А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

АЛГЕБРА и начала математического анализа

Базовый уровень

11 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2020

УДК 37.02:512
ББК 74.262.21
М79

М79 **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс. Методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 95, [1] с. : ил. — ISBN 978-5-9963-5196-1.

В пособии представлено примерное тематическое планирование учебного материала в 11 классе, методические рекомендации по всем главам учебного издания «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа» для 11 класса авторского коллектива под руководством А. Г. Мордковича, а также решение упражнений повышенной сложности.

УДК 37.02:512
ББК 74.262.21

Учебно-методическое издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

Алгебра и начала математического анализа

Базовый уровень

10 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Подписано в печать 29.10.19. Формат 60×84/16. Гарнитура SchoolBookSanPin.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 150. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3
тел. (495)181–53–44, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Приобрести книги издательства **«БИНОМ. Лаборатория знаний»**
можно в магазине по адресу:
Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181–60–77, e-mail: shop@blbz.ru
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются
Коммерческим департаментом издательства:
тел. (495)181–53–44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано в

ISBN 978-5-9963-5196-1

© ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020
© Оформление. ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020
Все права защищены

Предисловие

Настоящее пособие предназначено тем учителям математики, которые в своей практической работе опираются на УМК, созданный авторским коллективом под руководством А. Г. Мордковича:

- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева*. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10, 11 классы. **Учебник** для общеобразовательных организаций. В 2 частях;
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова*. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы. **Примерные рабочие программы;**
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов*. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10, 11 классы. **Методическое пособие для учителя;**
- *Е. Л. Мардахаева*. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс. **Контрольные работы;**
- *М. В. Шуркова*. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс. **Контрольные работы.**

В первом разделе представлено примерное тематическое планирование материала в 11-м классе. Второй раздел содержит методические рекомендации по всем главам учебника «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс». В третьем разделе приведены решения ряда упражнений повышенной сложности.

Примерное тематическое планирование

11 класс

(из расчета 3 ч в неделю, всего 102 ч)

Параграф	Тема	Кол-во часов
	Глава 1. Элементы теории пределов (10 ч)	
1	Предел числовой последовательности	2
2	Арифметические операции над пределами числовых последовательностей	2
3	Предел функции на бесконечности	2
4	Предел функции в точке	2
5	Приращение аргумента. Приращение функции	1
	Контрольная работа № 1	1
	Глава 2. Производная (20 ч)	
6	Определение производной	2
7	Алгоритм вычисления производной	2
8	Дифференцируемые функции	1
9	Уравнение касательной к графику функции	2
10	Арифметические операции над производными	2
	Контрольная работа № 2	1
11	Дифференцирование тригонометрических функций	2
12	Дифференцирование функций вида $y = f(kx + m)$	1
13	Дифференцирование степенных функций	3
14	Дифференцирование показательных и логарифмических функций	3
	Контрольная работа № 3	1
	Глава 3. Исследование функций с помощью производной (16 ч)	
15	Применение производной для исследований функций на монотонность	3
16	Применение производной для исследований функций на экстремумы	3

Окончание таблицы

Пара-граф	Тема	Кол-во часов
17	Применение производной для построения графиков функций	2
18	Применение производной для нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на промежутке	3
19	Задачи на отыскание наименьших и наибольших значений величин	3
	Контрольная работа № 4	2
Глава 4. Определенный интеграл (11 ч)		
20	Что такое первообразная функции	1
21	Правила отыскания первообразных	2
22	Определенный интеграл	3
23	Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур	3
	Контрольная работа № 5	2
Глава 5. Непрерывные случайные величины (10 ч)		
24	Геометрические вероятности	3
25	Нормальное распределение	3
26	Нормальные и биномиальные распределения. Закон больших чисел	4
Глава 6. Уравнения и неравенства (23 ч)		
27	Равносильные и неравносильные уравнения	2
28	Решение уравнений с одной переменной	4
	Контрольная работа № 6	2
29	Решение систем уравнений	4
30	Решение неравенств с одной переменной	4
31	Задачи с параметрами	3
	Контрольная работа № 7	2
32	Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом	2
	Повторение	**12**

Методические рекомендации по работе с учебником «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс»

Глава 1. Элементы теории пределов

Предел, производная, интеграл... Должны эти понятия включаться в программу школьного курса математики или нет, в чем их воспитывающая и развивающая ценность для учеников? Если должны, то в каком объеме и на каком уровне строгости излагать их в школьных учебниках и на уроках алгебры и начал математического анализа? Попытаемся ответить на эти вопросы.

Одна из основных целей математического образования — воспитание умения математически исследовать явления реального мира. Значит, нужно научить школьников составлять математические модели реальных ситуаций, а для этого они должны владеть математическим языком, описывающим указанные модели. Для математического исследования явлений реального мира особо значимыми оказываются понятия предела и производной, так как это — основные понятия того языка, на котором говорит природа, определенный золотой фонд общечеловеческой культуры. Безусловно, выпускник средней школы должен иметь представления о пределе и производной, об их применении для исследования реальных процессов.

Каким должен быть уровень строгости в предъявлении школьнику элементов математического анализа? Прежде всего, что делать в школе с понятием предела?

В школьных учебниках разных лет были разные варианты: от использования в школе формального определения предела до попытки вообще запретить упоминание самого термина «предел». Как всегда, крайние позиции целесообразно отбросить и обсудить проблему с научно-методической и психолого-педагогической точек зрения.

Почему попытка введения в школе строгого определения предела была apriori обречена на провал? Во-первых, надо учесть, что в стандартном «ε–δ определении» того, что число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$

$$((\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x \in D(f)\colon 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon),$$

заложено внутреннее противоречие: на статическом языке (на языке неравенств) описана динамическая ситуация (процесс приближения к предельному значению). В истории математики формирование понятия предела шло трудно, долгие годы это понятие находилось на наглядно-интуитивном уровне и лишь в начале XIX века появилось формальное определение, предложенное О. Коши.

Во-вторых, следует упомянуть об измерении уровня сложности определений математических понятий. Один из способов такого измерения связан, на наш взгляд, с числом кванторов в определении. Например, понятие четности функции — однокванторное: для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$; в определении присутствует только один квантор общности — «для любого». Понятие ограниченности функции сверху — двухкванторное: *существует* число M такое, что *для всех* $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) < M$; в этом определении присутствуют два квантора: квантор существования $\exists$ и квантор общности $\forall$. Однокванторное определение посильно среднему школьнику, двухкванторное (ограниченность, экстремум, наибольшее и наименьшее значения функции, периодичность функции) требует напряжения его умственных сил и вдумчивой, неспешной работы учителя; это, объективно, та планка, выше которой в общеобразовательной школе не прыгнуть. А формальное определение предела — это определение с тремя кванторами, т. е. по нашей условной иерархии определение третьего уровня сложности, не говоря уже о его перегруженности знаками модулей и неравенств. Школьнику в силу его возрастных особенностей и недостаточной математической культуры не по силам трехкванторное определение предела. Значит, в школе следует отказаться от *жесткой модели* (формальное определение), заменив ее *мягкой моделью* — интуитивным представлением о пределе.

В началах математического анализа есть три вида предела: предел числовой последовательности, предел функции на бесконечности и предел функции в точке. На наш взгляд, начинать следует (после разговоров о пределе последовательности, чему посвящены **§ 1** и **2**) именно с предела на бесконечности. Это диктуется дидактическими соображениями: если опираться на такие принципы дидактики, как связь с жизнью, связь с имеющимся опытом, то придется согласиться, что понятие предела в точке не имеет дидактической подоплеки, в то время как с пределом на бесконечности в этом смысле все в порядке. Например, процесс остывания нагретого чайника до комнатной температуры моделируется с помощью предела на бесконечности. Учащимся уже из курса алгебры 8-го класса знакомо понятие горизонтальной асимптоты, а наличие у графика функции горизонтальной асимптоты — это геометрическая модель предела функции на бесконечности.

В **§ 3** упоминаются теоремы об арифметических операциях над пределами, рассматриваются несложные примеры на их вычисление. Но не это главное. Главное, чтобы учащиеся могли геометрически интерпретировать запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ как существование у графика функции $y = f(x)$ горизонтальной асимптоты $y = b$, и, обратно, глядя на график функции, имеющей горизонтальную асимптоту, переходить к аналитической модели (с использованием символа предела) — много внимания этому уделено в упражнениях к данному параграфу. Полезно научить школьников конструировать эскизы графиков функций с заданными свойствами. Скажем, в примере 1, разобранном в учебнике, требуется построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$; $y = f(x)$ — непрерывная функция; $f(0) = 5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$.

Вообще любое сколько-нибудь сложное математическое понятие должно постепенно изучаться в учебном процессе: сначала на наглядно-интуитивном уровне, потом на рабочем (описательном) уровне и только после этого можно выходить на формальный уровень. Так обстоит дело в нашем курсе 7—11-го классов с понятием функции и практически со всеми изучаемыми в школе свойствами функций (особенно двухкванторными). С понятием предела мы в школе на формальный уровень не выходим. Определение предела числовой последовательности дается в **§ 1** сначала на наглядно-интуитивном, а затем на рабочем уровне. Определения же предела функции как на бесконечности (**§ 3**), так и в точке (**§ 4**) остаются на наглядно-интуитивном уровне.

В школе для вычисления $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ достаточно знать три обстоятельства (все они в той или иной степени упомянуты в учебнике).

1. Функции, которые встречаются в школьном курсе математики (рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические), непрерывны в любой точке, в которой они определены. Иными словами, если $f(a)$ существует, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2. Если надо вычислить $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $g(a) = 0$, то в случае, когда $f(a) \neq 0$, пишут $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$; прямая $x = a$ является в этом случае вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

3. Если и $f(a) = 0$, и $g(a) = 0$ (в математическом анализе этот случай называют обычно «неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$»), то, чтобы вычислить $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, нужно выполнить тождественные преобразования выражения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. В простейших случаях неопределенность исчезает в момент сокращения дроби (см. пример 3 в § 4).

В конце § 4 дается представление о первом замечательном пределе $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, который в ряде случаев позволяет, как принято говорить в математике, «раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$» (а в Приложении к **§ 2** мы знакомим учащихся со вторым замечательным пределом $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$).

Весьма существенным в плане продвижения учащихся в освоении математического языка является **§ 5**, где проведена вся подготовительная работа по конструированию основной математической модели — производной. Формулируются понятия приращения аргумента и приращения функции, вводятся обозначения Δx, Δy, $x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$, дается определение непрерывности функции в точке «на языке приращений».

Глава 2. Производная

При изучении производной основное внимание мы уделяем модели $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ее геометрическому и физическому истолкованию.

Ключевое положение в главе 2 занимают параграфы 6 и 7. В **§ 6** рассмотрены две классические задачи — о мгновенной скорости прямолинейного движения и о касательной к графику функции, процесс решения которых приводит к появлению новой (для учащихся) математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Принципиальное методологическое значение имеет вывод, который делает учитель вслед за авторами учебника на основании рассмотрения конкретных задач. Различные задачи из разных областей знания приводят к одной и той же математической модели. А что такое математика? Это наука о математических моделях. Значит, если жизнь выдвигает на повестку дня новую модель, дело математиков специально заняться изучением этой новой модели в отрыве от ее конкретного содержания. Заняться изучением новой модели означает, что нужно: 1) присвоить ей новый термин; 2) придумать для нее новое обозначение; 3) изучить правила оперирования с новой моделью и сферу ее приложения. Для рассматриваемой модели используется термин *производная* и обозначение y', а правила оперирования и сфера приложения модели изучаются в нашем учебнике в главах 2 и 3.

В **§ 7** приведен пятишаговый алгоритм отыскания производной функции $y = f(x)$, которым мы затем неоднократно пользуемся в учебнике. Сделаем два существенных комментария к нему.

1. Первый шаг алгоритма выглядит так: «зафиксировать значение x, найти $f(x)$». Казалось бы, этот шаг не нужен (во многих школьных учебниках его нет), поскольку и в самом задании содержится $f(x)$, и здесь используется та же запись $f(x)$. На самом деле, этот шаг очень важен как с методологической точки зрения (записи $f(x)$ в исходном задании и на первом шаге одинаковы *по форме*, но не *по содержанию*: в исходном задании x — переменная, а на первом шаге алгоритма — постоянная), так и с психолого-педагогической — это этап сосредоточения на задаче, вхождения в процесс решения.

2. Нельзя допускать, чтобы понятия приращения аргумента и приращения функции появились впервые при введении производной, ведь здесь указанные понятия не цель, а средство для усвоения нового понятия (производной). Поэтому мы и ввели указанные термины и «странные» обозначения с треугольником около переменной со «странным» прочтением («дельта икс») в предыдущей главе, чтобы учащиеся успели приобрести хотя бы небольшой опыт нахождения Δx, Δy, $x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$.

Выше мы уже не раз говорили о том, что очень важно научить школьников по графику описывать свойства функции, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной) модели. Наличие в курсе алгебры и начал математического анализа достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным, разнообразным с литературной точки зрения и многоплановым. Ученик должен уметь составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику. Мы в учебниках для 7—10-го классов постоянно приучали школьника видеть по графику область определения функции, ее четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывность, область значений функции, выпуклость. Важно научить учащихся снимать с графика функции и информацию о ее дифференцируемости. Как на глазок определить, дифференцируема ли функция, график которой изображен на конкретном рисунке? Ответ на этот вопрос как раз и дается в **§ 8**. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не параллельную оси ординат, то функция дифференцируема в точке. Если же мы имеем «точку стыка», «точку заострения» или точку, в которой касательная к графику параллельна оси ординат, то в этой точке производная функции не существует, функция недифференцируема.

В **§ 10** разработан технический аппарат для оперирования с новой математической моделью, речь идет о правилах вычисления производной. При этом набор формул дифференцирования на этом этапе довольно узок: всего 7 формул (для функций $y = C$, $y = x$, $kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$). Сделано это сознательно. В большинстве учебников на школьников обрушивают сразу почти все формулы дифференцирования, что, на наш взгляд, нежелательно: за обилием формул они перестают видеть главное на этом этапе обучения — исходную математическую модель. Формулы дифференцирования мы вводим постепенно — в § 11 вычисляются производные тригонометрических алгебраических функций, в § 11 — тригонометрических функций, в § 13 — степенных функций, в § 14 — показательных и логарифмических функций. И даже в § 9, где речь идет об уравнении касательной к графику функции, мы ограничиваемся указанными выше семью формулами — по той же причине: отрабатывается именно уравнение касательной, а не техника дифференцирования.

Из известных правил дифференцирования одно в учебнике отсутствует — правило дифференцирования сложной функции; в § 12 почти «на пальцах» поясняется лишь частный случай правила дифференцирования сложной функции — правило дифференцирования функции вида $y = f(kx + m)$.

Вернемся к **§ 9**, где выводится уравнение касательной к графику функции. Вопреки сложившейся традиции, мы абсциссу точки касания обозначаем не x_0, а a. Это, конечно, не очень существенно, но полезно в более сложных случаях, когда абсцисса точки касания неизвестна и она фактически выступает в роли параметра. В учебнике представлены все основные стандартные сюжеты, связанные с задачами на касательную:

— составление уравнения касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику;

— проведение касательной параллельно заданной прямой;

— отыскание угла, который касательная образует с положительным направлением оси абсцисс;

— составление уравнения касательной к графику функции из точки, не принадлежащей графику.

Глава 3. Исследование функций с помощью производной

§ 15 посвящен исследованию функций с помощью производной. Эта тема — своеобразная лакмусовая бумажка, с помощью которой проверяется методическая культура учителя математики. Ведь здесь речь идет о теоремах, необходимость знания которых по существу и явилась решающей причиной введения элементов математического анализа в школьный курс математики. В то же время их строгое доказательство требует знания многих фактов математического анализа, которые в школе не рассматриваются. Какой путь выбрать учителю: сообщить теоремы без доказательства и без комментариев, ограничиться наглядно-интуитивными представлениями и правдоподобными рассуждениями, попытаться дать строгие доказательства?

В учебниках и учебных пособиях для общеобразовательной школы встречаются различные варианты. Например, такой: без доказательства, но с опорой на графические иллюстрации формулируется теорема Лагранжа, а затем с ее помощью строго доказывается теорема о связи знака производной с характером монотонности функции на промежутке. С нашей точки зрения, это — не лучший вариант: зачем давать геометрическую иллюстрацию теоремы Лагранжа, если можно сразу дать геометрическую иллюстрацию того, что для школы существеннее — связи между знаком производной и характером монотонности функции? Иногда возражают, говоря, что теорема Лагранжа важна сама по себе, ведь недаром ее называют основной теоремой дифференциального исчисления. Это верно, но лишь при условии, что она активно работает (как в вузовском курсе математического анализа). В школе же она используется лишь один раз — в указанном выше случае, где без нее вполне можно обойтись.

Второй вариант, который используется в учебных пособиях: заменяют строгие доказательства правдоподобными рассуждениями, основанными на физическом или геометрическом смысле производной. С нашей точки зрения, это вполне приемлемо, но лишь при условии, что правдоподобные рассуждения не выдаются за доказательства — такая подмена понятий наносит значительный ущерб формированию математической культуры школьника.

Именно второй вариант с указанным дополнительным условием и составляет концептуальную основу **§ 15**. Текст этого параграфа вряд ли понравится ревнителям математической строгости, они объявят изложение материала легковесным. Однако, по нашему мнению, главное в школьных учебниках, чтобы изложение нравилось учителям, было доступно учащимся (и их родителям) и фактологически не противоречило математике как науке. То же относится и к § 16, где речь идет об исследовании функций на экстремум.

В **§ 15** в системе упражнений есть не только традиционные задания (исследовать функцию на монотонность, доказать, что функция возрастает (убывает)), но и задания, связанные с решением уравнений. Еще в основной школе мы познакомили учащихся со следующим утверждением: если одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. В заключительных упражнениях параграфа это утверждение используется в связке с исследованием функций на монотонность.

Что касается исследования функций на экстремум, то подготовительную работу мы провели уже в § 8. В том параграфе мы договорились точку, в которой функция непрерывна, но не дифференцируема, называть критической точкой, а точку, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (т. е. точку x, в которой выполняется равенство $f'(x) = 0$), называть стационарной точкой.

В **§ 17** упоминается общая схема исследования свойств функции и построения ее графика, выработанная в курсе математического анализа (для достаточно сложных случаев, поэтому в школе мы ее во всей полноте не берем). Приведем эту схему.

1. Область определения функции.
2. Исследование функции на периодичность.
3. Исследование функции на четность.
4. Нули функции, точки разрыва, промежутки знакопостоянства.
5. Исследование поведения функции у концов промежутков области определения, отыскание асимптот.
6. Исследование функции на экстремумы и монотонность.
7. Построение графика функции по точкам (с учетом результатов проведенного исследования).

Поясним внутреннюю логику этой схемы. В пунктах 1—4 фактически дается ответ на вопрос, *где* следует строить требуемый график; в пунктах 5 и 6 дается ответ на вопрос, *как* строить график. Если мы знаем, где и как строить график, то остается лишь выполнить само построение (пункт 7).

В **§ 18** речь идет об отыскании наибольших и наименьших значений функций. За годы изучения курса алгебры в школе по нашим учебникам ученики накопили достаточный опыт отыскания наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы решали эту задачу с помощью графика функции. В некоторых случаях могли найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. В более сложных случаях для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции используется производная. Эта мысль высказана в начале параграфа: учащиеся должны понимать, что производная в данном случае — не панацея, а лишь одно из возможных средств для достижения цели.

Наибольшую трудность у учащихся вызывают задачи на оптимизацию, о которых идет речь в **§ 19**. Мы предлагаем решать их по принятой в наших учебниках, начиная с 7-го класса, схеме — в виде трех этапов математического моделирования: составление математической модели, работа с моделью, ответ на вопрос задачи, — к чему школьники, учившиеся по нашим учебникам в 7—9-м классах, привыкли. В учебнике для каждого из этапов даны некоторые рекомендации методического плана. Приведем их здесь и снабдим дополнительными комментариями.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Проанализировав условие задачи, выделите *оптимизируемую величину*, т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить оптимизируемую величину, примите за *независимую переменную* и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите реальные границы изменения независимой переменной (в соответствии с условиями).

3) Исходя из условий, выразите y через x. Математическая модель задачи будет составлена, если вы получите аналитическое выражение функции $y = f(x)$ и укажете область ее определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

4) Для функции $y = f(x)$, $x \in X$, найдите $y_{\text{наим}}$ или $y_{\text{наиб}}$ (в зависимости от того, что требуется в условии).

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

5) Здесь следует получить конкретный ответ на вопрос задачи (используя термины и фабулу, заложенные в условиях), опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Первый шаг плана не такой очевидный, как может показаться на первый взгляд. Задача иногда может быть сформулирована так, что не очень понятно, о какой оптимизируемой величине идет речь (хотя обычно все бывает сразу ясно: найти наибольший объем, найти наибольшую площадь, определить наименьшее время и пр.).

Четвертый шаг плана — это самостоятельная чисто математическая задача внутри исходной задачи с реальным содержанием. На этом шаге исходная реальная ситуация нас не интересует (что типично для второго этапа математического моделирования), мы думаем только об отыскании $y_{\text{наим}}$ или $y_{\text{наиб}}$ для функции, составленной на третьем шаге, на промежутке реальных границ изменения независимой переменной, найденном на втором шаге.

Глава 4. Определенный интеграл

В **§ 20** и **21** традиционным для школы способом вводится понятие первообразной, обосновываются правила и формулы отыскания первообразной. Нетрадиционен лишь один момент: мы даем в § 20 понятие неопределенного интеграла как множества первообразных. Официальной программой это не предусмотрено, но, на наш взгляд, это понятие полезно для общего развития школьников — как некая антитеза понятию определенного интеграла, присутствующего в школьной программе, поясняющая смысл прилагательного «определенный».

В **§ 22** рассмотрены две задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, — о вычислении площади криволинейной трапеции и о перемещении точки, решение которых приводит к одной и той же математической модели. И снова, как при введении понятия производной, важное методологическое значение имеет вывод, который делает учитель на основании рассмотрения конкретных задач. Различные задачи из разных областей знания приводят к одной и той же математической модели вида $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Значит, следует специально заняться изучением этой новой модели, т. е. присвоить ей новый термин (определенный интеграл), придумать для нее новое обозначение $\int\limits_a^b f(x)dx$ и изучить правила оперирования с новой моделью.

При обосновании формулы Ньютона — Лейбница мы в учебнике ограничиваемся ее физическим истолкованием.

Центральное место во всем разделе, связанном с изучением элементов интегрального исчисления, занимает вычисление площадей плоских фигур. Основной фигурой в нашем учебнике считается криволинейная трапеция — фигура, ограниченная в координатной плоскости двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Главное здесь — построение геометрических моделей и снятие соответствующей информации с чертежа, а не вычисление интегралов. Не ради изучения интеграла вычисляются площади, наоборот, интеграл изучается ради нахождения площадей.

Глава 5. Непрерывные случайные величины

Закон (законы) больших чисел — это тема, занимающая в элементарной теории вероятностей одновременно и весьма важное, и весьма деликатное положение.

С одной стороны, исключение из стохастической линии в обучении законов больших чисел (ЗБЧ), по существу, лишает все изложение своего кульминационного момента. Без подведения в итоге к ЗБЧ изучение основ теории вероятностей в заметной степени лишается осмысленности всей затеи. С другой стороны, хоть сколько-нибудь доказательное изложение ЗБЧ (и в большинстве случаев даже просто формулировка) требует серьезного математического аппарата, заведомо превышающего реальные возможности учебного времени в средней школе и реальные возможности самих школьников.

По этой причине при изучении ЗБЧ в средней школе приходится термин «изучение» фактически заменять на некий паллиатив: «знакомство с...», «представление о...», «простейшие формы...», и т. п. Изложение материала при этом меняет свой характер с традиционного учебного на, скорее, презентационный. В силу сложности материала здесь необходимо обеспечить соответствующий уровень постепенной подготовки к введению таких сложных понятий, как нормальное распределение, случайные величины, законы больших чисел.

В учебнике 11-го класса мы придерживаемся принципов построения наших учебников — *постепенного формирова-*

ния понятий и отсутствия тупиковых тем. Материал, в той или иной степени предваряющий знакомство с ЗБЧ, есть в каждом из учебников, начиная с 7-го класса, разумеется, на уровне строгости, соответствующим возрасту и подготовленности учеников:

— о повторениях, частоте, среднем и дисперсии (числовых наборов) идет речь уже в 7-м классе;

— последовательные независимые испытания и повторения испытаний — часть названия одного из параграфов учебника для 8-го класса;

— испытания Бернулли, как продолжение предыдущего сюжета из 8-го класса, рассмотрены в 9-м классе, где также появляются простейшие случайные величины и их математические ожидания;

— изложение в 10-м классе организовано именно так, чтобы естественным образом подойти к описанию явления *статистической устойчивости* и *статистическому определению* вероятности; там же уже приведена и прокомментирована рядом примеров теорема Бернулли: $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|>a\right)\to 0$ при $n\to\infty$; но более серьезное ее обоснование отложено на 11-й класс.

Тем самым, мы выдерживаем методическую линию постепенного формирования и изложения сложных понятий.

Так как хоть сколько-нибудь полное изложение ЗБЧ невозможно без участия нормального (гауссова) распределения, то необходимы некоторые сведения и о непрерывных случайных величинах и распределениях в целом.

Методически наш подход к «непрерывным» объектам в теории вероятностей основан на интуитивно понятных и наглядных геометрических представлениях. Здесь **(§ 24)** мы придерживаемся еще одного из наших общих принципов: *визуальные, наглядно-графические представления должны при обучении математике в определенной степени опережать формально-логическую сторону дела.*

Тема «Геометрические вероятности» очень удачно коррелирует с основным, традиционным учебным материалом по математике и составляет один из наиболее показательных примеров включения (интегрирования) нового учебного материала по стохастике в рамки уже традиционных учебных тем. В системе примеров и упражнений этого параграфа мы активно работаем и с решением неравенств, и с простейшей планиметрией. Вообще, задачи на геометрические вероятности (выбор точки из промежутка, из плоской фигуры и т. п.), скорее всего, образуют наиболее естественный и интуитивно понятный школьнику источник возникновения непрерывных распределений. В целом, изучение геометрических вероятностей позволяет естественным образом перейти сначала к простейшему непрерывному распределению — равномерному, а затем, с опорой на физические представления о распределении масс, перейти уже к общим представлениям о непрерывных распределениях с непостоянной плотностью.

§ 25 «Нормальное распределение» мы начинаем, разумеется, с представлений о непрерывных случайных величинах (с.в.), но вовсе не ставим перед собой цель дать общее, математически корректное, определение, а ограничиваемся ответом на более простой вопрос — *как может быть задана непрерывная с.в.*? Здесь активно работает и помогает материал главы 4 «Первообразная и интеграл». Оказывается, что можно начинать с *функции плотности,* т. е. с неотрицательной функции $y = p(x)$, площадь между графиком которой и осью Ox равна единице, а после этого вычислять вероятность попадания значения с.в. T в отрезок $[a; b]$ по формуле $P(a \leqslant T \leqslant b) = \int\limits_a^b p(x)dx$. Конечно, мы приводим эту формулу как итог объяснения, а начинаем со словесного описания и соответствующей «наглядной агитации» — рисунков, формирующих геометрические представления. Вполне к месту здесь оказывается и связь с задачей о вычислении массы прямолинейного стержня по заданной плотности массы (см. главу 4) $m = \int\limits_a^b \rho(x)dx$.

В § 25 после примера 1, в котором равномерное распределение из предыдущего § 24 повторяется в этих новых терминах, мы переходим к основному, *стандартному нормаль-*

ному распределению. «Страшную» формулу $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ для гауссовой функции мы приводим, но при объяснениях, разумеется, ограничиваемся наглядной моделью. А именно, гауссовой кривой — графиком гауссовой функции. Полезна тут и физическая модель: единичную массу невозможно одинаково равномерно «размазать» по всей числовой прямой, на бесконечности плотность должна убывать к нулю. И гауссова кривая — один из самых ярких (и важных в приложениях) примеров такого распределения. Значимость стандартного нормального распределения приходится обосновывать на уровне презентаций, перечисляя несколько конкретных примеров распределения реальных данных. Эти примеры подобраны так, чтобы ясной стала необходимость рассмотрения не только *стандартного*, но и *общего* нормального распределения с плотностью $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$; a и $\sigma>0$ — константы распределения.

Гауссова функция и гауссова кривая — вещи интересные и красивые, но в конкретных приложениях важны не они, а нужна *функция Лапласа* $y=\Phi(x)$ — та первообразная гауссовой функции, для которой $\Phi(0)=0$. Конечно, мы определяем функцию Лапласа не формулами, а геометрически через площади криволинейных трапеций. Тождество $\Phi'(x)=\varphi(x)$, $x\in\boldsymbol{R}$, дается лишь как замечательное свойство, полезное в дальнейшем.

Пример 2 показывает, как по таблице значений функции Лапласа вычислять приближенное значение вероятности $P(c\leqslant S\leqslant d)=\Phi(d)-\Phi(c)$ для случайной величины S со стандартным нормальным распределением $N(0;\,1)$. А пример 3 делает то же, но для случайной величины T с нормальным распределением $N(4;\,0{,}5)$. Если говорить о практических умениях и навыках, то, несомненно, основным является именно использование таблиц значений функции Лапласа.

Конечно, в любом более-менее полном электронном редакторе по статистике и теории вероятностей эти таблицы уже «вшиты» в программные оболочки. Формально, можно пользоваться и ими, но дискуссия о том, чем удобнее пользоваться — напечатанной таблицей или же электронной таблицей в гаджете, не должна заслонять основного, а именно, самого наличия и значимости этих таблиц.

В последнем параграфе главы — **§ 26** «Нормальные и биномиальные распределения. Законы больших чисел» — с одной стороны, продолжается материал предшествующего параграфа о нормальных распределениях, а с другой стороны, в определенной степени завершается изучение линии, связанной с испытаниями Бернулли, которая присутствует в учебниках 8—10-го классов.

Сначала идет повторение уже известных фактов: формула (не теорема!) Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, биномиальное распределение, пример 1 (стрельба биатлониста на рубежах), практически цитирующий учебник 10-го класса. Формула Бернулли хороша тем, что она абсолютно точна, но вот при больших n точные вычисления по ней невозможны: необходимы приближенные вычисления. И тут выручает функция Лапласа! Правило

для чисел $a < b$ вероятность $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$ того, что количество k «успехов» в n испытаниях Бернулли не меньше a и не больше b, вычисляют по формуле

$$P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

показывает, как именно эта функция помогает при исследовании биномиального распределения. Пример 2 о числе людей, поддерживающих политика, демонстрирует, как практически применяется это правило.

Пример 3 похож на пример 2, но в нем речь идет о предыдущей вероятности в случае, когда $a = b$. Формальное применение указанного правила приводит к следующему: в правой части — ноль, а в левой части, пусть и небольшая, но ненулевая вероятность. Для корректного нахождения вероятности $P_n(k = d)$ следует использовать поправки на 0,5 «вправо — влево» от целого числа d:

$$P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Отметим, что при систематическом (вузовском) изучении теории вероятностей вероятности $P_n(k = d)$ обычно вычисляют по таблицам гауссовой функции $y = \varphi(x)$. Но мы, для простоты изложения, минимизировали число разных таблиц, не разделяя случаи так называемых «локальной» и «интегральной» теорем Муавра — Лапласа.

Центральный факт всей стохастической линии, закон больших чисел (в форме Бернулли), мы обосновываем также с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant t\right) \approx 2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}\right).$$

При фиксированной вероятности p «успеха» и фиксированной погрешности t приближения $\frac{k}{n} \approx p$ правая часть $2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}\right)$ довольно стремительно приближается к 1 с ростом n. Тем самым при достаточно большом числе n повторений в испытаниях Бернулли становится практически несомненным совпадение частоты $\frac{k}{n}$ наступления «успеха» и вероятности p «успеха» в отдельном испытании Бернулли. Это и есть простейшая форма ЗБЧ.

В целом, базовой компетенцией в этой теме, по нашему мнению, является именно уверенное владение техникой использования функции Ф в конкретных ситуациях, а вовсе не сложные доказательства и абсолютно строгие определения. Именно на уверенное использование таблиц функции Лапласа и нацелено большинство упражнений.

На странице, завершающей § 26, кратко описано, как ЗБЧ может выглядеть для случайных величин более общего, нежели число «успехов», типа. Включение этого материала в курс математики 11-го класса средней школы, на наш взгляд, не вызывает слишком оптимистических ожиданий: все-таки выпускникам предстоят итоговые экзамены и это явно не лучшее время для детального изучения тонких вероятностных вещей. Наше изложение здесь носит характер справки. Вполне возможно, что включение этого материала в ПООП (примерная общая образовательная программа) старшей школы было обусловлено и патриотическими моментами: в истории математики основной вклад в общие формы ЗБЧ сделан Пафнутием Львовичем Чебышёвым.

Глава 6. Уравнения и неравенства

Завершая изучение курса алгебры в школе, очень полезно посмотреть на него с самых общих позиций. Глава 6 как раз на это и нацелена. Она дает возможность повторить и переосмыслить основные идеи и методы, которые применялись на протяжении пяти лет изучения курса. Это очень важно, поскольку за обилием мелких приемов школьники рискуют не увидеть главного.

В **§ 27** речь идет о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие — нет; когда надо делать проверку найденных корней и как ее делать. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры, начиная с 8-го класса, так что определенный опыт учащимися накоплен. Стратегическая линия решения уравнения состоит в следующем: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем (1), но равносильное ему; уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), но равносильное ему и т. д. В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни, объявляя их одновременно корнями заданного уравнения.

Но, к сожалению, указанная стратегическая линия далеко не всегда реализуема, часто мы вынуждены осуществлять такие преобразования уравнения, которые приводят к уравнению-следствию (т. е. все искомые корни сохранились, но могли добавиться новые — посторонние). Тогда приходится все найденные корни последнего уравнения цепочки проверять подстановкой в исходное уравнение, отсеивая посторонние корни.

Принципиальная схема решения уравнения состоит из трех этапов.

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если проведенный анализ показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение (или каким-либо иным способом).

Реализация этого плана связана с четырьмя вопросами: как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием; какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие; если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена с громоздкими вычислениями; в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

В § 27 приведены шесть теорем о равносильности уравнений, которые изучались в курсе алгебры, начиная с 8-го класса. Первые три теоремы гарантируют равносильность преобразований без всяких дополнительных условий, а три последние теоремы «работают» лишь при определенных условиях — их использование на практике сопряжено с необходимостью осуществления проверки. Если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировках теорем, то возможно появление посторонних корней.

После рассмотрения ряда примеров делается важный вывод: проверка всех найденных корней обязательна, если:

1) произошло расширение области определения уравнения (за счет освобождения в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину; за счет освобождения от знаков корней четной степени; за счет освобождения от знаков логарифмов);

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (имеющее смысл всюду в области определения уравнения).

В **§ 28** речь идет об общих идеях, на которых основано решение уравнений, о наиболее общих методах, используемых при решении уравнений любых видов. Выделены четыре метода:

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.
2. Метод разложения на множители.
3. Метод введения новой переменной.
4. Функционально-графический метод.

Все они проиллюстрированы достаточно большим числом примеров. Представлена большая подборка упражнений на эту тему, причем мы делаем упор на отработку общих идей и методов, а не на отработку навыков решения конкретных видов уравнений. Поэтому в упражнениях даны и рациональные, и иррациональные, и показательные, и логарифмические, и тригонометрические уравнения.

В **§ 29** расширяются представления учащихся о решении систем уравнений: рассматриваются ранее не встречавшиеся классы систем уравнений (например, иррациональных, тригонометрических), системы уравнений с тремя переменными.

В **§ 30** речь идет о решении неравенств с одной переменной и прежде всего о принципиальных вопросах, связанных с решением неравенств: что такое равносильные неравенства, какие преобразования неравенств являются равносильными, а какие нет? В начале параграфа напоминаются понятия частного и общего решения неравенства с одной переменной, равносильности неравенств, затем — системы неравенств, совокупности неравенств. Принципиальное отличие неравенств от уравнений состоит в следующем: при решении уравнений мы не очень опасаемся того, что в результате некоторых преобразований получим уравнение-следствие, поскольку посторонние корни можно отсеять с помощью проверки. В неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество, доводить дело до проверки бессмысленно. Поэтому в неравенствах стараются выполнять только равносильные преобразования. Они описаны в шести теоремах, приведенных в § 30, и в определенном смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений, которые обсуждались в § 27.

Основная «техническая» идея решения большинства неравенств (неравенств с модулями, логарифмических, иррациональных) состоит в следующем: неравенство преобразуют в равносильную ему систему или в совокупность систем рациональных неравенств. Совокупность систем — довольно сложная конструкция, требующая неспешного и детального рассмотрения, как это сделано, например, в учебнике при решении логарифмического неравенства $\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$, а также при обсуждении идеи решения иррациональных неравенств вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ($\sqrt{f(x)} > g(x)$.

В **§ 31** речь идет о решении уравнений и неравенств с параметрами. Мы не ставили своей целью в учебнике для общеобразовательной школы построить теорию или основы теории решения уравнений и неравенств с параметрами. Решению уравнений и неравенств с параметрами посвящена масса учебно-методической литературы. Мы свою задачу видели в следующем: завершая изучение курса алгебры в школе, дать учащимся некоторое представление о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами. Для этого рассмотрен ряд примеров, но на уровень теоретических обобщений мы в учебнике сознательно не выходим и ограничиваемся примерами, решение которых базируются на использовании основных функций, встречающихся в средней школе: линейной (пример 1), квадратичной (примеры 2 и 3), дробно-линейной (пример 4), кубической (примеры 5 и 6). Обратим специальное внимание на выбранный метод решения квадратных уравнений и неравенств с параметром. Это так называемый метод «плавающей параболы» — пожалуй, наиболее геометрически наглядный способ исследования таких уравнений и неравенств. В заметном числе случаев он минимизирует количество алгебраических преобразований, операций с равносильными системами и совокупностями и т. п.

Завершает это главу **§ 32** с несколько неожиданным названием «Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом». Он включен в учебник 11-го класса по ряду причин.

Во-первых, понятие среднего арифметического — одно из (весьма небольшого) числа понятий, которое одновременно:

— важно в традиционном курсе школьной математики;

— является базовым в новой стохастической линии преподавания математики;

— является важнейшим во многих реальных приложениях и практико-ориентированных задачах финансового и экономического звучания.

К этому можно добавить и существенность среднего арифметического (и других средних) в целом, в математике как науке.

Во-вторых, быть может по уже перечисленным причинам, задачи о среднем арифметическом, начиная с 2010 г., ежегодно включаются в контрольно-измерительные материалы Единого государственного экзамена, причем в самые последние задания КИМ (задание С6 и более позднее задание № 19). Тем самым, в этом параграфе уже идет речь о прямой подготовке выпускников к итоговым экзаменам.

В-третьих, подходы к их решению, которые мы предлагаем, подтверждают тот факт, что грамотное составление математической модели текстовой задачи и адекватное исследование этой модели традиционными способами (уравнения, неравенства, функции) вполне успешно позволяют справиться с возникающими трудностями. Тем самым, мы несколько развенчиваем миф о том, что задания на среднее арифметическое из КИМ ЕГЭ являются одними из самых сложных и требуют какой-то специальной подготовки: обычные методы исследования функций, решения уравнений и неравенств вполне достаточны для решения этих задач.

Решение некоторых упражнений

Глава 1

3.8. б) Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами: $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$, функция непрерывна на промежутках $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$, $f(0) = -3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Решение. У графика функции есть две горизонтальные асимптоты: $y = 3$ при $x \to +\infty$ и $y = 0$ при $x \to -\infty$; кроме того, график проходит через точку $(0;\ -3)$. При $x = 1$ функция претерпевает разрыв, это можно охарактеризовать с помощью вертикальной асимптоты $x = 1$. Возможный эскиз графика представлен на рисунке 1.

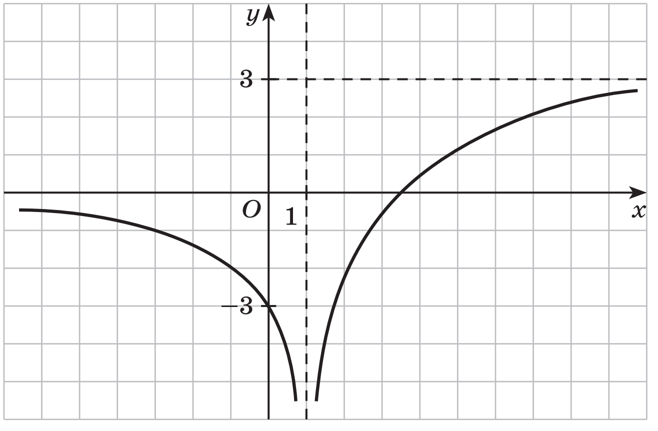


Рис. 1

3.13. е) Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3^{x+2}+2}{3^{x-1}} + \dfrac{x-2}{x+1}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{3^{x+2}+2}{3^{x-1}} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{9\cdot 3^x+2}{\frac{1}{3}\cdot 3^x} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{27\cdot 3^x+6}{3^x} + \frac{x-2}{x+1} =$$

$$= 27 + \frac{6}{3^x} + \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Учтем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6}{3^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Остается использовать теорему об арифметических операциях над пределами:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(27 + \frac{6}{3^x} + \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 27 + 0 + \frac{1 - 0}{1 + 0} = 28.$$

Ответ: 28.

4.9. б) Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей указанными свойствами: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, функция непрерывна на промежутках $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$,

$$f(0) = 2,\ \lim_{x \to -1} f(x) = 0,\ f(-1) = -2,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 3,\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Решение. У графика функции есть две горизонтальные асимптоты: $y = 3$ при $x \to -\infty$ и $y = 0$ при $x \to +\infty$; кроме того, график проходит через точку $(0; 2)$. Далее, поскольку $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$, но $f(0) = -2$, точку $(-1; 0)$ придется сделать выколотой и добавить изолированную точку $(-1; -2)$. Возможный эскиз графика представлен на рисунке 2.

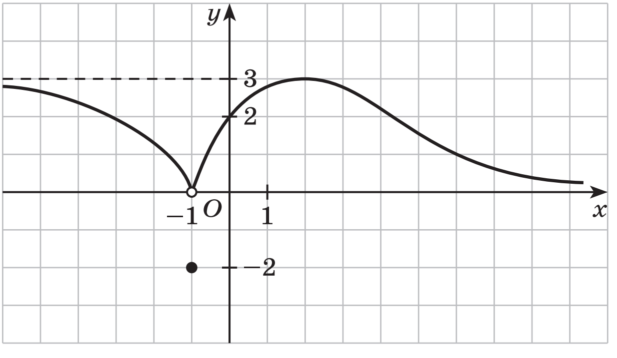


Рис. 2

4.16. б) Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$.

Решение. При $x=2$ и числитель, и знаменатель дроби $\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$ обращаются в нуль, это, как принято говорить в математике, неопределенность вида 0 на 0. Чтобы избавиться от этой неопределенности, домножим и числитель, и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)=8.$$

Ответ: 8.

4.19. е) Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2\cos 2x}{\sin 3x\sin 4x}$.

Решение. Здесь также имеем неопределенность вида 0 на 0, раскрыть которую удастся с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cos 2x}{\sin 3x\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{1}{4}\cos 2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}\cos 2x\right)=1\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

5.14. б) Решите уравнение $\cos x\sqrt{4x-3-x^2}=0$.

Решение. Здесь либо $\cos x=0$ при условии, что $4x-3-x^2\geqslant 0$, т. е. $1\leqslant x\leqslant 3$, либо $\sqrt{4x-3-x^2}=0$. Если $1\leqslant x\leqslant 3$, то $\cos x=0$ только при $x=\frac{\pi}{2}$. А из уравнения $\sqrt{4x-3-x^2}=0$ находим 2 корня: 1 и 3.

Ответ: 1, 3, $\frac{\pi}{2}$.

Дополнительные задачи

5. В последовательности $z_n = \dfrac{an+3}{(2+a)n-3}$, $n \in \boldsymbol{N}$, значение коэффициента a наудачу выбирают из чисел 1, 2, ..., 10. Найдите вероятность того, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$:

а) положителен;
б) больше 1;
в) равен 0,5;
г) больше 0,5;
д) больше 0,7;
е) меньше 0,8.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{an+3}{(2+a)n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+\dfrac{3}{n}}{2+a-\dfrac{3}{n}} = \frac{a}{2+a}.$$

Значит, ответы в пунктах «а»—«е» сводятся к решению соответствующего неравенства (уравнения) относительно а $\in \{1;\ 2;\ ...;\ 10\}$. Их можно решать алгебраически в общем виде, а можно графически, строя соответствующую гиперболу. Но в данном случае можно поступать «ручным», таблично-арифметическим, способом.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{a}{2+a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{5}{6}$

а) Вероятность равна 1: во всех десяти случаях $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{a}{2+a}$ положителен.

б) Вероятность равна 0: ни в одном из всех десяти случаев предел не превышает 1.

в) Вероятность равна 0,1: только в одном из десяти случаев ($a = 2$) предел равен 0,5.

г) Вероятность равна 0,8: подходят 8 из 10 случаев ($a = 2$, 3, ..., 10).

д) Вероятность равна 0,6: так как $\dfrac{2}{3} < \dfrac{7}{10} < \dfrac{5}{7}$, то подходят 6 из 10 случаев ($a = 5$, 6, ..., 10).

е) Вероятность равна 0,7: так как $\frac{7}{9} < \frac{8}{10}$, то подходят 7 из 10 случаев ($a = 1, 2, ..., 7$).

Кстати, по таблице легко построить эскиз графика и увидеть все на «картинке».

7. В бесконечной геометрической прогрессии первый член наудачу выбирают из чисел 1, 2, 3, 4, 5, а знаменатель — из чисел 0,5 и 0,9. Найдите вероятность события:

а) второй член прогрессии меньше 5;

б) второй член прогрессии меньше 0,5;

в) третий член прогрессии равен 1;

г) третий член прогрессии меньше 3;

д) сумма прогрессии равна 10;

е) сумма прогрессии больше 20.

Решение. Выбор первого члена b имеет 5 исходов, выбор знаменателя q имеет 2 исхода. По правилу умножения всего имеется $N = 5 \cdot 2 = 10$ исходов (элементарных событий).

а) Событие «второй член прогрессии меньше 5» достоверно, так как наибольшее значение второго члена $b_2 = bq$ прогрессии равно $5 \cdot 0{,}9$, что меньше 5. Ответ: 1.

б) Событие «второй член прогрессии меньше 0,5» невозможно, так как наименьшее значение второго члена $b_2 = bq$ прогрессии равно $1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$. Ответ: 0.

в) Событие «третий член прогрессии равен 1» возможно для данных b и q только в одном случае: $b_3 = bq^2 = 1 \Leftrightarrow q = 0{,}5,\ b = 4$. Ответ: 0,1.

г) Так как $q^2 < 1$, то неравенство $bq^2 < 3$ верно при $b = 1$, 2, 3 и любых q. Оно верно и при $b = 4$, $q = 0{,}5$ (см. пункт «в»), и при $b = 5$, $q = 0{,}5$: $bq^2 = 1{,}25 < 3$. Но при $b = 4$, $q = 0{,}9$ оно уже неверно: $bq^2 = 4 \cdot 0{,}81 > 3$. Тем более, оно неверно при $b = 5$, $q = 0{,}9$. Ответ: 0,8.

д) Пусть $S = 10$, $\frac{b}{1-q} = 10$. Тогда либо $b = 10(1 - 0{,}5) = 5$, либо $b = 10(1 - 0{,}9) = 1$. Всего 2 случая из 10 возможных. Ответ: 0,2.

е) Как и в пункте «д», либо $b > 20(1 - 0{,}5) = 10$, что невозможно, либо $b > 20(1 - 0{,}9) = 2$. Всего 3 случая из 10 возможных: $b = 3, 4, 5$, $q = 0{,}9$. Ответ: 0,3.

8. Вычислите пределы функций при $x \to \infty$:

а) $\dfrac{(2x+1)^3-8x^3}{x^2}$;

б) $\dfrac{24x}{(x+4)^3-(x^3+12x^2)}$;

в) $\dfrac{(x+3)^3-x(x+1)^2}{x^2}$;

г) $\dfrac{x^2}{(x+2)^3-x^2(x+1)}$;

д) $\dfrac{x^5-(x+3)^5}{(x-3)^4}$;

е) $\dfrac{x^7+(1-x)^7}{(x+1)^6}$.

Решение. Похожие задачи разбирались в § 2 и 3, но там все в итоге сводилось к отношению многочленов первого или второго порядка. При решении этой задачи уместно использовать общий факт: «Предел на бесконечности отношения двух многочленов одинаковой степени равен отношению их старших коэффициентов». По существу, это утверждение доказано на конкретном примере перед этой задачей и вряд ли стоит проводить его доказательство в полной общности.

а)

$$\frac{(2x+1)^3-8x^3}{x^2}=\frac{(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 1+ax+b-8x^3}{x^2}=$$
$$=\frac{12x^2+ax+b}{x^2}.$$

Ответ: 12.

б)

$$\frac{24x}{(x+4)^3-(x^3+12x^2)}=\frac{24x}{x^3+12x^2+48x+c-x^3-12x^2}=$$
$$=\frac{24x}{48x+c}.$$

Ответ: 0,5.

в)

$$\frac{(x+3)^3-x(x+1)^2}{x^2}=\frac{x^3+9x^2+ax+b-x^3-2x^2-cx}{x^2}=$$
$$=\frac{7x^2+(a-c)x+b}{x^2}.$$

Ответ: 7.

г)

$$\frac{x^2}{(x+2)^3-x^2(x+1)}=\frac{x^2}{x^3+6x^2+ax+b-x^3-x^2}=\frac{x^2}{5x^2+ax+b}.$$

Ответ: 0,2.

д) При раскрытии скобок по биному Ньютона в числителе дроби $\dfrac{x^5-(x+3)^5}{(x-3)^4}$ слагаемые x^5 и $-x^5$ взаимно уничтожатся, а коэффициент при x^4 будет равен $-C_5^1\cdot 3^1=-15$. В знаменателе коэффициент при x^4, очевидно, равен 1. Ответ: -15.

е) $\dfrac{x^7+(1-x)^7}{(x+1)^6}$ — это отношение многочленов 6-й степени, ведь x^7 после раскрытия скобок сократится. Коэффициент при x^6 в знаменателе равен 1, а в числителе $C_7^6\cdot 1^1=7$. Ответ: 7.

Глава 2

6.25. а) При каких значениях параметра p уравнение $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}=0$ на промежутке $[0; p]$ имеет три корня?

б) При каких значениях параметра p уравнение $\dfrac{\cos 2x}{1+\sin x}=0$ на промежутке $[0; p]$ имеет четыре корня?

Решение. а) Из уравнения $\sin 2x=0$ находим $x=\dfrac{\pi n}{2}$. Но должно выполняться условие $\cos x\neq 1$, т. е. $x\neq 2\pi k$. Таким образом, из четырех точек числовой окружности, которые соответствуют соотношению $x=\frac{\pi n}{2}$, следует оставить три точки: оба конца вертикального диаметра и левый конец горизонтального диаметра. Три корня, которые должны принадлежать отрезку $[0; p]$, — это числа $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$; отсюда следует, что $p \geqslant \frac{3\pi}{2}$. Следующий корень, а им является $\frac{5\pi}{2}$, уже не должен принадлежать отрезку $[0; p]$, а это значит, что $p < \frac{5\pi}{2}$. Итак, $\frac{3\pi}{2} \leqslant p < \frac{5\pi}{2}$.

б) Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; этому соотношению соответствуют 4 точки числовой окружности — середины четвертей. Кроме того, соотношение $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ удовлетворяет условию $\sin x \neq -1$.

Четыре корня, которые должны принадлежать отрезку $[0; p]$, — это числа $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; отсюда следует, что $p \geqslant \frac{7\pi}{4}$. Следующий корень, а им является $\frac{9\pi}{4}$, уже не должен принадлежать отрезку $[0; p]$, а это значит, что $p < \frac{9\pi}{4}$. Итак, $\frac{7\pi}{4} \leqslant p < \frac{9\pi}{4}$.

9.13. г) Из точки $A(0; -16)$ проведены две касательные к графику функции $y = x^2$. Найдите угол между касательными.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ выглядит так: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. У нас $f(x) = x^2$, $f(a) = a^2$, $f'(x) = 2x$, $f'(a) = 2a$. Значит, уравнение касательной таково: $y = a^2 + 2a(x - a)$, т. е. $y = 2ax - a^2$. По условию касательная должна проходить через точку $A(0; -16)$; подставив в уравнение $y = 2ax - a^2$ значения $x = 0$, $y = -16$, получим $a = \pm 4$. Таким образом, мы составили уравнения интересующих нас касательных: $y = 8x - 16$, $y = -8x - 16$. Нам нужно найти угол γ между этими двумя прямыми (см. схематичный рисунок 3).

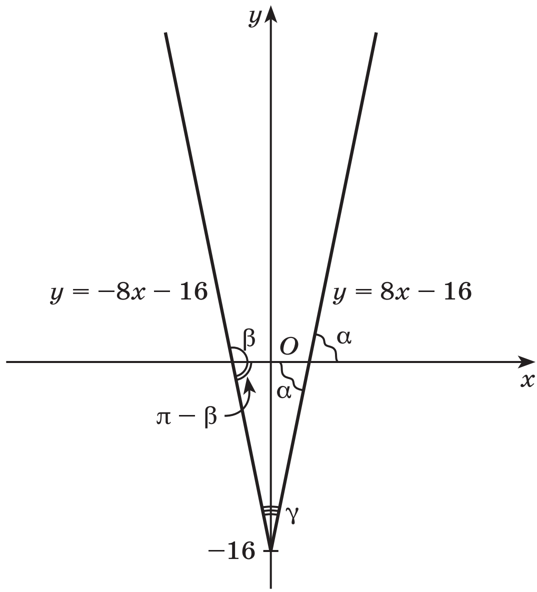


Рис. 3

Имеем: $\gamma = \pi - \alpha - (\pi - \beta) = \beta - \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = 8$, $\operatorname{tg}\beta = -8$. Значит,

$$\alpha = \operatorname{arctg} 8,\ \beta = \operatorname{arctg}(-8) + \pi = \pi - \operatorname{arctg} 8;$$
$$\beta - \alpha = \pi - 2\operatorname{arctg} 8.$$

Ответ: $\pi - 2\operatorname{arctg} 8$.

9.14. б) Найдите значение параметра p, при котором прямая $y = 0{,}5x + p$ касается графика функции $y = \sqrt{x}$.

Решение. Имеем: $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен 0,5, получаем, что $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0{,}5$, $x = 1$, $y = \sqrt{1} = 1$. Значит, прямая $y = 0{,}5x + p$ проходит через точку (1; 1), откуда следует, что $p = 0{,}5$.

Ответ: при $p = 0{,}5$.

Аналогично решаются номера **9.15** и **10.25**.

9.18. Решите уравнение:

а) $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x = 5$; б) $\sqrt{1 - \sin 4x} = \sqrt{6}\cos 2x$.

Решение. а) $\sin 2x$ можно выразить через $\operatorname{tg} x$:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\operatorname{tg} x\cos^2 x = \frac{2\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в виде $\dfrac{4\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + 3\operatorname{tg} x = 5$. Положив $y = \operatorname{tg} x$, получим:

$$\frac{4y}{1+y^2} + 3y = 5; \quad 3y^3 - 5y^2 + 7y - 5 = 0.$$

Один корень полученного кубического уравнения достаточно очевиден: $y = 1$. Заметив это, выполним следующие преобразования:

$$3y^3 - 5y^2 + 7y - 5 = (3y^3 - 3y^2) - (2y^2 - 2y) + (5y - 5) =$$
$$= (y - 1)(3y^2 - 2y + 5).$$

Итак, уравнение $3y^3 - 5y^2 + 7y - 5 = 0$ можно переписать в виде $(y - 1)(3y^2 - 2y + 5) = 0$, откуда следует, что либо $y = 1$, либо $3y^2 - 2y + 5 = 0$. Последнее уравнение корней не имеет.

Далее, $y = 1$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$.

б) Корни уравнения $\sqrt{1-\sin 4x} = \sqrt{6}\cos 2x$ должны удовлетворять условию $\cos 2x \geqslant 0$. При этом условии обе части уравнения можно возвести в квадрат: $1 - \sin 4x = 6\cos^2 2x$. Далее:

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x = 6\cos^2 2x;$$
$$\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x - 5\cos^2 2x = 0;$$
$$\operatorname{tg}^2 2x - 2\operatorname{tg} 2x - 5 = 0.$$

Значит, либо $\operatorname{tg} 2x = 1+\sqrt{6}$, $2x = \operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{6}\right) + \pi n$, либо $\operatorname{tg} 2x = 1-\sqrt{6}$, $2x = \operatorname{arctg}(1-\sqrt{6}) + \pi n$.

По условию $\cos 2x \geqslant 0$, т. е. $2x$ принадлежит первой или четвертой четверти числовой окружности. Поэтому первую серию ответов придется переписать в виде

$$2x = \operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{6}\right) + 2\pi n,\ x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{6}\right) + \pi n,$$

а вторую — в виде

$$2x = \operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{6}\right)+2\pi n,\ x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{6}\right)+\pi n.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(1\pm\sqrt{6}\right)+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

10.28. При каких значениях параметра b уравнение $9^x+2b\cdot 3^{x+1}+9=0$ не имеет корней?

Решение. Положив $3^x=y$, получим квадратное уравнение $y^2+6by+9=0$. Оно не имеет корней при отрицательном дискриминанте, это будет при $-1<b<1$. Но заданное показательное уравнение не будет иметь корней еще в одном случае: когда у квадратного уравнения корни есть, но оба они отрицательны, это будет при $b\geqslant 1$ (сделать такой вывод помогает теорема Виета).

Ответ: при $b>1$.

11.19. а) Решите уравнение $2^{x^2+2x-5}-2^{8-2x-x^2}=7$.

Решение. «Напрашивается» новая переменная $t=x^2+2x-5$; тогда заданное уравнение примет вид $2^t-2^{3-t}=7$, откуда получаем $t=3$ и, соответственно, $x=2,\ -4$.

Ответ: 2, −4.

11.20. Решите неравенство

$$\log_5(x^2+5x)+2\geqslant\log_5(x^2+4x-5)+\log_{0,2}\frac{x}{25}.$$

Решение. Начнем с последнего слагаемого:

$$\log_{0,2}\frac{x}{25}=\log_{0,2^{-1}}\left(\frac{x}{25}\right)^{-1}=\log_5\frac{25}{x}.$$

Тогда заданное неравенство примет вид

$$\log_5(x^2+5x)+2\geqslant\log_5(x^2+4x-5)+\log_5\frac{25}{x}.$$

Далее имеем:

$$\log_5 25(x^2+5x)\geqslant\log_5\frac{25(x^2+4x-5)}{x}.$$

Освободиться от знаков логарифмов можно только при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x^2+5x>0, \\ \dfrac{x^2+4x-5}{x}>0. \end{cases}$$

Решив эту систему неравенств, получим $x > 1$.

Вернемся к логарифмическому неравенству. Освободившись от знаков логарифмов, получим:

$$25(x^2+5x) \geqslant \frac{25(x^2+4x-5)}{x};$$
$$x(x^2+5x) \geqslant x^2+4x-5;$$
$$x^3+4x^2-4x+5 \geqslant 0.$$

А теперь смотрите: если $x > 1$, то $4x^2 - 4x = 4x(x - 1) > 0$ и, следовательно, $x^3 + 4x^2 - 4x + 5 > 6$ и уж тем более $x^3 + 4x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$.

Ответ: $x > 1$.

12.14. а) Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие промежутку [1; 5], если функция задана формулой $f(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x - 2x$.

Решение. Поскольку в учебнике речь не шла о дифференцировании композиций функций, приходится использовать правило дифференцирования произведения:

$$f'(x) = (2\cos^2 x + \sin 2x - 2x)' =$$
$$= 2((-\sin x)\cos x + \cos x(-\sin x) + 2\cos 2x - 2 =$$
$$= -2\sin 2x + 2\cos 2x - 2.$$

Решим уравнение $-2\sin 2x + 2\cos 2x - 2 = 0$:

$$2\sin x\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$$
$$2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0;$$
$$\sin x(\cos x + \sin x) = 0;$$
$$\sin x = 0;\ \cos x + \sin x = 0;$$
$$x = \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Осталось в каждой из полученных двух серий решений отобрать те значения, которые принадлежат отрезку [1; 5].

Из серии $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$ отрезку [1; 5] принадлежит только одно значение x, которое получается при $n = 1$, — это $x=\frac{3\pi}{4}$.
Из серии $x = \pi n$ отрезку [1; 5] принадлежит только одно значение x, которое получается при $n = 1$, — это $x = \pi$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$, π.

14.14. Через какую точку графика функции $y = e^{3x+4}$ надо провести касательную, чтобы она проходила через начало координат? Составьте уравнение этой касательной.

Решение. Пусть a — абсцисса точки касания. Имеем:

$$f(x) = e^{3x+4},\ f'(x) = 3e^{3x+4},\ f(a) = e^{3a+4},\ f'(a) = 3e^{3a+4}.$$

Значит, уравнение касательной таково:

$$y = e^{3a+4} + 3e^{3a+4}(x - a).$$

Касательная проходит через точку (0; 0), а потому $0 = e^{3a+4} + 3e^{3a+4}(0 - a)$, откуда следует, что $a=\frac{1}{3}$ и уравнение касательной выглядит так:

$$y=e^5+3e^5\left(x-\frac{1}{3}\right),$$

т. е. $y = 3e^5x$.

14.24. б) Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая проходит через начало координат, если $f(x) = \ln^2 x$.

Решение. Пусть a — абсцисса точки касания. Имеем:

$$f(x)=\ln^2 x,\ f'(x)=(\ln x\cdot\ln x)'=\frac{1}{x}\ln x+\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x},$$
$$f(a)=\ln^2 a,$$
$$f'(a)=\frac{2\ln a}{a}.$$

Значит, уравнение касательной таково:

$$y=\ln^2 a+\frac{2\ln a}{a}(x-a).$$

Касательная проходит через точку (0; 0), а потому

$$0=\ln^2 a+\frac{2\ln a}{a}(0-a),$$

откуда следует, что либо $a = 1$, либо $a = e^2$. Подставив $a = 1$ в уравнение $y=\ln^2 a+\frac{2\ln a}{a}(x-a)$, получим $y=0$, подставив $a = e^2$ в уравнение $y=\ln^2 a+\frac{2\ln a}{a}(x-a)$, получим $y = \frac{4x}{e^2}$.

Ответ: $y = 0$, $y = \frac{4x}{e^2}$.

14.25. а) При каких значениях параметра p прямая $y = 2x + 3p - 3$ является касательной к графику функции $y = \ln(2x - 3)$?

Решение. Поскольку угловой коэффициент прямой $y = 2x + 3p - 3$ равен 2, то должно выполняться равенство $(\ln(2x - 3))' = 2$; значит, $\frac{2}{2x-3}=2$, $x = 2$ — это абсцисса точки касания, а ордината равна $\ln(2 \cdot 2 - 3) = 0$. Отсюда следует, что прямая $y = 2x + 3p - 3$ должна проходить через точку (2; 0), это будет при $p=-\frac{1}{3}$.

14.26. Андрей сделал в банке вклад на сумму 250 000 р. при условии, что в конце года сумма вклада увеличивается на p % и никакие другие операции с вкладом не производятся. Через год в этом же банке и на таких же условиях сделал точно такой же вклад его приятель Алексей. Ровно через год после этого они оба закрыли свои вклады. При этом выяснилось, что Андрей получил на 33 600 р. больше, чем Алексей. Какой процент годовых начислял этот банк?

Решение. Положим ради краткости 250 000 = s. Андрей сделал вклад s р. под p %, значит, в конце первого года хранения на счете окажется $s+\frac{p}{100}s=\left(1+\frac{p}{100}\right)s$ р. А в конце второго года хранения на счете окажется $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 s$ р. Алексей же, сделав аналогичный вклад сроком на год, получит в итоге $\left(1+\frac{p}{100}\right)s$ р. Согласно условию, выполняется соотношение $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 s-\left(1+\frac{p}{100}\right)s=33\,600$, т. е.

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)s\left(1+\frac{p}{100}-1\right)=33\,600,\ \frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)s=33\,600,$$

$$\frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)250\,000=33\,600.$$

Решим последнее уравнение:

$$25p(100+p)=33\,600,\ p^2+100p-1344=0;$$
$$p_1=12,\ p_2=-112.$$

Ответ: 12 %.

14.27. При каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции $y=\frac{2-|x|}{x^2-2|x|}$?

Решение. Построим график функции $y=\frac{2-|x|}{x^2-2|x|}$. Если $x > 0$, то $y=\frac{2-x}{x^2-2x}$, т. е. $y=-\frac{1}{x}$, где $x \neq 2$. Если $x < 0$, то $y=\frac{2+x}{x^2+2x}$, $y=\frac{1}{x}$, где $x \neq -2$. Таким образом, график заданной функции состоит из двух ветвей гипербол с выколотыми точками, соответственно, $\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-2;\ -\frac{1}{2}\right)$ (рис. 4).

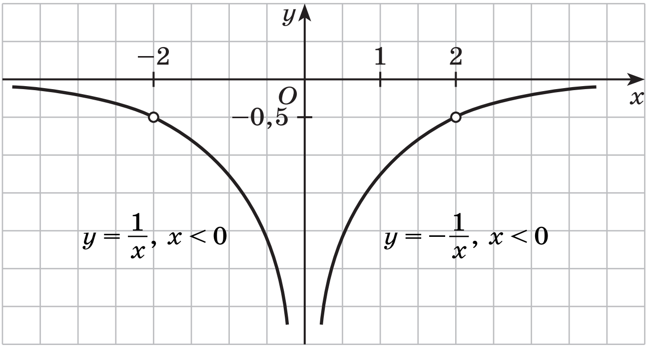


Рис. 4

Прямая $y = kx$ не будет иметь с графиком общих точек только в трех случаях: когда она проходит через точку $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ — это будет при $k = -\frac{1}{4}$, когда она проходит через точку $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ — это будет при $k = \frac{1}{4}$ и при $k = 0$.

Ответ: $k = 0$, $k = \pm\frac{1}{4}$.

Дополнительные задачи

11. Для функции $y = y(x) = (f(x))^{-1}$ обоснуйте, что:

а) $y(x) = \frac{1}{f(x)}$;

б) $y(x + \Delta x) = \frac{1}{f(x + \Delta x)}$;

в) $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} y(x + \Delta x) = y(x)$;

г) $\Delta y = -\frac{\Delta f}{f(x) \cdot f(x + \Delta x)}$;

д) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f(x) \cdot f(x + \Delta x)}$;

е) $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Решение. а) и б) По определению степени с отрицательным показателем

$$y(x) = (f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}, \quad y(x + \Delta x) = (f(x + \Delta x))^{-1} = \frac{1}{f(x + \Delta x)}.$$

в) Из дифференцируемости функции следует ее непрерывность, что и означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} y(x + \Delta x) = y(x)$.

г)

$$\Delta y = \frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{f(x + \Delta x) \cdot f(x)} =$$
$$= -\frac{\Delta f}{f(x) \cdot f(x + \Delta x)}$$

д) Предыдущее равенство надо разделить почленно на Δx.

е)

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+\Delta x)}-\frac{1}{f(x)}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{f(x)\cdot f(x+\Delta x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)},$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$ — это дифференцируемость, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$ — это непрерывность функции f в точке x.

12. Используя теорему о производной произведения (см. теорему 3 в § 10) и формулу из упражнения 11 «е», докажите теорему о производной частного.

Доказательство.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g}+f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g}-f\cdot\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

13. Для функции $y = y(x) = f(kx + m)$ обоснуйте, что $(f(kx + m)' = kf'(kx + m)$.

Решение.

$$(f(kx+m))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(k(x+\Delta x)+m)-f(kx+m)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f((kx+m)+k\Delta x)-f(kx+m)}{k\Delta x}\cdot\frac{k\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= k\cdot\lim_{k\Delta x\to 0}\frac{f((kx+m)+k\Delta x)-f(kx+m)}{k\Delta x} = kf'(kx+m).$$

Глава 3

15.21. б) Исследуйте на монотонность функцию

$$y=\sin 3x-\cos 2x-2x^{\frac{2}{3}}-6e^x.$$

Решение. Поскольку в состав аналитического задания функции входит $x^{\frac{2}{3}}$, делаем вывод: область определения функции — луч $[0; +\infty)$ (остальные слагаемые определены на всей числовой прямой). Имеем:

$$y' = (\sin 3x - \cos 2x - 2x^{\frac{2}{3}} - 6e^{x})' =$$
$$= 3\cos 3x + 2\sin 2x - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 6e^{x}.$$

А теперь смотрите: $3\cos 3x + 2\sin 2x \leqslant 5$, $-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} < 0$, $-6e^x \leqslant -6$ (при $x \geqslant 0$). Значит,

$$y' = 3\cos 3x + 2\sin 2x - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 6e^{x} < 0,$$

а потому заданная функция убывает на луче $[0; +\infty)$.

15.24. б) При каких значениях параметра p функция $y = x^3 - 3x$ убывает на отрезке $\left[p-3, \frac{1}{6}p+\frac{2}{3}\right]$?

Решение. $y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 \leqslant 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Значит, чтобы функция $y = x^3 - 3x$ убывала на отрезке $\left[p-3, \frac{1}{6}p+\frac{2}{3}\right]$, должно выполняться соотношение $\left[p-3; \frac{1}{6}p+\frac{2}{3}\right] \subset [-1; 1]$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} p-3 \geqslant -1, \\ \frac{1}{6}p+\frac{2}{3} \leqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: $p = 2$.

15.26. е) Используя свойство монотонности функции, решите уравнение

$$10 - x^5 - 2x^3 - 7x = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду $10 - x^5 = 2x^3 + 7x$. Достаточно очевидно, что $x = 1$ — корень уравнения. Поскольку функция $y = 10 - x^5$ убывает, а функция $y = 2x^3 + 7x$ возрастает, других корней у уравнения нет.

Ответ: 1.

15.27. б) Используя свойство монотонности функции, решите уравнение

$$100-2x^5-4x^3-2x=\sqrt[4]{6+5x}.$$

Решение. При $x = 2$ и левая, и правая части уравнения принимают значение 2, значит, $x = 2$ — корень уравнения. Поскольку функция $y = 102 - 2x^5 - 4x^3 - 2x$ убывает, а функция $y=\sqrt[4]{6+5x}$ возрастает, других корней у уравнения нет.

Ответ: 2.

15.28. б) Используя свойство монотонности функции, решите уравнение

$$6\sin\frac{x}{3}+5\cos 2x+12x=5-x^5.$$

Решение.

$$\left(6\sin\frac{x}{3}+5\cos 2x+12x\right)'=2\cos\frac{x}{3}-10\sin 2x+12.$$

Имеем:

$$2\cos\frac{x}{3}\geqslant -2,\ -10\sin 2x\geqslant -10,\ 2\cos\frac{x}{3}-10\sin 2x+12\geqslant 0;$$

значит, функция $y=6\sin\frac{x}{3}+5\cos 2x+12x$ возрастает. В то же время функция $y = 5 - x^3$ убывает, а потому заданное уравнение может иметь только один корень. Этим корнем является $x = 0$.

Ответ: 0.

15.29. б) Используя свойство монотонности функции, решите уравнение

$$4\sin\frac{\pi x}{2}-3\cos\pi x-20x=x^5+5x^3-19.$$

Решение.

$$\left(4\sin\frac{\pi x}{2}-3\cos\pi x-20x\right)'=2\pi\cos\frac{\pi x}{2}+3\pi\sin\pi x-20.$$

Имеем:

$$2\pi\cos\frac{\pi x}{2}\leqslant 2\pi,\ 3\pi\sin\pi x\leqslant 3\pi,$$

$$2\pi\cos\frac{\pi x}{2}+3\pi\sin\pi x\leqslant 5\pi<20.$$

Значит, $\left(4\sin\frac{\pi x}{2}-3\cos\pi x-20x\right)'<0$, а потому функция $y=4\sin\frac{\pi x}{2}-3\cos\pi x-20x$ убывает. В то же время функция $y = x^5 + 5x^3 - 19$ возрастает, а потому заданное уравнение может иметь только один корень. Этим корнем является $x = 1$; при этом значении и левая, и правая части заданного уравнения обращаются в -13.

Ответ: 1.

15.33. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \sin 3 \sin 5$, $b = \sin 4 \sin 6$;

б) $a = \sin 9 \cos 5$, $b = \sin 11 \cos 7$.

Решение.

а)

$$a-b=\sin 3\sin 5-\sin 4\sin 6=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2-\cos 8)-\frac{1}{2}(\cos 2-\cos 10)=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 10-\cos 8)=-\sin 9\sin 2.$$

9 и 2 — точки второй четверти, значит, $\sin 9 > 0$, $\sin 2 > 0$, $a - b < 0$, $a < b$.

б)

$$a-b=\sin 9\cos 5-\sin 11\cos 7=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 14+\sin 4)-\frac{1}{2}(\sin 18+\sin 4)=$$

$$=-\frac{1}{2}(\sin 18-\sin 14)=-\sin 2\cos 16.$$

2 — точка второй четверти, а 16 — точка третьей четверти $\left(5\pi<16<5\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, значит, $\sin 2 > 0$, $\cos 16 < 0$, $a - b > 0$, $a > b$.

Ответ: а) $a < b$; б) $a > b$.

16.12. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы на указанном промежутке:

а) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $y=\sqrt{2}\cos x-x,\ x\in\left[-\frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. а)

$$y'=\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)'=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0;$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n.$$

Из серии $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$ отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат два значения: $-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$. Знаки производной $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ на указанном отрезке меняются так, как показано на рисунке 5. Значит, $x=-\frac{\pi}{4}$ — точка минимума, $x=\frac{3\pi}{4}$ — точка максимума; функция убывает на $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$, убывает на $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

б)

$$y'=\left(\sqrt{2}\cos x-x\right)'=-\sqrt{2}\sin x-1=0,$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n.$$

Из серии $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$ отрезку $\left[-\frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$ принадлежат два значения: $-\frac{\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{4}$. Знаки производной

$\left(-\sqrt{2}\sin x - 1\right)$ на указанном отрезке меняются так, как показано на рисунке 6. Значит, $x = -\frac{3\pi}{4}$ — точка минимума, $x = -\frac{\pi}{4}$ — точка максимума; функция убывает на $\left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

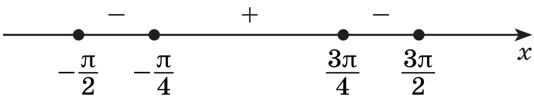


Рис. 5

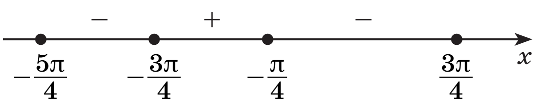


Рис. 6

16.14. *Указание.* Во всех пунктах этого номера следует построить график заданной функции. Выводы о точках экстремума и участках монотонности функции сделать, опираясь на построенный график.

16.17. При каких значениях параметра p функция $y = x^4e^{-x}$ на интервале $(p - 1; p + 5)$:

а) имеет одну точку экстремума;

б) не имеет точек экстремума;

в) убывает;

г) имеет две точки экстремума?

Решение. Имеем:

$$y' = (x^4e^{-x})' = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = x^3e^{-x}(4 - x).$$

Функция убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; 4]$, убывает на $[4; +\infty)$; у функции две точки экстремума: $x = 0$ — точка минимума, $x = 4$ — точка максимума.

а) На интервале $(p - 1; p + 5)$ будет содержаться только одна точка экстремума в двух случаях: 1) 0 принадлежит интервалу, а 4 — нет; 2) 4 принадлежит интервалу а 0 — нет.

Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1) В этом случае должны одновременно выполняться следующие неравенства: $p - 1 < 0$, $p + 5 > 0$, $p + 5 < 4$, т. е. речь идет о решении системы неравенств $\begin{cases} p-1<0, \\ p+5>0, \\ p+5<4. \end{cases}$

Решив эту систему, получим $-5 < p < -1$.

2) В этом случае должны одновременно выполняться следующие неравенства: $p - 1 > 0$, $p - 1 < 4$, $p + 5 > 4$, т. е. речь идет о решении системы неравенств $\begin{cases} p-1>0, \\ p-1<4, \\ p+5>4. \end{cases}$

Решив эту систему, получим $1 < p < 5$.

Итак, $-5 < p < -1$, $1 < p < 5$.

б) На интервале $(p - 1;\ p + 5)$ не будет точек экстремума в двух случаях: если $p + 5 < 0$, т. е. $p < -5$, или если $p - 1 > 4$, т. е. $p > 5$.

в) На интервале $(p - 1;\ p + 5)$ функция будет убывать в двух случаях: если $p + 5 < 0$, т. е. $p < -5$, или если $p - 1 > 4$, т. е. $p > 5$.

г) На интервале $(p - 1;\ p + 5)$ будут содержаться обе точки экстремума, если $p - 1 < 0$, а $p + 5 > 4$, т. е. речь идет о решении системы неравенств $\begin{cases} p-1<0, \\ p+5>4. \end{cases}$

Решив эту систему, получим $-1 < p < 1$.

Ответ: а) $-5 < p < -1$, $1 < p < 5$; б), в) $p < -5$, $p > 5$; г) $-1 < p < 1$.

17.8. г) Исследуйте функцию $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ и постройте ее график.

Решение. Область определения функции — луч $[1; +\infty)$. Если $x = 1$, то $y = 0$. Найдем производную:

$$y' = \left(\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x} + \sqrt{x-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}.$$

Производная не существует в точках 0 и 1, но первая точка не принадлежит области определения функции, а вторая не является внутренней точкой области определения (концевая точка). В итоге получаем одну точку экстремума (точку максимума): $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$.

У графика функции есть горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}=0,$$

значит, $y = 0$ — асимптота.

График представлен на рисунке 7.

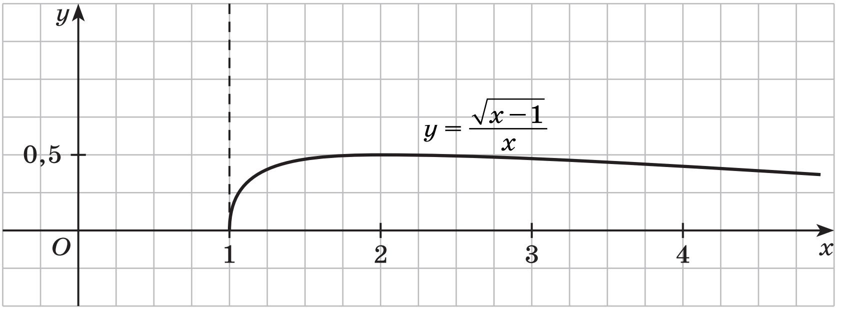


Рис. 7

17.9. г) Исследуйте функцию $y=\frac{e^x}{x+1}$ и постройте ее график.

Решение. Здесь $x \neq -1$; $x = -1$ — вертикальная асимптота графика функции. Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+1}=0$, значит, $y = 0$ — горизонтальная асимптота. Найдем производную:

$$y'=\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'=\frac{e^x(x+1)-e^x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

$y' = 0$ при $x = 0$; $x = 0$ — точка минимума, $y_{\min} = 1$. График представлен на рисунке 8.

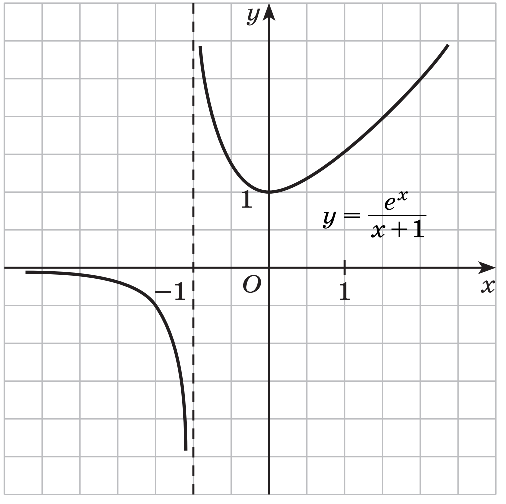


Рис. 8

17.10. а) Исследуйте функцию $y = x - \ln x$ и постройте ее график.

Решение. Область определения функции — $(0; +\infty)$, при этом $\lim\limits_{x \to 0}(x - \ln x) = +\infty$, т. е. $x = 0$ — вертикальная асимптота графика функции. Далее, $(1; 1)$ — точка минимума. Полезно взять еще одну контрольную точку: если $x = e \approx 2{,}7$, то $y = e - 1 \approx 1{,}7$. График представлен на рисунке 9.

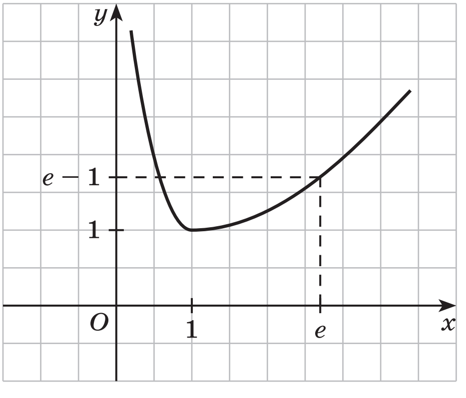


Рис. 9

17.14. г) Найдите значение выражения

$$4\log_{\sqrt{xy}}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)+3\log_{\sqrt{xy}} y^2$$

при $\log_x y = 2$.

Решение.

$$4\log_{\sqrt{xy}}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)+3\log_{\sqrt{xy}} y^2 =$$

$$=\log_{\sqrt{xy}}\left(\frac{x^2}{y^4}\right)+\log_{\sqrt{xy}} y^6=\log_{\sqrt{xy}}(x^2y^2)=4.$$

Здесь удалось обойтись без условия $\log_x y = 2$. В остальных пунктах этого номера после преобразований заданного выражения приходится пользоваться формулой перехода к новому основанию логарифма.

Ответ: 4.

17.15. в) Вычислите:

$$\cos\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^3\frac{\pi}{3}+\ldots+\cos^n\frac{\pi}{3}+\ldots.$$

Решение. Речь идет о вычислении суммы бесконечной геометрической прогрессии, у которой $b_1=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $q=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Имеем:

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Ответ: 1.

17.16. б) Решите уравнение $\left||2x-3|-5\right| = |2x-3|-5$.

Решение. Положим $y=|2x-3|-5$, тогда уравнение примет вид $|y|=y$, откуда следует, что $y \geqslant 0$. Далее, $|2x-3|-5 \geqslant 0$, $|2x-3| \geqslant 5$, $(2x-3)^2 \geqslant 25$.

Ответ: $x \leqslant -1$; $x \geqslant 4$.

18.16. а) Найдите наибольшее значение функции на заданном промежутке:

$$y=\sqrt{x^2+4x+11},\ x\in[-5;-1).$$

Решение. Рассмотрим функцию $y=x^2+4x+11$. Она имеет единственную стационарную точку — точку минимума $x=-2$, принадлежащую заданному промежутку. Соответственно, точка $x=-2$ является единственной точкой минимума для функции $y=\sqrt{x^2+4x+11}$, $x\in[-5;-1)$. Составим таблицу:

x	-5	-2	-1
y	4	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{2}$

Вывод: $y_{\text{наиб}}=4$.

18.19. а) При каком значении параметра p наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x+p}$ равно $-6\sqrt{3}$?

Решение.

$$y'=\left(x\sqrt{x+p}\right)'=\sqrt{x+p}+\frac{x}{2\sqrt{x+p}}=\frac{3x+2p}{2\sqrt{x+p}};$$

$y'=0$ при $x=-\dfrac{2p}{3}$, это единственная стационарная точка, причем точка минимума. Если $f(x)=x\sqrt{x+p}$, то $f(-p)=0$, $f\left(-\dfrac{2p}{3}\right)=-\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}$. По условию должно выполняться равенство $-\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}=-6\sqrt{3}$, это будет при $p=9$.

Ответ: при $p=9$.

19.5. а) На графике функции $y=\sqrt{x}$ найдите точку, ближайшую к точке $M(4{,}5;\ 0)$.

Решение. Обозначим искомую точку буквой P, координаты этой точки таковы $P\left(x,\ \sqrt{x}\right)$, $x\geqslant 0$. Используем формулу расстояния между точками P и M на координатной плоскости:

$$PM=\sqrt{(x-4{,}5)^2+\left(\sqrt{x}-0\right)^2}=\sqrt{x^2-8x+20{,}25}=$$
$$=\sqrt{(x-4)^2+4{,}25}.$$

Наименьшее значение расстояния достигается при $x = 4$. Соответственно, $y = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: (4; 2).

19.10. а) Из прямоугольной трапеции надо вырезать прямоугольник наибольшей площади, у которого один из прямых углов совпадает с прямым углом трапеции (рис. 10). Чему равна эта площадь, если основания трапеции равны 8 см и 24 см, а высота равна 12 см?

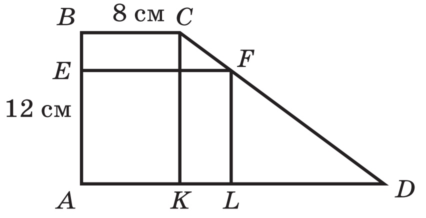


Рис. 10

Решение.

1) Оптимизируемая величина — площадь S прямоугольника $AEFL$.

2) В качестве независимой переменной выберем длину отрезка AE: $x = AE$, $0 < x \leqslant 12$.

3) $S = AL \cdot AE$, $AL = AK + KL = 8 + KL$. Из подобия треугольников FDL и CDK следует, что

$$\frac{FL}{CK} = \frac{LD}{KD};\ \frac{x}{12} = \frac{16 - KL}{16};\ KL = \frac{48 - 4x}{3}.$$

Далее,

$$AL = 8 + \frac{48 - 4x}{3} = \frac{72 - 4x}{3};\ S = \frac{4}{3}x(18 - x) = \frac{4}{3}(18x - x^2).$$

4) Итак, $S = \frac{4}{3}(18x - x^2)$, $0 < x \leqslant 12$. Нас интересует наибольшее значение этой функции. Имеем: $S' = \frac{4}{3}(18 - 2x)$; $S' = 0$ при $x = 9$ — это точка максимума, в ней функция достигает наибольшего значения: $S = 108$ см^2.

Ответ: 108 см^2.

19.12. В основании пирамиды $MABCD$, объем которой равен 9, лежит квадрат $ABCD$. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания. Какое наименьшее значение при этих условиях может иметь длина ребра MD?

Решение.

1) Оптимизируемая величина — длина ребра MD (рис. 11).

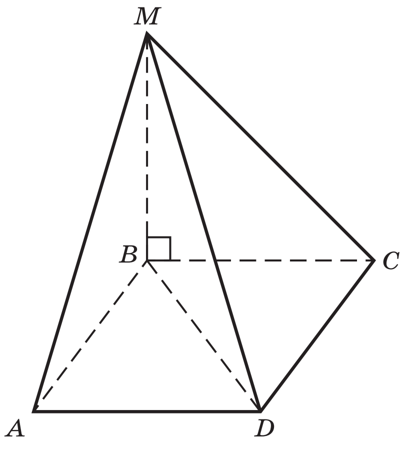


Рис. 11

2) $MB = x$, $0 < x < +\infty$.

3)

$$V = \frac{1}{3}AB^2 \cdot MB;\ 27 = AB^2 \cdot x;\ AB^2 = \frac{27}{x};$$

$$BD = AB\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{x}};$$

$$MD^2 = MB^2 + BD^2 = x^2 + \frac{54}{x}.$$

4) Положим $y = MD^2$. Речь идет об отыскании наименьшего значения функции $y = x^2 + \frac{54}{x}$, $0 < x < +\infty$.

Имеем: $y' = \left(x^2 + \frac{54}{x}\right)' = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2x^3 - 54}{x^2}$; $y' = 0$ при $x = 3$. Это единственная точка экстремума функции на промежутке $(0; +\infty)$, причем точка минимума, значит, при $x = 3$ функция достигает наименьшего значения: $y = 27$.

Ответ: $MD = 3\sqrt{3}$.

19.18. а) От прямоугольника отрезают угловой квадрат, сторона которого составляет четверть меньшей стороны прямоугольника. Площадь полученного шестиугольника должна быть равна 68. Найдите наименьший периметр такого шестиугольника.

Решение.

1) Оптимизируемая величина — периметр P шестиугольника.

2) Обозначим буквой x сторону вырезаемого квадрата (рис. 12). Реальные границы: $x > 0$.

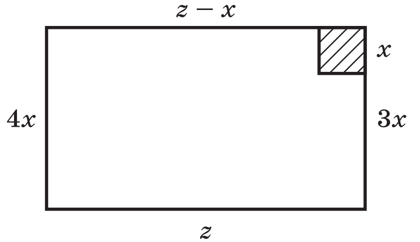


Рис. 12

3) Одна сторона прямоугольника $4x$, а другую обозначим буквой z. Так как площадь шестиугольника равна 68, то имеем:

$$68 = z \cdot 4x - x^2, \; z = \frac{x^2 + 68}{4x}.$$

Составим выражение для периметра P шестиугольника:

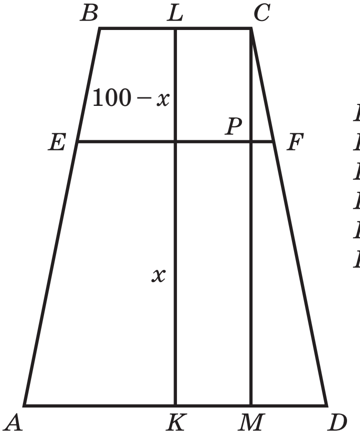
$$P = z + 4x + (z - x) + 2x + 3x = 2z + 8x =$$
$$= \frac{x^2 + 68}{2x} + 8x = \frac{17}{2}x + \frac{34}{x}.$$

4) Речь идет об отыскании наименьшего значения функции $P = \frac{17}{2}x + \frac{34}{x}$, $0 < x < +\infty$.

Имеем: $P' = \left(\frac{17}{2}x + \frac{34}{x}\right)' = \frac{17}{2} - \frac{34}{x^2} = \frac{17x^2 - 68}{2x^2}$; $P' = 0$ при $x = 2$. Это единственная точка экстремума функции на промежутке $(0; +\infty)$, причем точка минимума, значит, при $x = 2$ функция достигает наименьшего значения: $P = 34$.

19.19. Металлическая заготовка длиной 1 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 10 см и 5 см. Из нее следует изготовить стержень наибольшего объема в виде прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Найдите размеры такого стержня.

Решение. Стержень можно изготовить так: вписать квадрат в верхнюю окружность (ее радиус 2,5 см) и на этом квадратном основании вырезать стержень высотой 100 см. Но скорее всего истина не в этом, скорее всего надо срезать какую-то верхнюю часть заготовки, в полученную верхнюю окружность вписать квадрат и вырезать прямоугольный параллелепипед с этим квадратным основанием. На рисунке 13 показано осевое сечение заготовки (трапеция $ABCD$), $LK = 100$ см — высота трапеции (длина заготовки).



$LC = 2{,}5$ см
$KD = 5$ см
$LK = 100$ см
$KM = MD = 2{,}5$ см
$PF = z$
$PM = x$

Рис. 13

1) Оптимизируемая величина — объем V прямоугольного параллелепипеда.

2) Обозначим буквой x высоту заготовки, которая получится после срезания некоторой верхней части. Реальные границы изменения этой независимой переменной таковы: $0 < x \leqslant 100$.

3) На рисунке 13 EF — это диаметр новой верхней окружности, ее радиус $r = 2{,}5 + z$, где $z = PF$. Из подобия треугольников CPF и CMD получаем:

$$\frac{z}{2{,}5} = \frac{100 - x}{100},\ z = \frac{100 - x}{40},\ r = 2{,}5 + \frac{100 - x}{40} = \frac{200 - x}{40}.$$

Сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса r, равна $r\sqrt{2}$ и тогда объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V = \left(r\sqrt{2}\right)^2 \cdot x = \left(\frac{200 - x}{40}\sqrt{2}\right)^2 \cdot x = \frac{x}{800}(200 - x)^2$.

4) Речь идет об отыскании наибольшего значения функции

$$V = \frac{x}{800}(200 - x)^2,\ 0 < x \leqslant 100.$$

Имеем:

$$V' = \left(\frac{x}{800}(200 - x)^2\right)' = \frac{1}{800}(x^3 - 400x^2 + 200^2 x)' =$$
$$= \frac{1}{800}(3x^2 - 800x + 200^2).$$

Найдем стационарные точки:

$$3x^2 - 800x + 200^2 = 0;$$
$$x_{1,2} = \frac{400 \pm \sqrt{400^2 - 3 \cdot 200^2}}{3} = \frac{400 \pm 200}{3};$$
$$x_1 = 200,\ x_2 = \frac{200}{3}.$$

Промежутку $(0; 100]$ принадлежит только значение $x = \frac{200}{3}$ — это точка максимума, именно в ней функция достигает наибольшего значения на заданном промежутке.

5) Осталось вычислить размеры параллелепипеда. За x мы приняли его высоту, она равна $\frac{200}{3}$ см. Сторона квадрата, служащего основанием параллелепипеда, равна, как мы видели, $\frac{(200-x)\sqrt{2}}{40}$; подставив в это выражение $x=\frac{200}{3}$, получим $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $66\frac{2}{3}$ см, $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ см.

19.20. По двум прямолинейным тропинкам, пересекающимся в точке O под углом 60°, одновременно выходят два пешехода по направлению к точке O. Первый находится от точки O на расстоянии 5 км и идёт со скоростью 3 км/ч, второй находится от точки O на расстоянии 4 км и идёт со скоростью 2 км/ч. Через какое время расстояние между пешеходами станет наименьшим?

Решение. На рисунке 14 представлена схема движения.

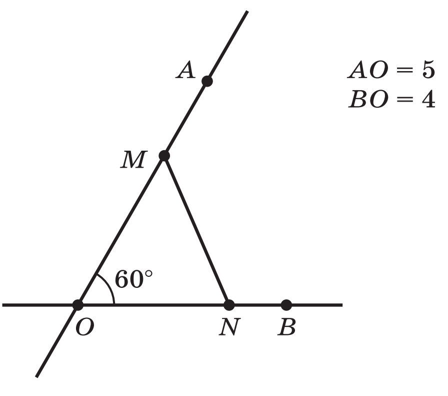


Рис. 14

Первый пешеход стартует из п. A, $AO = 5$ км; второй стартует из п. B, $BO = 4$ км. Через некоторое время расстояние между пешеходами станет наименьшим, в этот момент первый находится в п. M, а второй — в п. N.

1) Оптимизируемая величина — расстояние MN.

2) Независимая переменная — время x ч, $x \geqslant 0$.

3) За x ч первый пройдет путь $AM = 3x$, а второй — путь $BN = 2x$. Значит, $OM = 5 - 3x$, $ON = 4 - 2x$. Применим к треугольнику OMN теорему косинусов:

$$MN^2 = ON^2 + OM^2 - 2ON \cdot OM \ \cos 60°,$$
$$MN^2 = (5 - 3x)^2 + (4 - 2x)^2 - (5 - 3x)(4 - 2x) =$$
$$= 7x^2 - 24x + 21.$$

4) Речь идет об отыскании наименьшего значения MN^2. Пусть $MN^2 = y$, значит, нам нужно найти наименьшее значение функции $y = 7x^2 - 24x + 21$, $x \in [0; +\infty)$.

Имеем: $y' = (7x^2 - 24x + 21)' = 14x - 24 = 0$, $x = 1\frac{5}{7}$ — точка минимума, в ней функция достигает наименьшего значения.

Ответ: $1\frac{5}{7}$ ч.

Дополнительные задачи

3. Дана функция $y = f(x)$, $f(x) = \sqrt{x}$. Для $a > 0$:

а) найдите $f(a)$;

б) найдите $f'(a)$;

в) составьте уравнение касательной при $x = a$;

г) найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс;

д) докажите, что подкасательная в 2 раза больше абсциссы точки касания;

е) объясните, как построить касательную с помощью циркуля и линейки.

Решение. а) и б) $f(a) = \sqrt{a}$, $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

в) Составим уравнение касательной по общей формуле $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Получим

$$y = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) = \frac{2a + x - a}{2\sqrt{a}} = \frac{x + a}{2\sqrt{a}}.$$

г) В точке пересечения касательной из пункта «в» с осью Ox имеем: $x = -a$, $y = 0$.

д) Подкасательная здесь — это отрезок от $(-a; 0)$ до $(a; 0)$ (рис. 15). Его длина равна $2a$.

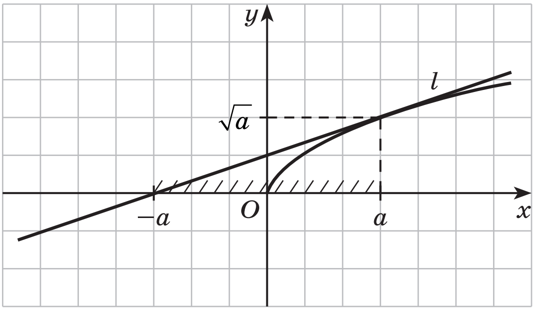


Рис. 15

е) Точку $\left(a; \sqrt{a}\right)$ графика спроектируем на ось Ox, получим точку $(a; 0)$. Возьмем симметричную ей относительно начала координат точку $(-a; 0)$.

Прямая l, проведенная через точки $(-a; 0)$ и $\left(a; \sqrt{a}\right)$, — искомая касательная. Получается удивительный факт: циркулем и линейкой параболу не построишь, а вот касательную к параболе в любой точке можно построить.

6. а) Докажите, что для функции $y = f(x)$, производная которой нигде не равна нулю, длина подкасательной при $x = a$ равна $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|$.

б) Сравните результат пункта «а» с ответами к упражнениям 3 «д» и 5 «д».

Решение. а) Аналогично задачам 3 и 5, но уже для произвольной функции $y = f(x)$ пишем уравнение касательной l: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Она пересечет ось Ox в точке $(x_0; 0)$, для которой $y = f(a) + f'(a)(x_0 - a)$. Значит,

$$x_0 - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}, \ |x_0 - a| = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|.$$

Но $|x_0 - a|$ есть расстояние между абсциссой точки $(a; f(a))$ касания и абсциссой точки $(x_0; 0)$ пересечения касательной и оси Ox, т. е. $|x_0 - a|$ — подкасательная.

б) Для задачи 3 «д» получаем $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{a}}{\dfrac{1}{2\sqrt{a}}}\right| = 2a$, а для 5 «д» получаем $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\dfrac{e^a}{e^a}\right| = 1.$

Глава 4

21.20. Найдите вероятность того, что при одновременном бросании красного и синего игральных кубиков:

а) на красном кубике число выпавших очков будет на 2 меньше, чем на синем;

б) на синем кубике число выпавших очков будет на 1 или на 3 отличаться от числа очков на красном.

Решение. На каждом из кубиков может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. По правилу умножения всего возможны $N = 6 \cdot 6 = 36$ исходов: 1 : 1, 1 : 2, ..., 1 : 6, 2 : 1, 2 : 2, ..., 5 : 6, 6 : 1, ..., 6 : 5, 6 : 6 (первым указан результат на красном кубике).

а) Интересующее нас событие A наступит при следующих исходах: 1 : 3, 2 : 4, 3 : 5, 4 : 6. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

б) Интересующее нас событие B наступит при следующих исходах: 1 : 2, 1 : 4, 2 : 1, 2 : 3, 2 : 5, 3 : 2, 3 : 4, 3 : 6, 4 : 1, 4 : 3, 4 : 5, 5 : 2, 5 : 4, 5 : 6, 6 : 3, 6 : 5. Значит,

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{9}$.

22.20. б) Решите неравенство

$$|x^2 - 2x| \cdot \log_{0,1}(x + 4) \geqslant 2x - x^2.$$

Решение. Следует рассмотреть три случая:

$$x^2 - 2x = 0,$$
$$x^2 - 2x > 0,$$
$$x^2 - 2x < 0.$$

1) $x^2 - 2x = 0$; $x = 0$, $x = 2$. Оба этих значения удовлетворяют условию $x + 4 > 0$, а потому являются решениями заданного нестрогого неравенства.

2) Если $x^2 - 2x > 0$, то $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ и заданное неравенство принимает вид $(x^2 - 2x) \cdot \log_{0,1}(x + 4) \geqslant -(x^2 - 2x)$ и далее $\log_{0,1}(x + 4) \geqslant -1$. Таким образом, получаем систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ \log_{0,1}(x+4) \geqslant -1. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $-4 < x < 0$, $2 < x \leqslant 6$.

3) Если $x^2 - 2x < 0$, то $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ и заданное неравенство принимает вид $(2x - x^2) \cdot \log_{0,1}(x + 4) \geqslant 2x - x^2$ и далее $\log_{0,1}(x + 4) \geqslant 1$. Таким образом, получаем систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x < 0, \\ \log_{0,1}(x+4) \geqslant 1. \end{cases}$ Эта система не имеет решений.

Объединяя все три случая, получаем ответ: $x = 0$; $2 \leqslant x \leqslant 6$.

23.10. в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если $f(x) = |x^2 - 2x|$, $g(x) = x$.

Решение. На рисунке 16 построены графики функций $y = |x^2 - 2x|$, $y = x$ и заштрихована фигура, площадь которой требуется вычислить.

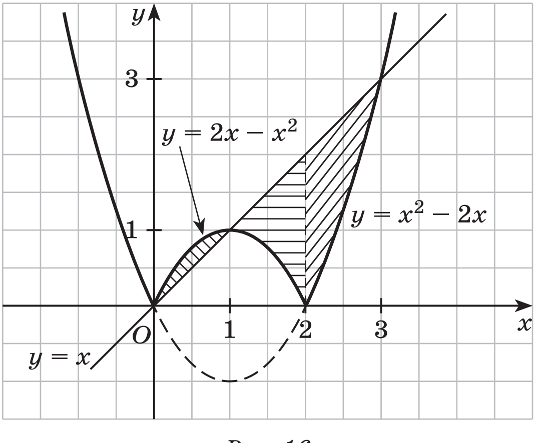


Рис. 16

Эта фигура состоит из трех криволинейных трапеций: от 0 до 1, от 1 до 2 и от 2 до 3 — при движении по оси абсцисс. Во всех трех случаях используется формула

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx \text{ или } S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx:$$

$$S=\int_0^1 (2x-x^2-x)dx+\int_1^2 (x-2x+x^2)dx+\int_2^3 (x-x^2+2x)dx=$$

$$=\int_0^1 (x-x^2)dx+\int_1^2 (x^2-x)dx+\int_2^3 (3x-x^2)dx=2\frac{1}{6}.$$

Дополнительные задачи

8. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $\{(x;\ y):\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$, если:

а) $f(x)=\begin{cases} x+1,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x+1,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 1,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} x+1,\ -1\leqslant x\leqslant 0{,}5,\\ 3-3x,\ 0{,}5\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} x+1,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+x},\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

Решение. В каждом из пунктов «а»—«е» искомый объем может быть найден как сумма объемов двух тел вращения, соответствующих двум случаям в задании кусочной функции.

а) При $-1\leqslant x\leqslant 0$ вращают треугольник $\{(x;\ y):\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant x+1\}$ (рис. 17). В результате получится конус с высотой $H=1$ и радиусом $R=1$ основания. Можно вычислить определенный интеграл

$$V=\pi\int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\pi\left(\frac{1}{3}-1+1\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{\pi}{3}.$$

А можно использовать и результат упражнения 6 «е» — формулу $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, дающую такой же результат.

При $0 \leqslant x \leqslant 1$ вращают треугольник $\{(x;\ y)\colon -1 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$ (см. рис. 17). В результате также получится конус с высотой $H = 1$ и радиусом $R = 1$ основания. Таким образом, искомый объем будет равен $\frac{2\pi}{3}$.

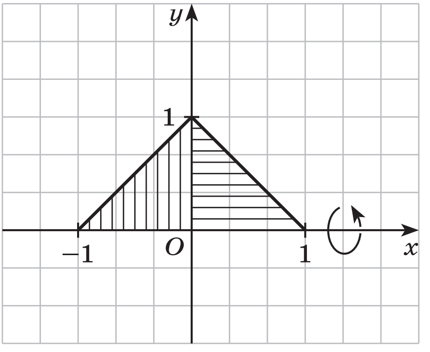


Рис. 17

б) При $-1 \leqslant x \leqslant 0$ ответ $\frac{\pi}{3}$ получен в пункте «а». При $0 \leqslant x \leqslant 1$ получится уже не конус, а цилиндр с высотой $H = 1$ и радиусом $R = 1$ основания. Его объем равен $\pi R^2 H = \pi$. Таким образом, искомый объем будет равен $\frac{4\pi}{3}$.

в) Аналогично пункту «б».

г) При $-1 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ вращают треугольник $\{(x;\ y)\colon -1 \leqslant x \leqslant 0{,}5,\ 0 \leqslant y \leqslant x + 1\}$ (рис. 18). Получится конус с высотой $H = 1{,}5$ и радиусом $R = 1{,}5$ основания и объемом $\frac{9\pi}{8}$. При $0{,}5 \leqslant x \leqslant 1$ вращают треугольник $\{(x;\ y)\colon 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 3 - 3x\}$ (см. рис. 18). Получится конус с высотой $H = 0{,}5$ и радиусом $R = 1{,}5$ основания и объемом $\frac{3\pi}{8}$. Искомый объем будет равен $\frac{3\pi}{2}$.

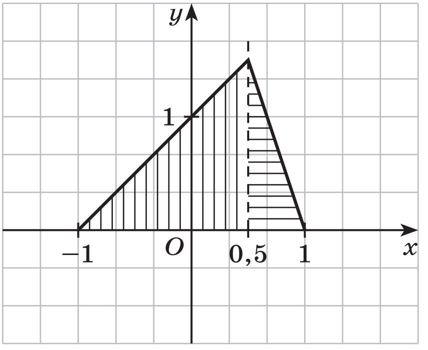


Рис. 18

д) При $-1 \leqslant x \leqslant 0$ ответ $\dfrac{\pi}{3}$ получен в пункте «а». При $0 \leqslant x \leqslant 1$ действуем по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 (1-x^2)dx =$$

$$= \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Этот объем можно вычислить и, заметив, что получится полушар радиусом 1. Искомый объем будет равен π.

е) При $0 \leqslant x \leqslant 1$ ответ $\dfrac{2\pi}{3}$ получен в пункте «д». При $-1 \leqslant x \leqslant 0$ действуем по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_{-1}^0 \left(\sqrt{1+x}\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^0 (1+x)dx =$$

$$= \pi\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^0 = \frac{\pi}{2}.$$

Искомый объем будет равен $\dfrac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{2\pi}{3}$; б), в) $\dfrac{4\pi}{3}$; г) $\dfrac{3\pi}{2}$; д) π; е) $\dfrac{7\pi}{6}$.

10. Шар $\{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ разрезали плоскостью $x = a$ на две части (рис. 19). Найдите отношение объемов меньшей и большей частей при:

а) $a = 0$; в) $a = -\frac{1}{2}$; д) $a = \frac{2}{3}$;

б) $a = \frac{1}{2}$; г) $a = \frac{1}{3}$; е) $a = \frac{1}{5}$.

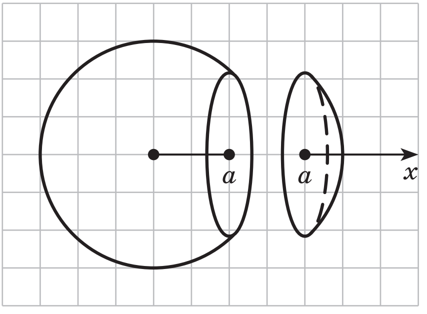


Рис. 19

Решение. Получим ответ для произвольного $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Объем тела левее сечения равен (по формуле из теоремы)

$$\pi\int_{-1}^{a}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{a} = \pi\left((a+1) - \left(\frac{a^3-(-1)^3}{3}\right)\right) =$$

$$= \pi\frac{2+3a-a^3}{3}.$$

Объем правого тела, «шапочки»:

$$\pi\int_{a}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{a}^{1} = \pi\left((1-a) - \left(\frac{1-a^3}{3}\right)\right) =$$

$$= \pi\frac{2-3a+a^3}{3}.$$

Значит, отношение объемов равно

$$(2 - 3a + a^3) : (2 + 3a - a^3).$$

Подставим значения a.

а) Получим ответ $1 : 1$.

б) Получим ответ

$$\left(2-\frac{3}{2}+\frac{1}{8}\right):\left(2+\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\right)=(16-12+1):(16+12-1)=5:27.$$

в) Аналогично пункту «б», только теперь меньшая часть слева, а большая — справа от сечения.

г) Получим ответ

$$\left(2-1+\frac{1}{27}\right):\left(2+1-\frac{1}{27}\right)=(27+1):(81-1)=28:80=7:20.$$

д) Получим ответ

$$\left(2-2+\frac{8}{27}\right):\left(2+2-\frac{8}{27}\right)=8:(108-8)=2:25.$$

е) Получим ответ

$$\left(2-\frac{3}{5}+\frac{1}{125}\right):\left(2+\frac{3}{5}-\frac{1}{125}\right)=(250-75+1):(250+75-1)=$$
$$=176:324=44:81.$$

Замечание. Наша геометрическая интуиция относительно объемов зачастую обманчива. Например, в пункте «г» сечение делит радиус (по оси абсцисс) в отношении $2:1$, т. е. его правая часть занимает $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$ диаметра шара. А вот объем правой «шапочки», или шарового сегмента, составляет всего 8 % объема шара. Или же, в пункте «е» при $a = \frac{1}{5}$ сечение довольно близко к сечению при $a = 0$ и на первый взгляд отношение объемов также должно быть близким к $1:1$. Но, оказывается, это отношение равно $44:81$, т. е. практически в 2 раза меньше ожидаемого.

Глава 5

24.4. Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства $x(x-6) \leqslant 2x+9$ окажется решением неравенства:

а) $x \geqslant 0$;　　в) $|x-1| \leqslant 1$;　　д) $\sqrt{x-5} \leqslant 2$;

б) $|x-1| \leqslant 0$;　　г) $x^3 > x$;　　е) $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$?

Решение.

$$x(x-6) \leqslant 2x+9,\ x^2-8x-9 \leqslant 0,\ (x+1)(x-9) \leqslant 0,$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 9.$$

Длина L отрезка $[-1;\ 9]$ равна 10.

а) В отрезке $[-1;\ 9]$ неравенству $x \geqslant 0$ удовлетворяют только точки отрезка $[0;\ 9]$. Его длина l равна 9. Значит, искомая вероятность равна $\dfrac{l}{L} = 0{,}9$.

б) Неравенство $|x-1| \leqslant 0$ имеет единственное решение $x = 1$. Значит, $l = 0$. Ответ: 0.

в) Множество решений неравенства $|x-1| \leqslant 1$ — это отрезок $[0;\ 2]$. Он содержится в отрезке $[-1;\ 9]$, а его длина $l = 2$. Ответ: 0,2.

г) Неравенство $x^3 > x$ решаем методом интервалов: $x \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$. В отрезке $[-1;\ 9]$ получаем $x \in (-1;\ 0) \cup (1;\ 9]$. Сумма длин промежутков равна $l = 9$. Ответ: 0,9.

д) Решаем неравенство $\sqrt{x-5} \leqslant 2$, $5 \leqslant x \leqslant 9$. Получаем отрезок $[5;\ 9]$. Он содержится в отрезке $[-1;\ 9]$, а его длина $l = 4$. Ответ: 0,4.

е) На отрезке $[-1;\ 9]$ неравенству $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$ удовлетворяют все отрицательные числа, а также числа, большие 0,25, т. е. все числа, кроме чисел из $[0;\ 0{,}25)$. Значит, $l = 9{,}25$. Ответ: 0,925.

Ответ: а) 0,9; б) 0; в) 0,2; г) 0,9; д) 0,4; е) 0,925.

24.8. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 5$ наудачу выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

а) на границе прямоугольника;

б) ближе к прямой AB, чем к прямой CD;

в) ближе к прямой BC, чем к прямой AD;

г) ближе к вершине A, чем к вершине C;

д) ближе к прямой AB, чем к прямой BC;

е) ближе к вершине A, чем к точке пересечения диагоналей.

Решение. Площадь прямоугольника S равна 10.

а) Площадь s границы равна 0. Вероятность равна $\frac{s}{S} = 0$.

б) Серединный перпендикуляр a к BC и к AD — это множество точек равноудаленных от AB и CD (рис. 20). Этот перпендикуляр делит прямоугольник на две равные части. Нам нужна левая часть. Ее площадь s равна $0{,}5S$. Вероятность равна $\frac{s}{S} = 0{,}5$. Аналогично и в пункте «в».

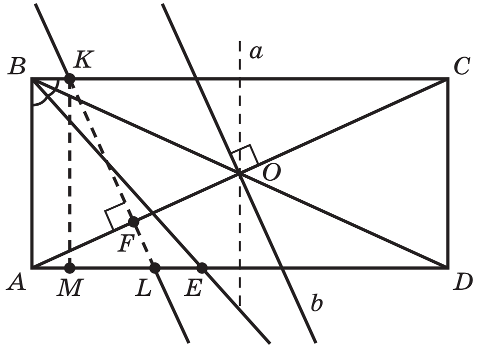


Рис. 20

г) Серединный перпендикуляр b к отрезку AC — это множество точек, равноудаленных от A и C. Этот перпендикуляр делит прямоугольник на две равные трапеции. Нам нужна трапеция, содержащая A. Ее площадь s равна $0{,}5S$. Вероятность равна $\frac{s}{S} = 0{,}5$.

д) Точки биссектрисы BE равноудалены от AB и BC. Нам нужен треугольник ABE без стороны BE. Так как $AB = AE = 2$, то площадь s треугольника равна 2. Ответ: 0,2.

е) Из середины F отрезка AO проведем прямую d перпендикулярно диагонали AC. Она разделит прямоугольник на две трапеции $ABKL$ и $KCDL$. Нам нужна площадь s первой из них. Треугольники ACD и KLM подобны и

$\frac{ML}{MK}=\frac{CD}{AD}$, $\frac{ML}{2}=\frac{2}{5}$, $ML=\frac{4}{5}$. Треугольники AFL и ACD подобны и $\frac{AF}{AL}=\frac{AD}{AC}$, $\frac{0{,}25\cdot\sqrt{29}}{AL}=\frac{5}{\sqrt{29}}$, $AL=\frac{29}{20}$.

Значит,

$$s=AB\cdot(AL-ML)+\frac{1}{2}KM\cdot ML=2\left(\frac{29}{20}-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{5}=$$
$$=2{,}9-0{,}8=2{,}1.$$

Ответ: 0,21.

25.3. Случайная величина S равномерно распределена на отрезке $[1;\ a]$, $a>1$. Найдите все значения a, при которых:

а) $P(1\leqslant S\leqslant 2)=0{,}5$;
б) $P(1\leqslant S\leqslant 2)=0{,}25$;
в) $P(1\leqslant S\leqslant 2)=0{,}05$;
г) $P(1\leqslant S\leqslant 2)=0{,}999$;
д) $P(2\leqslant S\leqslant 3)=1$;
е) $P(2\leqslant S\leqslant 3)=0$.

Решение. а) Рассмотрим случай «малых» a. Точнее, пусть $1<a\leqslant 2$. Тогда все значения с.в. S принадлежат отрезку $[1;\ a]$, который содержится в отрезке $[1;\ 2]$. Значит, значения с.в. S принадлежат и отрезку $[1;\ 2]$, т. е. событие «$1\leqslant S\leqslant 2$» достоверно и его вероятность равна 1. Поэтому при $1<a\leqslant 2$ условие задачи не выполняется.

Пусть теперь $a>2$. Тогда $[1;\ 2]\subset[1;\ a]$ и так как распределение равномерно, то вероятность попадания в отрезок $[1;\ 2]$ равна отношению длин

$$P(1\leqslant S\leqslant 2)=\frac{2-1}{a-1}=0{,}5,\ \frac{1}{a-1}=\frac{1}{2},\ a=3.$$

б) $\frac{1}{a-1}=\frac{1}{4}$, $a=5$;

в) $\frac{1}{a-1}=\frac{1}{20}$, $a=21$;

г) $\frac{1}{a-1}=\frac{999}{1000}$, $a=2\frac{1}{999}$.

д) Интуитивно, раз S «размазана» равномерно по отрезку $[1;\ a]$, то вероятность попадания значений в отрезки, «близкие» к 1, положительна. Значит, событие «$2 \leqslant S \leqslant 3$» не может иметь единичную вероятность. Формально, допустим, что $P(2 \leqslant S \leqslant 3) = 1$. Тогда $P(1 \leqslant S < 2) = 0$, но (см. выше) эта вероятность равна или 1, или $\frac{1}{a-1} > 0$. Противоречие. Таких значений a не существует.

е) Так же как и в пункте «а» можно проверить, что $P(2 \leqslant S \leqslant 3) = \frac{a-2}{a-1}$ при $a > 2$ и что $P(2 \leqslant S \leqslant 3) = 0$ при $1 < a \leqslant 2$.

Ответ: а) 3; б) 5; в) 21; г) $2\frac{1}{999}$; д) таких значений a не существует; е) $1 < a \leqslant 2$.

25.10. Найдите вероятность для нормально распределенной случайной величины:

а) $P(0 \leqslant T \leqslant 1)$, $T \sim N(0; 2)$;

б) $P(1 \leqslant T \leqslant 4)$, $T \sim N(0; 2)$;

в) $P(-1 \leqslant R \leqslant 6)$, $R \sim N(3; 2)$;

г) $P(1 \leqslant R \leqslant 7)$, $R \sim N(3; 2)$;

д) $P(-3 \leqslant Q \leqslant -2)$, $Q \sim N(-2{,}5; 0{,}5)$;

е) $P(Q \leqslant -1{,}5)$, $Q \sim N(-2{,}5; 0{,}5)$.

Решение. Во всех случаях используем, что

$T \sim N(a; \sigma) \Leftrightarrow T = \sigma S + a$, где S — стандартная нормально распределенная с.в. Для нее вероятности попадания в отрезок $[c; d]$ приблизительно равны $\Phi(d) - \Phi(c)$, а значения функции Лапласа $y = \Phi(x)$ вычисляются по таблицам.

а) Здесь $a = 0$, $\sigma = 2$, $T = 2S$ и

$$P(0 \leqslant T \leqslant 1) = P(0 \leqslant 2S \leqslant 1) = P(0 \leqslant S \leqslant 0{,}5) \approx$$
$$\approx \Phi(0{,}5) - \Phi(0) = \Phi(0{,}5) \approx 0{,}1915.$$

б) Аналогично пункту «а»:

$$P(1 \leqslant T \leqslant 4) = P(0{,}5 \leqslant S \leqslant 2) \approx \Phi(2) - \Phi(0{,}5) \approx$$
$$\approx 0{,}4772 - 0{,}1915 = 0{,}2857.$$

в) Здесь $a = 3$, $\sigma = 2$, $R = 2S + 3$ и

$$P(-1 \leqslant R \leqslant 6) = P(-1 \leqslant 2S + 3 \leqslant 6) = P(-2 \leqslant S \leqslant 1{,}5) \approx$$
$$\approx \Phi(1{,}5) + \Phi(2) = 0{,}4332 + 0{,}4772 = 0{,}9104.$$

Аналогично решаются пункты «г» и «д».

е) Здесь $a = -2{,}5$, $\sigma = 0{,}5$, $R = 0{,}5S - 2{,}5$ и

$$P(Q \leqslant -1{,}5) = P(0{,}5S - 2{,}5 \leqslant -1{,}5) = P(-\infty < S \leqslant 2) \approx$$
$$\approx \Phi(2) - (-0{,}5) \approx 0{,}9772.$$

Ответ: а) 0,1915; б) 0,2857; в) 0,9104; г) 0,8185; д) 0,6826; е) 0,9772.

26.5. После успешного прохождения первого уровня компьютерной игры на мониторе запускается лотерейный барабан, в котором 2 белых и 8 черных одинаковых по размеру шаров. Если выпадает белый шар, то игрок переходит сразу на третий уровень и это — «успех». Если выпадает черный шар, то игрок переходит на второй уровень и это — «неудача». Требуется применить формулу

$$P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

для нахождения вероятности того, что число k «успехов» не менее, чем a, и не более, чем b.

Найдите:

а) вероятность p «успеха»;

б) вероятность q «неудачи»;

в) среднее np для $n = 10\ 000$ повторений;

г) среднее квадратическое $\sqrt{npq}$;

д) границы a и b при отклонении k от np не более, чем на 40;

е) вероятность $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$.

Решение.

а)—д) $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $np = 2000$; $npq = 1600$; $\sqrt{npq} = 40$; $a = 1960$, $b = 2040$;

е)

$$P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{2040-2000}{40}\right) - \Phi\left(\frac{1960-2000}{40}\right) =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0{,}6826.$$

26.9. В каждом из 150 контейнеров лежат 10 одинаковых по виду коробок, в 4 из которых — синие новогодние шары, а в 6 — красные. Из каждого контейнера наудачу выбирают одну коробку. Найдите вероятность того, что в 150 выбранных коробках синих шаров будет:

а) меньше 40; в) не больше 60; д) от 54 до 66;

б) меньше 80; г) не меньше 60; е) от 48 до 72.

Решение. Здесь $n = 150$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $np = 60$, $npq = 36$, $\sqrt{npq} = 6$.

а) $P_n(k < 40) = P_n(0 \leqslant k \leqslant 39) \approx \Phi\left(\frac{39-60}{6}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{6}\right)$. Оба числа $\frac{39-60}{6}$, $\frac{0-60}{6}$ меньше -3, и значения функции Лапласа в них практически совпадают с $-0{,}5$. Значит, искомая вероятность практически равна 0.

б) $P_n(k < 80) = P_n(0 \leqslant k \leqslant 79) \approx \Phi\left(\frac{79-60}{6}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{6}\right)$. Число $\frac{79-60}{6}$ больше 3 и $\Phi\left(\frac{79-60}{6}\right) \approx 0{,}5$, а число $\frac{0-60}{6}$ меньше -3 и $\Phi\left(\frac{0-60}{6}\right) \approx -0{,}5$. Значит, искомая вероятность практически равна 1.

в)

$$P_n(k \leqslant 60) = P_n(0 \leqslant k \leqslant 60) \approx \Phi\left(\frac{60-60}{6}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{6}\right) =$$
$$= \Phi(0) - \Phi(-10) \approx 0{,}5.$$

г) Аналогично пункту «в».

д) $P_n(54 \leqslant k \leqslant 66) \approx \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$.

е)

$$P_n(48 \leqslant k \leqslant 72) \approx \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) =$$
$$= 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Ответ: а) практически 0; б) практически 1; в) 0,5; г) 0,5; д) 0,6826; е) 0,9544.

26.10. В каждом из 150 контейнеров лежат 10 одинаковых по виду коробок, в 4 из которых — синие новогодние шары, а в 6 — красные. Из каждого контейнера наудачу выбирают одну коробку. По формуле

$$P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

найдите вероятность того, что в 150 выбранных коробках синих шаров будет ровно:

а) 6; в) 136; д) 64;

б) 36; г) 60; е) 52.

Решение. Как и выше, $n = 150$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $np = 60$, $npq = 36$, $\sqrt{npq} = 6$. В задаче 26.9 мы видим, что число k «успехов» сконцентрировано вокруг среднего значения $np = 60$. Например, вероятность наступления неравенства $48 \leqslant k \leqslant 72$ с точностью в 0,05 равна 1. Значит, и без выписывания формул ясно, что вероятности в а), б) и в) практически равны 0.

г)

$$P_{150}(k=60) \approx \Phi\left(\frac{60+0{,}5-60}{6}\right) - \Phi\left(\frac{60-0{,}5-60}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{12}\right) \approx$$
$$\approx 2\Phi(0{,}08) \approx 0{,}0638.$$

д)

$$P_{150}(k=64) \approx \Phi\left(\frac{4+0{,}5}{6}\right) - \Phi\left(\frac{4-0{,}5}{6}\right) \approx \Phi(0{,}75) - \Phi(0{,}58) \approx$$
$$\approx 0{,}0544.$$

е)

$$P_{150}(k=52) \approx \Phi\left(\frac{-8+0{,}5}{6}\right) - \Phi\left(\frac{-8-0{,}5}{6}\right) \approx \Phi(1{,}42) - \Phi(1{,}25) \approx$$
$$\approx 0{,}0278.$$

Как видим, вероятности $P_n(k = d)$ того, что число «успехов» в точности равно фиксированному числу, весьма невелики и составляют всего несколько процентов. По этой причине, значительно больший практический смысл имеет нахождение вероятностей $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$.

Ответ: а)—в) практически 0; г) 0,0638; д) 0,0544; е) 0,0278.

Дополнительные задачи

4. Проводят повторения испытания Бернулли с исходами У («успех») и Н («неудача»). После первого появления «успеха» испытания прекращают. Значение случайной величины G в таком случае равно номеру последнего испытания. Пусть p — вероятность «успеха», $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи». Найдите вероятность события:

а) $G = 1$; в) $G = 3$; д) $G = 100$;
б) $G = 2$; г) $G = 4$; е) $G = k$.

Решение. а) Событие «$G = 1$» означает, что в первый же раз наступил «успех», вероятность чего по условию равна p.

б) Событие «$G = 2$» означает, что в первый раз была «неудача», а во второй — «успех».

Так как повторения независимы, то

$$P(\text{Н, У}) = P(\text{Н}) \cdot P(\text{У}) = qp.$$

в) $P(\text{Н, Н, У}) = P(\text{Н}) \cdot P(\text{Н}) \cdot P(\text{У}) = q^2p$.

г) $P(\text{Н, Н, Н, У}) = P(\text{Н}) \cdot P(\text{Н}) \cdot P(\text{Н}) \cdot P(\text{У}) = q^3p$.

д) $P(\underbrace{\text{Н}, \ldots, \text{Н}}_{99}, \text{У}) = \underbrace{P(\text{Н}) \cdot \ldots \cdot P(\text{Н})}_{99} \cdot P(\text{У}) = q^{99}p$.

е) $P(\underbrace{\text{Н}, \ldots, \text{Н}}_{k-1}, \text{У}) = \underbrace{P(\text{Н}) \cdot \ldots \cdot P(\text{Н})}_{k-1} \cdot P(\text{У}) = q^{k-1}p$.

Ответ: а) p; б) qp; в) q^2p; г) q^3p; д) $q^{99}p$; е) $q^{k-1}p$.

7. Из набора домино берут одну доминошку. Если это не «дубль», то ее возвращают обратно и снова берут одну доминошку. Если это «дубль», то повторения прекращают. Для с.в. G «выбор до первого появления дубля»:

а) укажите вероятность «успеха» и «неудачи»;

б) вычислите вероятность события «$G = 2$»;

в) вычислите вероятность события «$G = 3$»;

г) составьте таблицу распределения;

д) проверьте, что сумма вероятностей во второй строке таблицы действительно равна 1;

е) найдите наименьшее значение k, при котором вероятность события «$G = k$» меньше 0,01.

Решение. а) Найдем число всех костей домино (доминошек). Если на доминошке есть «6», то на ее другой половине может стоять 0, 1, ..., 5, 6. Всего 7 вариантов. Если на доминошке есть «5», то на ее другой половине также может стоять 0, 1, ..., 5, 6, но «5 : 6» уже посчитано ранее. Всего $7 - 1 = 6$ вариантов. Если на доминошке есть «4», то на ее другой половине вновь может стоять 0, 1, ..., 5, 6, но «4 : 5» и «4 : 6» уже посчитаны. Всего $7 - 2 = 5$ вариантов, и т. д. Всего получается $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ доминошек.

Из них 7 «дублей»: 6 : 6, 5 : 5, ..., 1 : 1, 0 : 0. Итак, вероятность p «успеха», т. е. вероятность появления «дубля» при одном выборе, равна $\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$, а вероятность q «неудачи» равна $\frac{3}{4}$.

б)

$$P(\ G=2\ )=P(\text{Н, У})=P(\text{Н})\cdot P(\text{У})=qp=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}=0{,}1875.$$

в)

$$P(\ G=3\ )=P(\text{Н, Н, У})=P(\text{Н})\cdot P(\text{Н})\cdot P(\text{У})=q^2p=$$
$$=\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}\approx 0{,}141.$$

г)

Значения G	1	2	3	4	...	k	...
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$	...	$\frac{3^{k-1}}{4^k}$	...

д)

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{256}+\ldots+\frac{3^{k-1}}{4^k}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\ldots\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=1.$$

е) Следует найти наименьшее натуральное решение неравенства $P(«G = k») < 0{,}01$:

$$q^{k-1}p<0{,}01,\ \frac{3^{k-1}}{4^k}<0{,}01,\ \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}<0{,}04.$$

Это показательное неравенство, и без того или иного вида калькуляции решить его затруднительно. Проще всего на калькуляторе поочередно вычислять $0{,}75^y$ и отслеживать поведение первых двух цифр после запятой. Итак, $0{,}75^2=0{,}5625$, ..., $0{,}75^{11}=0{,}042235...$, ..., $0{,}75^{12}=0{,}031676...$.

Значит, $k-1=12$, $k=13$.

Ответ: а) $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$; б) 0,1875; в) 0,141; д) 1; е) 13.

Глава 6

28.5. б) Решите уравнение $3^{x-1}\cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}}=225.$

Решение.

$$3^{x-1}\cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}}=9\cdot 25;\ \frac{3^{x-1}}{9}\cdot\frac{625^{\frac{x-2}{x-1}}}{25}=1;\ 3^{x-3}\cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}-\frac{1}{2}}=1;$$

$$3^{x-3}\cdot 625^{\frac{x-3}{2(x-1)}}=1;\ \left(3\cdot 25^{\frac{1}{x-1}}\right)^{x-3}=1;\ x-3=0;\ x=3.$$

Ответ: 3.

28.10. б) Решите уравнение

$$(\sin x+\cos x)\left(x-8\sqrt{2x-15}\right)=0.$$

Решение. 1) $\sin x + \cos x = 0$; $\operatorname{tg} x + 1 = 0$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n.$

2) $x-8\sqrt{2x-15}=0; \left(8\sqrt{2x-15}\right)^2=x^2$; $x^2 - 128x + 960 = 0$; $x_1 = 8$, $x_2 = 120$.

Оба эти корня (проверка) удовлетворяют уравнению $8\sqrt{2x-15}=x.$

3) ОДЗ уравнения задается неравенством $2x - 15 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 7{,}5$. Из серии $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$ этому неравенству удовлетворяют значения, получающиеся при $n = 3, 4, 5, \dots$.

Ответ: 8, 120, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n = 3, 4, 5, \dots$.

28.13. в) Решите уравнение $\sqrt{17-2x}=3{,}5+4(3x-1)^3.$

Решение. Функция $y=\sqrt{17-2x}$ убывает, а функция $y = 3{,}5 + 4(3x - 1)^3$ возрастает, значит, заданное уравнение, если имеет корень, то только один. Подбором находим этот единственный корень: $x=\frac{1}{2}.$

28.14. г) Решите уравнение $5-\left|2x^2-15x+7\right|=\frac{5}{\cos^2(\pi x)}.$

Решение. $5 - |2x^2 - 15x + 7| \leqslant 5$, $\frac{5}{\cos^2(\pi x)}\geqslant 5.$ Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 15x + 7 = 0, \\ \cos^2(\pi x) = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $x_1 = 7$, $x_2 = 0{,}5$. Число 7 является корнем второго уравнения системы, а число 0,5 — нет.

Ответ: 7.

28.15. а) Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 13) = \cos\frac{5\pi x}{2} + \sin\frac{3\pi x}{4}.$$

Решение. Имеем:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 13) = \log_{\frac{1}{3}}((x-2)^2 + 9) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2;$$

$$\cos\frac{5\pi x}{2} + \sin\frac{3\pi x}{4} \geqslant -1 - 1 = -2.$$

Значит, корнями уравнения могут служить такие и только такие числа, при которых и левая, и правая части исходного уравнения обращаются в -2. Левая часть обращается в -2 при $x = 2$; при этом значении и правая часть обращается в -2.

Ответ: 2.

28.16. б) Решите уравнение

$$(x-7)^2 + \log_5\sqrt{x^2 - 14x + 74} = 1.$$

Решение. Имеем:

$$(x-7)^2 \geqslant 0,$$
$$\log_5\sqrt{x^2 - 14x + 74} = \log_5\sqrt{(x-7)^2 + 25} \geqslant \log_5\sqrt{25} = 1.$$

Значит, $(x-7)^2 + \log_5\sqrt{x^2 - 14x + 74} \geqslant 1$, а знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$(x-7)^2 = 0, \log_5\sqrt{x^2 - 14x + 74} = 1;$$

оба этих равенства верны только при $x = 7$.

Ответ: 7.

28.27. а) Решите уравнение

$$\sin x\cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0.$$

Решение. Имеем: $\frac{1}{2}\sin 2x - 6(\sin x - \cos x) + 6 = 0$. Введем новую переменную $y = \sin x - \cos x$; тогда

$$y^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x;\ \sin 2x = 1 - y^2.$$

И задача сводится к решению уравнения $\frac{1}{2}(1 - y^2) - 6y + 6 = 0$, откуда находим: $y_1 = 1$, $y_2 = -13$. Второе значение нас явно не устраивает, значит, остается решить простое уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

29.15. а) Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{\operatorname{ctg} x}\cdot\sin 2y = 0,\\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5.\end{cases}$

Решение. Задача сводится к решению совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\operatorname{ctg} x = 0,\\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\sin 2y = 0,\\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5.\end{cases}$$

Решим первую систему. Из первого уравнения находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; тогда $\sin 2x = 0$ и второе уравнение системы принимает вид $\cos y = 0{,}5$, т. е. $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Итак, первая система совокупности имеет такие решения:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ n,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Решим вторую систему. Из первого уравнения находим $y = \frac{\pi n}{2}$; тогда второе уравнение системы принимает вид $\sin 2x + \cos\frac{\pi n}{2} = 0{,}5$.

Для выражения $\cos\frac{\pi n}{2}$ есть три возможности.

1) $\cos\frac{\pi n}{2} = 0$; это будет при $n = 2k - 1$. Тогда уравнение $\sin 2x + \cos\frac{\pi n}{2} = 0{,}5$ принимает вид $\sin 2x = 0{,}5$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.

Итак, в первом случае получаем такие решения: $\left((-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)$, $n,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\cos\frac{\pi n}{2} = 1$; это будет при $n = 4k$. Тогда уравнение $\sin 2x + \cos\frac{\pi n}{2} = 0{,}5$ принимает вид $\sin 2x = -0{,}5$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.

Итак, во втором случае получаем такие решения: $\left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ 2\pi k\right)$, $n,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

3) $\cos\frac{\pi n}{2} = -1$; это будет при $n = \pm 2,\ \pm 6,\ \pm 10,\ \ldots$. Тогда уравнение $\sin 2x + \cos\frac{\pi n}{2} = 0{,}5$ принимает вид $\sin 2x = 1{,}5$, и в третьем случае решений нет.

Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)$, $\left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ 2\pi k\right)$, $n,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

29.19. б) Шифр замка выражается трехзначным числом. Сумма его цифр равна 12, а сумма квадратов его цифр равна 56. Если к задуманному числу прибавить 168, то в результате цифра сотен увеличится в 2 раза, а цифры десятков и единиц — уменьшатся каждая в 2 раза. Найдите шифр замка.

Решение. Искомое число имеет вид $100x + 10y + z$. Согласно двум первым условиям, $x + y + z = 12$, $x^2 + y^2 + z^2 = 56$. Третье условие означает следующее:

$$100x+10y+z+168=100\cdot 2x+10\cdot\frac{y}{2}+\frac{z}{2}.$$

В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ x^2+y^2+z^2=56, \\ 200x-10y-z=336. \end{cases}$$

А далее изящнее рассуждать так. Из условия задачи следует, что z — четное число, т. е. для z теоретически есть 5 возможностей: $z = 0, 2, 4, 6, 8$. Последняя возможность сразу отпадает, поскольку $8^2 > 56$. И еще: поскольку y тоже четное число, то из первого уравнения системы следует, что и x — четное число.

Предположим, что $z = 0$. Тогда второе уравнение системы выглядит так: $x^2 + y^2 = 56$. Если $x = 2, 4, 6$, то получаем, соответственно, $y^2 = 52$, $y^2 = 40$, $y^2 = 20$; все это нас не устраивает.

Предположим, что $z = 2$. Тогда второе уравнение системы выглядит так: $x^2 + y^2 = 48$. Если $x = 2, 4, 6$, то получаем, соответственно, $y^2 = 44$, $y^2 = 32$, $y^2 = 12$; все это нас не устраивает.

Предположим, что $z = 4$. Тогда второе уравнение системы выглядит так: $x^2 + y^2 = 40$. Если $x = 2, 4, 6$, то получаем, соответственно, $y^2 = 36$, $y^2 = 24$, $y^2 = 4$. Значит, либо $y = 6$, либо $y = 2$. Для искомого шифра мы получили две возможности: 264 или 624. Но смотрите: $264 + 168 = 432$ — это соответствует условию задачи (если к задуманному числу прибавить 168, то в результате цифра сотен увеличится в 2 раза, а цифры десятков и единиц уменьшатся каждая в 2 раза), а $624 + 168 = 792$ — это не соответствует указанному условию.

Предположим, что $z = 6$. Тогда второе уравнение системы выглядит так: $x^2 + y^2 = 20$. Если $x = 2, 4, 6$, то получаем, соответственно, $y^2 = 16$, $y^2 = 4$. Значит, либо $y = 4$, либо $y = 2$. Для искомого шифра мы получили еще две возможности: 246 или 426. Ни то, ни другое число не удовлетворяет третьему условию задачи.

Ответ: 264.

30.8. е) Решите неравенство $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x \geqslant 4$.

Решение. Заметим, что $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, и введем новую переменную $y=\left(2-\sqrt{3}\right)^x$. Относительно новой переменной заданное неравенство примет вид $y+\dfrac{1}{y}\geqslant 4$, решив которое, получим: $y\leqslant 2-\sqrt{3}$; $y\geqslant 2+\sqrt{3}$. Остается решить совокупность двух неравенств:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^x\leqslant 2-\sqrt{3};\ \left(2-\sqrt{3}\right)^x\geqslant 2+\sqrt{3}.$$

Из первого неравенства находим: $x\geqslant 1$ (мы учли, что $0<2-\sqrt{3}<1$). Поработаем со вторым неравенством:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^x\geqslant 2+\sqrt{3};\ \left(2-\sqrt{3}\right)^x\geqslant\frac{1}{2-\sqrt{3}};$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^x\geqslant\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1};\ x\leqslant -1.$$

Ответ: $x\leqslant -1$; $x\geqslant 1$.

30.28. б) Решите неравенство $|x^2+3x-5|<|x^2-7x+5|$.

Решение. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, возведение их в квадрат является равносильным преобразованием неравенства. Имеем:

$$|x^2+3x-5|^2<|x^2-7x+5|^2;$$
$$(x^2+3x-5)^2<(x^2-7x+5)^2;$$
$$(x^2+3x-5)^2-(x^2-7x+5)^2<0;$$
$$((x^2+3x-5)-(x^2-7x+5))((x^2+3x-5)+(x^2-7x+5))<0;$$
$$(10x-10)(2x^2-4x)<0;$$
$$x<0;\ 1<x<2.$$

Ответ: $x<0$, $1<x<2$.

30.33. в) Решите неравенство $(x-5)\sqrt{\log_2(x-2)}\geqslant 0$.

Решение. Поскольку $\sqrt{\log_2(x-2)}\geqslant 0$, то заданное неравенство сводится к неравенству $x-5\geqslant 0$. При $x\geqslant 5$ выполняется неравенство $\log_2(x-2)\geqslant 0$, задающее ОДЗ исходного неравенства. Следует также учесть, что заданное неравенство выполняется и в том случае, когда $\log_2(x-2)=0$, т. е. при $x=3$.

Ответ: $x = 3$, $x \geqslant 5$.

30.34. Решите неравенство:

а) $(x^2 + 4x)(\mathrm{ctg}^2\, x + 3^{x-1}) \leqslant 0$;

б) $\sqrt{\cos x - 1} \leqslant x^2 - 36$;

в) $6\log_3|x - 1| < 14 + 2x - x^2$.

Решение. а) Поскольку выражение во вторых скобках положительно (при допустимых значениях переменной, т. е. при $x \neq \pi n$), то получаем: $x^2 + 4x \leqslant 0$, $-4 \leqslant x \leqslant 0$. Но в полученный отрезок попадают два недопустимых значения переменной: $-\pi$ и 0, их следует исключить из ответа.

б) ОДЗ данного неравенства задается условием $\cos x \geqslant 1$, откуда следует, что $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$. Далее, $x^2 - 36 \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant -6$, $x \geqslant 6$. Все значения из серии $x = 2\pi n$ попадают в полученное объединение двух лучей, кроме значения $x = 0$.

в) Перепишем данное неравенство в виде:

$$3\log_3|x - 1|^2 < 15 - |x - 1|^2$$

и введем новую переменную $t = |x - 1|^2$. Тогда заданное неравенство примет вид $3\log_3 t < 15 - t$. Заметим, что при $t = 9$ последнее неравенство превращается в равенство $6 = 6$. Поскольку функция $y = 3\log_3 t$ возрастает, а функция $y = 15 - t$ убывает, то решение неравенства $3\log_3 t < 15 - t$ таково: $0 < t < 9$. Остается решить неравенство $0 < (x - 1)^2 < 9$.

Ответ: а) $-4 \leqslant x < -\pi$, $-\pi < x < 0$; б) $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$; в) $-2 < x < 1$, $1 < x < 4$.

31.10. а) Для всех значений параметра a решите неравенство $(a - 2)x^2 - 4x - 3 \geqslant 0$.

Решение. При $a = 2$ получаем $-4x - 3 \geqslant 0$, $x \leqslant -0{,}75$.

При $a \neq 2$ получаем квадратное неравенство с $\frac{D}{4} = 2^2 + 3(a - 2) = 3a - 2$. Если $\frac{D}{4} = 3a - 2 < 0$, $a < \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} < 2$, то корней нет, ветви параболы $y = (a - 2)x^2 - 4x - 3$ направлены вниз, вся парабола лежит ниже оси абсцисс и неравенство не имеет решений.

Если $\frac{D}{4} = 3a - 2 \geqslant 0$, $\frac{2}{3} \leqslant a < 2$, то ветви параболы направлены вниз, корни (корень) есть, и решением неравенства являются все числа из отрезка между корнями.

Если $a > 2$, то ветви параболы направлены вверх, корни есть, и решением неравенства являются все числа, не лежащие между корнями.

Учтем, что

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{3a-2}}{a-2} < x_2 = \frac{2+\sqrt{3a-2}}{a-2}$$

при $a > 2$, $x_1 \geqslant x_2$ при $\frac{2}{3} \leqslant a < 2$, и подведем итоги:

$a < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \leqslant a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
$\varnothing$	$x_2 \leqslant x \leqslant x_1$	$x \leqslant -0{,}75$	$x \leqslant x_1$; $x \geqslant x_2$

31.23. При каких значениях параметра a вершина параболы $y = (2a - 1)x^2 - 4x + 3$ лежит внутри:

а) первого координатного угла;

б) третьего координатного угла;

в) второго координатного угла;

г) четвертого координатного угла?

Решение. «Внутри» здесь означает, что координатные оси следует исключить. Сразу же отметим, что $a \neq 0{,}5$, так как речь в задаче идет *о параболе*. Находим координаты вершины:

$$x_{\text{верш}} = -\frac{-4}{2(2a-1)} = \frac{2}{2a-1},\ y_{\text{верш}} = y(x_{\text{верш}}),$$

$$y_{\text{верш}} = (2a-1)\frac{4}{(2a-1)^2} - 4\cdot\frac{2}{2a-1} + 3 = \frac{4-8+3(2a-1)}{2a-1} = \frac{6a-7}{2a-1}.$$

а) Имеем: $x_{\text{верш}} > 0$, $\frac{2}{2a-1} > 0$, $2a - 1 > 0$, $a > \frac{1}{2}$. С учетом этого получаем $y_{\text{верш}} > 0$, $\frac{6a-7}{2a-1} > 0$, $6a - 7 > 0$, $a > \frac{7}{6}$. Значит, абсцисса и ордината вершины положительны при $a > \frac{7}{6}$ и только при таких значениях a.

б) Аналогично а) получаем $x_{\text{верш}} < 0$, $a < \dfrac{1}{2}$ и при этом $y_{\text{верш}} < 0$, $a > \dfrac{7}{6}$. Значит, таких значений a нет.

в)

$$\begin{cases} x_{\text{верш}} < 0, \\ y_{\text{верш}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2a-1} < 0, \\ \dfrac{6a-7}{2a-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1 < 0, \\ 6a-7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{2}, \\ a < \dfrac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{2}.$$

г) Остался один случай, ответ в котором ясен: $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{7}{6}$.

Ответ: а) $a > \dfrac{7}{6}$; б) таких значений a нет; в) $a < 0,5$; г) $0,5 < a < \dfrac{7}{6}$.

31.24. а) Найдите все положительные значения параметра a, при которых уравнение

$$(\log_5 a)x^2 - (2\log_5 a - 3)x + \log_5 a - 2,5 = 0$$

имеет единственный корень.

Решение. При $a = 1$ получаем уравнение $3x - 2,5 = 0$ с единственным корнем. Это значение параметра удовлетворяет условию.

При $a > 0$, $a \neq 1$ получаем квадратное уравнение с коэффициентами $A = \log_5 a \neq 0$, $B = -(2A - 3)$, $C = A - 2,5$. Его дискриминант равен

$$(2A - 3)^2 - 4A(A - 2,5) = 4A^2 - 12A + 9 - 4A^2 + 10A = \\ = 9 - 2A.$$

Это уравнение имеет единственный корень при

$$9 - 2A = 0,\ \log_5 a = 4,5,\ a = 5^{4,5},\ a = 625\sqrt{5}.$$

Ответ: $a = 1$, $a = 625\sqrt{5}$.

31.26. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 6x^2 + 3 = a$:

а) не имеет корней;

б) имеет четыре корня?

Решение. Относительно $t = x^2$, $t \geqslant 0$, получаем $t^2 - 6t + 3 = a$, $(t - 3)^2 = 6 + a$.

Если $6 + a < 0$, $a < -6$, то корней нет.

Если $6 + a = 0$, $a = -6$, то корень (относительно t) один, а относительно x есть два корня $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

Если $6 + a > 0$, $a > -6$, то $t = 3 \pm \sqrt{6+a}$ и условие пункта «б» выполняется только при $3 - \sqrt{6+a} > 0$, $9 > 6 + a$, $a < 3$.

Задачу можно решить и геометрически, построив график параболы $y = t^2 - 6t + (3 - a)$ при $a > -6$. Абсцисса ее вершины положительна: $t = 3$, ордината отрицательна. Ветви направлены вверх. Она пересечет ось Ox в точках с положительными абсциссами, если точка ее пересечения с осью ординат лежит выше начала координат (рис. 21), т. е. если $y(0) > 0$, $3 - a > 0$, $a < 3$.

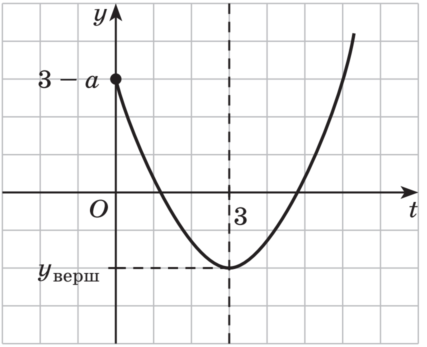


Рис. 21

Ответ: а) $a < -6$; б) $-6 < a < 3$.

31.28. а) При каких значениях параметра a уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = a$$

имеет не менее трех корней?

б) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 - 12x + 1 = a$$

имеет ровно три корня?

Решение. а) Построим график левой части уравнения, т. е. функции $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$. Для этого найдем производную: $y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x - 1)(x + 2)$. Составим таблицу исследования функции на монотонность:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
y'	—	0	+	0	—	0	+
y	↘	т. min	↗	т. max	↘	т. min	↗
		$y(-2) = -32$		$y(0) = 0$		$y(1) = -5$	

Строим график функции (рис. 22), после чего проводим его горизонтальные сечения прямыми $y = a$, $-\infty < a < +\infty$, и отбираем значения a, соответствующие условию задачи. В данном случае, это $y(1) \leqslant a \leqslant y(0)$. При $y(0) < a$, $y(-2) < a < y(1)$ уравнение имеет два корня, при $a = y(-2)$ — единственный корень, при $a < y(-2)$ не имеет корней.

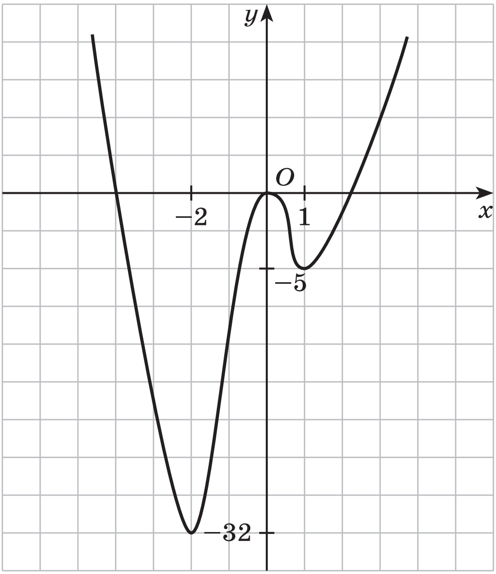


Рис. 22

б) Построим график левой части, т. е. функции $y = x^3 - 12x + 1$. Для этого найдем производную:

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$. Составим таблицу исследования функции на монотонность:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
y'	+	0	—	0	+
y	↗	т. max	↘	т. min	↗
		$y(-2) = 17$		$y(2) = -15$	

Строим график функции (рис. 23), после чего проводим его горизонтальные сечения прямыми $y = a$, $-\infty < a < +\infty$, и отбираем значения a, соответствующие условию задачи. В данном случае это $y(2) \leqslant a \leqslant y(-2)$. При $a > y(-2)$, $a < y(2)$ уравнение имеет единственный корень, при $a = y(-2)$, $a = y(2)$ — два корня.

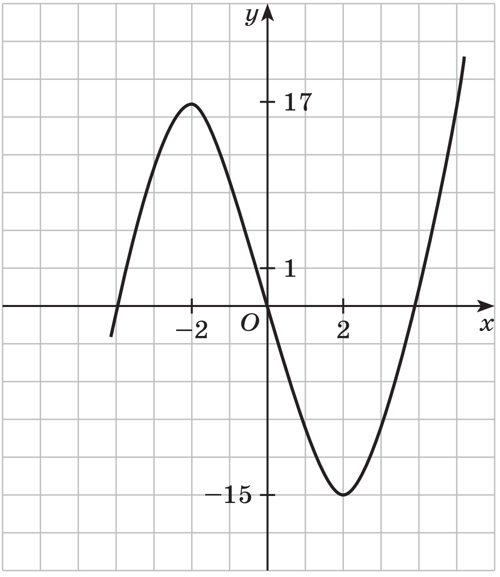


Рис. 23

Ответ: а) $-5 \leqslant a \leqslant 0$; б) $-15 < a < 17$.

32.8. Среднее всех отметок ученика по физкультуре равно 3,8. Ученик решил улучшить это среднее. Для этого он планирует в электронном журнале «удвоить» «пятерки»: к каждой уже имеющейся «пятерке» дописать еще одну.

а) Вычислите среднее отметок $\underbrace{5,\ \ldots,\ 5}_{7},\ 1,\ 1,\ 1.$

б) Приведите пример того же среднего 3,8 для отметок без «единиц».

в) Приведите пример того же среднего 3,8 для отметок без «пятерок».

г) Докажите, что наибольшая возможная частота «пятерок» равна 0,7.

д) Докажите, что среднее значение новых отметок есть дробно-линейная функция от частоты «пятерок» в первоначальном наборе отметок.

е) Найдите наибольшее возможное значение среднего новых отметок.

Решение. а) По определению получаем $\dfrac{7\cdot 5+3}{10}=3{,}8.$

б) $\underbrace{5,\ \ldots,\ 5}_{4},\ 4,\ 4,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2.$

в) $\underbrace{4,\ \ldots,\ 4}_{8},\ 3,\ 3.$

г) Обозначим n число всех отметок ученика и k — число «пятерок». Сумма всех «пятерок» равна $5k$, сумма остальных отметок не меньше, чем $n-k$, а сумма S всех отметок равна $3{,}8n$. Значит, $3{,}8n \geqslant 5k+(n-k)$; $3{,}8n \geqslant 4k+n$; $2{,}8n \geqslant 4k$; $\dfrac{k}{n}\leqslant 0{,}7.$

д) По условию сумма уже выставленных отметок равна $3{,}8n$. После «удвоения» «пятерок» сумма отметок станет равной $3{,}8n+5k$, а их число станет равным $n+k$. Поэтому

$$\bar{x}_{\text{нов}}=\frac{3{,}8n+5k}{n+k}=\frac{3{,}8+5\cdot\dfrac{k}{n}}{1+\dfrac{k}{n}}=\frac{3{,}8+5t}{1+t},\ t=\frac{k}{n},\ 0\leqslant t\leqslant 0{,}7.$$

е) Так как дробно-линейная функция $y=\dfrac{3{,}8+5t}{1+t}$, $t\geqslant 0$, возрастает, то новое среднее $\bar{x}_{\text{нов}}$ будет наибольшим при наибольшем значении частоты $t=\dfrac{k}{n}=0{,}7.$

Получаем ответ:

$$\frac{3{,}8+5\cdot 0{,}7}{1+0{,}7}=\frac{7{,}3}{1{,}7}=\frac{73}{17}=4\frac{5}{17}.$$

32.9. Финансовая компания имела вклады в 20 банках. Среднее вкладов равно 27 млн р. Размер каждого вклада — целое число миллионов рублей, не превосходящее 40. Компания сняла по 1 млн р. с некоторых (быть может, одного) вкладов и закрыла после этого все обнулившиеся вклады.

а) Могла ли половина вкладов быть по 1 млн р.?

б) Могло ли быть 7 вкладов по 1 млн р.?

в) Докажите, что имелось не более 6 вкладов по 1 млн р.

г) Вклады (в млн р.) были следующие: 1, 14, 15, 30, ..., 30; уменьшались вклады в 1, 14 и 15 млн р. Найдите среднее новых вкладов.

д) Вклады (в млн р.) были следующие: $\underbrace{1, \ldots, 1}_{6}$, 14, $\underbrace{40, \ldots, 40}_{13}$; уменьшались все вклады в 1 млн р. Найдите среднее новых вкладов.

е) Докажите, что ответ в пункте «д» — наибольший из всех возможных значений нового среднего.

Решение. а) От противного. Если было 10 вкладов по 1 млн р., то сумма остальных 10 вкладов по условию не превышает $40 \cdot 10 = 400$ млн р., значит, общая сумма не более 410, а среднее — не больше, чем 20,5. Противоречие с условием.

б) Аналогично пункту «а», действуя от противного, получаем, что общая сумма не превышает $40 \cdot 13 + 7$, а среднее — не больше, чем $2 \cdot 13 + \frac{7}{20} < 27$.

в) Это следствие пункта «б»: более 6 вкладов — это, как минимум, 7 вкладов, чего не могло быть.

г) Сумма всех вкладов 1, 14, 15, $\underbrace{30, \ldots, 30}_{17}$ была равна $30 \cdot 18$, а среднее было равно 27. После уменьшения получились вклады 13, 14, $\underbrace{30, \ldots, 30}_{17}$. Их среднее равно

$$\frac{510+27}{19}=\frac{537}{19}=28\frac{5}{19}.$$

д) Сумма всех вкладов $\underbrace{1, \ldots, 1}_{6}$, 14, $\underbrace{40, \ldots, 40}_{13}$ была равна $20 + 40 \cdot 13$, а среднее было равно 27. После уменьшения получились вклады 14, $\underbrace{40, \ldots, 40}_{13}$. Их среднее равно $\dfrac{14+520}{14} = 38\dfrac{1}{7}$.

е) Сумма всех вкладов равнялась 540. Обозначим n количество всех уменьшавшихся вкладов. Сумма новых вкладов равна $540 - n$. Обозначим k количество вкладов в 1 млн р., которые уменьшались, $k \leqslant n$ и $k \leqslant 6$ (см. пункт «в»). Тогда количество новых вкладов равно $20 - k$ и $\bar{x}_{\text{нов}} = \dfrac{540-n}{20-k}$. Но $540 - k \geqslant 540 - n$ и поэтому $\bar{x}_{\text{нов}} \leqslant \dfrac{540-k}{20-k}$. Так как дробно-линейная функция $y = \dfrac{540-t}{20-t}$, $t < 20$, возрастает и так как $k \leqslant 6$, то $\bar{x}_{\text{нов}}$ не больше, чем $y(6) = \dfrac{534}{14} = 38\dfrac{1}{7}$. Значит, ответ, полученный в пункте «д», является наибольшим.

32.10. В ряд через запятые произвольно написали 47 натуральных чисел, для которых среднее арифметическое любых 9 подряд идущих чисел меньше 1,7.

а) Может ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно одна единица?

б) Могут ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно две единицы?

в) Докажите, что среди 9 подряд идущих чисел всегда есть хотя бы три единицы.

г) Какое наименьшее количество единиц может быть среди всех выписанных чисел?

д) Докажите, что сумма всех 47 чисел не больше 83.

е) Приведите пример того, что сумма всех 47 чисел может быть равна 83.

Решение. а) Допустим, что среди 9 чисел есть ровно одна единица. Тогда остальные 8 чисел не меньше двух каждое; общая сумма чисел не меньше $1 + 8 \cdot 2 = 17$ и их среднее не меньше $\dfrac{17}{9} = 1\dfrac{8}{9} > 1{,}8 > 1{,}7$. Противоречие, значит, такой случай невозможен.

б) Допустим, что есть ровно две единицы. Тогда, аналогично пункту «а», среднее не меньше $\frac{1+1+7\cdot2}{9}=1\frac{7}{9}>1{,}7.$ Значит, и такой случай невозможен.

в) Это следствие пунктов «а» и «б».

г) Разобьем первые 45 чисел на 5 групп по 9 подряд идущих чисел. В каждой группе имеется хотя бы три единицы. Поэтому количество единиц среди 45 чисел никак не меньше $3\cdot5=15$. Значит, и среди всех 47 чисел количество единиц не меньше 15. Вот пример, показывающий, что единиц может быть ровно 15:

$$\overbrace{\underbrace{2,\ \dots,\ 2}_{6},\ 1,\ 1,\ 1}^{9},\ \overbrace{\underbrace{2,\ \dots,\ 2}_{6},\ 1,\ 1,\ 1}^{9},\ \dots,\ \overbrace{\underbrace{2,\ \dots,\ 2}_{6},\ 1,\ 1,\ 1}^{9},\ 2,\ 2$$

д) Рассмотрим любые 9 подряд идущих чисел. Их сумма меньше, чем $1{,}7\cdot9=15{,}3$. Так как числа натуральные, то эта сумма не больше 15. Поэтому сумма первых 45 чисел не больше $15\cdot5=75$. Рассмотрим последние 9 чисел. Их сумма также не больше 15. Из них сумма первых 7 чисел не меньше 7. Значит, сумма 46-го и 47-го чисел не больше 8. В итоге общая сумма всех 47 чисел не больше, чем $75+8=83$.

е) Вот пример того, что сумма всех 47 чисел может быть равна именно 83:

$$\overbrace{7,\ \underbrace{1,\ \dots,\ 1}_{8}}^{9},\overbrace{7,\ \underbrace{1,\ \dots,\ 1}_{8}}^{9},\ \dots,\overbrace{7,\ \underbrace{1,\ \dots,\ 1}_{8}}^{9},\ 1,\ 7.$$

Содержание