В. А. Смирнов
И. М. Смирнова

ГЕОМЕТРИЯ

7 КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

УДК 37.02:514
ББК 74.262.21
С50

Смирнов, Владимир Алексеевич

С50 Геометрия : 7 класс : методическое пособие для учителя / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. — 80 с.

ISBN 978-5-???

В пособии представлено содержание курса геометрии 7-го класса, примерное планирование учебного материала и методические рекомендации по решению задач повышенной трудности, самостоятельные и контрольные работы, задачи для обобщающего повторения.

УДК 37.02:514
ББК 74.262.21

Учебное издание

Смирнов, Владимир Алексеевич

Геометрия

7 класс

Методическое пособие для учителя

Редактор *С. В. Бахтина*. Внешнее оформление: *В. А. Андрианов*
Компьютерная вёрстка: *Н. П. Горлова*
Технический редактор *О. Б. Резчикова*
Корректоры *Ю. С. Борисенко*, *О. Ч. Кохановская*

Подписано в печать ??.??.18. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. ?,??. Тираж ???? экз. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано

ISBN 978-5-???

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое руководство является составной частью учебно-методического комплекса по математике для 7-х классов общеобразовательных учреждений.

Пособие предназначено учителям, работающим в 7-м классе по учебнику «Геометрия» авторов В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. Оно ориентирует учителя в его работе, позволит качественно спланировать процесс обучения геометрии семиклассников.

В пособие включено:

— примерное тематическое планирование;

— методические рекомендации по решению задач повышенной трудности;

— самостоятельные работы;

— контрольные работы;

— обобщающее повторение.

В конце пособия даны ответы к предложенным самостоятельным и контрольным работам.

Геометрия, как ни один другой предмет нужна каждому человеку, поскольку именно она даёт необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения различных фигур, что позволяет человеку правильно ориентироваться в окружающем мире. С другой стороны, геометрия даёт метод научного познания, способствует развитию мышления, формирует навыки дедуктивных рассуждений. Помимо этого, изучение геометрии вырабатывает необходимые практические навыки в изображении, моделировании и конструировании плоских и пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, величин углов, площадей, объёмов и др.).

Кроме сказанного, геометрия обладает интересным содержанием, имеет богатую историю, яркие приложения, она занимательна, изучает красивые объекты. Всё это постепенно будет раскрываться и представляться учащимся по мере изучения её курса.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) ***в направлении личностного развития***:

— формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

— развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

— формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

— воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

— формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

развитие интереса к математике;

развитие математических способностей;

2) ***в метапредметном направлении***:

— развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

— формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) ***в предметном направлении***:

— овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

— создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

В данном пособии представлено тематическое планирование, даны рекомендации по решению задач. При этом особое внимание уделено задачам повышенного уровня трудности.

Приведённые решения задач не являются единственно возможными. Хорошо известно, что решение задач несколькими способами активизирует учебную познавательную деятельность школьников. Задачи, допускающие несколько решений, дают богатые возможности для их развития и воспитания.

Если в классе при решении некоторой задачи ребятами будет высказано несколько идей, этим моментом не следует пренебрегать и направлять их мысли в одном направлении.

При этом можно сразу обсудить достоинства каждого предложения и выбрать наиболее рациональный, а можно разрешить каждому учащемуся идти своим понравившимся ему путём. Затем сравнить различные решения и при выборе наилучшего из них руководствоваться принципами наибольшей простоты, наглядности, краткости, оригинальности, неожиданности, математической красоты и т. п. Конечно, работа с такими задачами требует больше внимания и самое главное времени, которого всегда не хватает.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

7 класс (2 часа в неделю, всего 68 часов за год)

Пункт	**Тема**	**Кол-во часов**
	Глава I. Начала геометрии	**20**
1	Введение в геометрию	1
2	Основные понятия геометрии	2
3	Взаимное расположение прямых на плоскости	2
4	Лучи и отрезки	2
5	Операции над отрезками	2
6	Длина отрезка	2
7	Полуплоскости и углы	2
8	Сравнение углов. Угол между прямыми	2
9	Операции над углами	2
10	Градусная величина угла	2
	Контрольная работа 1	1
	Глава II. Треугольники	**21**
11	Равенство треугольников	2
12	Отрезки, связанные с треугольником	2
13	Первый признак равенства треугольников	2
14	Второй признак равенства треугольников	2
15	Равнобедренные треугольники	2

Продолжение таблицы

Пункт	Тема	Кол-во часов
16	Признак равнобедренного треугольника	2
17	Третий признак равенства треугольников	2
18	Соотношения между углами и сторонами треугольника	2
19	Неравенство треугольника	2
20	Прямоугольные треугольники. Перпендикуляр и наклонная	2
	Контрольная работа 2	1
Глава III. Окружность. Геометрические построения		**11**
21	Окружность и круг	2
22	Взаимное расположение прямой и окружности	2
23	Взаимное расположение двух окружностей	2
24	Геометрические места точек	2
25	Задачи на построение	2
	Контрольная работа 3	1
Глава IV. Параллельность. Сумма углов многоугольника		**11**
26	Параллельные прямые	2
27	Сумма углов треугольника	2
28	Ломаные	2

Окончание таблицы

Пункт	Тема	Кол-во часов
29	Многоугольники	2
30	Сумма углов выпуклого многоугольника	2
	Контрольная работа 4	1
	Обобщающее повторение	4

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Глава I. Начала геометрии

В этой главе вводятся важнейшие для дальнейшего обучения геометрические понятия и изучаются их свойства.

При преподавании учебного материала этой главы ставятся следующие цели обучения.

1. Познакомить учащихся с основными геометрическими фигурами: точкой, прямой, плоскостью. Объяснить школьникам, почему именно они взяты в качестве основных, моделями каких реальных объектов окружающего нас мира они являются. Научить изображать простейшие геометрические ситуации, выполнять соответствующие схематические чертежи, делать краткие записи с помощью математической символики.

2. Сформировать понятия принадлежности точки прямой. Рассмотреть случаи взаимного расположения точек на прямой. Сформировать понятие луча, или полупрямой. Познакомить с операцией откладывания данного отрезка на данном луче от его вершины. Определить операции сложения и вычитания отрезков. Сформировать понятия равенства отрезков, длины отрезка, расстояния между точками. Научить решать задачи на установление равенства отрезков и нахождения их длин.

3. Рассмотреть основные случаи взаимного расположения точек на плоскости относительно прямой. Сформировать понятия полуплоскости, угла и его элементов. Познакомить учащихся с видами углов, операцией откладывания данного угла от данного луча. Определить операции сложения и вычитания углов. Сформировать понятия равенства углов и величины угла. Научить решать задачи на установление равенства углов и нахождение их градусных величин. Познакомить учащихся с историей возникновения и развития проблемы измерения величин углов.

1. Введение в геометрию

Цель обучения: познакомить учащихся с целями изучения геометрии, историей её возникновения, философскими школами, именами учёных, внёсших существенный вклад в развитие геометрии, её современными направлениями.

История математики позволяет проникнуть в мировоззренческий смысл науки, в процесс основных её идей, эволюцию методов. Сведения о научных поисках, открытиях помогают увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным. Исторический материал может продемонстрировать учащимся, каким может быть трудным и длительным путь учёного к истине, которая сегодня формулируется в виде короткого утверждения.

Исторические сведения способствуют развитию познавательных интересов и творческих способностей учащихся, так как включение сведений о творчестве известных учёных, о том, как они приходили к постановке своих исследований, находили метод решения, формулировали окончательный результат, позволяет создать творческую атмосферу на уроках математики, помогает понять, что в процессе творчества нет ничего необычного, сверхъестественного, что цели достигаются в результате упорного труда.

Элементы истории служат средством нравственного воспитания учащихся, воспитания чувства гордости за достижения отечественной математики. История науки обладает множеством впечатляющих фактов о благородных социальных и гражданских мотивах деятельности учёных. Пренебрежение этим материалом или умалчивание о нём обедняет познавательный и нравственный опыт учащихся. Лишённые конкретных доказательств об единстве науки и нравственности школьники могут считать, что существует чистая наука, далёкая от реальной жизни, несвязанная с судьбами людей и общества.

Наконец, история математики важна не только потому, что она необходима для решения ряда методологических и педагогических проблем. Она важна и сама по себе как памятник человеческому гению, позволившему человечеству пройти великий путь от полного незнания и полного подчинения силам природы до великих замыслов и свершений в познании законов развития природы и общества.

Учащиеся должны знать, какие разделы геометрии называются планиметрией и стереометрией, откуда произошли эти термины; зачем нужно изучать геометрию; какие учёные внесли вклад в развитие геометрии; как пифагорейцы объясняли устройство мира; кто из учёных первым предложил аксиоматическое построение геометрии.

Познакомиться с историей возникновения и развития геометрии можно в книге: *Г. И. Глейзер.* История математики в школе: пособие для учителей — М. : Просвещение, 1982. Она имеется в открытом доступе на сайте www.math.ru.

2. Основные понятия геометрии

Цель обучения — познакомить учащихся с основными понятиями геометрии; научить решать простейшие комбинаторные задачи на нахождение количества точек и прямых на плоскости.

С учащимися можно заполнить таблицу 1 — «Математическая символика».

Таблица 1

Запись	Чтение
A; B; C ...	Точка A; точка B; точка C ...
a; b; c ... AB; CD ...	Прямая a; прямая b; прямая c ... Прямая AB, CD ...
α; β; γ ...	Плоскость α; плоскость β; плоскость γ; ...
$A \in a$	Точка A принадлежит прямой a
$B \notin a$	Точка B не принадлежит прямой a
...	...

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Сколько прямых можно провести через различные пары из n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Замечание. Нумерация задач взята из учебника.

Решение. Пусть A_1, ..., A_n – n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой (рис. 1).

Выясним, сколько прямых проходит через точку A_1 и оставшиеся точки. Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно $n - 1$.

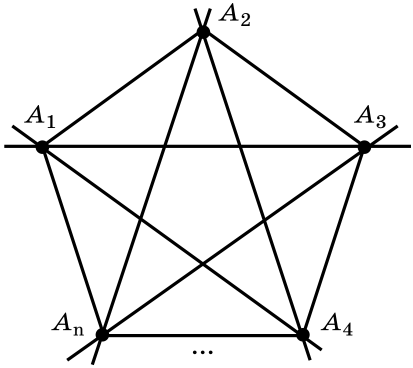


Рис. 1

Заметим, что рассуждения, проведённые для точки A_1, справедливы для любой другой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит $n - 1$ прямая, то число посчитанных прямых будет равно $n(n - 1)$.

Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при $n = 3$ получаем $n(n - 1) = 6$, а число прямых, на самом деле, равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчёте мы каждую прямую посчитали дважды и поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Полученная формула числа прямых имеет большое значение, в дальнейшем она будет появляться при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задаётся двумя точками, мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значение, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2. Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2 = 190$.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

Цель обучения — познакомить учащихся с различными случаями взаимного расположения прямых на плоскости; научить распознавать эти случаи и решать простейшие задачи комбинаторного характера.

Рекомендации по решению задач

Задача 10. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке (рис. 2).

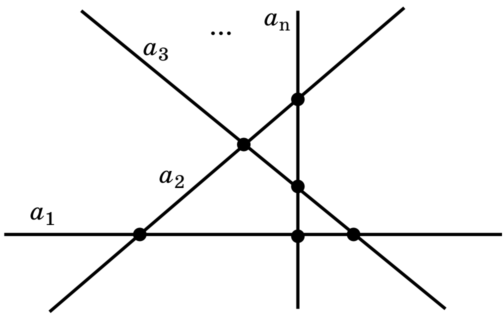


Рис. 2

В этом случае каждая прямая имеет $n - 1$ точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 9 из предыдущего пункта. Так как всего прямых n, и на каждой прямой $n - 1$ точка, то их общее число будет равно $n(n - 1)$. При этом, поскольку каждая точку пересечения принадлежит двум прямым, то мы подсчитаем её дважды. Следовательно, число точек пересечения будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Можно было бы рассуждать и короче. Действительно, для того чтобы подсчитать количество точек пересечения, достаточно подсчитать количество пар прямых, которые можно образовать из данных n прямых. Как мы знаем, это число равно числу сочетаний из n по 2, т. е. равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. Что изучает геометрия?
2. Назовите основные геометрические фигуры.
3. Изобразите на рисунке две пересекающиеся прямые a и b; точку A, принадлежащую прямой a; точку B, принад-

лежащую прямой b; точку C, принадлежащую обеим прямым a и b; точки D и E, не принадлежащие данным прямым.

4. Сколько прямых можно провести через две точки?

5*. Найдите в окружающей нас обстановке модели прямых линий.

Вариант 2

1. Какой раздел геометрии называется планиметрией?

2. Какие свойства называются аксиомами?

3. Изобразите на рисунке две пересекающиеся прямые k и l; точку K, принадлежащую прямой k; точку L, принадлежащую прямой l; точку H, принадлежащую обеим прямым k и l; точки M и N, не принадлежащие данным прямым.

4. Сколько точек пересечения могут иметь две прямые?

5*. Найдите в окружающей нас обстановке модели плоскостей.

4. Лучи и отрезки

Цель обучения — сформировать понятия отрезка и луча, или полупрямой; представить соответствующие обозначения; научить решать простейшие задачи комбинаторного характера на нахождение количества отрезков и лучей.

Рекомендации по решению задач

Задача 6. На прямой отмечены: а) 3 точки; б) 4 точки; в) 5 точек; г)* n точек. Сколько имеется лучей, лежащих на данной прямой, с вершинами в этих точках?

Решение. Каждая точка прямой разбивает эту прямую на две части, которые определяют два луча. Значит, n точек прямой определяют $2n$ лучей.

Задача 7. На прямой отмечены: а) 3 точки; б) 4 точки; в) 5 точек; г)* n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

Решение. Каждая пара точек прямой определяет один отрезок. Из n точек прямой можно составить $\frac{n(n-1)}{2}$ пар.

Следовательно, число отрезков равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

5. Операции над отрезками

Цель обучения — ввести операцию откладывания данного отрезка на данном луче от его вершины; определить операции сложения и вычитания отрезков; научить сравнивать отрезки и устанавливать их равенство.

Важно, чтобы учащиеся поняли, что сравнивать и производить арифметические операции сложения и вычитания можно не только с числами, но и объектами другой природы, в частности с отрезками. При этом для данных операций над отрезками справедливы такие же законы сложения и вычитания, как и для чисел.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. Сравните отрезки AB и CD, изображённые на рисунке 5.11.

Решение. Эта задача относится к, так называемым, зрительным иллюзиям. Кажется, что отрезок AB меньше отрезка CD. На самом деле, они равны. В этом можно убедиться непосредственными измерениями.

Задача 9. Сравните отрезки a и b, изображённые на рисунке 5.12.

Решение. Эта задача также относится к зрительным иллюзиям. Данные отрезки равны. В этом легко убедиться непосредственными измерениями.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. Какая фигура называется лучом?

2. Изобразите прямую MN и точки A, B, ей принадлежащие. На сколько частей разделилась прямая? Как они называются?

3. Сколько отрезков, равных данному, можно отложить на данной прямой от данной точки?

4. Точки A, B, C принадлежат одной прямой, $AB > BC$. Как могут располагаться данные точки относительно друг друга?

5. Изобразите отрезок AB и отрезок $2AB$.

Вариант 2

1. Какая фигура называется отрезком?

2. Изобразите прямую a и точки A, B, C, ей принадлежащие таким образом, чтобы C лежала между A и B. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?

3. Сколько лучей можно провести из одной точки?

4. Точки E, F, G принадлежат одной прямой, $EF < FG$. Как могут располагаться данные точки относительно друг друга?

5. Изобразите отрезок XY и отрезок $3XY$.

6. Длина отрезка

Цель обучения — сформировать у учащихся понятия длины отрезка и расстояния между точками; познакомить учащихся с историей возникновения и развития измерения длин отрезков; научить измерять длину отрезка, используя различные измерительные инструменты и свойства длины отрезка.

Рекомендации по решению задач

Задача 18. Толщина газетного листа 0,1 миллиметра. Газетный лист сложили пополам, потом ещё раз пополам и так пятьдесят раз. Какой примерно толщины получится стопка?

Решение. При каждом складывании толщина листа увеличивается в два раза. При 50-кратном сложении толщина увеличивается в 2^{50} раза. Имеем

$$2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 > 1000^5 = 1000000000000000.$$

Умножая это число на 0,1 мм, получим 1 миллион километров. Таким образом, толщина стопки будет более одного миллиона километров.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. Точка H лежит на прямой между точками P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $HP = 3$ см и $QH = 1{,}5$ см. Ответ поясните.

2. Даны отрезки a, b, c, причём, $a = 6$ см, $b = 3$ см и $c = 2$ см. Постройте отрезок $a + (b - c)$.

3. Известно, что длины отрезков удовлетворяют следующим равенствам: $AB = BC$, $CD = BC$. Сделайте вывод о длинах отрезков AB и CD.

4. Длина отрезка EF равна длине отрезка GH (рис. 3). Длины каких ещё отрезков на этом рисунке равны? Почему?

Рис. 3

5*. От районного центра до центра села прокладывается телефонная линия. Сколько столбов для этого нужно заготовить, если их нужно поставить через каждые 50 м, а длина прямой линии равна 10 км?

Вариант 2

1. На прямой отложены отрезки $MN = 8$ см и $NO = 3$ см. Найдите длину отрезка MO, если: а) точка N лежит между точками M и O; б) точка O лежит между точками M и N.

2. Даны отрезки $a = 6$ см, $b = 3$ см и $c = 2$ см. Постройте отрезок $a - (b + c)$.

3. Известно, что отрезки AB и CD имеют равные длины и лежат на одной прямой. Верно ли, что отрезки AC и BD имеют равные длины? Почему?

4. Длина отрезка EF равна длине отрезка GH (рис. 3). Суммой длин каких отрезков является длина отрезка EH? Рассмотрите все варианты.

5*. Пила имеет длину 1 м, а расстояние между соседними зубцами равна 25 мм (рис. 4). Найдите число зубцов пилы.

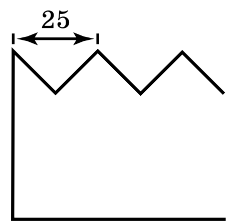


Рис. 4

7. Полуплоскости и углы

Цель обучения — рассмотреть основные свойства взаимного расположения точек на плоскости относительно прямой; сформировать понятия полуплоскости, угла, его элементов; научить распознавать виды углов.

Обратим внимание на то, что угол это не просто два луча с общей вершиной, а часть плоскости, ограниченная этими лучами. В зависимости от того, какая часть плоскости выбирается, получается тот или иной угол.

Рекомендации по решению задач

Задача 10. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счёт того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, одна прямая разбивает плоскость на две части. Две пересекающиеся прямые разбивают плоскость на четыре части. Теперь, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырёх частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $7 = 4 + 3$ (рис. 5).

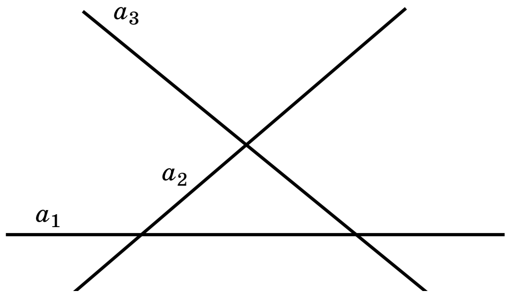


Рис. 5

Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Каждая такая часть новой прямой разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Значит, добавление четвёртой прямой даст $11 = 7 + 4$ частей плоскости и т. д. Поскольку n-я прямая пересекается с $n - 1$ прямой, то она разбивается на n частей, поэтому число частей плоскости увеличивается на n. Таким образом, общее число частей, на которые n прямых разбивают плоскость, равно $4 + 3 + ... + n$. Представим эту сумму в виде $1 + 1 + 2 + 3 + ... + n$ и воспользуемся формулой $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

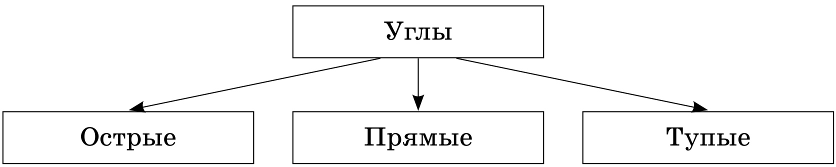
Искомое число частей плоскости будет равно $1 + \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

8. Сравнение углов. Угол между прямыми

Цель обучения — ввести операции откладывания угла от данного луча и отношение равенства углов; научить изображать и сравнивать углы, распознавать виды углов.

Различные виды углов можно проиллюстрировать следующей схемой.

ВИДЫ УГЛОВ



9. Операции над углами

Цель обучения — определить операции сложения и вычитания углов; научить формулировать и доказывать теорему о равенстве вертикальных углов.

Это первая теорема. Очень важно, чтобы учащиеся осознали, что теорема — это утверждение, истинность которого устанавливается с помощью рассуждения — доказательства.

Рекомендации по решению задач

Задача 4. На клетчатой бумаге изобразите угол, равный разности углов: а) C и B (рис. 9.7, а); б) B и C (рис. 9.7, б).

Решение представлено на рисунке 6. а) $\angle BCE$; б) $\angle CBE$.

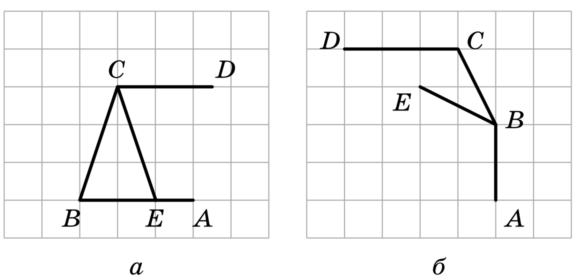


Рис. 6

Задача 5. Докажите, что если два угла равны, то равны и смежные им углы.

Решение. Пусть $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$, а углы $B_1O_1C_1$, $B_2O_2C_2$ — смежные им углы (рис. 7). Тогда угол $B_1O_1C_1$ равен разности развёрнутого угла и угла $A_1O_1B_1$. Угол $B_2O_2C_2$ равен разности развёрнутого угла и угла $A_2O_2B_2$. Так как развёрнутые углы равны и углы $A_1O_1B_1$, $A_2O_2B_2$ равны, то их разности также равны. Следовательно, смежные углы $B_1O_1C_1$, $B_2O_2C_2$ равны.

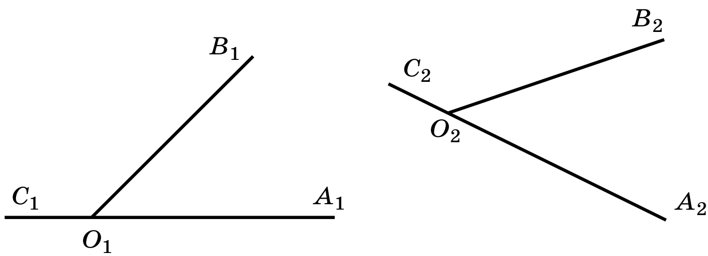


Рис. 7

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. Изобразите прямую a; точки A, B, лежащие по одну сторону от этой прямой; точки C, D, лежащие по другую. Запишите отрезки, которые: а) пересекают прямую a; б) не пересекают прямую a.

2. Внутри угла POH провели луч OQ. Сколько всего углов образовалось при этом?

3. Дан угол. Постройте смежный ему угол. Сколько таких углов можно построить?

4. Даны две пересекающиеся прямые. Сколько пар вертикальных углов при этом образовалось?

5*. Запишите развёрнутые углы, изображённые на рисунке 8.

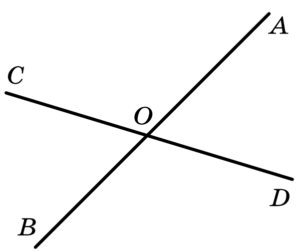


Рис. 8

Вариант 2

1. Известно, что три точки C, D и E не принадлежат одной прямой. Точка F не принадлежит прямой CD. Пересекает ли отрезок EF прямую CD? Рассмотрите возможные случаи.

2. Внутри прямого угла проведено 3 луча. Сколько углов при этом образовалось?

3. Дан угол. Постройте для него вертикальный угол. Сколько таких углов можно построить?

4. Сколько пар смежных углов образуют две пересекающиеся прямые?

5*. Запишите все пары смежных углов, изображённых на рисунке 8.

10. Градусная величина угла

Цель обучения — сформировать у учащихся понятие градусной величины угла; познакомить с историей измерения углов; научить измерять углы, используя различные измерительные инструменты и свойства градусной величины.

Рекомендации по решению задач

Задача 15. Чему равен угол между биссектрисами: а) вертикальных углов; б) смежных углов?

Решение. Докажем, что угол между биссектрисами смежных углов является прямым. Пусть AOB и BOC — смежные углы (рис. 9). Биссектриса OD угла AOB делит этот угол на два равных угла, т. е. угол BOD равен углу AOD. Биссектриса OE угла BOC делит этот угол на два равных угла, т. е. угол BOE равен углу COE. Следовательно, сумма

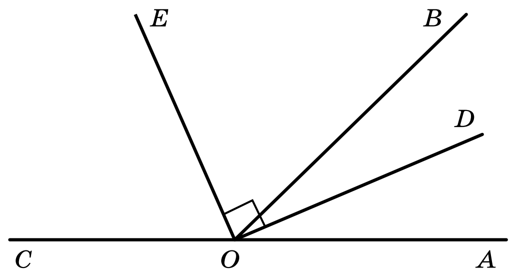


Рис. 9

углов BOD и BOE составляет половину развёрнутого угла AOC, т. е. равна 90°. Значит, биссектрисы OD и OE образуют прямой угол.

Аналогичным образом доказывается, что угол между биссектрисами вертикальных углов является развёрнутым.

Познакомиться с историческими сведениями об измерении углов можно в книге: *Г. И. Глейзер.* История математики в школе : пособие для учителей. — М. : Просвещение, 1982. Она имеется в открытом доступе на сайте www.math.ru.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. Верно ли утверждение: «Сумма двух смежных углов равна 180°»?

2. Найдите каждый из двух смежных углов, если один из них на 20° больше другого?

3. Могут ли два вертикальных угла быть прямыми?

4. Прямой угол разделен на три равные части. Найдите угол между биссектрисами крайних углов.

5*. На сколько градусов повернётся минутная стрелка часов за 5 минут?

Вариант 2

1. Верно ли утверждение: «Если сумма двух углов равна 180°, то углы смежные»? Почему?

2. Найдите каждый из двух смежных углов, если один из них в четыре раза больше другого?

3. Могут ли два вертикальных угла быть тупыми?

4. Развёрнутый угол разделен на три равные части. Найдите угол между биссектрисой средней части и прямой, образованной сторонами развёрнутого угла.

5*. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки часов в 2 часа?

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Сколько рёбер у тетраэдра?

2. Сколько прямых проходит через различные пары из четырёх точек, три из которых принадлежат одной прямой?

3. На прямой отмечено четыре точки. Сколько образовалось отрезков с концами в этих точках?

4. На отрезке CD длиной 24 см отмечена точка H. Известно, что отрезок CH в три раза длиннее отрезка DH. Найдите длины отрезков CH и DH.

5*. На сколько градусов повернётся минутная стрелка часов за 1 мин?

6*. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 60°. Определите все углы, образованные при пересечении данных прямых.

Вариант 2

1. Сколько рёбер у куба?

2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре прямые, две из которых параллельны?

3. На прямой отмечено пять точек. Сколько образовалось лучей с вершинами в этих точках?

4. На отрезке EF взята точка L. Найдите длины отрезков EL и FL, если отрезок EL на 6 см короче отрезка FL и длина отрезка EF равна 36 см.

5*. Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

6*. Сумма трёх углов, которые образуются при пересечении двух прямых, равна 240°. Определите все углы, образованные при пересечении данных прямых.

Глава II. Треугольники

При преподавании учебного материала этой главы ставятся следующие цели обучения.

1. Сформировать понятия треугольника и его элементов: вершин, сторон, углов, а также понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника; определить понятие равенства треугольников. Научить изображать треугольник и его элементы.

2. Познакомить учащихся с основными свойствами равенства треугольников. Сформулировать и доказать признаки равенства треугольников, научить применять их для решения задач на доказательство.

3. Сформировать представления о равнобедренном, равностороннем и прямоугольном треугольниках. Доказать их признаки и свойства.

4. Установить соотношения между сторонами и углами треугольника. Научить применять их при решении задач.

5. Познакомить с историческими сведениями о треугольнике.

11. Равенство треугольников

Цель обучения — познакомить школьников с понятиями треугольника и его основных элементов; определить понятие равенства треугольников; научить распознавать вид треугольника, в зависимости от его углов, и равные треугольники.

Различные виды треугольников можно проиллюстрировать следующей схемой.

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольники

Остроугольные | Прямоугольные | Тупоугольные

12. Отрезки, связанные с треугольником

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями медианы, биссектрисы и высоты треугольника; научить их распознавать и изображать; решать задачи на нахождение периметра треугольника.

Рекомендации по решению задач

Задача 10. Докажите, что если прямая пересекает одну сторону треугольника и не проходит через его вершины, то она пересекает и одну из двух других его сторон.

Решение. Пусть прямая d пересекает сторону AB треугольника ABC (рис. 10).

Вершина C может лежать в полуплоскости, определяемой прямой d, либо по одну сторону с вершиной A, либо по одну сторону с вершиной B.

Если вершина C лежит по одну сторону с вершиной A, то она и вершина B лежат по разные стороны от прямой d.

Воспользуемся аксиомой из 7-го пункта о том, что каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части.

Из неё следует, что прямая d пересекает сторону BC треугольника ABC.

Аналогично рассматривается случай, если вершина C лежит по одну сторону с вершиной B.

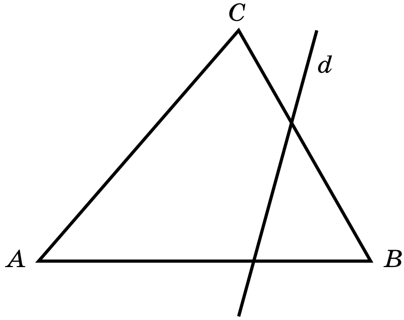


Рис. 10

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. Запишите все треугольники, изображённые на рисунке 11.

2. Чем отличается биссектриса треугольника от биссектрисы угла?

3. Треугольники ABC и DEF равны. Известно, что $DE = 6$ см, $EF = 7$ см, $DF = 8$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

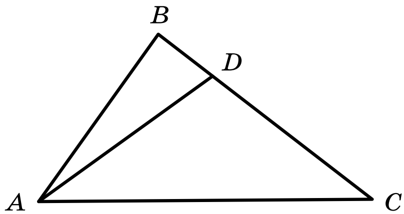


Рис. 11

4. Периметр одного треугольника больше периметра другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть равными? Почему?

5*. Найдите в окружающей нас обстановке предметы, имеющие форму треугольника.

Вариант 2

1. Запишите все треугольники, изображённые на рисунке 12.

2. Треугольники ABC и DEF равны. Известно, что $\angle D = 50°$, $\angle E = 60°$, $\angle F = 70°$. Найдите углы треугольника ABC.

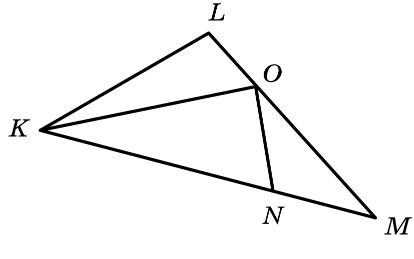


Рис. 12

3. Периметр треугольника равен 36 см. Стороны относятся как 2 : 3 : 4. Найдите стороны треугольника.

4. Треугольники ABC и OPQ равны. Периметр треугольника ABC равен 40 см, $AB = 17$ см, $PQ = 5$ см. Найдите остальные стороны треугольников.

5*. Найдите в окружающей нас обстановке предметы, имеющие форму треугольника.

13. Первый признак равенства треугольников

Цель обучения — познакомить учащихся с первым признаком равенства треугольников; научить применять его для решения задач.

Обратим внимание на то, что доказательство этого и последующих признаков равенства треугольников не является обязательным для запоминания учащимися, поскольку они слишком сложны для понимания на начальном этапе обучения геометрии. Требуется знание формулировок этих признаков и умение применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 12. На рисунке 13.11 точки A, B, C принадлежат одной прямой. Точки D_1 и D_2 лежат по разные стороны от этой прямой. Докажите, что если треугольники ABD_1 и ABD_2 равны, то треугольники BCD_1 и BCD_2 тоже равны.

Решение. Из равенства треугольников ABD_1 и ABD_2 следует равенство соответствующих сторон BD_1, BD_2 и равенство соответствующих углов CBD_1, CBD_2 (рис. 13). Из равенства этих углов следует равенство и смежных с ними углов, т. е. $\angle CBD_1 = \angle CBD_2$.

Треугольники BCD_1 и BCD_2 равны по первому признаку равенства треугольников, так как стороны BD_1 и BD_2 равны, сторона BC — общая, и равны углы CBD_1, CBD_2.

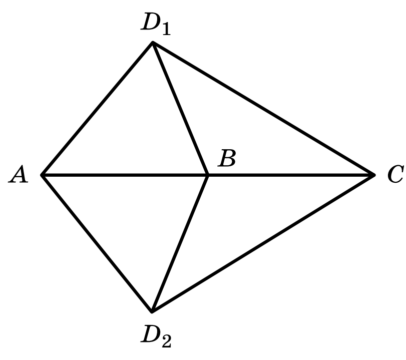


Рис. 13

Задача 13. Докажите, что в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны соответствующие медианы CM и C_1M_1 (рис. 13.12).

Решение. Рассмотрим равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и докажем что медианы CM и C_1M_1 равны (рис. 14).

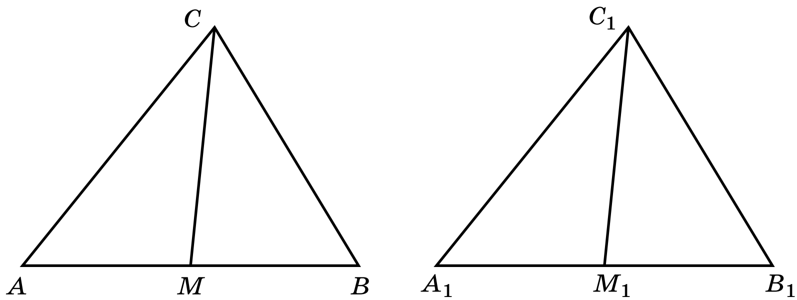


Рис. 14

Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, $\angle A = \angle A_1$). Следовательно, равны их соответствующие стороны CM и C_1M_1.

Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Запишите равенство соответствующих элементов.

2. Будут ли треугольники, изображённые на рисунке 15, равны? Почему?

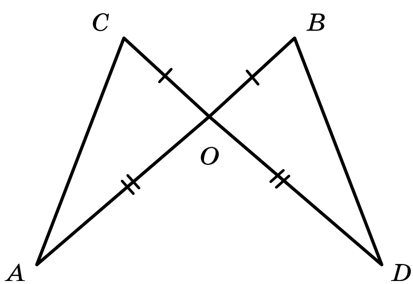


Рис. 15

3. Найдите на рисунке 16 пары равных треугольников и запишите их.

4*. На рисунке 17 $KL = NM$, $LO = MO$. Докажите, что $\angle K = \angle N$.

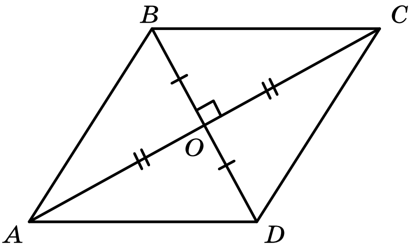


Рис. 16

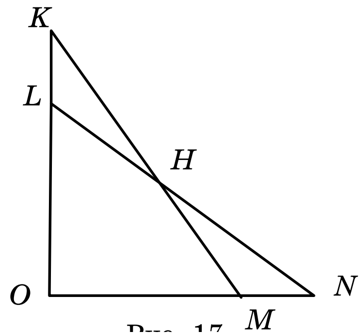


Рис. 17

Вариант 2

1. У двух треугольников EFG и HOP известно, что $FG = OP$, $\angle F = \angle O$ и $EF = HO$. Будут ли они равны? Если да, запишите соответствующее равенство.

2. Будут ли треугольники, изображённые на рисунке 18, равны? Почему?

3. В треугольнике ABC (рис. 19) AD — биссектриса угла A, $AB = AC$. Будут ли какие-нибудь треугольники равны? Запишите и найдите углы ADB и ADC.

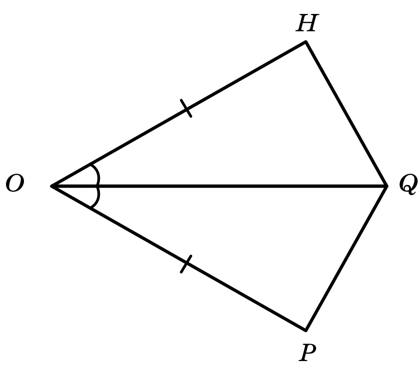


Рис. 18

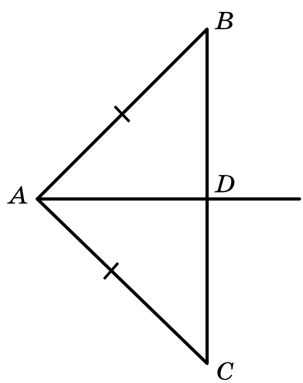


Рис. 19

4*. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B прилежит стороне AC, а точка E — стороне AD (рис. 20), причём, $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

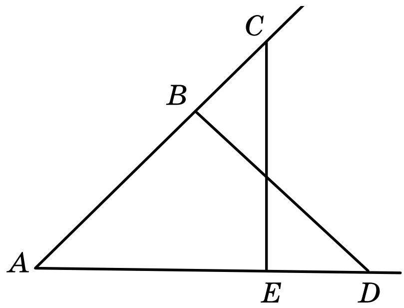


Рис. 20

14. Второй признак равенства треугольников

Цель обучения — познакомить учащихся со вторым признаком равенства треугольников; научить применять его для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 12. На рисунке 14.13 треугольники ABC и DEF равны. Отрезки CG и FH образуют со сторонами соответственно CB и FE равные углы. Докажите, что $AG = DH$.

Решение. Из равенства треугольников ABC и DEF следует равенство сторон AC, DE и равенство углов A и D, C и F (рис. 21).

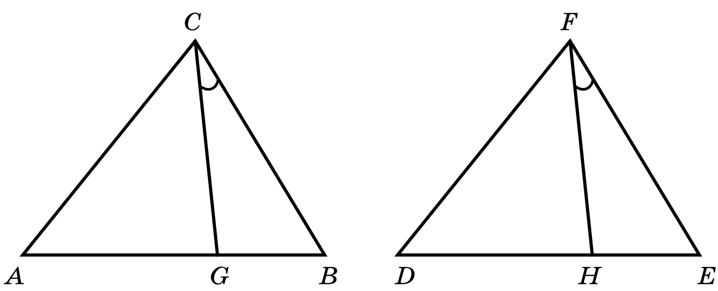


Рис. 21

По условию углы BCG и EFH равны. Следовательно, равны и углы ACG и DFH. Треугольники ACG и DFH равны по второму признаку равенства треугольников, так как стороны AC и DF равны, угол A равен углу D, угол ACG равен углу DFH. Из равенства этих треугольников следует равенство соответствующих сторон AG и DH.

Задача 16. Докажите, что в равных треугольниках ABC и DEF равны соответствующие биссектрисы CG и FH (рис. 14.17).

Решение. Рассмотрим равные треугольники ABC и DEF и докажем что биссектрисы CG и FH равны (рис. 22).

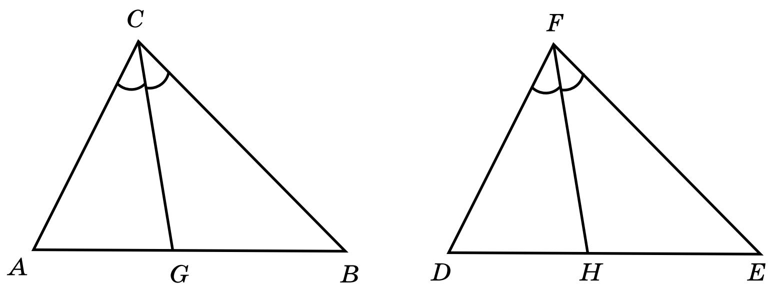


Рис. 22

Треугольники ACG и DFH равны по второму признаку равенства треугольников ($AC = DF$, $\angle A = \angle D$, $\angle ACG = \angle DFH$). Следовательно, равны их соответствующие стороны CG и FH.

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. Отрезки BC и AD пересекаются в точке O. $BO = OC$, $\angle ABO = \angle DCO$. Докажите равенство треугольников ABO и DCO.

2. В треугольниках EFG и KLM известно, что $EF=KL$, $\angle E = \angle K$ и $\angle F = \angle L$. Верно ли, что эти треугольники равны? Почему?

3. На рисунке 23 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $LM = NK$.

4*. Докажите, что прямая, перпендикулярная биссектрисе угла и пересекающая его стороны, отсекает на этих сторонах равные отрезки.

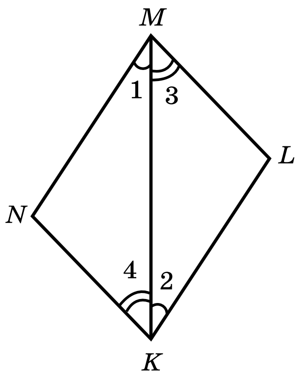


Рис. 23

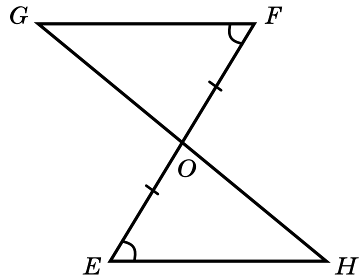


Рис. 24

Вариант 2

1. В треугольниках ABC и KLM известно, что $AB = KL$, $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$. Докажите, что $BC = LM$.

2. Дано, что $EO = FO$, $\angle E = \angle F$ (рис. 24). Какие еще отрезки и углы равны?

3. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы равных углов равны.

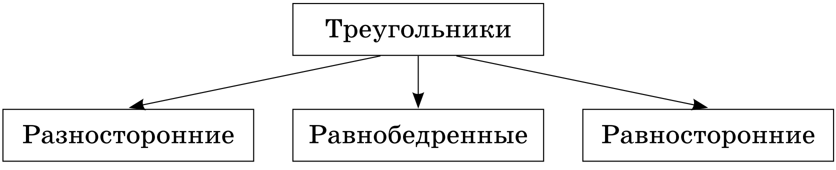
4*. Через данную внутри угла точку проведите прямую, отсекающую от сторон данного угла равные отрезки.

15. Равнобедренные треугольники

Цель обучения — познакомить с видами треугольников, в зависимости от их сторон; свойствами и признаком равнобедренного треугольника; научить их доказывать и применять для решения задач.

Различные виды треугольников можно проиллюстрировать следующей схемой.

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Рекомендации по решению задач

Задача 11. Докажите, что если биссектриса треугольника является и высотой, то треугольник равнобедренный.

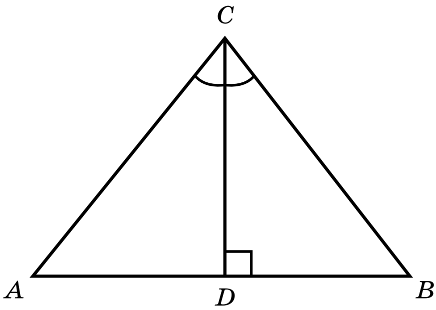


Рис. 25

Решение. Пусть в треугольнике ABC биссектриса CD является высотой (рис. 25).

Треугольники ACD и BCD равны по второму признаку равенства треугольников. У них сторона CD общая, угол ACD равен углу BCD, угол ADC равен углу BDC. Следовательно, у этих треугольников равны соответствующие стороны. В частности, $AC = BC$. Значит, треугольник ABC равнобедренный.

16. Признак равнобедренного треугольника

Цель обучения — познакомить учащихся с признаком равнобедренного треугольника; научить применять его для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к его боковым сторонам, равны.

Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведены медианы AA_1 и BB_1 (рис. 26).

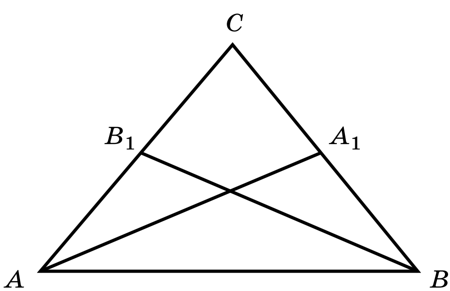


Рис. 26

Из равенства сторон AC и BC следует равенство отрезков AB_1 и BA_1. Треугольники ABB_1 и BAA_1 равны по первому признаку равенства треугольников. У них сторона AB общая, сторона AB_1 равна стороне BA_1, угол ABA_1 равен углу BAB_1. Следовательно, у этих треугольников равны соответствующие стороны. В частности, равны стороны AA_1 и BB_1, которые являются медианами треугольника ABC.

Задача 10. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённые к его боковым сторонам, равны.

Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 (рис. 27).

Из равенства углов A и B следует равенство углов ABB_1 и BAA_1. Треугольники ABB_1 и BAA_1 равны по второму признаку равенства треугольников. У них сторона AB общая, угол BAB_1 равен углу ABA_1, угол ABB_1 равен углу BAA_1. Следовательно, у этих треугольников равны соответствующие стороны. В частности, равны стороны $BB_1 = AA_1$, которые являются биссектрисами треугольника ABC.

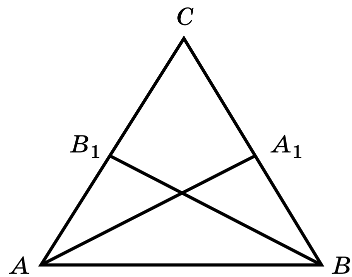


Рис. 27

Задача 11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найдите её длину, если периметр треугольника ABC равен 40 м, а треугольника ABD — 30 м.

Решение. Треугольники ABD и CBD (рис. 28) равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CB$, $AD = CD$, $\angle A = \angle C$). Следовательно, периметры этих треугольников равны. Их сумма равна 60 м и составляет периметр треугольника ABC и удвоенную длину медианы BD. Так как периметр треугольника ABC равен 40 м, то медиана равна 10 м.

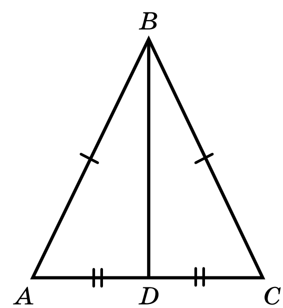


Рис. 28

Самостоятельная работа 9

Вариант 1

1. Перечислите признаки равнобедренного треугольника.

2. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$. Докажите равенство его медиан AM и CN.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см. Основание равно 6 см. Найдите боковую сторону данного треугольника.

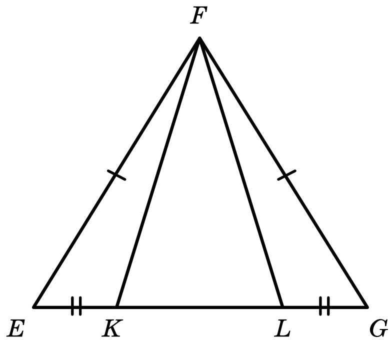


Рис. 29

4. В треугольнике EFG (рис. 29) $EF = FG$, $EK = LG$. Определите вид треугольников EFG и KFL.

Вариант 2

1. Перечислите свойства равнобедренного треугольника.

2. Дан треугольник CEF, в котором $CE = CF$. Докажите равенство его биссектрис EL и FK.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 42 см, боковая сторона составляет $\frac{2}{7}$ периметра. Найдите основание данного треугольника.

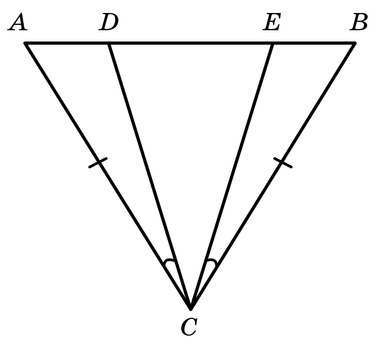


Рис. 30

4. В треугольнике ABC (рис. 30) $AC = BC$, $\angle ACD = \angle BCE$. Определите вид треугольников ABC и DEC.

17. Третий признак равенства треугольников

Цель обучения — познакомить учащихся с третьим признаком равенства треугольников; научить применять его для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 14. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны, если у них равны стороны AB и DE, AC и DF, медианы CM и FN (рис. 17.16).

Решение. Из равенства сторон AB и DE данных треугольников следует равенство отрезков AM и DN. Треугольники ACM и DFN равны по трём сторонам ($AM = DN$, $AC = DF$, $CM = FN$). Следовательно, равны их соответствующие углы A и D. Тогда треугольники ABC и DEF равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$.

Задача 15. Докажите, что если в треугольниках ABC и DEF $AC = DF$, $BC = EF$, медиана CM равна медиане FN (рис. 17.17), то треугольники ABC и DEF равны.

Решение. Метод доказательства, который используется при решении этой задачи, называется *методом удвоения медианы*. На продолжениях медиан данных треугольников отложим равные отрезки MG и NH (рис. 31).

Треугольник AMG равен треугольнику BMC по первому признаку равенства треугольников ($AM = BM$, $MG = MC$, $\angle AMG = \angle BMC$). Аналогично, треугольник DNH равен треугольнику ENF. Треугольники ACG и DFH равны по третьему признаку ($AC = DF$, $AG = DH$, $CG = FH$). Следовательно, угол ACM равен углу DFN. Аналогично доказывается, что угол BCM равен углу EFN. Складывая эти углы,

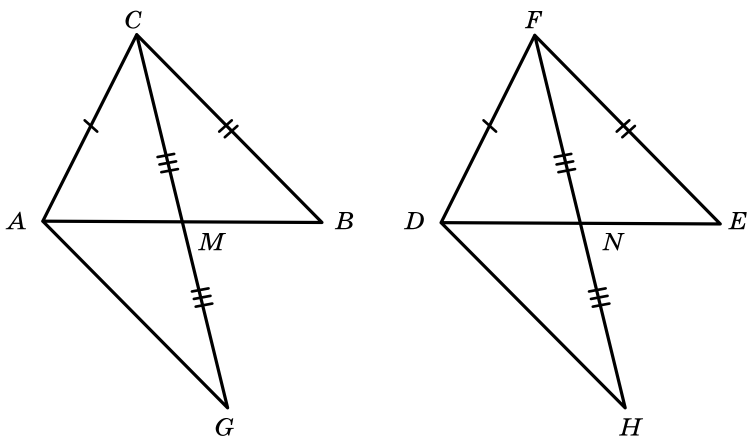


Рис. 31

получаем, что угол ACB равен углу DFE. Таким образом, в треугольниках ABC и DEF $AC = DE$, $BC = EF$, $\angle ACB = \angle DFE$. Следовательно, эти треугольники равны по первому признаку.

Самостоятельная работа 10

Вариант 1

1. На рисунке 32 $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите равенство треугольников ABD и CDB.

2. Треугольники EFG и $E_1F_1G_1$ равнобедренные с основаниями соответственно EF и E_1F_1, причём, $EF = E_1F_1$ и $FG = F_1G_1$. Будут ли данные треугольники равны?

3. На рисунке 33 найдите равные треугольники и назовите признак, по которому они равны.

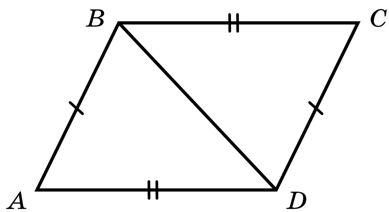


Рис. 32

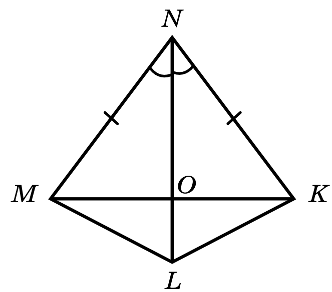


Рис. 33

4*. Докажите, что если в треугольниках ABC и DEF равны стороны AB и DE, AC и DF, и равны медианы CM и FG, то эти треугольники равны.

Вариант 2

1. На рисунке 34 $AB = CD$, $BC = DA$. Назовите равные треугольники. Ответ поясните.

2. Треугольники MNK и $M_1N_1K_1$ равнобедренные с основаниями соответственно MK и M_1K_1. Будут ли данные треугольники равны, если $MK = M_1K_1$ и $MN = M_1N_1$. Почему?

3. На рисунке 35 $EF = FG$, $EH = HG$. Перечислите пары равных треугольников. Ответ поясните.

4*. Докажите, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то у них равны медианы CM и C_1M_1.

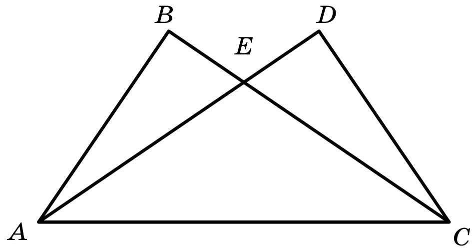


Рис. 34

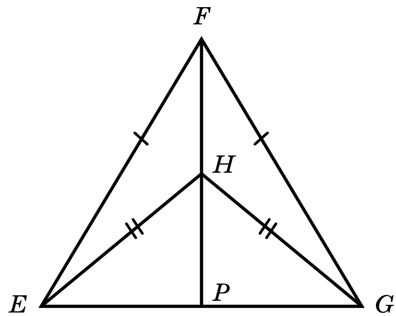


Рис. 35

18. Соотношения между углами и сторонами треугольника

Цель обучения — сформулировать и доказать теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника; научить применять их для решения задач.

Доказательства этих теорем использует признаки равенства треугольников и могут быть доступны для учащихся.

Рекомендации по решению задач

Задача 23. В треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, CM — медиана (рис. 18.19). Докажите, что угол BCM больше угла ACM.

Решение. Воспользуемся методом удвоения медианы. На продолжении медианы CM отложим отрезок MD, равный CM (рис. 36).

Треугольник AMD равен треугольнику BMC по первому признаку равенства треугольников ($AM = BM$, $MD = MC$,

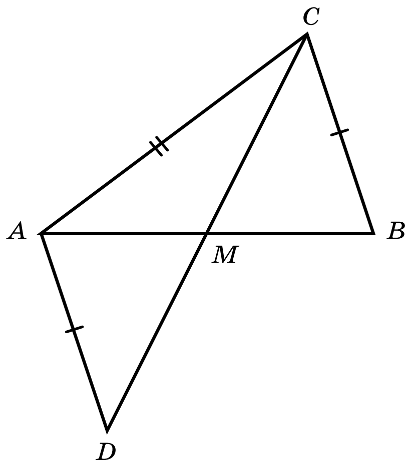


Рис. 36

$\angle AMD = \angle BMC$). Следовательно, равны стороны AD, BC и равны углы ADM, BCM этих треугольников. В треугольнике ACD сторона AC больше стороны AE. Следовательно, угол ADC больше угла ACD. Значит, угол BCM больше угла ACM.

Задача 24. В треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, CD — биссектриса (рис. 18.20). Докажите, что $AD > BD$.

Решение. В силу предыдущей задачи для середины M стороны AB выполняется неравенство $\angle ACM < \angle BCM$. Значит, биссектриса треугольника BCM лежит внутри угла BCM. Следовательно, основание D этой биссектрисы лежит внутри отрезка MD. Значит, $AD > BD$.

19. Неравенство треугольника

Цель обучения — сформулировать и доказать теорему о соотношении между сторонами треугольника (неравенство треугольника); научить применять её для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 7. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины его периметра.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, что

$$AB < \frac{1}{2}(AB + AC + BC).$$

Действительно, в силу неравенства треугольника $AB < AC + BC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства AB и деля на два, получаем искомое неравенство.

Задача 8. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, что медиана CD меньше полупериметра этого треугольника.

В силу неравенства треугольника выполняются неравенства $CD < AC + AD$, $CD < BC + BD$.

Складывая эти неравенства и деля обе части полученного неравенства на два, будем иметь требуемое неравенство $CD < \frac{1}{2}(AC + BC + AB)$.

Задача 9. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки треугольника до его вершин больше его полупериметра (рис. 19.3).

Решение. Рассмотрим треугольник ABC и какую-нибудь его внутреннюю точку O (рис. 37).

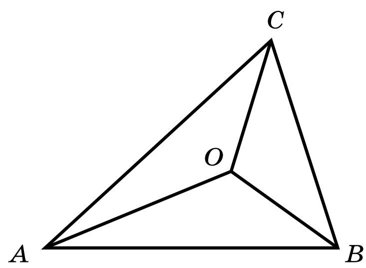


Рис. 37

В силу неравенства треугольника выполняются неравенства $OA + OB > AB$, $OA + OC > AC$, $OB + OC > BC$.

Складывая эти неравенства и деля обе части полученного неравенства на два, будем иметь требуемое неравенство $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$.

Задача 10. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключается.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, что медиана CM меньше суммы сторон AC и BC этого треугольника. Воспользуемся методом удвоения медианы. На продолжении медианы CM отложим отрезок MD, равный CM (рис. 38). Треугольник AMD равен треугольнику BMC по первому признаку равенства треугольников ($AM = BM$, $MD = MC$, $\angle AMD = \angle BMC$). Следовательно, равны стороны AD и BC этих треугольников. В силу неравенства треугольника выполняется неравенство $CD < AC + AD$. Учитывая, что $CD = 2CM$ и $AD = BC$, получаем требуемое неравенство $CM < \frac{1}{2}(AC + BC)$.

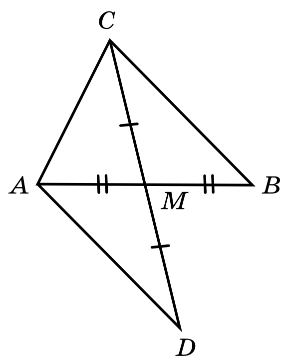


Рис. 38

Самостоятельная работа 11

Вариант 1

1. Углы треугольника равны 70°, 70° и 40°. Определите вид треугольника и найдите его внешние углы.

2. В треугольнике ABC известны стороны, а именно: $AB = 8$ см, $BC = 15$ см и $AC = 12$ см. Найдите наибольший и наименьший углы данного треугольника.

3. Для углов треугольника KLM выполняются неравенства $\angle K > \angle L > \angle M$. Сравните его стороны.

4*. Может ли угол при основании равнобедренного треугольника быть тупым? Почему?

Вариант 2

1. В треугольнике два внешних угла при различных вершинах равны между собой. Каков вид этого треугольника? Ответ поясните.

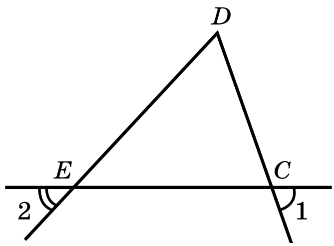


Рис. 39

2. На рисунке 39 $\angle 1 > \angle 2$. Сравните стороны CD и ED.

3. Может ли в треугольнике быть два тупых угла? Почему?

4*. Каждый угол треугольника равен 60°. Определите вид треугольника. Ответ поясните.

20. Прямоугольные треугольники. Перпендикуляр и наклонная

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями прямоугольного треугольника, перпендикуляра и наклонной; сформулировать и доказать признаки равенства прямоугольных треугольников, теорему о соотношении перпендикуляра и наклонной; научить применять их при решении задач.

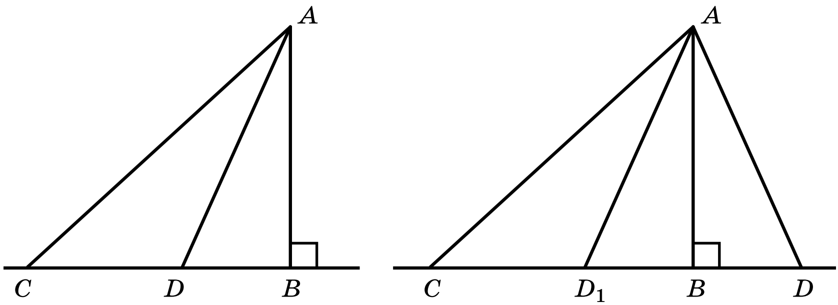
Доказательство некоторых из этих признаков может быть дано учащимся в качестве самостоятельной работы.

Рекомендации по решению задач

Задача 14. Докажите, что из двух наклонных, проведённых из данной точки к данной прямой, больше та, проекция которой больше (рис. 20.8).

Решение. Пусть AC и AD наклонные, BC и BD их проекции, причём $BC > BD$. Предположим, что точки C и D лежат по одну сторону от точки B (рис. 40, а). В прямоугольном треугольнике ABD угол D — острый. Следовательно, угол ADC — тупой. В треугольнике ACD угол D — тупой, следовательно, угол C — острый. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то $AC > AD$.

В случае, если точки C и D лежат по разные стороны от точки B, то на отрезке BC отложим отрезок BD_1, равный отрезку BD (рис. 40, б). Прямоугольные треугольники ABC и ABD_1 равны по двум катетам. Следовательно, $AD = AD_1$. По доказанному выше $AC > AD_1$. Значит, и в этом случае выполняется неравенство $AC > AD$.



а б

Рис. 40

Самостоятельная работа 12

Вариант 1

1. Из точки, не принадлежащей данной прямой, проведите перпендикуляр и наклонную. Найдите расстояние от этой точки до прямой.

2. Чему равна проекция одной стороны равностороннего треугольника на другую его сторону? Ответ поясните.

3. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны: $BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Чему равны расстояния от вершины B до прямой AC, от A до BC?

4*. Докажите, что из проекций двух наклонных, проведённых к прямой из одной точки, больше та, наклонная которой больше.

Вариант 2

1. Из точки, не принадлежащей данной прямой, проведите перпендикуляр и наклонную. Какой отрезок имеет большую длину? Почему?

2. Чему равна проекция гипотенузы прямоугольного треугольника на его катет? Ответ поясните.

3. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны: $BC = 4$ см, $AC = 5$ см. Чему равны расстояния от вершины A до прямой BC?

4*. Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от его боковых сторон.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. В треугольнике HOP $HO = 7$ см, $HP = 13$ см, $PO = 9$ см. Сравните углы данного треугольника.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 58 см. Основание на 14 см меньше боковой стороны. Найдите стороны данного треугольника.

3. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведённые из равных углов, равны.

4. Может ли прямоугольный треугольник иметь стороны 5, 5, 8?

5*. От вершины M равнобедренного треугольника KLM ($MK = ML$) отложены равные отрезки: MN на стороне MK и MH на стороне ML. Докажите, что $\angle MKH = \angle MLN$.

Вариант 2

1. Дан треугольник KMN, в котором $KM = 10$ см, $MN = 10$ см и $KN = 15$ см. Сравните углы данного треугольника.

2. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 96 см, и основание относится к боковой стороне как 2 : 3.

3. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к равным сторонам, равны.

4. Стороны прямоугольного треугольника равны 6 см, 8 см, 10 см. Чему равна гипотенуза?

5*. Дан равнобедренный треугольник EFG. От вершины G отложены на боковых сторонах GE и GF соответственно равные отрезки GM и GN. Докажите, что $\angle NEF = \angle MFE$.

Глава III. Окружность. Геометрические построения

При изучении материала этой главы ставятся следующие цели обучения.

1. Сформировать понятия окружности, круга и их элементов; научить учащихся изображать окружность, находить её элементы.

2. Рассмотреть случаи взаимного расположения прямой и окружности. Сформировать понятие касательной к окружности, сформулировать и доказать теоремы о касательной.

3. Рассмотреть случаи взаимного расположения двух окружностей. Сформулировать и доказать теоремы о взаимном расположении двух окружностей.

4. Сформировать понятие геометрического места точек (ГМТ). Привести примеры геометрических мест точек. Научить находить и изображать геометрические места точек.

5. Сформировать понятия окружности, описанной около треугольника, и окружности, вписанной в треугольник. Сформулировать и доказать теоремы о существовании описанной и вписанной окружностей. Научить решать задачи на нахождение центров и радиусов описанных и вписанных окружностей.

6. Познакомить с методами решения задач на построение. Рассмотреть примеры задач на построение. Научить решать задачи на построение.

7*. Познакомить с понятиями параболы, эллипса, гиперболы, рассматриваемых как геометрические места точек. Рассмотреть их свойства. Научить решать задачи на изображение, построение и моделирование этих кривых. Познакомить с историческими сведениями.

21. Окружность и круг

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями окружности, круга и их элементами; научить изображать окружность, находить её элементы.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Докажите, что диаметр, проведённый через середину хорды, отличной от диаметра, перпендикулярен к этой хорде (рис. 21.7).

Решение. Рассмотрим окружность с центром O, хордой AB, отличной от диаметра, и диаметром DE, проходящим через середину C этой хорды (рис. 41). Треугольник AOB — равнобедренный, OC — медиана. Следовательно, она является высотой. Значит, диаметр DE перпендикулярен хорде AB.

Задача 11. Используя рисунок 21.8, докажите, что диаметр является наибольшей хордой окружности.

Решение. Рассмотрим окружность с центром O, хордой AB, отличной от диаметра (рис. 42). Применяя неравенство треугольника к треугольнику AOB, получаем неравенство $AB < OA + OB$. В правой части этого неравенства стоит сумма двух радиусов. Она равна диаметру окружности. Следовательно, любая хорда, отличная от диаметра, меньше диаметра окружности. Значит, диаметр является наибольшей хордой окружности.

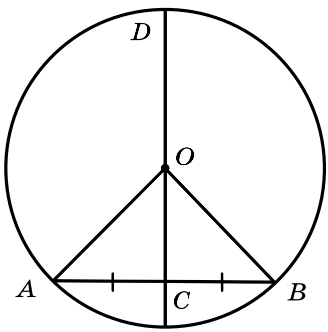


Рис. 41

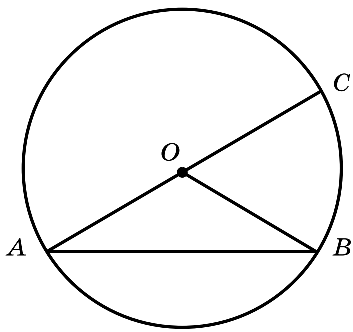


Рис. 42

Самостоятельная работа 13

Вариант 1

1. Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 15 см больше радиуса этой же окружности.

2. В окружности радиуса 3 см проведите через взятую на ней точку хорду, равную 4 см. Сколько таких хорд можно провести?

3. Радиус окружности равен 24 см. Данная точка находится на расстоянии 40 см от её центра. Определите наименьшее и наибольшее расстояния от этой точки до точек данной окружности.

4*. В окружности проведены два диаметра AB и CD. Докажите равенство хорд AC и BD.

Вариант 2

1. Найдите радиус окружности, если известно, что он на 10 см меньше диаметра этой же окружности.

2. В окружности проведены три равные хорды, одна из которых удалена от центра на 3 см. На каком расстоянии находятся от центра две другие хорды?

3. Радиус окружности равен 18 см. Данная точка находится на расстоянии 10 см от её центра. Определите наименьшее и наибольшее расстояния от этой точки до точек данной окружности.

4*. Из точки, принадлежащей окружности, проведены две равные хорды. Докажите, что диаметр, проходящий через эту точку, делит угол между хордами пополам.

22. Взаимное расположение прямой и окружности

Цель обучения — рассмотреть различные случаи взаимного расположения прямой и окружности; научить распознавать эти случаи; проводить касательные к окружности.

Различные случаи взаимного расположения прямой и окружности можно проиллюстрировать следующей схемой.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ
ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Прямая и окружность

Не имеют общих точек

Имеют одну общую точку (касаются)

Имеют две общие точки (пересекаются)

Рекомендации по решению задач

Задача 12. Докажите, что отрезки A_1B_1 и A_2B_2 общих внутренних касательных к двум окружностям (рис. 22.9), равны.

Решение. Обозначим P точку пересечения касательных (рис. 43).

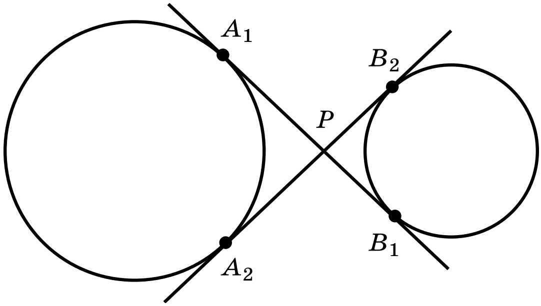


Рис. 43

Тогда отрезки PA_1 и PA_2 равны, как отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки. Отрезки PB_1 и PB_2 также равны, как отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки. Так как $A_1B_1 = A_1P + PB_1$, $A_2B_2 = A_2P + PB_2$, то отрезки A_1B_1 и A_2B_2 равны.

Задача 13. Докажите, что отрезки A_1B_1 и A_2B_2 общих пересекающихся внешних касательных к двум окружностям (рис. 22.10), равны.

Решение. Обозначим P точку пересечения касательных (рис. 44).

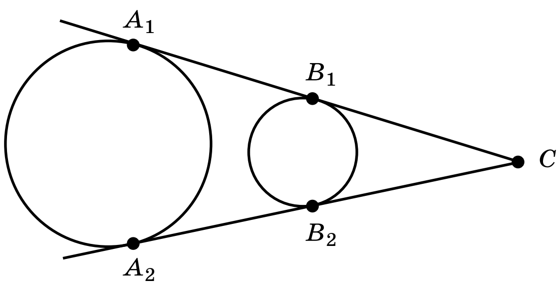


Рис. 44

Тогда отрезки CA_1 и CA_2 равны, как отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки. Отрезки CB_1 и CB_2 также равны, как отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки. $A_1B_1 = A_1C - CB_1$, $A_2B_2 = A_2C - CB_2$, то отрезки A_1B_1 и A_2B_2 равны.

Задача 14. На рисунке 22.11 DA, DB, DC — касательные. В каком отношении делит точка D отрезок AB?

Решение. Отрезки DA и DC равны, как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки (рис. 45).

Отрезки DC и DB также равны, как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки. Следовательно, $AD = DB$, т. е. точка D делит отрезок AB пополам.

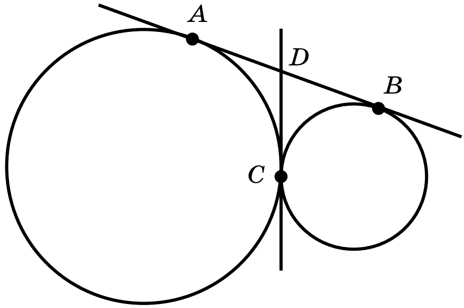


Рис. 45

Задача 15. Через точку C вне окружности проведены касательные CA_1 и CA_2 и через точку B на окружности проведена касательная, пересекающая отрезки CA_1 и CA_2 в точках D и E соответственно (рис. 22.12). Докажите, что периметр треугольника CDE не зависит от положения точки B.

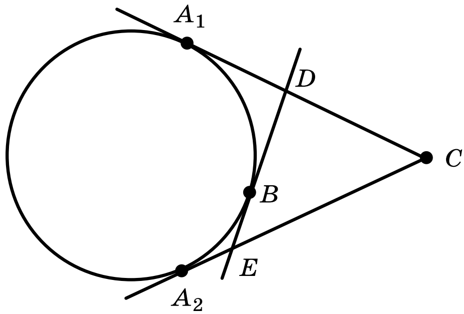


Рис. 46

Решение. Так как $DA_1 = DB$ и $EA_2 = EB$, то периметр треугольника CDE равен сумме отрезков касательных CA_1 и CA_2. Эта сумма не зависит от положения точки B (рис. 46).

Самостоятельная работа 14

Вариант 1

1. Определите взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 5 см, а расстояние от прямой до центра окружности равно 7 см. Изобразите эту ситуацию.

2. Дана окружность с центром в точке A и радиусом R. Расстояние от точки A до прямой a равно d. Запи-

шите условие, при котором прямая и окружность не пересекаются.

3. Прямая касается окружности. Найдите расстояние от центра окружности до этой прямой, если диаметр окружности равен 17 см.

4*. Через точку A окружности проведена касательная. Докажите, что диаметр AC перпендикулярен этой касательной.

Вариант 2

1. Диаметр окружности равен 18 см, расстояние от её центра до прямой равно 8 см. Каково взаимное расположение окружности и прямой? Изобразите эту ситуацию.

2. Дана прямая a и окружность $(O;\ R)$. Расстояние от точки O до прямой a равно d. Запишите условие того, что прямая касается окружности.

3. Проведите окружность данного радиуса, которая касается данной прямой в данной на ней точке.

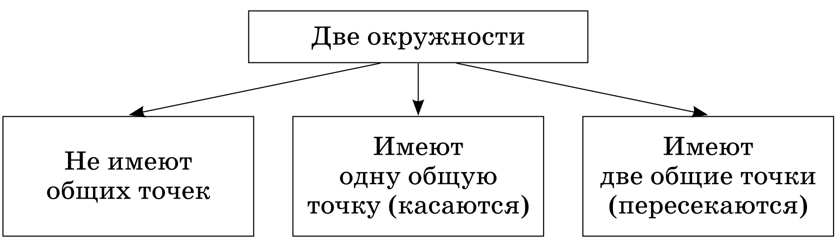
4*. Докажите, что перпендикуляр к касательной в точке касания с окружностью проходит через центр окружности.

23. Взаимное расположение двух окружностей

Цель обучения — рассмотреть различные случаи взаимного расположения двух окружностей; научить распознавать эти случаи.

Различные случаи взаимного расположения двух окружностей можно проиллюстрировать следующей схемой.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ



Рекомендации по решению задач

Задача 6. Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$ (рис. 23.8).

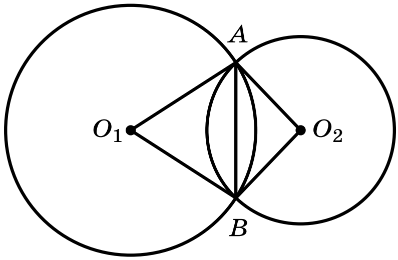


Рис. 47

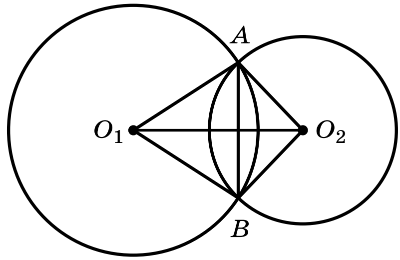


Рис. 48

Решение. Треугольник AO_1B равнобедренный (рис. 47). Следовательно, $\angle O_1AB = \angle O_1BA$. Треугольник AO_2B также равнобедренный. Следовательно, $\angle O_2AB = \angle O_2BA$. Складывая эти равенства, получим равенство углов O_1AO_2 и O_1BO_2.

Задача 7. Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 23.9). Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна прямой AB.

Решение. В силу предыдущей задачи треугольники AO_1O_2 равен треугольнику BO_1O_2 (рис. 48) по первому признаку равенства треугольников ($O_1A = O_1B$, $O_2A = O_2B$, $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$). Следовательно, прямая O_1O_2 содержит биссектрису угла AO_1B. Так как треугольник AO_1B равнобедренный, то прямая O_1O_2 содержит высоту этого треугольника, значит, она перпендикулярна прямой AB.

Задача 13. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности; г) n окружностей? Нарисуйте соответствующие окружности.

Решение. Наибольшее число точек пересечения получается, если каждая окружность пересекается с каждой и нет тройных точек пересечения. Для того чтобы подсчитать количество точек пересечения n окружностей, достаточно подсчитать, количество пар окружностей, которые можно образовать из данных n окружностей. Как мы знаем, это число равно числу сочетаний из n по 2, т. е. равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Каждая пара окружностей даёт две точки пересечения. Следовательно, общее число точек пересечений равно $n(n-1)$.

Самостоятельная работа 15

Вариант 1

1. Изобразите две касающиеся окружности. Запишите соответствующее неравенство, если радиусы окружностей равны R и r.

2. Как расположены относительно друг друга две окружности (A; R) и (B; r), если $AB = 10$ см, $R = 7$ см, $r = 3$ см?

3. Две окружности с радиусами 20 см и 4 см пересекаются. Каким может быть расстояние между их центрами?

4*. Две окружности касаются внешним образом. Диаметр первой равен 6 см, второй — 17 см. Найдите расстояние между их центрами.

Вариант 2

1. Изобразите две пересекающиеся окружности. Запишите соответствующее неравенство, если радиусы окружностей равны R и r.

2. Как расположены относительно друг друга две окружности (O_1; R_1) и (O_2; R_2), если $O_1O_2 = 2$ см, $R_1 = 4$ см и $R_2 = 6$ см?

3. Две окружности (C; a) и (D; b) касаются внешним образом. Известно, что $CD = 16$ см и $a = 4$ см. Найдите b.

4*. Найдите диаметры двух концентрических окружностей, если ширина соответствующего кольца равна 12 см, а радиусы окружностей относятся как 5 : 2.

24. Геометрические места точек

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием геометрического места точек; привести примеры геометрических мест точек; научить решать задачи на нахождение и изображение геометрических мест точек (ГМТ).

Рекомендации по решению задач

Задача 12. Укажите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых a и b (рис. 24.12).

Решение. Докажем, что искомым ГМТ являются две перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми, без их точки пересечения (рис. 49).

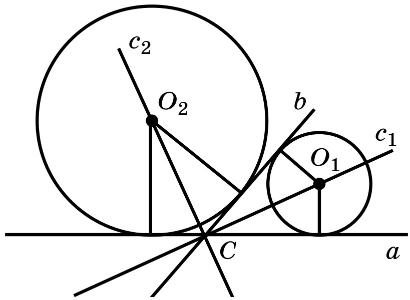


Рис. 49

Действительно, если окружность касается двух данных прямых, то её центр одинаково удалён от этих прямых. Следовательно, принадлежит биссектрисе соответствующего угла.

Обратно, если точка принадлежит биссектрисе одного из углов образованных данными прямыми и не совпадает с точкой пересечения этих прямых, то окружность с центром в этой точке и радиусом, равным расстоянию от неё до данных прямых, будет касаться этих прямых.

Задача 13. Отметьте точки C, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 90°, т. е. угол ACB равен 90° (рис. 24.13).

Решение. Искомые точки показаны на рисунке 50.

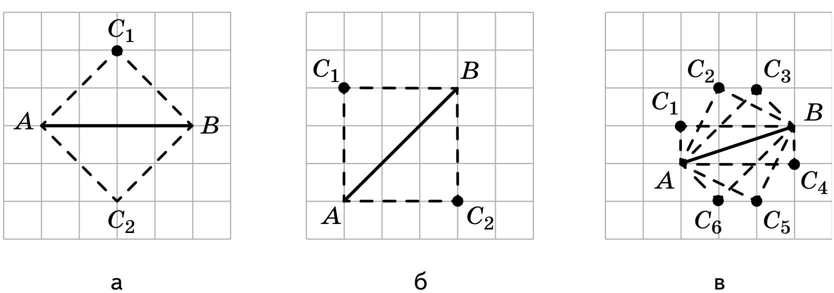


Рис. 50

Задача 14. Отметьте точки C, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 45°, т. е. угол ACB равен 45° (рис. 24.14).

Решение. Искомые точки показаны на рисунке 51.

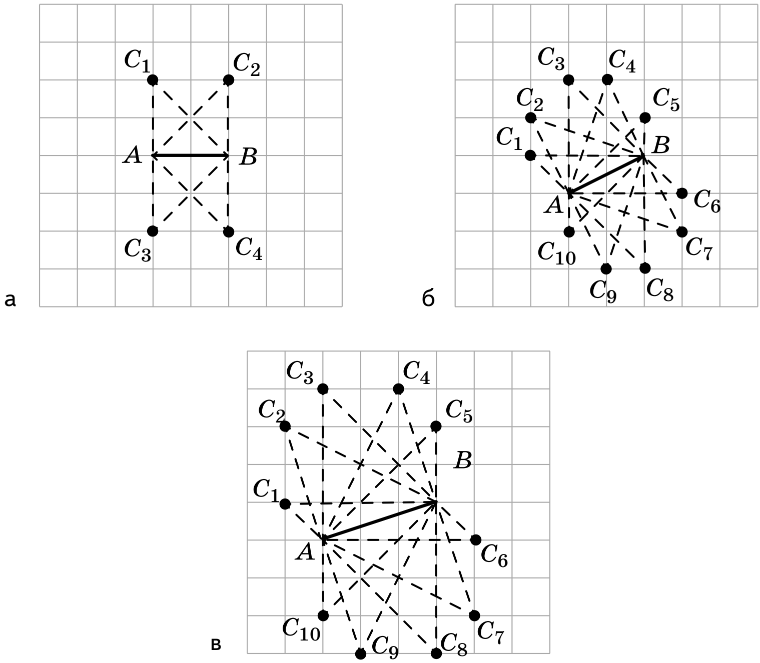


Рис. 51

Самостоятельная работа 16

Вариант 1

1. Найдите геометрическое место точек, лежащих между двумя заданными точками A и B.

2. Из данной точки окружности проведите две хорды. Найдите на окружности точку, одинаково удалённую от обеих прямых, на которых лежат данные хорды.

3. Найдите геометрическое место точек таких, что отрезки касательных, проведённых из них к данной окружности, равны заданному отрезку.

4*. Найдите геометрическое место точек, расположенных внутри данного угла и удалённых от его вершины на данное расстояние.

Вариант 2

1. Найдите геометрическое место точек M, таких, что расстояние от них до заданной точки O меньше заданного расстояния a.

2. Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание.

3. Найдите геометрическое место центров равных окружностей, внешне касающихся данной окружности.

4*. Что представляет собой геометрическое место точек, удалённых от точки A на расстояние a, а от точки B на расстояние b?

25. Задачи на построение

Цель обучения — познакомить учащихся с методами решения задач на построение; рассмотреть примеры таких задач; научить решать задачи на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки.

При решении задач на построение циркулем и линейкой выделяют четыре этапа. 1. Анализ. 2. Построение. 3. Доказательство. 4. Исследование.

Не все из них проводятся при решении каждой задачи, однако необходимо показать примеры решения задач на построение, включающие все этапы. Особенно это относится к первым задачам на построение. В учебнике приведены такие примеры.

Рекомендации по решению задач

Задача 11. Используя рисунок 25.9, постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне этой окружности.

Построение. С центром в точке O проведём окружность в два раза большего радиуса, чем данная окружность (рис. 52). С центром в точке A проведём окружность радиуса OA. Обозначим точки пересечения построенных окружностей C_1, C_2. Проведём отрезки OC_1, OC_2 и обозначим их точки пересечения с данной окружностью B_1, B_2. Проведём прямые AB_1, AB_2. Они и будут искомыми касательными.

Действительно, треугольники OAC_1 и OAC_2 равнобедренные. AB_1, AB_2 — медианы этих треугольников, проведённые к основаниям. Следовательно, эти медианы являют-

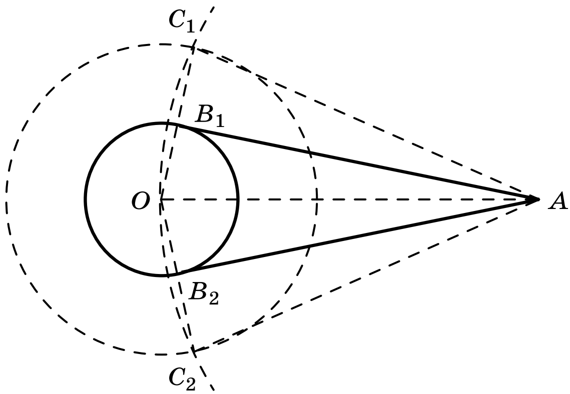


Рис. 52

ся и высотами данных треугольников. Значит, прямые AB_1, AB_2 перпендикулярны радиусам соответственно OB_1, OB_2 данной окружности. Следовательно, прямые AB_1, AB_2 являются касательными к данной окружности.

Заметим, что так как расстояние OA между центрами данной и построенной окружностей меньше суммы их радиусов и больше их разности, то эти окружности пересекаются, следовательно, построение всегда возможно.

Самостоятельная работа 17

Вариант 1

1. Постройте равнобедренный треугольник с основанием 3 см и боковой стороной 4 см.

2. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

3. Постройте геометрическое место центров окружностей с радиусом 2 см, проходящих через данную точку.

4*. В данный угол впишите окружность, которая касается одной из его сторон в данной на ней точке.

Вариант 2

1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и прилежащему к нему острому углу.

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

3. Постройте прямую, проходящую через данную точку и отсекающую от сторон данного угла равные отрезки.

4*. Постройте хорду, которая проходит через точку на данной окружности и удалена от центра окружности на данное расстояние.

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. Точка A расположена вне окружности радиуса 3 и удалена от центра O этой окружности на расстояние 4. Чему равно наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?

2. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 5 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно 4 см?

3. Даны окружность радиуса 4 см и точка A на расстоянии, равном 6 см от центра окружности. Найдите радиус окружности с центром в точке A и касающейся данной окружности внешним образом.

4*. Для данных точек A, B укажите геометрическое место точек C, для которых расстояние до A меньше расстояния до B.

5*. С помощью циркуля и линейки разделите отрезок пополам.

Вариант 2

1. Точка A расположена внутри окружности радиуса 3 и удалена от центра O этой окружности на расстояние 2. Чему равно наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?

2. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 4 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно 5 см?

3. Даны окружность радиуса 7 см и точка А на расстоянии, равном 3 см от центра окружности. Найдите радиус окружности с центром в точке A и касающейся данной окружности внутренним образом.

4*. Для данных точек A, B укажите геометрическое место точек C, для которых расстояние до A больше расстояния до B.

5*. С помощью циркуля и линейки постройте биссектрису данного угла.

Глава IV. Параллельность. Сумма углов многоугольника

При изучении материала этой главы ставятся следующие цели обучения.

1. Сформировать понятие параллельности прямых.
2. Сформулировать и доказать свойства параллельных прямых.
3. Ввести аксиому параллельных, доказать признак параллельности двух прямых и следствия из него.
4. Вывести формулу суммы углов треугольника.
5. Сформировать понятия ломаной и многоугольника.
6. Вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника.
7. Научить решать задачи на нахождение углов.
8. Познакомить с историческими сведениями об аксиоме параллельных.

26. Параллельные прямые

Цель обучения — сформировать понятие параллельности прямых. Научить доказывать признак параллельности двух прямых и применять его при решении задач.

Обратим внимание на то, что в формулировке аксиомы параллельных требуется, чтобы через точку, не принадлежащую данной прямой, проходило не более одной прямой, параллельной данной. Это не предполагает существование такой прямой. Существование прямой, параллельной данной, доказывается без использования аксиомы параллельных.

Рекомендации по решению задач

Задача 14. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.

Решение. Рассмотрим параллельные прямые a и b, пересечённые секущей c в точках A и B. Обозначим d и e биссектрисы внутренних накрест лежащих углов (рис. 53).

Биссектриса d образует с секущей c угол, равный половине угла, образованного прямыми a и c. Биссектриса e образует с секущей c угол, равный половине угла, образованного прямыми b и c. Так как внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми a, b и секущей c, равны, то равны и внутренние накрест лежащие углы, образованные прямыми d, e и секущей c. Следовательно, прямые d и e параллельны.

Задача 15. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Решение. Пусть прямые a, b параллельны, и прямая c пересекает прямую b в точке B (рис. 54). Если бы прямая c не пересекала бы прямую a, то через точку B проходило бы две прямые, параллельные прямой a, что невозможно в силу аксиомы параллельных. Значит, прямая c пересекает прямую a.

Задача 16. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 55). Прямые a и b не могут пересекаться, так как в этом случае через точку их пересечения проходило бы две прямые, параллельные прямой c, что невозможно в силу аксиомы параллельных. Значит, прямые a и b параллельны.

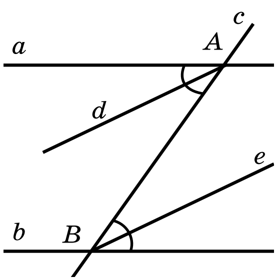


Рис. 53

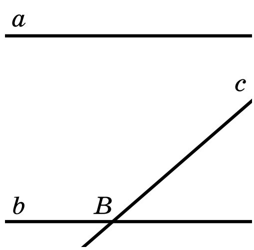


Рис. 54

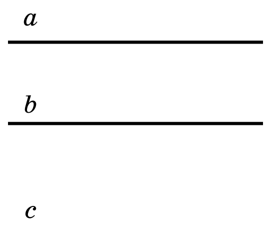


Рис. 55

Исторические сведения

Познакомиться с историческими сведениями об аксиоме параллельных можно в книге: *Г. И. Глейзер.* История математики в школе: пособие для учителей. — М. : Просвещение, 1982. Она имеется в открытом доступе на сайте www.math.ru.

Самостоятельная работа 18

Вариант 1

1. Один из углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 30°. Найдите все углы.

2. Как должна проходить секущая, чтобы все восемь углов, получающихся при пересечении ею двух параллельных прямых, были равны?

3. Сумма трёх внутренних углов из восьми углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, оказалась равной 250°. Найдите каждый из восьми углов.

4*. Докажите, что прямая, параллельная боковой стороне равнобедренного треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает равнобедренный треугольник.

Вариант 2

1. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 40°. Найдите все углы.

2. Докажите, что прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника и пересекающая его боковые стороны, отсекает равнобедренный треугольник.

3. Один из внутренних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 136°. Под какими углами его биссектриса пересекает другую параллельную прямую?

4*. Докажите, что биссектрисы соответственных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, параллельны.

27. Сумма углов треугольника

Цель обучения — сформулировать и доказать теорему о сумме углов треугольника; вывести из неё некоторые следствия; научить применять её для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 20. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, параллельна ему (рис. 27.7).

Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AC = BC$), CD — биссектриса внешнего угла при вершине C (рис. 56).

Так как внешний угол при вершине C равен сумме двух внутренних равных углов A и B, то угол BCD равен углу B. Таким образом, равны внутренние накрест лежащие углы ABC и BCD при прямых AB, CD и секущей BC. Следовательно, биссектриса CD параллельна основанию AB.

Задача 31. Докажите, что если один из углов прямоугольного треугольника равен 30°, то катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. На стороне AC построим треугольник ADC, равный треугольнику ABC (рис. 57).

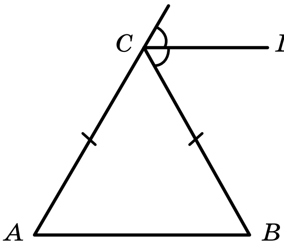


Рис. 56

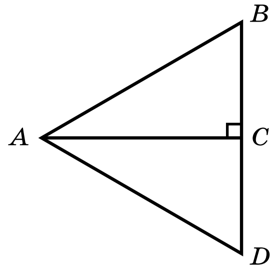


Рис. 57

В треугольнике ABD все углы равны 60°. Следовательно, этот треугольник равносторонний. Отрезок AC является его высотой, значит, медианой. Таким образом, $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$.

Самостоятельная работа 19

Вариант 1

1. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен 116°.

2. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите больший из них.

3. Найдите углы, которые образуются при пересечении двух биссектрис равностороннего треугольника.

4*. В треугольнике внешний угол равен 110°. Один из внутренних углов, не смежных с ним, больше другого на 30°. Найдите эти углы.

Вариант 2

1. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при основании в 4 раза больше угла при вершине, противолежащей основанию.

2. Углы треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите меньший из них.

3. В треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекаются под углом 128°. Найдите угол A.

4*. Внешний угол треугольника равен 100°. Внутренние углы, не смежные с ним, относятся как 2 : 3. Найдите углы треугольника.

28. Ломаные

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями ломаной и её элементов. Научить распознавать и изображать ломаные, находить их длины.

Рекомендации по решению задач

Задача 7. Изобразите: а) четырёхстороннюю; б) шестистороннюю ломаную, проходящую через все данные точки на рисунке 28.8.

Ответ. Искомые ломаные показаны на рисунке 58.

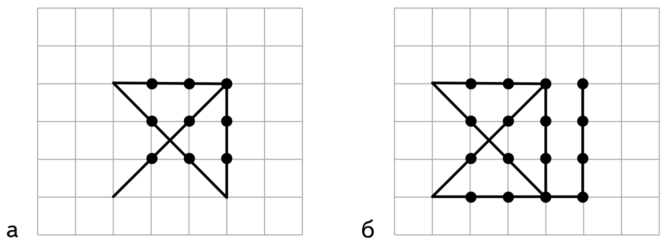


Рис. 58

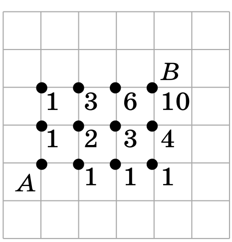


Рис. 59

Задача 8. Сколько ломаных: а) длины 4; б) длины 5, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяет точки A и B (рис. 28.9)?

Решение. Рассмотрим, например, случай б. Ломаные длины 5 являются кратчайшими ломаными, соединяющими точки A и B. Найдём число кратчайших ломаных с началом в точке A и концом в точках, отмеченных на рисунке 59.

Около каждой точки поставлено число кратчайших ломаных, соединяющих точку A с данной точкой. Ясно, что для ближайших двух точек к точке A число ломаных равно 1. Заметим, что для любой отмеченной точки число ломаных, соединяющих её с точкой A, равно сумме чисел ломаных для двух соседних точек, расположенных от этой точки слева и снизу. Будем находить число ломаных для точек, расположенных между точками A и B, постепенно приближаясь к точке B. В результате получим, что число кратчайших ломаных, соединяющих точки A и B, равно 10.

Заметим, что полученные числа ломаных образуют часть треугольника Паскаля, который встречается во многих задачах. Более подробно с ним можно познакомиться по книге: *В. А. Успенский.* Треугольник Паскаля. — М. : Наука, 1979.

Задача 9. Сколько ломаных длины 7, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяют точки A, B и C (рис. 28.10)?

Решение. Пользуясь методом, рассмотренным в предыдущей задаче, получим, что число кратчайших ломаных, соединяющих точки A и B, равно 3, а число кратчайших ломаных, соединяющих точки B и C, равно 4. Искомое число ломаных, соединяющих точки A, B, C равно произведению числа ломаных, соединяющих точки A и B, и числа ломаных, соединяющих точки B и C, т. е. равно 12.

29. Многоугольники

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями многоугольника и его элементами. Научить распознавать виды многоугольников, изображать многоугольники и находить их периметр.

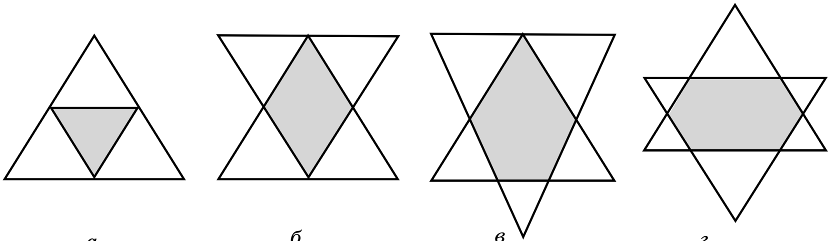
Рекомендации по решению задач

Задача 8. Сколько всего диагоналей имеет: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г)* n-угольник?

Решение. Из каждой вершины n-угольника выходит $n - 3$ диагонали. Число диагоналей, выходящих из n вершин равно $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Задача 12. Изобразите два треугольника так, чтобы их общей частью был: а) треугольник; б) четырёхугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник.

Ответ. Примеры треугольников приведены на рисунке 60.



а б в г

Рис. 60

Задача 15. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника больше его полупериметра.

Решение. Пусть $ABCD$ выпуклый четырёхугольник, O — точка пересечения его диагоналей. Используя неравенство треугольника, получаем неравенства $AO + OB > AB$, $BO + OC > BC$, $CO + OD > CD$, $AO + OD > AD$.

Складывая эти неравенства, получаем неравенство $2(AC + BD) > AB + BC + CD + AD$, из которого непосредственно следует требуемое неравенство.

Самостоятельная работа 20

Вариант 1

1. Изобразите несколько простых ломаных.

2. Изобразите выпуклый и невыпуклый четырехугольники.

3. На сколько треугольников делится выпуклый пятиугольник диагоналями, проведёнными из одной его вершины?

4. Сколько диагоналей у выпуклого шестиугольника?

5*. Может ли многоугольник иметь 4 диагонали?

Вариант 2

1. Изобразите несколько замкнутых ломаных.

2. Изобразите выпуклый и невыпуклый шестиугольник.

3. На сколько треугольников делится выпуклый семиугольник диагоналями, проведёнными из одной его вершины?

4. Сколько диагоналей у выпуклого пятиугольника?

5*. Может ли многоугольник иметь 10 диагоналей?

30. Сумма углов выпуклого многоугольника

Цель обучения — научить учащихся формулировать и доказывать теорему о сумме углов выпуклого многоугольника, теорему о сумме внешних углов выпуклого многоугольника; применять эти теоремы для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трёх тупых внешних углов.

Решение. Если бы у выпуклого многоугольника было более трёх тупых внешних углов, то их сумма была бы больше 360°, что противоречит теореме о том, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Задача 10. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трёх острых внутренних углов.

Решение. Если бы у выпуклого многоугольника было более трёх острых углов, то у него было бы более трёх тупых внешних углов, что противоречит утверждению предыдущей задачи.

Задача 15. Докажите, что сумма внутренних углов невыпуклого четырёхугольника равна 360° (рис. 30.5).

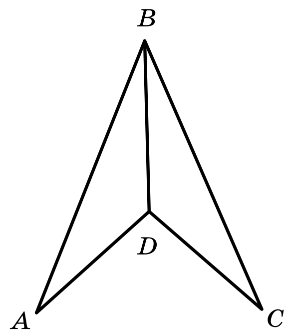


Рис. 61

Решение. Проведём диагональ BD. Она разбивает четырёхугольник $ABCD$ на два треугольника (рис. 61).

Углы этих треугольников составляют углы данного четырёхугольника. Так как сумма углов каждого треугольника равна 180°, то сумма углов данного четырёхугольника равна 360°.

Самостоятельная работа 21

Вариант 1

1. Три угла выпуклого четырёхугольника равны 50°, 100°, 120°. Найдите его четвёртый угол.

2. Внутри угла, равного 60°, взята точка, из которой опущены на его стороны перпендикуляры. Найдите углы получившегося четырёхугольника.

3. Найдите углы правильного пятиугольника.

4. Найдите сумму внешних углов выпуклого четырехугольника, взятых по одному при каждой вершине.

Вариант 2

1. Три угла выпуклого четырёхугольника равны 35°, 75°, 140°. Найдите его четвёртый угол.

2. Внутри угла, равного 70°, взята точка, из которой опущены на его стороны перпендикуляры. Найдите углы получившегося четырёхугольника.

3. Найдите углы правильного шестиугольника.

4. Найдите сумму внешних углов выпуклого пятиугольника, взятых по одному при каждой вершине.

Контрольная работа 4

Вариант 1

1. Сумма двух внутренних углов из восьми углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равна 80°. Найдите каждый из восьми углов.

2. Угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей его основанию, равен 30°. Найдите угол между высотой, опущенной на боковую сторону треугольника, и его основанием.

3. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите углы данного треугольника и определите его вид.

4. Можно ли построить треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 5 см?

5*. Докажите, что в треугольнике медиана, проведённая к одной из его сторон, меньше полупериметра.

Вариант 2

1. Сумма трёх внутренних углов из восьми углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 290°. Найдите каждый из восьми углов.

2. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 65°. Найдите угол, образованный его боковой стороной и высотой, опущенной на другую боковую сторону.

3. Углы треугольника относятся как 3 : 2 : 1. Найдите углы данного треугольника и определите его вид.

4. Можно ли построить треугольник со сторонами 3 см, 4 см, 8 см?

5*. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D, которая соединена с вершиной A. Докажите, что периметр треугольника ABC больше периметра треугольника ADC.

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ

I. Начала геометрии

1. Сколько вершин у: а) тетраэдра; б) гексаэдра (куба); в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

2. Сколько рёбер у: а) тетраэдра; б) гексаэдра (куба); в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

3. Сколько прямых можно провести через различные пары из шести точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

4. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь пять прямых?

5. На клетчатой бумаге изобразите прямую AB и точку C, как показано на рисунке 62. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB.

6. На прямой отмечены шесть точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

7. Расположите номера в порядке возрастания соответствующих отрезков, изображённых на рисунке 63.

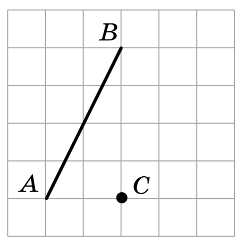


Рис. 62

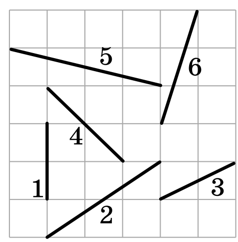


Рис. 63

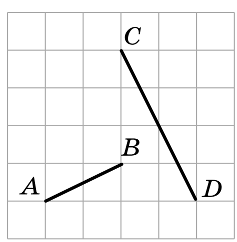


Рис. 64

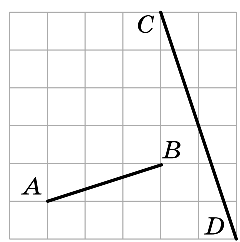


Рис. 65

8. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 64. Изобразите какой-нибудь отрезок, равный сумме отрезков AB и CD.

9. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 65. Изобразите какой-нибудь отрезок, равный разности отрезков AB и CD.

10. Точки A, B и C принадлежат одной прямой. Известно, что $AB = 6$ см, $AC = 14$ см,

$BC = 8$ см. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

11. На прямой отложены отрезки $AB = 4$ см, $BC = 3$ см. Найдите длину отрезка AC, если: а) точка B лежит между точками A и C; б) точка C лежит между точками A и B?

12. Сумма двух отрезков равна 8 см, а их разность — 2 см. Найдите длины самих отрезки.

13. На прямой последовательно отложены три отрезка: AB, BC и CD так, что $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $CD = 8$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

14. На сколько частей разбивают плоскость пять прямых, пересекающихся в одной точке?

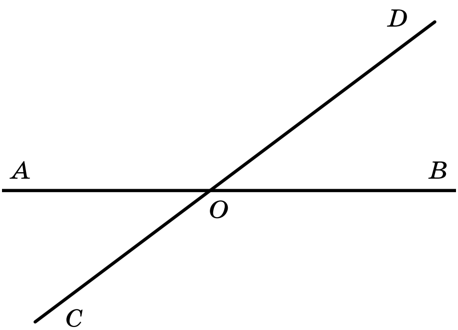


Рис. 66

15. По рисунку 66 запишите пары: а) смежных углов; б) вертикальных углов.

16. Расположите углы, изображённые на рисунке 67, в порядке их возрастания.

17. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 300°. Найдите больший из них.

18. На клетчатой бумаге через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой AB (рис. 68).

19. На клетчатой бумаге изобразите угол, равный сумме углов ABC и DEF (рис. 69).

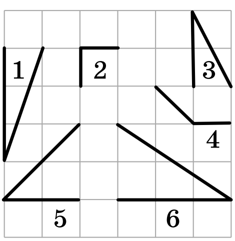


Рис. 67

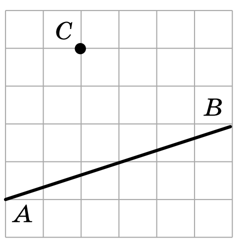


Рис. 68

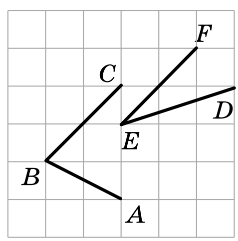


Рис. 69

20. Общей частью двух углов AOB и COD, величиной соответственно $60°$ и $90°$, является угол BOC, величиной $30°$. Найдите угол AOD.

21. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за 45 мин?

22. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за 15 мин?

II. Треугольники

23. Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что $AB = 12$ см, $QR = 14$ см, $XZ = 16$ см. Найдите длины остальных сторон каждого треугольника.

24. Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что $\angle A = 80°$, $\angle Q = 60°$, $\angle Z = 40°$. Найдите остальных углы каждого треугольника.

25. Сторона AB треугольника ABC равна 8 см. Сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 5 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

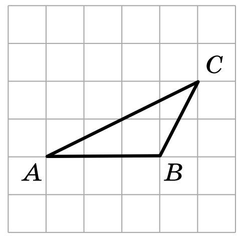


Рис. 70

26. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как показано на рисунке 70. Изобразите его: а) медианы; б) высоты.

27. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на стороне AC, а точка E — на стороне AD, причём, $AC = AD$ и $AB = AE$ (рис. 71). Докажите, что $\angle DEC = \angle CDB$.

28. На рисунке 72 $AO = OB$ и $DO = OC$. Докажите равенство отрезков AD и BC.

29. На рисунке 73 дана фигура, у которой $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB = DE$.

30. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны биссектрисы

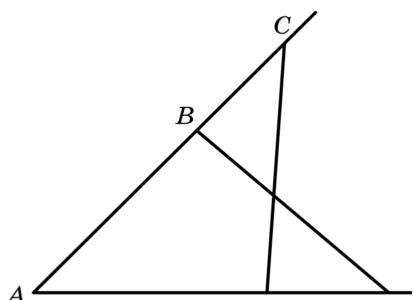


Рис. 71

AD и A_1D_1, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то эти треугольники равны.

31. Периметр равнобедренного треугольника равен 30 см. Найдите его стороны, если: а) основание меньше боковой стороны на 6 см; б) основание больше боковой стороны на 6 см.

32. На рисунке 74 $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$.

33. Докажите, что если медиана треугольника является и высотой, то треугольник равнобедренный.

34. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найдите её длину, если периметр треугольника ABC равен 20 м, а треугольника ABD — 15 м.

35. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны медианы CD и C_1D_1, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то эти треугольники равны.

36. На рисунке 75 $AB = AD$, $BC = CD$, $AB > BC$. Докажите, что угол A меньше угла C.

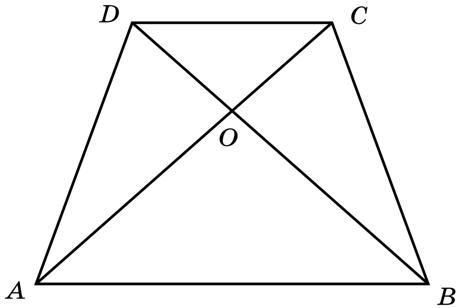


Рис. 72

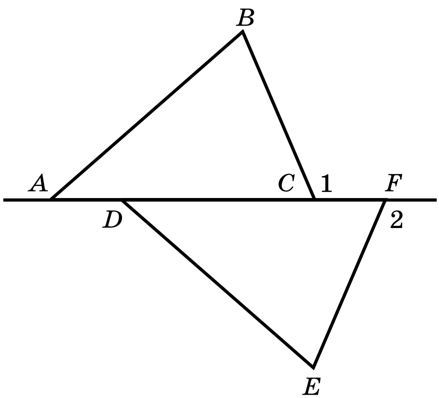


Рис. 73

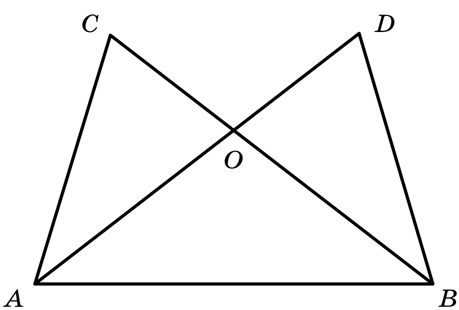


Рис. 74

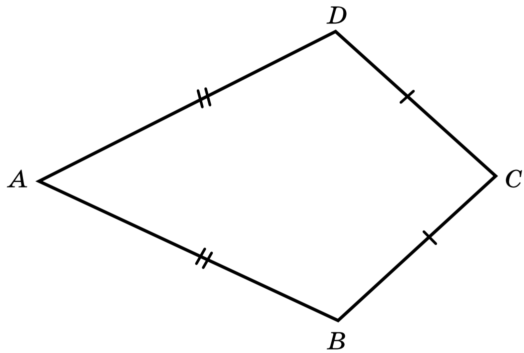


Рис. 75

37. На рисунке 76 угол 1 меньше угла 2. Докажите, что $AB < BC$.

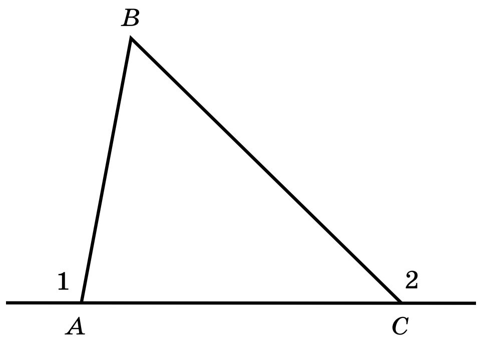


Рис. 76

38. Докажите, что для любой внутренней точки D треугольника ABC выполняется неравенство $AD + DB < AC + CB$ (рис. 77).

39. Может ли прямоугольный треугольник иметь стороны 8, 10, 10?

40. Стороны прямоугольного треугольника равны 6 см, 8 см, 10 см. Чему равна длина гипотенузы?

41. Из точки C к прямой a проведены перпендикуляр CA и наклонные CA_1, CA_2. Какая из двух наклонных меньше, если: а) A_1 лежит между A и A_2; б) A лежит между A_1, A_2 и $AA_1 < AA_2$?

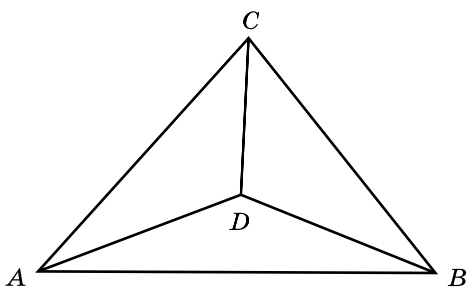


Рис. 77

III. Окружность. Геометрические построения

42. На клетчатой бумаге изобразите центр O окружности, проходящей через данные точки A, B, C (рис. 78).

43. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 25 см и 10 см. Найдите радиус данной окружности.

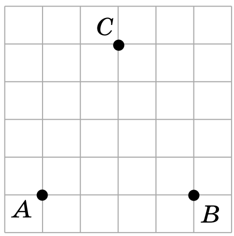


Рис. 78

44. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 12 см и 8 см. Найдите радиус данной окружности.

45. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 6 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 4 см; б) 6 см; в) 8 см?

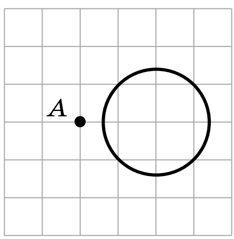


Рис. 79

46. На клетчатой бумаге из точки A проведите касательные к данной окружности (рис. 79).

47. Дана окружность радиуса 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см от центра окружности. Найдите радиус окружности с центром в точке A и касающейся данной окружности: а) внешним образом; б) внутренним образом.

48. Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

49. Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см?

50. Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешним образом; б) касаются внутренним образом?

51. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки A и B.

52. Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с данным основанием AB.

53. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса 1, касающихся данной окружности того же радиуса.

54. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса 1, касающихся данной окружности радиуса 2.

55. На клетчатой бумаге изобразите геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B (рис. 80).

56. На прямой c изобразите точку C, равноудалённую от точек A и B (рис. 81).

57. Изобразите геометрическое место внутренних точек угла AOB, равноудалённых от его сторон (рис. 82).

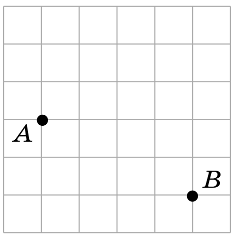


Рис. 80

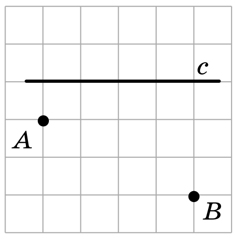


Рис. 81

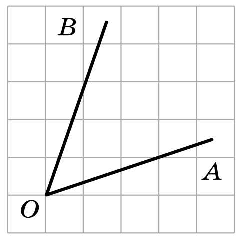


Рис. 82

58. С помощью циркуля и линейки постройте середину данного отрезка.

59. С помощью циркуля и линейки постройте биссектрису данного угла.

60. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник с данными сторонами.

61. С помощью циркуля и линейки проведите касательную к данной окружности из данной точки.

IV. Параллельность. Сумма углов многоугольника

62. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна $150°$. Найдите эти углы.

63. Разность двух внутренних односторонних углов, образованных параллельными прямыми и секущей, равна $40°$. Найдите эти углы.

64. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

65. Один острый угол прямоугольного треугольника на 20° больше другого. Найдите больший острый угол.

66. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите меньший из них.

67. В треугольнике ABC угол C равен 90°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB.

68. В треугольнике ABC угол A равен 60°, BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE.

69. В треугольнике ABC угол C равен 26°. Внешний угол при вершине B равен 68°. Найдите угол A.

70. В треугольнике ABC $AC = BC$. Внешний угол при вершине B равен 122°. Найдите угол C.

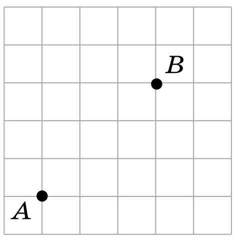


Рис. 83

71. Сколько ломаных длины 6, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяют точки A и B (рис. 83)?

72. На сколько треугольников делится выпуклый n-угольник своими диагоналями, проведёнными из одной вершины?

73. Выпуклый многоугольник имеет 9 диагоналей. Сколько у него сторон?

74. Углы выпуклого четырёхугольника пропорциональны числам 3, 4, 5, 6. Найдите их.

75. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 540°. Сколько у него сторон?

76. Найдите угол, образованный диагоналями: а) AD и AE; б) AD и BF правильного шестиугольника $ABCDEF$.

ОТВЕТЫ

Самостоятельные работы

1

В1. **4.** 1.
В2. **4.** 0 или 1.

2

В1. **3.** Два.
В2. **3.** Бесконечно много.

3

В1. **1.** 4,5 см. 5. 21.
В2. **1.** а) 11 см; б) 5 см. **5.** 40.

4

В1. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 2. **5.** AOB и COD.

В2. **2.** 10. **3.** 1. **4.** 4. **5.** AOC и BOC, AOC и AOD, AOD и BOD, BOC и BOD.

5

В1. **1.** Да. **2.** 80°, 100°. **3.** Да. **4.** 60°. **5.** 30°.
В2. **1.** Нет. **2.** 36°, 144°. **3.** Да. **4.** 90°. **5.** 60°.

6

В1. **3.** $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см. **4.** Нет.

В2. **2.** $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$. **3.** 8 см, 12 см, 16 см.

9

В1. **3.** 15 см. **4.** Равнобедренный.
В2. **3.** 18 см. **4.** Равнобедренный.

11

В1. **1.** Равнобедренный, 110°, 110°, 140°. **2.** $\angle A$ — наибольший, $\angle C$ — наименьший. **3.** $LM > KM > KL$. **4.** Нет.

В2. **1.** Равнобедренный. **2.** $CD < ED$. **3.** Нет. **4.** Равносторонний.

12

В1. **2.** Половине стороны. **3.** 3 см.

В2. **2.** Катету. **3.** 4 см.

13

В1. **1.** 30 см. **2.** 2. **3.** 16 см, 64 см.

В2. **1.** 10 см. **2.** 3 см. **3.** 8 см, 28 см.

14

В1. **1.** Не имеют общих точек. **2.** $d > R$. **3.** 8,5 см.

В2. **1.** Пересекаются. **2.** $d = R$.

15

В1. **2.** Касаются внешним образом. **3.** $16 < O_1O_2 < 24$. **4.** 11,5 см.

В2. **2.** Касаются внутренним образом. **3.** 12 см. **4.** 40 см, 16 см.

16

В1. **1.** Отрезок AB без точек A и B. **2.** Точка пересечения биссектрисы угла, образованного хордами, с окружностью. **3.** Окружность, концентрическая данной, радиус которой равен гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого катеты равны один отрезку касательной, а другой — радиусу данной окружности. **4.** Дуга окружности с центром в вершине данного угла, радиус которой равен данному расстоянию, и которая расположена внутри данного угла.

В2. **1.** Внутренность круга с центром в точке O и радиусом a. **2.** Серединный перпендикуляр к основанию. **3.** Окружность, концентрическая данной, радиус которой равен сумме радиусов данной окружности и одной из равных окружностей. **4.** Точки пересечения окружностей (A; a) и (B; b).

18

В1. **1.** 4 угла по 30° и 4 угла по 150°. **2.** Перпендикулярно параллельным прямым. **3.** 4 угла по 70° и 4 угла по 110°.

В2. **1.** 4 угла по 20° и 4 угла по 160°. **3.** 68° и 112°.

19

B1. **1.** 32°, 32°, 116°. **2.** 80°. **3.** 60°, 120°, 60°, 120°. **4.** 40° и 70°.

B2. **1.** 20°, 80°, 80°. **2.** 45°. **3.** 76°. **4.** 40° и 60°.

20

B1. **3.** 3. **4.** 9. **5.** Нет.

B2. **3.** 5. **4.** 5. **5.** Нет.

21

B1. **1.** 90°. **2.** 60°, 90°, 90°, 120°. **3.** 108°. **4.** 360°.

B2. **1.** 110°. **2.** 70°, 90°, 90°, 110°. **3.** 120°. **4.** 360°.

Контрольные работы

Контрольная работа 1

B1. **1.** 6. **2.** 4. **3.** 6. **4.** 18 см, 6 см. **5.** 6°. **6.** 30°, 30°, 150°, 150°.

B2. **1.** 12. **2.** 5. **3.** 10. **4.** 15 см, 21 см. **5.** 20°. **6.** 60°, 60°, 120°, 120°.

Контрольная работа 2

B1. **1.** $\angle O > \angle H > \angle P$. **2.** 10 см, 24 см, 24 см. **4.** Нет.

B2. **1.** $\angle M > \angle K = \angle N$. **2.** 24 см, 36 см, 36 см. **4.** 10 см.

Контрольная работа 3

B1. **1.** 1 и 7. **2.** Пересекаются. **3.** 2 см. **4.** Полуплоскость.

B2. **1.** 1 и 5. **2.** Не имеют общих точек. **3.** 4 см. **4.** Полуплоскость.

Контрольная работа 4

B1. **1.** 4 угла по 40° и 4 угла по 140°. **2.** 15°. **3.** 40°, 60°, 80°; остроугольный. **4.** Нет.

B2. **1.** 4 угла по 70° и 4 угла по 110°. **2.** 40°. **3.** 90°, 60°, 30°; прямоугольный. **4.** Нет.

Обобщающее повторение

I. Начала геометрии

1. а) 4; б) 8; в) 6; г) 12; д) 20. **2.** а) 6; б) 12; в) 12; г) 30; д) 30. **3.** 15. **4.** 10. **5.** Искомая прямая изображена на рисунке 84. **6.** 15. **7.** 1, 3, 4, 6, 2, 5. **8.** Искомый отрезок изображён на рисунке 85. **9.** Искомый отрезок изображён на рисунке 86. **10.** B. **11.** а) 7 см; б) 1 см. **12.** 5 см и 3 см. **13.** 17 см. **14.** 10. **15.** а) AOC и AOD, AOC и BOC, BOD и AOD, BOD и BOC; б) AOC и BOD, AOD и BOC. **16.** 1, 3, 6, 5, 2, 4. **17.** 120°. **18.** Искомая прямая изображена на рисунке 87. **19.** Искомый угол изображён на рисунке 88. **20.** 120°. **21.** 270°. **22.** 7°30′.

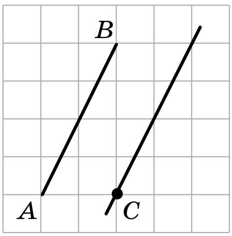


Рис. 84

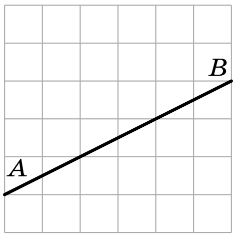


Рис. 85

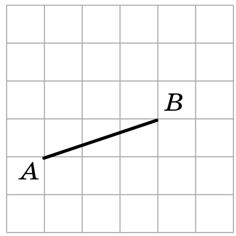


Рис. 86

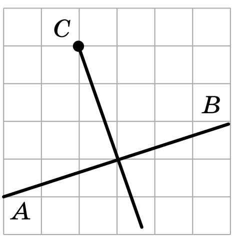


Рис. 87

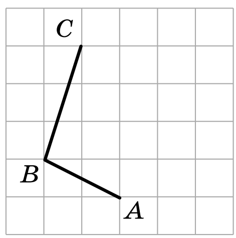
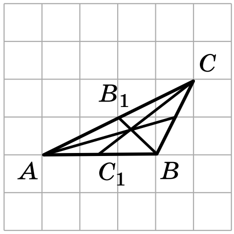


Рис. 88

II. Треугольники

23. $AC = 16$ см, $BC = 14$ см, $PQ = 12$ см, $PR = 16$ см, $XY = 12$ см, $YZ = 14$ см. **24.** $\angle B = 60°$, $\angle C = 40°$, $\angle P = 80°$, $\angle R = 40°$, $\angle X = 80°$, $\angle Y = 60°$. **25.** 35 см. **26.** а) Медианы изображены на рисунке 89, а; б) высоты изображены на рисунке 89, б.



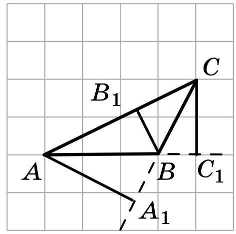


Рис. 89

27. Треугольники ACE и ADB равны по двум сторонам и углу между ними ($AC = AD$, $AE = EB$, угол A общий). Следовательно, $\angle AEC = \angle ABD$. Значит, равны и смежные с ними углы $\angle CBD = \angle DEC$. **28.** Треугольники AOD и BOC равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $OD = OC$, $\angle AOD = \angle BOC$). Следовательно, $AD = BC$. **29.** Из равенства углов 1 и 2 следует равенство углов ACB и DFE. Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и DF. Треугольники ABC и DEF равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AC = DF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ACB = \angle DFE$). Следовательно, $AB = DE$. **30.** Из равенства углов A и A_1 следует равенство углов CAD и $C_1A_1D_1$. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AC = A_1C1$, $AD = A_1D_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$). Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$). **31.** а) 6 см, 12 см, 12 см; б) 14 см, 8 см, 8 см. **32.** Треугольники AOC и BOD равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AO = BO$, $\angle OAC = \angle OBD$, $\angle AOC = \angle BOD$). Следовательно, $\angle C = \angle D$. **33.** Пусть в треугольнике ABC медиана CD является его высотой. Прямоугольные треугольники ACD и BCD равны по двум катетам ($AD = BD$, CD — общий катет). Следовательно, $AC = BC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный. **34.** 5 м. **35.** Из равенства сторон AB и A_1B_1 следует равенство отрезков AD и A_1D_1. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$). **36.** Проведём отрезок AC (рис. 90). Так как против меньшей стороны треугольника лежит меньший угол, то $\angle DAC < \angle DCA$, $\angle BAC < \angle BCA$. Складывая эти неравенства, получаем искомое неравенство $\angle A < \angle C$.

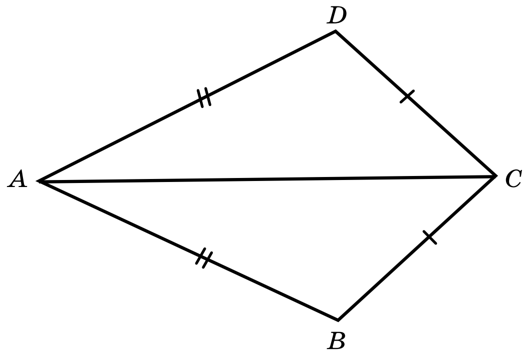


Рис. 90

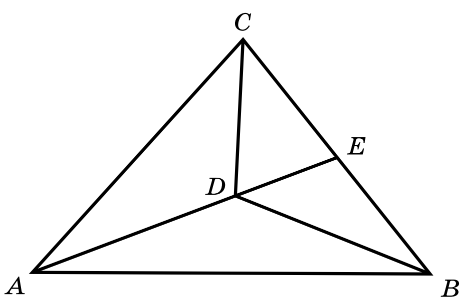


Рис. 91

37. Из неравенства $\angle 1 < \angle 2$ следует неравенство $\angle BAC > \angle BCA$. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то $AB < BC$. **38.** Продолжим отрезок AD до пересечения со стороной BC в точке E (рис. 91). Используя неравенство треугольника, получим $AD + DB < AE + EB < AC + CB$. **39.** Нет. **40.** 10 см. **41.** а) CA_1; б) CA_1.

III. Окружность. Геометрические построения

42. Искомый центр окружности показан на рисунке 92. Это точка, равноудалённая от точек A, B, C. Она является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и AC. **43.** 7,5 см. **44.** 10 см. **45.** а) Пересекаются;

б) касаются; в) не имеют общих точек. **46.** Искомые касательные показаны на рисунке 93. **47.** а) 2 см; б) 8 см. **48.** а) Касаются внешним образом; б) не имеют общих точек. **49.** а) Касаются внутренним образом; б) не имеют общих точек. **50.** а) 10 см; б) 2 см. **51.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB. **52.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB без середины этого отрезка. **53.** Окружность, концентрическая данной, радиуса 2 см. **54.** Две концентрические окружности радиусов 1 см и 3 см. **55.** Искомым геометрическим местом точек является серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 94). **56.** Искомая точка C показана на рисунке 95. **57.** Искомым геометрическим местом точек является биссектриса угла AOB (рис. 96).

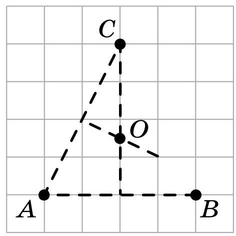


Рис. 92

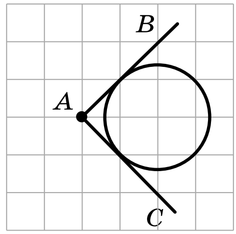


Рис. 93

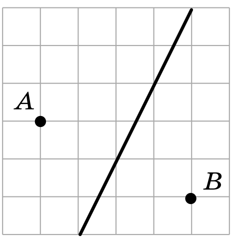


Рис. 93

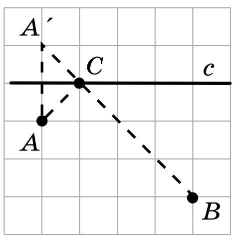


Рис. 95

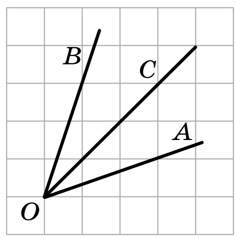


Рис. 96

IV. Параллельность. Сумма углов многоугольника

62. 75° и 75°. **63.** 110° и 70°. **64.** Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы, образованные этими прямыми и перпендикулярной им прямой, равны. Следовательно, данные прямые параллельны. **65.** 55°. **66.** 40°. **67.** 135°. **68.** 120°. **69.** 42°. **70.** 64°. **71.** 20. **72.** $n - 2$. **73.** 6. **74.** 60°, 80°, 100°, 120°. **75.** 5. **76.** а) 30°; б) 90°.

Содержание