О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ
ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Мордкович А.Г. (*г. Москва*)

П.1. Концепция построения в общеобразовательной школе курса алгебры 7-9 и курса алгебры и начал математического анализа 10-11.

1.1 В школьном математическом образовании сегодня можно выделить три проблемы, на решение которых должны быть нацелены современные учебники:

1) школьников плохо приучают к самостоятельному добыванию информации, к чтению учебной литературы;

2) выбирая между обучением и развитием, отдают предпочтение более легкому – обучению;

3) увлекаясь формальной стороной дела, гипертрофированно занимаются развитием только левого полушария мозга учащегося.

Решение первой проблемы возможно лишь при условии доступного и подробного изложения материала в учебнике, что может помочь приучить школьников к чтению учебной литературы и к самостоятельному добыванию информации.

Главная задача учителя сегодня – не набить головы учеников информацией, которая якобы понадобится им в дальнейшей жизни, а научить их добывать нужную информацию самостоятельно, научить их осознанному чтению учебной литературы. Для того чтобы они могли самостоятельно читать учебник, нужно, чтобы учебник был написан в первую очередь для них, *для учеников, а не для учителя*. Не секрет, что большинство школьных учебников по математике начиная с 1968 года писались для учителя, потому-то дети их и не читали (да и не должны были читать, коль скоро не для них они писаны). И только в последние годы ситуация начинает меняться к лучшему: многие новые авторские коллективы стараются ориентироваться в первую очередь на учащихся. Триада УУУ – учитель-ученик-учебник – все последние годы была именно такой – по порядку ходов: учитель сообщал информацию непосредственно ученикам, переводя язык учебника с сухого предметного на язык общечеловеческого общения, а учебник находился где-то на заднем плане. Сегодня указанную триаду УУУ следует, на наш взгляд, расшифровывать так: учебник-ученик-учитель. Это не значит, конечно, что учителю отводится роль в массовке, напротив, он должен выступать организатором и вдохновителем непосредственного общения ученика с учебником, направлять и координировать этот процесс, ведь в последующей жизни никто человека за руку вести не будет, всю нужную ему информацию он будет добывать самостоятельно.

На наш взгляд, целесообразно вернуться к старой «киселевско-ларичевской» практике издания учебника и задачника отдельными книгами. Если учебник издается отдельной книгой, у авторов появляется возможность писать его, разумно сочетая литературный и предметный языки, т.е. писать так, как будто бы учитель непосредственно обращается к ученику – читателю учебника. *Литературный язык* – это мотивация, пропедевтика, замечания, разговоры вокруг да около (вплоть до разумного жаргона), размышления о поисках решения той или иной задачи, промежуточное подведение итогов. *Предметный язык* – это строгие определения, формулировки, алгоритмы, доказательства. Активное использование в учебнике литературного языка автоматически делает учебник многословным, а потому значительно большим по объему, чем обычно. Но надо иметь в виду психологический подтекст: краткий учебник провоцирует ученика на заучивание, многословный учебник создает необходимые условия для чтения и понимания.

Решение второй проблемы возможно лишь при условии, что при изложении и структурировании материала учебника используются принципы развивающего обучения. Для решения третьей проблемы нужно помнить, что активное использование наглядности и опоры на интуицию способствует гармоничному развитию обоих полушарий мозга учащегося. Все это должно быть учтено при формулировании концептуальных основ школьной математики.

1.2. Современную концепцию построения в общеобразовательной школе курса алгебры 7-9 и курса алгебры и начал математического анализа 10-11 можно сформулировать в виде трех положений (комментарии даны ниже):

1. *Математика в школе – не наука и даже не основы науки, а учебный предмет.*

2. *Математика в школе – преимущественно гуманитарный учебный предмет.*

3. *Приоритетной содержательно-методической линией курса является функционально-графическая линия.*

Сделаем пояснения к первому положению концепции. В недавние годы считалось, что главное в школьном обучении математике — повысить так называемую научность, что в конечном итоге свелось к перекосу в сторону формализма и схоластики, к бессмысленному заучиванию формул. Когда педагогическая общественность начала это осознавать, стало крепнуть (хотя и не без борьбы) представление о том, что школьная математика не наука, а учебный предмет со всеми вытекающими отсюда последствиями. В учебном предмете не обязательно соблюдать законы математики как науки (например, такие: все начинается с аксиом, нельзя начинать изучение теории без строгого определения основного понятия, все утверждения надо доказывать и т.д.), зачастую более важны законы педагогики и особенно психологии, постулаты теорий развивающего обучения.

В этой связи авторский коллектив учебника прежде всего должен определить свою позицию в самых трудных вопросах – вопросе об определениях (*как и когда* должен вводить учитель то или иное сложное математическое понятие) и в вопросе о выборе уровня строгости изложения в школьном курсе математики.

Если основная задача учителя – обучение, то он имеет право давать формальное определение любого понятия тогда, когда считает нужным. Если основная задача учителя – развитие, то следует продумать выбор места и времени (*стратегия*) и этапы постепенного подхода к формальному определению на основе предварительного изучения понятия на более простых уровнях (*тактика*).Таковых уровней в математике можно назвать три: *наглядно-интуитивный*, когда новое понятие вводится с опорой на интуитивные или образные представления учащихся; *рабочий* или *описательный*, когда от учащегося требуется уметь отвечать не на вопрос «что такое», а на вопрос «как ты понимаешь, что такое…»; *формальный.* Стратегия введения определений сложных математических понятий должна базироваться на положении о том, что выходить на формальный уровень следует при выполнении двух условий:

1) если у учащихся накопился достаточный *опыт* для адекватного восприятия вводимого понятия, причем опыт по двум направлениям – *вербальный* – опыт полноценного понимания всех слов, содержащихся в определении, – и *генетический* – накопленный опыт использования понятия на наглядно-интуитивном и рабочем уровнях;

2) если у учащихся появилась *потребность* в формальном определении понятия.

Что касается генетического опыта, то тут следует почаще обращаться к истории математики. Наиболее сложные понятия математики практически всегда проходили в своем становлении три указанные выше стадии (наглядное представление, рабочий уровень восприятия, формальное определение), причем переход с уровня на уровень зачастую был весьма длительным по времени и болезненным. Не учитывать этого нельзя, ибо то, что в муках рождалось в истории математики, будет мучительным и для сегодняшних детей. Надо предоставить им возможность пережить это, не спеша переходить с уровня на уровень. Поэтому, в частности, существенной ошибкой, на наш взгляд, является традиция многих учебников алгебры для основной школы предлагать определение функции неподготовленным для этого учащимся 7-го класса. Мы как-то привычно не задумываемся над тем, что у семиклассников нет даже необходимого вербального опыта для восприятия понятия функции: слово «зависимость», которое обычно используют для определения функции в 7-м классе, дети полноценно не воспринимают, ибо знакомы лишь с двумя видами зависимости: зависимостью ребенка от родителей и зависимостью ученика от учителя. Но на этих двух «житейских» толкованиях термина понятие функции не построишь. А о генетическом опыте даже и говорить не приходится.

Понятие функции должно «созревать» постепенно с 7-го по 9-й класс. Поначалу, пока изучаются простейшие функции (линейная, обратная пропорциональность, квадратичная – это материал 7-8 классов), следует отказаться от формального определения функции и ограничиться описанием, не требующим заучивания. Ничего страшного в этом нет, о чем свидетельствует и история математики. Многие математические теории строились, развивались, обогащались все новыми и новыми фактами и приложениями, несмотря на отсутствие определения основного понятия этой теории. Можно строить теорию, даже достаточно строгую, и при отсутствии формального определения исходного понятия – во многих случаях это оправданно с методической точки зрения. И только в 9-м классе, проанализировав накопленный учащимися *опыт* в использовании понятия функции и в работе со свойствами функции в курсе алгебры 7-го и 8-го классов, следует попытаться убедить учащихся в том, что у них появилась и *потребность* в формальном определении понятия функции и ее свойств.

Новый математический термин и новое обозначение должны появляться мотивированно, только тогда, когда в них возникает необходимость (в первую очередь в связи с появлением новой математической модели). Немотивированное (несанкционированное) введение нового термина провоцирует запоминание (компонент обучения) без понимания (и, следовательно, без развития).

В качестве еще одного примера рассмотрим формирование довольно сложного для учащихся понятия – понятия равносильности уравнений.

В 7-м классе о равносильности уравнений и о равносильных преобразованиях уравнений речь вообще не должна идти, хотя, разумеется, решаются уравнения (линейные и даже некоторые квадратные), поскольку в рассматриваемом блоке уравнений неравносильных преобразований нет, стало быть нет никакой потребности во введении специального термина, да и соответствующий опыт приобретать не на чем. В начале 8-го класса при изучении алгебраических дробей даются первые представления о рациональных уравнениях и, в частности, о том, что при их решении могут появиться посторонние корни, а потому обязательна проверка найденных корней. Но адекватного опыта у учащихся еще недостаточно для введения элементов теории равносильности. Потом появляются рациональные и простейшие иррациональные уравнения. Обнаруживается, что посторонние корни могут появиться не только за счет освобождения от знаменателей, но и за счет возведения обеих частей уравнения в квадрат. Вот теперь ученики приобрели необходимый опыт и ощутили потребность в его осмыслении, значит, именно здесь наступает благоприятный момент для введения таких понятий, как равносильность уравнений, равносильные и неравносильные преобразования уравнений, посторонние корни, проверка.

Что касается концепции выбора уровня строгости изложения материала, то, на наш взгляд, она должна представлять собой совокупность нескольких положений. Перечислим их.

1) Если некоторое программное утверждение в принципе недоказуемо в школе, то оно честно принимается без доказательства (например, утверждение о том, что все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены) или заменяется (если это возможно) геометрическими иллюстрациями с правдоподобными рассуждениями (например, теорема о достижении непрерывной функцией на отрезке своих наименьшего и наибольшего значений).

2) Если некоторое утверждение в принципе доказуемо в школе, но это доказательство искусственно, технически сложно и не имеет существенного развивающего значения, то оно не приводится. Пример – теорема сложения для тригонометрических функций (в учебнике базового уровня для общеобразовательной школы давать ее доказательство не следует).

3) Если некоторое утверждение в школе в принципе доказуемо, и это доказательство имеет развивающее значение, то оно дается (например, вывод уравнения касательной, вывод правил дифференцирования суммы и произведения – здесь четкие алгоритмы, разбиение доказательства на этапы, приобретение опыта планирования своих действий).

В этой связи сошлюсь на одного из крупнейших российских математиков В.И.Арнольда, который в брошюре «Жесткие и мягкие математические модели» пишет: «Наш мозг состоит из двух полушарий. Левое отвечает за умножение многочленов, языки, шахматы, интриги и последовательности силлогизмов, а правое – за пространственную ориентацию, интуицию и все необходимое в реальной жизни. У «математиков-исчислителей»… гипертрофировано левое полушарие, обычно за счет недоразвития правого… Доминирование математиков этого типа и привело к тому засилью аксиоматически-схоластической математики, особенно в преподавании (в том числе и в средней школе), на которое общество естественно и законно реагирует резко отрицательно. Результатом явилось повсеместно наблюдаемое отвращение к математике и стремление всех правителей отомстить за перенесенные в школе унижения ее изничтожением. Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга» (В.И.Арнольд «Жесткие и мягкие математические модели». М: МЦНМО, 2000). И еще одна цитата из той же брошюры: «Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Выросли целые поколения профессиональных математиков и преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики».

Целиком и полностью поддерживая приведенные высказывания, сформулируем два лозунга, относящиеся ко всей школьной математике, но в первую очередь – к преподаванию в старших классах элементов математического анализа: 1) меньше схоластики, меньше формализма, меньше жестких моделей, меньше опоры на левое полушарие мозга; 2) больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие мозга. Преподавать в постоянном режиме жесткого моделирования легко – не надо думать ни о мотивации, ни о пропедевтике, ни о психолого-педагогических законах обучения и развития. В этом режиме работают ремесленники от математического образования. Использовать же в преподавании режим мягкого моделирования трудно – это требует от учителя творческого подхода.

1.3. Сделаем пояснения ко второму положению концепции (о том, что мате- матика в школе – преимущественно гуманитарный учебный предмет).

Гуманитарный – это значит общекультурный предмет, который позволяет субъекту правильно ориентироваться в окружающей действительности и "ум в порядок приводит". Математика — наука о математических моделях. Модели описываются в математике специфическим языком (термины, обозначения, символы, графики, графы, алгоритмы и т.д.). Если основное назначение обыденного языка – служить средством общения, – то основное назначение математического языка – способствовать организации деятельности, что очень важно для культурного человека. *Математический язык* и *математическая модель* – ключевые слова в постепенном развертывании школьного курса математики, они составляют его идейный стержень. При наличии идейного стержня математика предстает перед учащимся не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программе, а как цельная развивающаяся и в то же время развивающая дисциплина общекультурного характера.

В наше время владение хотя бы азами математического языка — непременный атрибут культурного человека. Поэтому, на наш взгляд, заниматься изучением математического языка и математических моделей надо сегодня в школе как можно раньше, если не в начальной школе, то уж во всяком случае в курсе математики 5-6 классов.

Гуманитарный потенциал школьного курса алгебры состоит, на наш взгляд, во-первых, в том, что владение математическим языком и математическим моделированием позволит учащемуся лучше ориентироваться в природе и обществе; во-вторых, в том, что математика по своей внутренней природе имеет богатые возможности для воспитания мышления и характера учащихся; в-третьих, в том, что уроки математики (при правильной постановке) способствуют развитию речи обучаемого не в меньшей степени, чем уроки русского языка и литературы (если на уроках русского языка и литературы школьников обучают собственно речи, то на уроках математики – организации речи); в-четвертых, в реализации в процессе преподавания идей развивающего и проблемного обучения.

Общественные изменения в России породили в образовании повышенный интерес к различным теориям развивающего обучения. Мы начали понимать, что обучение и развитие можно (хотя, конечно, и с некоторой долей искусственности) соотнести с философскими категориями количества и качества (обучение – количество, развитие – качество). Но в отличие от философии закон перехода количественных изменений в качественные в образовании не сработает, если не будет сделан сознательный перенос акцента с обучения на развитие. Эта мысль стара, как мир: еще более двух веков назад И.Кант писал, что надо «учить не мыслям, а мыслить». В школьной же математике основной упор традиционно делается на формулах – «мыслях».

Вполне адекватны школьному курсу математики пять принципов развивающего обучения Л.В.Занкова. То, что теория занимает приоритетное положение (первый принцип), обсуждению не подлежит — это вообще характерная особенность учебной дисциплины под названием “математика”. Школьные учебники по математике насыщены и информацией, и идеологией, так что изучение материала должно проходить в быстром темпе (второй принцип). Основное внимание при изложении материала уделяется трудным местам курса; трудности не отметаются, а преодолеваются совместной работой учителя и учащихся с помощью отыскания адекватных методических средств (третий принцип). Более подробно остановимся на четвертом и пятом принципах теории развивающего обучения Л.В.Занкова (осознанности и развитии всех учащихся)..

Наша трактовка четвертого принципа такова: ученик не развивается по-настоящему, если он не осознает своего развития, не осознает, что изученный на уроке материал имеет гуманитарную (а не только информационную) ценность лично для него. Это достигается за счет целесообразно организованного проблемного обучения. Есть три подхода к обучению математике, в той или иной степени ассоциирующихся с проблемным обучением: метод обучения с помощью задач, метод обучения с помощью создания проблемных ситуаций и собственно проблемное обучение. Метод обучения с помощью задач заключается в следующем: учитель предлагает ученикам задачу, решить которую они пока не в состоянии. Он кое-что объясняет, вводит новые элементы теории, затем возвращается к исходной задаче и доводит ее до конца. В принципе это вполне пригодный метод обучения, но у него есть один крупный недостаток – он не является личностно-ориентированным. Задача, которая разбирается на уроке, нужна *не ученику, а учителю*. Учитель навязывает ее ученикам, ведь это делает процесс объяснения нового материала более комфортным (для учителя). Примерно так же обстоит дело и с методом создания проблемных ситуаций. В проблемную ситуацию учащегося загоняет учитель, и сам его из нее и выводит, причем, как правило, на том же уроке. При использовании указанных двух методов учащиеся, как правило, пассивны.

На наш взгляд, правильный подход к проблемному обучению базируется на двух положениях: 1) с проблемой должен непосредственно столкнуться сам учащийся; решая задачу или проводя какие-то рассуждения, он должен лично убедиться в том, что что-то ему не по силам, поскольку он, видимо, чего-то не знает (это, как правило, связано с выходом на новую математическую модель); 2) решение проблемы должно быть отсрочено по времени, проблема должна “отлежаться”. Только при этих условиях, добравшись до решения проблемы, учащийся поймет, что он продвинулся в своем развитии и получит определенные положительные эмоции.

Несколько слов о пятом принципе Л.В.Занкова – о развитии всех учащихся, иными словами, о дифференцированном подходе к обучению. В первую очередь на это должен быть нацелен задачник. Что касается учебников, то забота о развитии всех учащихся может проявляться в них, во-первых, в том, что авторы предупреждают в тексте: “следующий пример достаточно сложный” или “доказательство достаточно трудное” (подтекст — читать или разбирать не обязательно для всех); во-вторых, достаточно активно (особенно в курсе алгебры и начал математического анализа) следует использовать известный, но, к сожалению, забытый метод “отсроченного доказательства”. Если некое доказательство достаточно сложно, если разбор его по учебнику потребует от учащегося значительных усилий и не является обязательным для всех, то доказательство отодвигается в конец параграфа, оно предваряется разбором различных примеров использования доказываемого утверждения – этот материал обязателен для всех.

1.4. Сделаем, наконец, пояснения к третьему положению концепции. Как известно, школьный курс алгебры есть синтез четырех содержательно-методических линий: числовая линия, функциональная линия, линия уравнений и неравенств, линия преобразований (формулы). Каждый авторский коллектив выбирает одну из этих линий в качестве приоритетной. С нашей точки зрения, приоритетной является *функционально-графическая линия.* Это выражается прежде всего в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда следует осуществлять по жесткой схеме:

функция – уравнения – преобразования.

Приоритет функционально-графической линии — не наше изобретение. На необходимость этого более 100 лет назад указывал Феликс Клейн, почти 70 лет назад ту же идею провозгласил А.Я.Хинчин, а затем вслед за ним В.Л.Гончаров. Следует учесть, что выход функционально-графической лини на первый план имеет весомую психологическую подоплеку. Дело в том, что в большинстве случаев алгебра в школе преимущественно левополушарна, тогда как дети, начинающие ее изучать, преимущественно правополушарны. Налицо противоречие между построением курса алгебры и возможностями учащихся. Приоритет функционально-графической линии сглаживает это противоречие, поскольку активно опирается на возможности правого полушария мозга, создает условия для гармоничной работы обоих полушарий. Приведем в этой связи высказывания двух зарубежных психологов. Trauott: «Надо предостеречь школу от левополушарного обучения. Это воспитывает людей, не способных к реальным действиям в реальной ситуации»; Solgnier: «Обучая левое полушарие, вы обучаете только левое полушарие; обучая правое полушарие, вы обучаете весь мозг». Выход в курсе алгебры на первый план функционально-графической линии как раз и дает возможность задействовать в обучении оба полушария, не перегружая левое.

С реализацией в школе функционально-графической линии связаны три методические проблемы:

1) когда и как дать учащимся формальное определение функции;

2) какова должна быть стратегия и тактика изучения свойств функций на весь период обучения в школе;

3) какова должна быть система упражнений по функциональному материалу (учитывая огромное разнообразие возможных сюжетов).

Первую проблему мы уже обсудили выше. Предлагаемое нами решение второй проблемы заложено в приведенной ниже таблице, в которой приняты следующие обозначения: Н – наглядно-интуитивный уровень введения понятия, Р – рабочий уровень, Ф – формальное определение.

Свойство	Класс			
	7-й	8-й	9-й	10-й
Область определения	Н	Р	Ф	Ф
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	Н	Р	Ф	Ф
Монотонность	Н	Р, Ф	Ф	Ф
Непрерывность	Н	Н	Н	Р, Ф
Ограниченность	-	Н, Р	Ф	Ф
Выпуклость	-	Н	Н	Н
Область значений	-	Н, Р	Ф	Ф
Четность	-	-	Ф	Ф
Периодичность	-	-	-	Ф
Дифференцируемость	-	-	-	Н
Экстремумы	-	-	-	Ф

В рамках данной статьи не представляется возможность проанализировать эту таблицу построчно, поэтому ограничимся лишь двумя комментариями. Во-первых, учитывая, что учащиеся 7-9 классов более восприимчивы к новым математическим понятиям (представленным хотя бы в ознакомительном плане), чем школьники старших классов, все свойства функций, какие было можно, перенесены в основную школу; в старшей школе по понятным причинам впервые появляются лишь три свойства: периодичность, дифференцируемость и экстремум. Во-вторых, следует обратить внимание на то, что в 7-м классе работа со школьниками ведется только на наглядно-интуитивном уровне, в 8-м классе их преимущественно переводят на рабочий уровень и только в 9-м классе – на формальный уровень.

Переходя к обсуждению третьей проблемы, заметим, что для понимания учащимися курса алгебры в целом важно прежде всего, чтобы они полноценно усвоили первичные модели (функции). Это значит, что нужно организовать их деятельность по изучению той или иной функции так, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель – функцию) системно, с разных сторон, в разных ситуациях. В то же время эта системность не должна носить характер набора случайных сюжетов, различных для разных классов функций — это приведет к дискомфорту в обучении. Возникает методическая проблема выделения в системе упражнений по изучению того или иного класса функций *инвариантного ядра, универсального для любого класса функций.* На наш взгляд, оно должно состоять из шести направлений:

1) графическое решение уравнений;
2) отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
3) преобразование графиков;
4) функциональная символика;
5) кусочные функции;
6) чтение графика.

Образно выражаясь, это шесть красок, с помощью которой изучаемая математическая модель – новая (для школьников) функция – становится емкой, цельной, понятной, красивой и привычной. И учителя, и школьники привыкают к тому, что какой бы новый класс функций ни изучался, в системе упражнений обязательно будут задания, рассредоточенные по указанным шести блокам. Создается эффект предсказуемости деятельности, что делает совместную работу учителя и учеников на уроке достаточно комфортной.

Раскроем методические особенности каждого из указанных направлений.

1) Графический (или, точнее, функционально-графический) метод решения уравнений должен, на наш взгляд, быть первым и одним из главных при решении уравнений любых типов. Неудобства, связанные с применением графического метода, как правило, и создают ту проблемную ситуацию, которая приводит к необходимости отыскания алгоритмов аналитических способов решения уравнения. Что дает этот метод для изучения той или иной функции? Он приводит ученика к ситуации, когда график функции строится не ради графика, а для решения другой задачи – для решения уравнения. График функции является *не целью, а средством*, помогающим решить уравнение. Это способствует и непосредственному изучению функции, и преодолению того негативного отношения к функциям и графикам, которое, к сожалению, характерно для традиционных способов организации изучения курса алгебры в общеобразовательной школе. Графический способ решения уравнения в принципе должен предшествовать аналитическим способам. Тогда ученики будут вынуждены применять его, привыкать к нему и относиться к нему как к своему первому помощнику (они будут как бы “обречены на дружбу” с графическим методом), поскольку никаких других приемов решения того или иного уравнения они к этому времени не знают. Опыт показывает, что при указанных условиях графический метод решения уравнений школьникам нравится, они чувствуют его полезность и красоту и в то же время ощущают проблемность ситуации, вызванную ненадежностью этого метода решения уравнения.

2) Начиная с 7-го класса есть смысл предлагать учащимся задания такого типа: найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x + 3$ на отрезке [1; 3] (и даже на интервале (1; 3)). Предполагается, что учащийся построит график функции $y = 2x + 3$, выделит его часть на отрезке [1; 3] и с помощью этой геометрической модели сделает соответствующие выводы. Методическая ценность подобного задания состоит, во-первых, в том, что это новая «игра» с функцией», когда график нужен не сам по себе, а для ответа на вопрос задачи, т.е. опять-таки график – не цель, а средство; во-вторых, сами того не осознавая, учащиеся привыкают к оперированию с «двухкванторным", т.е. достаточно сложным математическим понятием, восприятие которого требует как определенной подготовки, так и определенного уровня математической культуры (подробнее об этом мы поговорим ниже, в п.3).

3) Следует постоянно помнить о преобразованиях графиков: например, в курсе алгебры 8-го класса строить графики функций $y=(x-2)^2+3, y=\dfrac{3}{x}-2, y=-\sqrt{x+1}$, в 9-м классе $y=x^6+2, y=\sqrt[3]{x-1}$, в старшей школе $y=-\sin 2x,\ y=\cos(x-\dfrac{\pi}{3}),\quad y=\lg(x+3)-4$ и т.д.

4) Как только в 7-м классе появится запись $y=f(x)$, полезно предлагать учащимся примеры, нацеленные на осознание смысла этой записи, примеры на функциональную символику. Опыт показывает, что школьники часто не могут, например, исследовать функцию на четность не потому, что не знают определения, а потому, что не понимают смысла записи $f(-x)$. Нередко учащиеся испытывают затруднения с производной также из-за чисто технических трудностей: не понимают смысла записи $f(x+\Delta x)$ и вследствие этого не могут составить выражение для приращения функции даже в достаточно простых случаях. Это означает, что соответствующая подготовительная работа не была проведена учителем в младших классах. Поэтому считаем необходимым включать в учебники и задачники задания следующего типа: для функции $y=f(x)$, где $f(x)=2x^2+5x-3$, найти $f(a-1), f(3a), f(5x), f(-x), f(x^2)$ и т.п.

5) Для правильного формирования у учащихся как самого понятия функции, так и методологической сущности этого понятия, полезно регулярно работать с кусочными функциями. Во многих случаях именно кусочные функции являются математическими моделями реальных ситуаций. Использование таких функций способствует преодолению обычного заблуждения учеников, отождествляющих функцию только с ее аналитическим заданием в виде некоторой формулы. В самом деле, чтобы задать функцию, надо указать область ее определения $D(f)$ и правило f, по которому каждому значению x из множества $D(f)$ сопоставляется определенное значение y. Если учащиеся имели дело с функциями, заданными одной формулой, заданными графически и особенно заданными различными формулами на разных промежутках, то они легче воспримут ту тонкость, которая содержится в определении («правило f»); менее вероятно при этом и отождествление ими «правила f» с «формулой f». Использование кусочных функций готовит как в пропедевтическом, так и в мотивационном планах понятие непрерывности функции в точке. Использование на уроках кусочных функций дает возможность учителю сделать систему упражнений более разнообразной (что существенно для поддержания интереса к предмету) и творческой (можно предложить учащимся самим конструировать примеры кусочных функций). Отметим и воспитательные моменты: это и воспитание умений осуществлять классификацию, принимать решение, зависящее от правильной ориентировки в условиях, это и своеобразная эстетика – оценка красоты графиков кусочных функций, предложенных разными учениками.

6) Очень важно научить учащихся по графику описывать свойства функции, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной

(словесной) модели. В 7-м классе этот перевод с одного вида математического языка на другой достаточно беден, но постепенно по мере появления новых свойств функции он становится богаче (а значит, учащиеся видят, как они постепенно умнеют, развиваются по мере изучения математики, что вполне в духе упомянутого выше принципа осознанности в теории развивающего обучения Л.В.Занкова). Наличие уже в курсе алгебры 9-го класса достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным, разнообразным и многоплановым. У ученика появляется возможность составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику.

П.2. Проблемы преподавания тригонометрии в школе.

Не секрет, что нынешние выпускники школ тригонометрию знают очень плохо. Причина – засилье в этом разделе математики формул, на изучение которых чаще всего и делается основной упор в преподавании. На самом деле, это красивый и законченный раздел, но чтобы придать ему цельность и стройность, надо положить в его основание три камня («три кита тригонометрии»). Это числовая окружность, простейшие тригонометрические уравнения и теорема сложения. С теоремой сложения в школе все в порядке: получив ее (с доказательством или без оного, это не суть важно), легко и естественно выводятся все формулы тригонометрии. А вот с двумя другими «китами» тригонометрии дело обстоит хуже. Об этом и пойдет речь ниже.

В школьном курсе математики в разные годы использовались различные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной числовой окружности. При этом большинству учебников присущ один и тот же недостаток – недооценка важности изучения самой модели «числовая окружность» и сложности дидактических компонентов, которые связаны с изучением этой модели. О каких дидактических компонентах идет речь?

1) Соотнесем два понятия: числовая прямая и числовая окружность. Числовая прямая изучается в школе в течение четырех лет: в 5-м классе речь идет
о координатном луче, в 6-7 классах – о координатной прямой, и, наконец, в 8 классе, после введения понятия действительного числа, – о числовой прямой. Числовая прямая считается изученной, когда учащиеся свободно решают задачи четырех типов: по заданному числу находят точку на прямой, по точке находят соответствующее число, от геометрической модели числового промежутка умеют переходить к аналитической записи и обратно. Числовая окружность представляет собой более сложную модель, на которой, тем не менее, надо научиться решать задачи тех же четырех типов. Это требует времени и внимания со стороны как авторов учебников, так и учителей.

2) Само понятие длины дуги, которое лежит в основе любых действий с числовой окружностью, не является надежно отработанным в курсе геометрии, значит, и на это следует обратить внимание. Тем более учтя специфику окружности радиуса 1.

3) И авторы учебников, и учителя должны с пониманием относиться к тем трудностям, с которыми столкнутся учащиеся в начале изучения тригонометрии: непривычная модель (числовая окружность) и непривычный, «неаналитический» способ введения новых функций (синус – ордината, косинус – абсцисса точки числовой окружности). При этом от учащихся фактически требуется слишком много: умение работать одновременно в двух системах координат: «криволинейной», когда снимаем информацию о положении точки на числовой окружности, и декартовой, когда снимаем информацию об абсциссе и ординате точки. Опыт показывает: недоработки с моделью «числовая окружность» и слишком поспешное введение тригонометрических функций не позволяют создать надежный фундамент для успешного изучения материала. Более того, на самом деле школьникам приходится изучать не одну, а две новые модели: первая – собственно числовая окружность, а вторая – числовая окружность на координатной плоскости.

Учитывая вышесказанное, следует уделить большое внимание подготовке к введению основных определений: длине дуги единичной окружности, модели «числовая окружность» и модели «числовая окружность на координатной плоскости».

Для успешного овладения указанными моделями можно предложить систему специальных заданий (условно – «дидактических игр»).

Первая игра – вычисление длин дуг единичной окружности. Учащиеся должны привыкнуть к тому, что длина всей окружности равна 2π, половины окружности – π, четверти окружности – $\frac{\pi}{2}$ и т.д.

Вторая игра – отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным в долях числа $\pi\,(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$, например, точек $M(\frac{11\pi}{4}), M(-\frac{37\pi}{6})$ и т.д.

Третья игра – отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным не в долях числа π, например, точек $M(1), M(-5)$ и т.д.

Четвертая игра – запись чисел, соответствующих данной «хорошей» точке числовой окружности; например, «хорошей» является середина первой четверти, соответствующие ей числа имеют вид $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z.$

Пятая игра – составление аналитических записей (двойных неравенств) для дуг числовой окружности. Например, если дана дуга, соединяющая середину первой четверти (начало дуги) и нижнюю точку из тех двух, что делят вторую четверть на три равные части (конец дуги), то соответствующая аналитическая запись имеет вид $\frac{\pi}{4}+2\pi k\le t\le\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. Если у той же дуги поменять местами начало и конец, то соответствующая аналитическая запись дуги будет иметь вид $-\frac{7\pi}{6}+2\pi k\le t\le\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

Шестая игра – от данной аналитической записи дуги (двойного неравенства) перейти к ее геометрическому изображению.

Заметим, что эти 6 игр обеспечивают умение решать задачи четырех основных типов, связанных с числовой окружностью, о которых мы упоминали выше.

Следующие дидактические игры относятся к модели «числовая окружность на координатной плоскости».

Седьмая игра – отыскание координат «хороших» точек числовой окружности. Например, $M(\frac{\pi}{2}) = M(0;1)$, $M(\frac{\pi}{4}) = M(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$, $M(\frac{\pi}{6}) = M(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$, $M(\frac{\pi}{3}) = M(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$, $M(-\frac{37\pi}{6}) = M(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$ и т.д.

В процессе этой игры школьники фактически учатся вычислять значения тригонометрических функций, например, из последнего равенства следует (но об этом они узнают позже), что $\sin(-\frac{37\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, а $\cos(-\frac{37\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Восьмая игра – отыскание знаков координат «плохих» точек числовой окружности. Если, например, $M(2) = M(x;y)$, то $x < 0, y > 0$. В процессе этой игры школьники фактически учатся определять знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности, например, из последнего равенства следует (об этом они также узнают позже), что $\sin 2 > 0$, а $\cos 2 < 0$.

Девятая игра – отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. Например, если $y = \frac{1}{2}$, то этому условию удовлетворяют две точки числовой окружности, их главные имена $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$, а все имена охватываются двумя формулами: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Важность девятой игры очевидна: фактически мы без педалирования готовим учащихся к решению простейших тригонометрических уравнений вида $\sin t = a, \cos t = a$. Для понимания сути дела следует прежде всего научить школьников решать эти уравнения с помощью числовой окружности, не торопясь переходить к готовым формулам.

Десятая игра – отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному неравенству. Например, если $y > \frac{1}{2}$, то этому условию удовлетворяют точки открытой дуги $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Таким образом, мы, опять-таки без педалирования, готовим учащихся к решению тригонометрических неравенств вида $\sin t > a, \cos t < a$.

После этого можно дать традиционные определения синуса и косинуса. Чтобы учащиеся приняли эти определения осознанно, им предлагаются те же игры, но в новой формулировке. Например, вычислить $\sin(-\frac{37\pi}{6})$ – переформулировка седьмой игры; решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$ – переформулировка девятой игры; определить знак числа sin 2 – переформулировка восьмой игры; решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$ – переформулировка десятой игры. Естественно, что появляются и новые сюжеты, например, сравнить числа *sin* 1 и *sin* 2 или *sin* 7 и *cos* 7; такие задания, традиционно сложные для массовой школы, не должны вызывать никаких затруднений в профильных классах.

Второй «кит» тригонометрии, упомянутый выше, - простейшие тригонометрические уравнения. Традиционная методическая ошибка (которую уже перестали замечать именно в силу ее традиционности) в изучении тригонометрии в школе все последние годы заключается в следующем: учащимся не дают возможности прочувствовать специфику собственно тригонометрических уравнений – простейших уравнений типа $\sin t = \frac{1}{2}$, $tg(2x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$; вместо этого они вынуждены с самого начала искать нужные формулы для упрощения заданного сложного уравнения.

В чем состоит специфика простейших тригонометрических уравнений? Во-первых, в том, что практически никогда до этого учащиеся не сталкивались с ситуацией, чтобы в уравнении было не конечное, а бесконечное множество корней; это надо понять, осознать и принять. Во-вторых, никогда до сих пор структура записи корней уравнения не выглядела столь сложно и громоздко. Самое трудное, что было до сих пор, – формула корней квадратного уравнения. Теперь же они сталкиваются с записью $x = (-1)^n \arcsin m + \pi n,$ где каждый компонент (и пресловутые «арки», и наличие параметра, и странный «хвост» πn, и «выкрутасы» типа $(-1)^n$) требует специального осмысления и отработки, для чего нужна соответствующая система упражнений. Приведем один из ее возможных вариантов.

1) вычисление значений обратных тригонометрических функций;

2) решение простейших уравнений $(\sin t = a, \cos t = a)$ с помощью числовой окружности;

3) решение простейших уравнений по готовым формулам;

4) решение уравнений вида $\sin(kx + m) = a, \cos(kx + m) = a, tg(kx + m) = a$;

5) отбор корней в простейших уравнениях;

6) уравнения, сводящиеся к рациональным после выбора в качестве новой переменной какой-либо тригонометрической функции (в частности, к этой группе заданий относятся однородные тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к однородным с помощью основного тригонометрического тождества).

Как видно из приведенного перечня, и без обилия формул тригонометрии в теме «Тригонометрические уравнения» есть чем заняться. В дальнейшем, по мере появления формул тригонометрии, каждая из них тут же используется не только для бессмысленных упрощений тригонометрических выражений или столь же бессмысленного, нужного только с обучающей, но отнюдь не развивающей целью, доказательства тригонометрических тождеств, но и для решения уравнений.

П.3. Проблемы преподавания в школе начал математического анализа.

Предел, производная, интеграл… Должны эти понятия включаться в программу школьного курса математики или нет, и если да, то в чем их воспитывающая и развивающая ценность для учащихся, в каком объеме и на каком уровне строгости излагать их в школьных учебниках и на уроках алгебры и начал математического анализа? Что делать с понятием предела – этим своеобразным жупелом как для учителей математики, так и для функционеров от математического образования? Как преодолевать методические трудности при изучении элементов математического анализа в школе, соотнеся их с тремя ключевыми вопросами методики преподавания математики: *что* преподавать, *как* преподавать, *зачем* преподавать? Главный из этих вопросов – последний, но именно он долгое время был в нашей общеобразовательной школе не самым актуальным. У сегодняшних же прагматичных российских школьников вопрос *зачем* выходит на первое место.

Вопрос *зачем* что-то изучается в том или ином школьном предмете соотносится в первую очередь с социальным заказом, который общество делает образованию. Если в недавние годы социальный заказ нацеливал педагогическую общественность на то, что главное в образовании – *обучение*, передача информации, то сегодня главное в образовании – *развитие*, формирование общей культуры человека, способного, в частности, самостоятельно добывать и перерабатывать информацию. Поэтому если раньше учили *математике*, то сегодня учат *математикой.*

Одной из основных целей математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира. Значит, нужно научить школьников составлять математические модели реальных ситуаций, а для этого они должны владеть математическим языком, описывающим указанные модели. Для математического исследования явлений реального мира особенно важны понятия предела и производной, ведь это основные понятия языка, на котором «говорит природа». Безусловно, выпускник средней школы должен иметь представления о производной, о ее применении для исследования реальных процессов. При этом следует учесть, что, во-первых, определение производной, которое дается в школе, в точности соответствует формальному определению, принятому в математике, и, во-вторых, что значение производной в общем развитии школьника, достаточно велико (скорость, касательная, монотонность, экстремумы, задачи на оптимизацию и т.д.).

Обсудим теперь, каким должен быть уровень изложения элементов математического анализа в школе (любой автор своим учебником должен дать учителю ответ на этот вопрос). В учебном предмете возможны и равнозначимы четыре уровня обоснования тех или иных свойств, фактов, утверждений:

1) принятие на веру (когда, например, ученикам сообщают, что сформулированная теорема доказана в математике, но мы принимаем ее без доказательства, поскольку оно по объективным причинам непосильно школьникам);

2) наглядно-интуитивный уровень – замена доказательства геометрическими иллюстрациями или рассуждениями «на пальцах»;

3) правдоподобные рассуждения (например, использование вместо доказательства конкретного примера, в котором фактически раскрывается идея формального доказательства);

4) формально строгое доказательство.

Основная трудность в работе учителя математики при изложении начал анализа состоит именно в адекватном и концептуальном выборе уровня строгости предъявления материала школьникам. Учитель, работая с тем или иным школьным учебником, часто пребывает в недоумении: почему одна теорема в учебнике доказана, а другая теорема в аналогичной ситуации приведена без доказательства; почему для обоснования одной теоремы авторы разрешают себе ограничиться геометрическими иллюстрациями, а через пару страниц в похожей ситуации запрещают это и себе, и учителю.

Рассмотрим в качестве примера положение дел в школьных учебниках с исследованием функций при помощи производной (на монотонность и экстремумы). Эта тема – своеобразная лакмусовая бумажка, которая проверяет методическую культуру учителя математики (да и авторов школьных учебников). Ведь здесь речь идет о теоремах, необходимость знания которых и явилась основной причиной введения элементов математического анализа в школьный курс математики. В то же время строгое доказательство этих теорем требует знания многих фактов математического анализа, которые в школе не рассматриваются. Какой путь выбрать учителю: сообщить теоремы без доказательства и без комментариев, ограничиться наглядно-интуитивными или правдоподобными рассуждениями, попытаться дать строгие доказательства?

В действующих школьных учебниках встречаются различные варианты. Например, такой: без доказательства, но с опорой на геометрические иллюстрации формулируется теорема Лагранжа, а затем с ее помощью строго доказывается теорема о влиянии знака производной на характер монотонности функции на промежутке. С нашей точки зрения, это – не лучший вариант, он нелогичен (а по большому счету неконцептуален): зачем давать геометрическую иллюстрацию теоремы Лагранжа, если можно сразу дать простую и изящную геометрическую иллюстрацию того, что для школы важнее – связи между знаком производной и характером монотонности (рисуется график возрастающей функции, проводится касательная в произвольной точке, она составляет острый угол с положительным направлением оси абсцисс, следовательно, производная положительна). К тому же геометрическая иллюстрация теоремы Лагранжа достаточно сложна и искусственна (с кучей дидактических компонентов), не случайно в вузовском курсе математического анализа эту иллюстрацию обычно дают не *до* доказательства теоремы, а *после* этого доказательства. Оправдывая упоминание в школьных учебниках теоремы Лагранжа, обычно говорят, что теорема Лагранжа важна и сама по себе, недаром ее называют основной теоремой дифференциального исчисления. Это верно, но лишь при условии, что она активно работает (как это имеет место в вузовском курсе математического анализа). А в школе она используется лишь один раз – в указанном выше случае. К чему же ломать копья?

Второй вариант, используемый в школьных учебниках, – замена строгого доказательства правдоподобными рассуждениями, основанными на физическом или геометрическом смысле производной. С нашей точки зрения, это вполне приемлемо, но лишь при условии, что правдоподобные рассуждения не выдаются за доказательства – такая подмена понятий наносит существенный урон формированию математической культуры школьника.

Итак, именно второй вариант с указанным дополнительным условием представляется наиболее приемлемым для общеобразовательной школы на любом уровне (профильный уровень – не исключение, кроме, разве что узко специализированных элитных математических школ) при изучении применений производной для исследования функций на монотонность и экстремумы. Конечно, такие рассуждения вряд ли понравятся ревнителям математической строгости, они объявят изложение материала легковесным. Но это не должно нас беспокоить, главное, чтобы изложение: а) фактически не противоречило математике как науке; б) было доступно школьникам. Не следует забывать, что в школе (в том числе и в профильной) мы лишь *знакомим* учащихся с элементами математического анализа, составляющими существенную часть общечеловеческой культуры; формальное изучение этого предмета – прерогатива высшей математики, излагаемой в вузах, переносить его в среднюю школу нецелесообразно (всему свое время). В свое время мне было приятно узнать, что эту точку зрения разделяет видный российский математик А.Д.Мышкис, который в статье «Нужно ли изучать в школе высшую математику» («Математика» - приложение к газете «Первое сентября», № 25-26, 2004) писал: «Преподавание элементов высшей математики в школе необходимо, если оно будет опираться на преимущественно интуитивное изложение материала; в противном случае оно нецелесообразно».

Наглядной иллюстрацией к сказанному выше является методика введения понятия предела, о которой речь пойдет ниже. В школьных программах в различные годы рекомендовались различные подходы к введению понятия предела – от формального определения до требования вообще запретить упоминание самого термина «предел» из-за того, что не удавалось найти приемлемые методические приемы введения этого понятия. Поскольку производной без предела не бывает, это требование следует признать несерьезным, а потому обсуждению не подлежащим. Более серьезный вопрос: почему попытка введения в школу строгого определения предела была априори обречена на провал?

Во-первых, надо учесть, что и в истории математики формирование понятия предела шло долго и мучительно. Пределами пользовались на наглядно-интуитивном уровне за много веков до введения формального определения, предложенного О.Коши лишь в начале X1X века. Это не случайно, ведь в обычном «$\varepsilon-\delta$-определении» того, что число b является пределом функции

$y = f(x)$ при $x \to a$ заложено внутреннее противоречие: на статическом языке неравенств описана динамическая ситуация – процесс приближения функции к предельному значению. Этого долго не могли постичь математики, чего уж требовать от школьников.

Во-вторых, следует упомянуть об измерении уровня сложности определений математических понятий. Один из способов такого измерения связан с числом кванторов в определении. Например, понятие четности функции – «однокванторное»: *для любого* $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$; в определении присутствует только один квантор общности $\forall$ – для любого. Понятие ограниченности функции сверху – «двухкванторное»: *существует* число *M*, такое что *для любого* $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) < M$; в этом определении присутствуют два квантора: квантор существования $\exists$ и квантор общности $\forall$.

Однокванторное определение посильно среднему школьнику, двухкванторное определение (ограниченность, экстремум, наибольшее и наименьшее значения, периодичность функции) требует напряжения умственных сил школьника и вдумчивой неспешной работы учителя. Это та планка, выше которой в общеобразовательной школе на любом уровне не прыгнуть (впрочем, не нужно и стараться делать это). А формальное определение предела – это определение с тремя кванторами $((\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x-a| < \delta) |f(x) - b| < \varepsilon)$, т.е. по нашей условной иерархии определение третьего уровня сложности, не говоря уже о его перегруженности знаками модулей и неравенств.

Итак, совершенно очевидно, что школьнику в силу его возрастных особенностей и недостаточной математической культуры не по силам «трехкванторное» определение предела. Оно чаще всего не по силам и первокурсникам, которые формально заучивают определение, а подлинное понимание приходит позднее, где-то к концу второго курса – при изучении теории функций многих переменных и метрических пространств. Значит, от жесткой модели – формального определения – в школе следует отказаться.

Не была удачной и попытка дать школьникам понятие предела в терминах приближенных вычислений: приближенные вычисления – не самая любимая тема как школьников, так и учителей, опыт приближенных вычислений и у тех, и у других чаще всего отрицательный; на отрицательном опыте ничего позитивного построить нельзя. Выход один: воспользоваться мягкой моделью – интуитивным представлением о пределе.

В началах математического анализа есть три вида предела: предел числовой последовательности, предел функции на бесконечности и предел функции в точке. Предел функции на бесконечности в российской общеобразовательной школе в последние годы почти не рассматривался, упоминается (как правило, очень невнятно) лишь предел в точке. На наш взгляд, начинать надо (после разговора о пределе последовательности) именно с предела на бесконечности. Это диктуется дидактическими соображениями: если опираться на такие принципы дидактики, как связь с жизнью, связь с имеющимся опытом, то придется согласиться, что понятие предела функции в точке не имеет дидактической подоплеки (для школьников это – искусственная конструкция), в то время как с пределом функции на бесконечности в этом смысле все в порядке. Например, процесс остывания нагретого чайника до комнатной температуры моделируется с помощью предела на бесконечности. Учащимся знакомо понятие горизонтальной асимптоты, а наличие у графика функции горизонтальной асимптоты – это геометрическая модель предела функции на бесконечности.

Свои усилия учитель должен направить прежде всего на то, чтобы учащиеся умели геометрически интерпретировать запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ как наличие у графика функции $y = f(x)$ горизонтальной асимптоты $y = b$, и, обратно, глядя на график функции, имеющей горизонтальную асимптоту, переходить к аналитической записи с использованием символа предела. Например, ось абсцисс является горизонтальной асимптотой гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$, значит, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$; график функции $y = e^x$ асимптотически приближается к отрицательному лучу оси абсцисс, значит $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Важно научить школьников конструировать эскизы графиков функций, обладающих заданными свойствами. Например, построить график функции $y = f(x)$, для которой $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0,$ причем функция непрерывна и убывает на всей числовой прямой. Это – задание базового уровня. А вот задание посложнее: построить график функции, для которой выполнены три условия из предыдущего примера (два предела и непрерывность), а взамен убывания предлагается условие $f(0) = 5$. Еще сложнее будет обстоять дело, если добавить условие $E(f) = [-2; 7]$.

Что касается вычисления пределов на бесконечности, то достаточно сообщить учащимся три факта: 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$; 2) предел постоянной функции равен значению константы; 3) теорему об арифметических операциях над пределами (естественно, без доказательства). Тогда технику вычисления пределов нетрудно довести до вычисления предела отношения двух многочленов при $x \to \infty$.

Теперь приведем конспективный вариант изложения в школе темы «Предел функции в точке». Учащимся предлагается построить в трех экземплярах график некоторой непрерывной функции, проходящий через точку (a; b). Затем второй и третий чертежи корректируются: на втором – точка (a; b) «выкалывается», на третьем – «выколотая» точка занимает другое положение (a; c) (это так называемый метод вариативного чертежа). Учащимся предлагается ответить на вопрос: на трех чертежах представлена одна и та же функция или разные, и если разные, то почему? Ответ: разные, поскольку функции отличаются друг от друга своим поведением в точке $x = a$. Конкретнее: первая функция непрерывна в этой точке, а вторая и третья – разрывны, причем вторая функция вообще не определена в точке a, тогда как третья – определена, но «неправильно» («правильно» она определена в первом случае). Если же точку $x = a$ исключить из рассмотрения, то на всех трех чертежах будет представлена одна и та же математическая модель, для описания которой придумали и обозначение, и термин: обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, термин «предел функции при $x \to a$». Объективности ради, следует заметить, что предложенная конструкция даст полноценный эффект лишь в том случае, если у учащихся накоплен значительный опыт работы с кусочными функциями (о чем мы, в частности, уже говорили выше).

Важно подчеркнуть, что в само определение предела заложено требование $x \neq a$. Ничего страшного в игнорировании конкретной точки нет, поскольку поведение функции в одной точке всегда можно исследовать отдельно. Заметим, кстати, что при таком подходе практически «бесплатно» получено определение непрерывной функции (исходя из модели, представленной на первом чертеже): функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a,$ если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Вообще (повторимся) любое сколько-нибудь сложное математическое понятие должно в учебном процессе изучаться постепенно: сначала на наглядно-интуитивном уровне, потом на рабочем, описательном уровне и только после этого можно переходить к формальному определению. С понятием предела мы в школе на формальный уровень не выходим, определения предела функции как на бесконечности, так и в точке, остаются на наглядно-интуитивном уровне. А вот понятие непрерывности функции в точке, которое, как мы уже отмечали выше, полезно ввести на наглядно-интуитивном уровне уже в 7-м классе, выводится в 10-м классе на формальный уровень.

Для вычисления предела функции в точке достаточно знать три факта.

1) Все функции, которые встречаются в школьном курсе математики (рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические) непрерывны в любой точке, в которой они определены, т.е. если $f(a)$ существует, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Например, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x + \sqrt{x}}{x+2} = \dfrac{\sin \pi + \sqrt{1}}{1+2} = \dfrac{1}{3}$, поскольку функция, содержащаяся под знаком предела, определена, а значит и непрерывна в точке $x = 1$.

2) Если надо вычислить $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $g(a) = 0,$ то в случае, когда $f(a) \neq 0$, пишут $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty;$ прямая $x = a$ является в этом случае вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

3) Если и $f(a) = 0,$ и $g(a) = 0,$ т.е., как принято говорить в математическом анализе, имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то чтобы вычислить $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, нужно выполнить тождественные преобразования дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$. В простейших случаях неопределенность исчезает в момент сокращения дроби на $x - a$ (это сокращение часто смущает учителей, но оно вполне законно, поскольку $x \neq a$ *по определению*). Например, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x+2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}.$

При изучении производной основное внимание уделяется модели $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, ее геометрическому и физическому истолкованию. Вряд ли есть смысл делать акцент на отработку умений вычислять производную – это довольно скучное и однообразное занятие, осуществляемое по готовым рецептам и мало что дающее для развития учащихся. Гораздо важнее научить школьников «видеть» приложения производной, опираясь на геометрические иллюстрации, именно «видеть», а не пытаться их формально доказывать.

Введение понятия производной обычно начинается с двух классических задач – задачи о скорости и задачи о касательной. В процессе решения этих задач появляется новая математическая модель: предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Если жизнь выдвигает на повестку дня новую математическую модель, дело математиков специально заняться изучением этой модели в отрыве от ее конкретного содержания. Заняться изучением новой модели – это значит: 1) присвоить ей специальный термин; 2) придумать для нее специальное обозначение; 3) изучить правила оперирования с новой моделью и сферу ее приложения. Для рассматриваемой модели используется термин *производная* и обозначение y'.

Целесообразно использовать пятишаговый (а не трех-четырехшаговый, как во многих школьных учебниках) алгоритм отыскания производной функции $y = f(x)$:

1) зафиксировать x и вычислить $f(x)$;

2) дать аргументу приращение Δx и вычислить $f(x + \Delta x)$;

3) найти $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$;

4) найти $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

5) найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Сделаем два комментария к этому алгоритму.

1. Первый шаг алгоритма выглядит так: зафиксировать x и вычислить $f(x)$. Казалось бы, этот шаг не нужен (во многих школьных учебниках его нет), поскольку и в самом задании содержится $f(x)$, и здесь используется та же запись $f(x)$. На самом деле, этот шаг очень важен как с методологической точки зрения (записи $f(x)$ в исходном задании и на первом шаге одинаковы *по форме*, но не *по содержанию*: в исходном задании x – переменная, а на первом шаге – постоянная), так и с психолого-педагогической точки зрения – это этап сосредоточения на задаче, вхождения в процесс ее решения.

2. Нельзя допускать, чтобы понятия приращения аргумента и приращения функции появились впервые при введении производной, ведь здесь указанные понятия не цель, а средство для изучения нового понятия (производной). Есть смысл ввести указанные термины и «странные» обозначения с треугольником слева от переменной со «странным» прочтением («дельта икс») заранее, чтобы учащиеся успели приобрести хотя бы небольшой опыт нахождения $\Delta x, \Delta f$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и даже $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

В заключение заметим, что все методические предложения, высказанные выше, реализованы в учебно-методических комплектах (учебник, задачник, книга для учителя, контрольные работы, самостоятельные работы) для изучения курсов алгебры 7-9 и алгебры и начал математического анализа 10-11, созданных под руководством автора настоящей статьи.

.