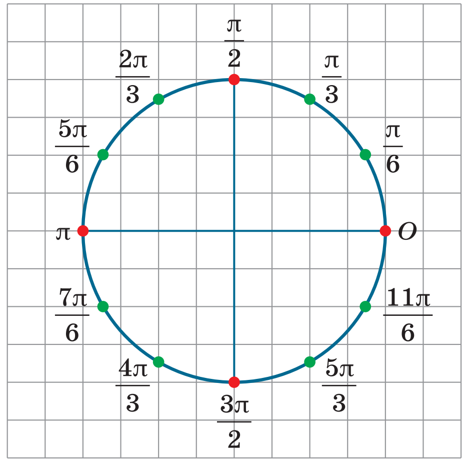

Рис. 6

второй макет — каждая из четырёх четвертей числовой окружности разделена на три равные части, и около каждой из имеющихся двенадцати точек записано её «имя» (рис. 6).

На этих макетах указаны лишь «главные имена» точек — числа, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$, т. е. числа, соответствующие точкам числовой окружности при первом её обходе в положительном направлении. Если же совершить первый обход окружности в отрицательном направлении, то на первом макете имена у точек будут $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}$ и т. д., а на втором макете имена у точек будут $-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}$ и т. д.

Подчеркнём ещё раз, что у каждой точки, отмеченной на первом или втором макете, бесконечно много имён: не только $\frac{\pi}{4}$, но и $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; не только $\frac{2\pi}{3}$, но и $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ и т. д.

Пример 3 Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

а) $\frac{11\pi}{4}, \frac{37\pi}{4}, -\frac{17\pi}{4}$; б) $\frac{37\pi}{6}, -\frac{29\pi}{3}$.

Решение. а) $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. Значит, числу $\frac{11\pi}{4}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{3\pi}{4}$, — середина второй четверти (см. макет № 1).

$\frac{37\pi}{4} = 8\pi + \frac{5\pi}{4}$. Значит, числу $\frac{37\pi}{4}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{4}$, — середина третьей четверти (см. макет № 1).

$-\frac{17\pi}{4} = -6\pi + \frac{7\pi}{4}$. Значит, числу $-\frac{17\pi}{4}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{7\pi}{4}$, — середина четвёртой четверти (см. макет № 1).

б) $\frac{37\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6}$. Значит, числу $\frac{37\pi}{6}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{\pi}{6}$, — точка первой четверти (см. макет № 2).

$-\frac{29\pi}{3} = -10\pi + \frac{\pi}{3}$. Значит, числу $-\frac{29\pi}{3}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{\pi}{3}$, — точка первой четверти (см. макет № 2).

Вы наверняка заметили, что во всех разобранных примерах мы говорили о числах, выраженных некоторыми долями числа π. Ведь если мы делим на равные части окружность, длина которой равна 2π, или её четверть, длина которой равна $\frac{\pi}{2}$, то получаются дуги, длина каждой из которых выражается долями числа π. Но единичную окружность мы рассматриваем как числовую окружность, значит, на ней должно найтись место и числам, не выраженным в долях π, например, числам 1, 2, 5, −3, −2,5 и т. д. В следующем примере мы покажем, как рассуждают в подобных случаях.

Пример 4 Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; б) 15, −7,5.

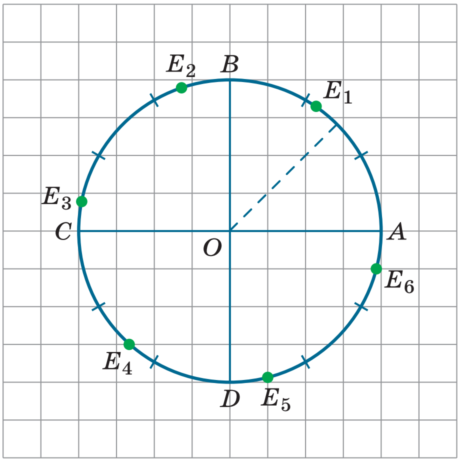

Рис. 7

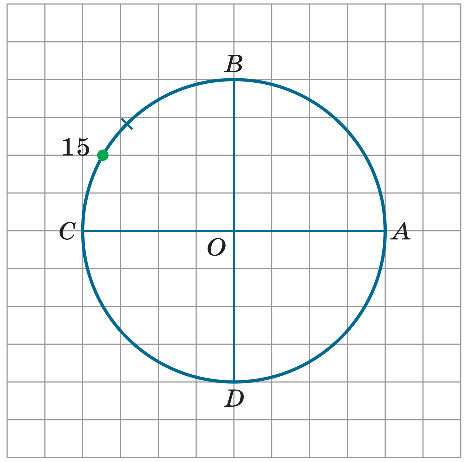

Рис. 8

Решение. а) Сделаем прикидку для числа 1:

$$\pi \approx 3{,}14; \quad \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785; \quad \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047;$$

$$0{,}785 < 1 < 1{,}047; \quad \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}.$$

Значит, точка 1 располагается на числовой окружности в первой четверти между точками $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, поближе к точке $\frac{\pi}{3}$ — это точка E_1 на рисунке 7.

На том же рисунке отмечены точки E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, соответствующие числам 2, 3, 4, 5, 6. Для ориентировки каждая из четвертей окружности разделена (чёрточками) на три равные части.

б) Сделаем прикидку для числа 15:

$$4\pi < 15 < 5\pi; \quad 4\pi \approx 3{,}14 \cdot 4 \approx 12{,}56; \quad 15 = 12{,}56 + 2{,}44;$$

$$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 < 2{,}44 < \pi \approx 3{,}14.$$

Таким образом, точка 15 примерно та же, что точка 2,44, а точка 2,44 располагается во второй четверти между $\frac{\pi}{2}$ и π. От точки $\frac{\pi}{2}$ точка 2,44 удалена на расстояние (по окружности), примерно равное $2{,}44 - 1{,}57 = 0{,}87$, а от точки π — на расстояние, примерно равное $3{,}14 - 2{,}44 = 0{,}7$. Таким образом, точка $2{,}44$ (а значит и точка 15) находится во второй четверти ближе к точке π. На рисунке 8 показано положение точки 15, причём для ориентировки отмечена середина второй четверти.

Осталось разобраться с числом $-7{,}5$. Выходим из точки A, движемся по окружности по часовой стрелке; нам нужно пройти путь длиной $7{,}5$. Пройдём всю окружность — это примерно $6{,}28$, остаётся $1{,}22$. Поскольку длина дуги DA равна $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, то точка M находится в четвёртой четверти и отстоит от точки D примерно на $0{,}35$.

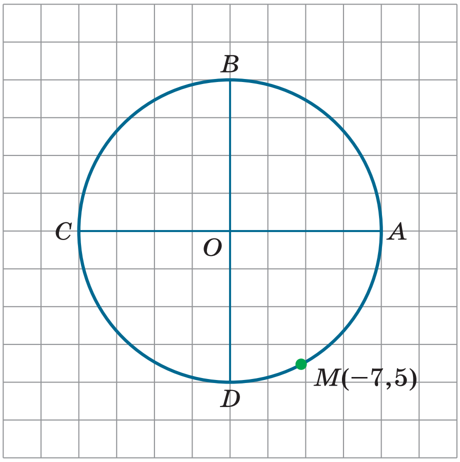

Рис. 9

Упражнения

1.1. а) Первая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от A, а вторая — точкой K пополам. Найдите, чему равны длины дуг AM, AN, AK, BK, MK, CN.
б) Вторая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от B, а третья — на две равные части точкой K. Вычислите длину дуги: BM, AN, MK, BK, MD, CN.

1.2. а) Вторая четверть числовой окружности разделена точкой T в соотношении $2 : 3$, считая от B. Вычислите длину дуги: AT, BT, CT, DT.
б) Четвёртая четверть числовой окружности разделена точкой H в соотношении $5 : 1$, считая от B. Вычислите длину дуги: AH, BH, CH, DH.

Укажите на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу.

1.3. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$.

1.4. а) $-\dfrac{29\pi}{6}$; б) $-\dfrac{27\pi}{4}$; в) $\dfrac{26\pi}{3}$; г) $\dfrac{31\pi}{6}$.

1.5. а) $\dfrac{4\pi}{9}$; в) $-\dfrac{7\pi}{12}$; д) $\dfrac{22\pi}{7}$;

б) $-\dfrac{5\pi}{12}$; г) $\dfrac{4\pi}{7}$; е) $\dfrac{29\pi}{9}$.

ИКТ **1.6.** а) 3; б) 2; в) 5,5; г) −4,5; д) −7; е) 9.

1.7. Опишите взаимное расположение точек, соответствующих числам, заданным на числовой окружности:

а) t и $-t$; в) t и $t + 2\pi$; д) t и $t - 2\pi$;
б) t и $t + \pi$; г) $t + \pi$ и $t - \pi$; е) t и $-t + 2\pi$.

Запишите формулой все числа, которым на числовой окружности соответствует точка P.

1.8. а) $P\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$; б) $P\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$; в) $P\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right)$; г) $P\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

1.9. а) $P\left(\dfrac{19\pi}{9}\right)$; б) $P(3)$; в) $P\left(\dfrac{23\pi}{11}\right)$; г) $P(-2)$.

1.10. Запишите одной формулой все числа, которым на числовой окружности соответствуют данные точки:

а) $N\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ и $M\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

б) $K\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ и $P\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

в) $E_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $E_2\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $E_3\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ и $E_4\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$;

г) $N\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ и $M\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$;

д) $T\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ и $R\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)$;

е) $A(0)$, $B\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$ и $D\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Выясните, какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая данному числу.

1.11. а) $\frac{27\pi}{4}$; б) $\frac{31\pi}{3}$; в) $-\frac{37\pi}{6}$; г) $-\frac{33\pi}{4}$.

ИКТ **1.12.** а) 6; б) 9; в) −18; г) 7; д) −11; е) 25.

Упражнения для повторения

1.13. а) Замените знак * любой возможной цифрой так, чтобы число 584 3*0 нацело делилось: 1) на 18; 2) на 12; 3) на 45; 4) на 30.
б) Замените знак * любой возможной цифрой так, чтобы число 7 526 8*0 нацело делилось: 1) на 12; 2) на 15; 3) на 60; 4) на 36.

1.14. а) В десятиэтажном доме два подъезда. На каждом этаже каждого подъезда 8 квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира под номером 93?
б) В шестнадцатиэтажном доме три подъезда. На каждом этаже каждого подъезда 6 квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира под номером 135?

1.15. Найдите все натуральные значения n, при которых значение данного выражения является натуральным числом.

а) $\frac{7n+4}{n}$; в) $\frac{n^2+5n+2}{n}$; д) $\frac{3n^2+9n+6}{3n}$;

б) $\frac{5n-9}{n}$; г) $\frac{n^2-6n+8}{n}$; е) $\frac{4n^2-8n+16}{4n}$.

§ 2. Числовая окружность на координатной плоскости

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат xOy так, как показано на рисунке 10: центр окружности совмещён с началом координат, а её радиус равен единице измерения. Каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты. Всюду в этом и в следующем параграфах, говоря о числовой окружности, мы будем предполагать, что она расположена в системе координат xOy так, как сказано выше.