

**В. А. Смирнов
И. М. Смирнова**

ГЕОМЕТРИЯ

8

КЛАСС

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЯ**



МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

УДК 37.02:514
ББК 74.262.21
С50

Смирнов, Владимир Алексеевич
С50 **Геометрия : 8 класс : методическое пособие для учителя / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. — 80 с.**
ISBN 978-5-???

В пособии представлено содержание курса геометрии 8-го класса, примерное планирование учебного материала и методические рекомендации по решению задач повышенной трудности, самостоятельные и контрольные работы.

УДК 37.02:514
ББК 74.262.21

Учебное издание

Смирнов, Владимир Алексеевич

Геометрия

8 класс

Методическое пособие для учителя

Редактор *С. В. Бахтина*

Внешнее оформление: *В. А. Андрианов*

Компьютерная вёрстка: *Н. П. Горлова*

Технический редактор *О. Б. Резчикова*

Корректоры *Ю. С. Борисенко, О. Ч. Кохановская*

Подписано в печать ???.18. Формат 60×84/16

Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная

Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. ?,??. Тираж ???? экз. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»

127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,

тел. (495)181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Отпечатано

© ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2019
© Оформление. ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»,
2019

ISBN 978-5-???

Все права защищены

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое руководство является составной частью учебно-методического комплекса по математике для 8 классов общеобразовательных учреждений.

Это пособие предназначено в помощь учителям, работающим по учебнику «Геометрия» для 8 классов общеобразовательных школ. Оно ориентирует учителя в его работе, позволит качественно спланировать процесс обучения геометрии семиклассников.

В пособие включено:

- примерное тематическое планирование в двух вариантах;
- методические рекомендации к решению задач повышенной трудности;
- самостоятельные работы;
- контрольные работы.

В конце пособия даны ответы к самостоятельным и контрольным работам.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) в направлении личностного развития:

- формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;
- развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;
- формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;
- воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;
- формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;
- развитие интереса к математике;
- развитие математических способностей;

2) в метапредметном направлении:

— развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

— формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) в предметном направлении:

— овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

— создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

В данном пособии представлено тематическое планирование, даны рекомендации по решению задач. При этом особое внимание уделено задачам повышенного уровня трудности.

Приведённые решения задач не являются единственно возможными. Хорошо известно, что решение задач несколькими способами активизирует учебную познавательную деятельность. Задачи, допускающие несколько решений, дают богатые возможности для развития и воспитания школьников.

Если в классе при решении некоторой задачи ребятами будет высказано несколько идей, этим моментом не следует пренебрегать и направлять их мысль на один путь.

При этом можно сразу обсудить достоинства каждого предложения и выбрать наиболее рациональный, а можно разрешить каждому учащемуся идти своим понравившимся ему путем. Затем сравнить различные решения и при выборе наилучшего из них руководствоваться принципами наибольшей простоты, наглядности, краткости, оригинальности, неожиданности, математической красоты и т. п. Конечно, работа с такими задачами требует больше внимания и самое главное времени, которого всегда не хватает.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

8 класс (2 часа в неделю, всего 68 часов за год)

Пункт	Тема	Кол-во часов	
		Вариант 1	Вариант 2
Глава I. Четырёхугольники		14	16
1	Параллелограмм и его свойства	2	2
2	Признаки параллелограмма	2	2
3	Прямоугольник	1	1
4	Ромб	1	2
5	Средняя линия треугольника	2	2
6	Трапеция	1	2
7	Средняя линия трапеции	2	2
8	Теорема Фалеса	2	2
	Контрольная работа 1	1	1
Глава II. Векторы и их свойства		7	9
9	Векторы	1	2
10	Сложение векторов	1	2
11	Умножение вектора на число. Разность векторов	2	2
12	Разложение вектора	2	2
	Контрольная работа 2	1	1

Пункт	Тема	Кол-во часов	
		Вариант 1	Вариант 2
Глава III. Многоугольники и окружность		13	15
13	Углы, связанные с окружностью	2	3
14	Треугольники, вписанные в окружность	2	2
15	Многоугольники, вписанные в окружность	2	2
16	Треугольники, описанные около окружности	2	2
17	Многоугольники, описанные около окружности	2	2
18	Замечательные точки и линии треугольника	2	3
	Контрольная работа 3	1	1
Глава IV. Движение		10	10
19	Центральная симметрия и её свойства	2	2
20	Поворот. Симметрия n -го порядка	2	2
21	Осевая симметрия и её свойства	2	2
22	Параллельный перенос	1	2
23	Движение и его свойства. Равенство фигур	1	2
24*	Паркеты	2	

Пункт	Тема	Кол-во часов	
		Вариант 1	Вариант 2
Глава V. Площадь		14	14
25	Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника	2	2
26	Теорема Пифагора	2	3
27	Площадь параллелограмма	2	2
28	Площадь треугольника	2	2
29	Площадь трапеции	2	2
30	Площадь многоугольника	1	2
31*	Равносоставленность. Задачи на разрезание	2	
	Контрольная работа 4	1	1
Глава VI*. Геометрия в пространстве		10	
32	Основные понятия стереометрии	1	
33	Фигуры в пространстве	2	
34	Правильные многогранники	1	
35	Развёртки многогранников	1	
36	Объём фигур в пространстве	2	
37	Площадь поверхности многогранника	2	
	Контрольная работа 5	1	
	Обобщающее повторение		4

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Глава I. Четырёхугольники

1. Параллелограмм и его свойства

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием параллелограмма, научить формулировать и доказывать свойства параллелограмма; применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

(нумерация задач взята из учебника)

Задача 15. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ и биссектрисы углов A и B . Обозначим E точку пересечения этих биссектрис (рис. 1). Так как сумма углов A и B параллелограмма равна 180° , то сумма углов ABE и BAE равна 90° . Следовательно, угол, образованный этими биссектрисами, равен 90° , т. е. биссектрисы перпендикулярны.

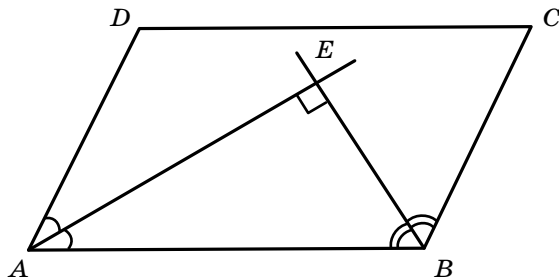


Рис. 1

Задача 16. Как расположены биссектрисы углов параллелограмма (с неравными смежными сторонами), противолежащих друг другу?

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ и биссектрисы углов A и C . Обозначим E, F точки пересечения этих биссектрис со сторонами соответственно CD и AB (рис. 2).

Из равенства противолежащих углов параллелограмма следует равенство углов 1 и 2, образованных биссектрисами AE и CF со сторонами соответственно AB и CD . Из на-

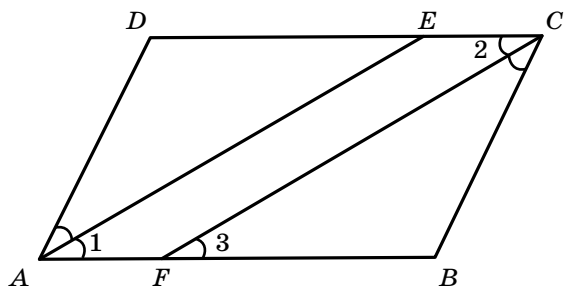


Рис. 2

параллельности противоположных сторон параллелограмма следует равенство внутренних накрест лежащих углов 3 и 2, образованных сторонами AB и CD параллелограмма и секущей CF . Следовательно, равны углы 1 и 3, которые являются односторонними, образованными прямыми AE , CF и секущей AB . Значит, биссектрисы AE и CF параллельны.

Задача 22. Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные его противоположным сторонам. Докажите, что стороны получившегося треугольника в два раза больше сторон исходного треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC . Пусть стороны треугольника DEF проходят через вершины треугольника ABC и параллельны противоположным им сторонам (рис. 3).

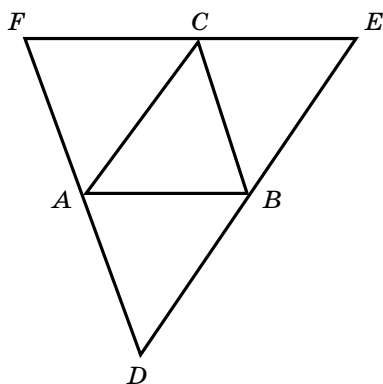


Рис. 3

Четырёхугольник $ABEC$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = CE$. Аналогично, четырёхугольник $ABCF$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = CF$. Значит, сторона EF треугольника DEF в два раза больше стороны AB треугольника ABC . Аналогично доказывается, что стороны DE и DF треугольника DEF в два раза больше соответственно сторон AC и BC треугольника ABC .

Задача 24. Через точку, расположенную внутри угла, проведите отрезок с концами на сторонах этого угла, делящейся в данной точке пополам (рис. 1.10).

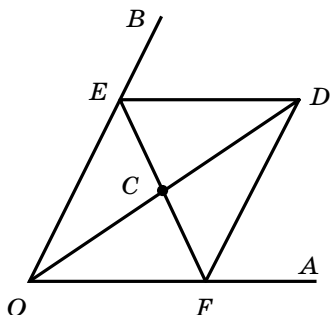


Рис. 4

Решение. Пусть C — внутренняя точка угла AOB (рис. 4). Проведём луч OC и отложим на нём отрезок CD , равный отрезку OC . Через точку D проведём прямые, параллельные сторонам данного угла, и обозначим E, F точки их пересечения с этими сторонами. Отрезок EF будет искомым. Действительно, четырёхугольник $OFDE$ — параллелограмм, C — точка пересечения диагоналей. Следовательно, $CE = CF$.

2. Признаки параллелограмма

Цель обучения — научить формулировать и доказывать признаки параллелограмма, применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 13. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.11) биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках F и E , которые соединены соответственно с вершинами параллелограмма B и D . Является ли четырёхугольник $BFDE$ параллелограммом?

Решение. В силу задачи 16 предыдущего параграфа биссектрисы BF и DE параллельны (рис. 5). Треугольники BCF и DAE равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($BC = DA$, $\angle BCF = \angle DAE$, $\angle CBF = \angle ADE$). Значит, противолежащие стороны BF и DE четырёхугольника $BEDF$ равны и параллельны. Следовательно, по первому признаку параллелограмма, этот четырёхугольник является параллелограммом.

Задача 14. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6 см. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к этой стороне, принадлежит проти-

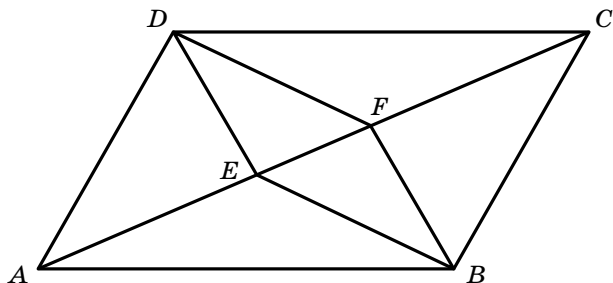


Рис. 5

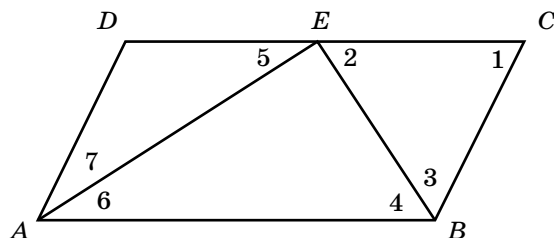


Рис. 6

волежущей стороне CD (рис. 2.12). Найдите сторону AD этого параллелограмма.

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, E — точка пересечения биссектрис углов A и B (рис. 6). Угол 2 равен углу 4, как внутренние накрест лежащие углы. Угол 3 равен углу 4, так как BE — биссектриса угла B . Следовательно, угол 2 равен углу 3. Значит, треугольник BCE равнобедренный, $BC = CE$. Аналогично доказывается, что треугольник ADE равнобедренный, $AD = DE$. Следовательно, $CD = CE + DE = BC + AD = 2AD$. Таким образом, сторона CD параллелограмма в два раза больше стороны AD , следовательно, $AD = 3$ см.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. Найдите углы параллелограмма, если один из них равен 30° .
2. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 16 см и одна сторона больше другой на 2 см.

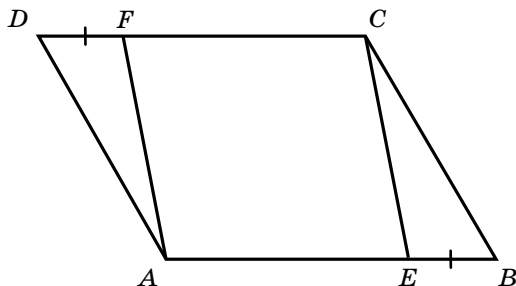


Рис. 7

3. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 7) отложены равные отрезки $BE = DF$. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ является параллелограммом.

4*. Постройте параллелограмм по двум соседним сторонам и диагонали.

Вариант 2

1. Найдите углы параллелограмма, если сумма двух его углов равна 144° .

2. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см, и одна сторона составляет $\frac{2}{3}$ другой.

3. В параллелограмме $ABCD$ проведены параллельные прямые BF и DE (рис. 8). Докажите, что четырёхугольник $BEDF$ является параллелограммом.

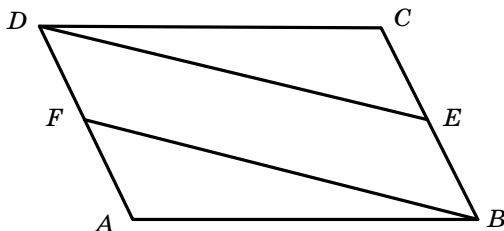


Рис. 8

4*. Постройте параллелограмм по стороне и двум диагоналям.

3. Прямоугольник

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями прямоугольника и расстояния между параллельными прямыми; научить формулировать и доказывать признак прямоугольника; применять его при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма с неравными смежными сторонами ограничивают прямоугольник (рис. 3.5).

Решение. В силу задачи 16 пункта 1 биссектрисы противоположащих углов параллелограмма параллельны. В силу задачи 15 пункта 1 биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны (рис. 9).

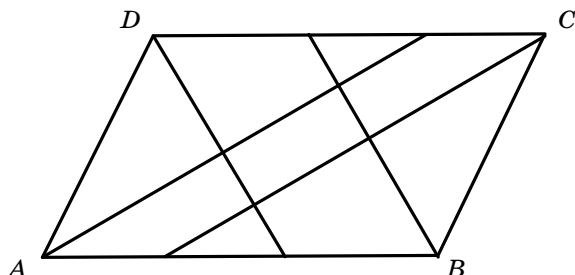


Рис. 9

Следовательно, биссектрисы углов параллелограмма ограничивают прямоугольник.

Задача 13. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$. Проведём диагонали AC и BD (рис. 10).

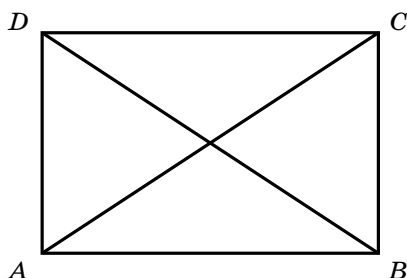


Рис. 10

Прямоугольные треугольники ABC и BAD равны по двум катетам (AB — общий катет, $BC = AD$). Следовательно, $AC = BD$.

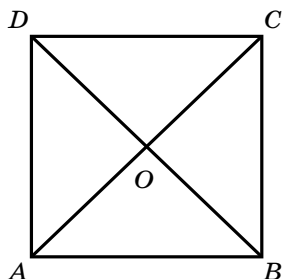


Рис. 11

равны по двум катетам ($AO = BO$, $OB = OC$). Следовательно, $AB = BC$. Так как в прямоугольнике противоположные стороны равны, то в данном прямоугольнике все стороны равны. Значит, этот прямоугольник — квадрат.

4. Ромб

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями ромба и квадрата; научить формулировать и доказывать признаки ромба и квадрата; применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 6. На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки: $AE = BF = CG = DH$ (рис. 4.4). Докажите, что четырёхугольник $EFGH$ — квадрат.

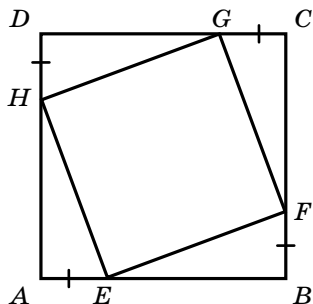


Рис. 12

Решение. Прямоугольные треугольники AEH , BFE , CGF , DHG равны по двум катетам (рис. 12).

Следовательно, стороны четырёхугольника $EFGH$ равны. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° . Следовательно, углы четырёхугольника $EFGH$ равны 90° . Значит, этот четырёхугольник является квадратом.

Задача 8. Докажите, что если в ромбе диагонали равны, то этот ромб является квадратом.

Задача 14. Докажите, что если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то он является квадратом.

Доказательство. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, O — точка пересечения диагоналей (рис. 11).

Так как диагонали прямоугольника равны, то прямоугольные треугольники AOB и BOC

Решение. По признаку прямоугольника, из равенства диагоналей ромба следует, что этот ромб является прямоугольником, значит, является квадратом.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. В прямоугольнике перпендикуляры, проведённые из точки пересечения диагоналей к его сторонам, соответственно равны 8 см и 12 см. Найдите периметр прямоугольника.

2. Высоты, проведённые из вершины ромба, образуют угол 140° . Найдите углы ромба.

3. Докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

4*. Постройте квадрат по его диагонали.

Вариант 2

1. Найдите диагонали прямоугольника, если его периметр равен 14 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 12 см.

2. Высоты, проведённые из вершины ромба, образуют угол 30° . Найдите углы ромба.

3. Докажите, что диагонали ромба лежат на биссектрисах соответствующих углов.

4*. Постройте ромб по стороне и прилежащему к ней углу.

5. Средняя линия треугольника

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием средней линии треугольника, научить формулировать и доказывать теорему о средней линии треугольника; применять её при решении задач.

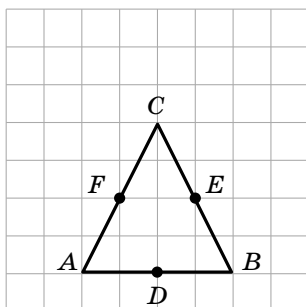
Рекомендации по решению задач

Задача 12. Постройте треугольник, если заданы середины его сторон D , E , F (рис. 5.4).

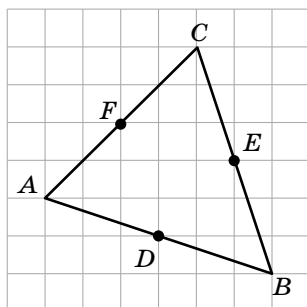
Решение показано на рисунке 13.

Задача 13. Постройте параллелограмм по точке пересечения его диагоналей D и серединам E , F двух смежных сторон (рис. 5.5).

Решение показано на рисунке 14.

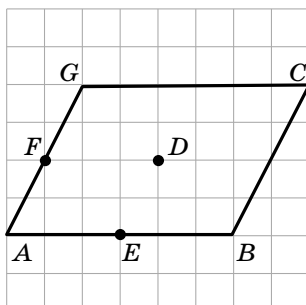


а

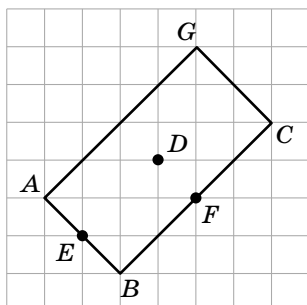


б

Рис. 13



а



б

Рис. 14

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. В треугольнике стороны равны 6 см, 7 см и 8 см. Найдите периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

2. Периметр треугольника равен 36 см, стороны относятся как 2 : 3 : 4. Найдите стороны треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон соответственно AB, BC, CD, DA . Докажите, что $KL \parallel NM$ и $KL = NM$. Какой вид имеет четырёхугольник $KLMN$?

4*. При каком условии четырехугольник $KLMN$ из предыдущей задачи будет ромбом?

Вариант 2

1. Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

2. Периметр треугольника равен 16 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного какой-нибудь его средней линией.

3. Периметр параллелограмма равен 24 см. Определите вид четырёхугольника, вершины которого находятся в серединах отрезков диагоналей данного параллелограмма от точки их пересечения до вершин. Найдите его периметр.

4*. Докажите, что если середины последовательных сторон прямоугольника соединить отрезками, то полученный четырёхугольник будет ромбом.

6. Трапеция

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием трапеции и её видами; научить формулировать и доказывать свойства трапеции; применять их при решении задач.

Перед изучением данной темы рекомендуем повторить определение и свойства равнобедренного треугольника.

Рекомендации по решению задач

Задача 10. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция, AB — большее основание, $\angle A = \angle B$. Через вершину C проведём прямую, параллельную прямой AD . Обозначим E точку её пересечения с прямой AB (рис. 15).

Четырёхугольник $AECD$ — параллелограмм. Следовательно, $EC = AD$, $\angle DAE = \angle CEB$. Из равенства углов A и B

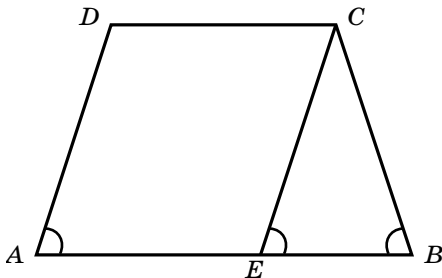


Рис. 15

трапеции следует равенство углов B и E треугольника BEC . Значит, треугольник BEC — равнобедренный, $BC = EC$. Следовательно, $BC = AD$, т. е. трапеция $ABCD$ равнобедренная.

Задача 11. Докажите, что если диагонали трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция, AB — основание, $AC = BD$. Через вершину C проведём прямую, параллельную прямой BD . Обозначим E точку её пересечения с прямой AB (рис. 16).

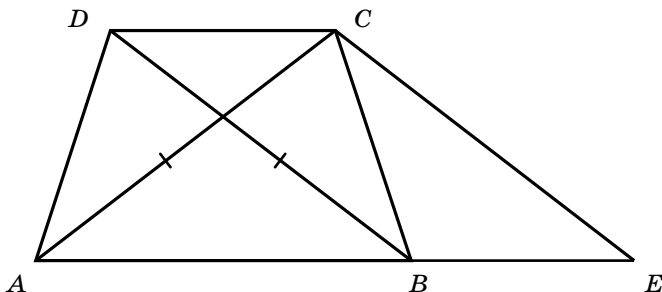


Рис. 16

Четырёхугольник $BECD$ — параллелограмм. Следовательно, $EC = BD$, $\angle BEC = \angle ABD$. Из равенства диагоналей трапеции следует равенство отрезков AC и EC . Значит, треугольник AEC — равнобедренный, $\angle A = \angle E$. Следовательно, $\angle BAC = \angle ABD$. Треугольники ABD и BAC равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона $BD = AC$, $\angle ABD = \angle BAC$). Следовательно, $AD = BC$, т. е. трапеция $ABCD$ равнобедренная.

7. Средняя линия трапеции

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием средней линии трапеции; научить формулировать и доказывать теорему о средней линии трапеции; применять её при решении задач.

Перед изучением данной темы рекомендуем повторить определение и свойства средней линии треугольника.

Рекомендации по решению задач

Задача 12. В треугольнике ABC сторона BC разделена на три равные части и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AC , равной 12. Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри треугольника (рис. 7.4).

Решение. Обозначим DE и FG искомые отрезки (рис. 17). Пусть $FG = x$. Так как отрезок FG является средней линией треугольника DBE , то $DE = 2x$. Так как DE является средней линией трапеции $AFGC$, то $12 + x = 4x$. Решая это уравнение, находим $x = 4$. Следовательно, $FG = 4$, $DE = 8$.

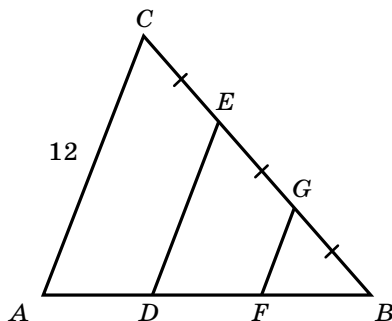


Рис. 17

Задача 13. Основания трапеции равны 7 и 10. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции (рис. 7.5). Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри трапеции.

Решение. Обозначим EF и GH искомые отрезки (рис. 18). Пусть $GH = x$. Так как отрезок GH является средней линией трапеции $EFCD$, то $EF = 2x - 7$. Так как EF является средней линией трапеции $ABHG$, то $10 + x = 4x - 14$. Решая это уравнение, находим $x = 8$. Следовательно, $GH = 8$, $EF = 9$.

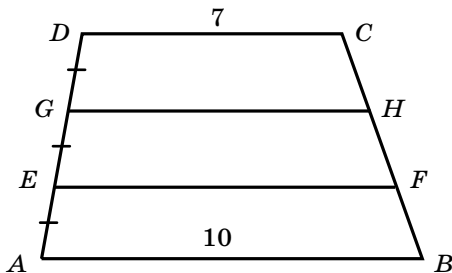


Рис. 18

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. Найдите углы трапеции, если два из них равны 60° и 110° .

2. Острый угол прямоугольной трапеции равен 45° . Основания равны 12 см и 4 см. Найдите высоту данной трапеции.

3. Одно из оснований трапеции равно 12 см, а средняя линия равна 20 см. Найдите другое основание трапеции.

4*. Основания трапеции равны 8 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию трапеции одна из её диагоналей.

Вариант 2

1. Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна 30° ?

2. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 3, большее — 5, тупой угол равен 135° . Найдите высоту данной трапеции.

3. Основания трапеции равны 6 см и 8 см. Найдите среднюю линию данной трапеции.

4*. Одна из диагоналей делит среднюю линию на отрезки 4 см и 6 см. Найдите основания этой трапеции.

8. Теорема Фалеса

Цель обучения — познакомить учащихся с историческим материалом о древнегреческом учёном Фалесе. Сформулировать и доказать теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках; научить применять их для решения задач.

Более подробно с историческим материалом о Фалесе можно познакомиться в книге: *Г. И. Глейзер. История математики в школе: пособие для учителей.* — М. : Просвещение, 1982.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD . Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F (рис. 8.7). Найдите отношение $DF : FB$.

Решение. Обозначим G середину стороны AB , H — точку пересечения отрезка CG с диагональю BD (рис. 19). Так

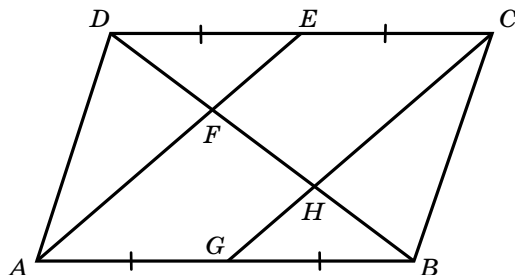


Рис. 19

как отрезки AG и CE равны и параллельны, то четырёхугольник $AGCE$ — параллелограмм. Значит, прямые AE и CG параллельны. Отрезок EF является средней линией треугольника CDH . Следовательно, $DF = FH$. Отрезок HG является средней линией треугольника ABF . Следовательно, $FH = HB$. Значит, $DF : FB = 1 : 2$.

Задача 9. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D , $AB = BD$. Через неё и середину E стороны AC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке F (рис. 8.8). Найдите отношение $BF : FC$.

Решение. Через вершину B проведём прямую, параллельную прямой DE , и обозначим G точку её пересечения с отрезком AE (рис. 20). Отрезок BG является средней линией треугольника ADE . Следовательно, $AG = GE$. Значит, отношение $CE : EG$ равно $2 : 1$. Так как прямые BG и FE параллельны, то отношение $CF : FB$ также равно $2 : 1$.

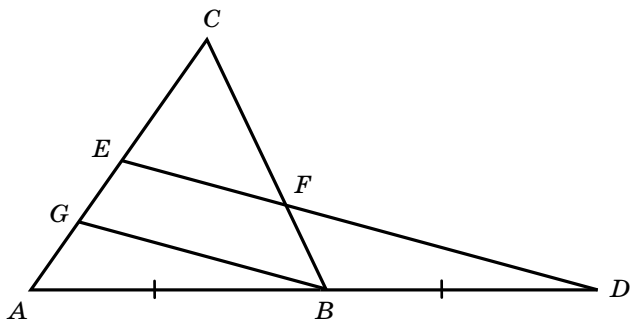


Рис. 20

Контрольная работа 1

Вариант 1

Найдите углы параллелограмма, если разность двух из них равна 20° .

Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит пересекаемую ею сторону BC точкой E на отрезки $BE = 2$ см и $EC = 3$ см. Найдите стороны данного прямоугольника.

Диагонали четырёхугольника равны 4 см и 6 см. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

Диагональ трапеции делит её среднюю линию на отрезки, равные 3 см и 4 см. Найдите основания трапеции.

* На продолжении стороны AC треугольника ABC взята точка D , $AC = CD$. Через неё и середину E стороны BC проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке F . Найдите отношение $AF : FB$.

Вариант 2

Найдите углы параллелограмма, если сумма двух из них равна 200° .

Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ делит пересекаемую ею сторону CD точкой E на отрезки $CE = 6$ см и $ED = 4$ см. Найдите стороны данного прямоугольника.

Периметр треугольника равен 12 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Основания трапеции равны 6 см и 8 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию трапеции одна из её диагоналей.

* В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD . Отрезок BE пересекает диагональ AC в точке F . Найдите отношение $AF : FC$.

Глава II. Векторы и их свойства

9. Векторы

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием вектора; научить распознавать равные векторы; находить их длины.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Докажите, что если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Решение. Рассмотрим равные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, для которых точка C не принадлежит прямой AB (рис. 21).

Из равенства этих векторов следует, что четырёхугольник $ACDB$ — параллелограмм. Значит, отрезки AC и BD равны и параллельны. Следовательно, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Задача 10. Докажите, что если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Верно ли обратное?

Решение. Рассмотрим равные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, для которых точка C не принадлежит прямой AB (рис. 22).

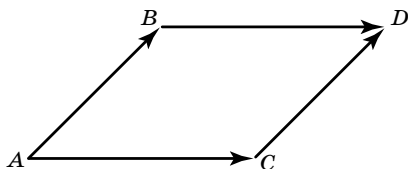


Рис. 21

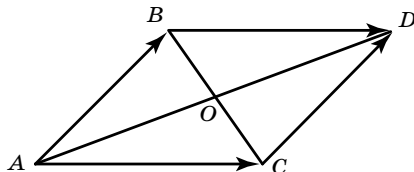


Рис. 22

Четырёхугольник $ACDB$ — параллелограмм. Следовательно, его диагонали AD и BC в точке пересечения O делятся пополам. Значит, середины отрезков AD и BC совпадают.

Обратное верно. Пусть середины отрезков AD и BC совпадают. Обозначим O их общую середину. Треугольники AOB и DOC равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = DO$, $OB = OC$, $\angle AOB = \angle DOC$). Следовательно, $\angle OAB = \angle ODC$, $AB = CD$. Из этих равенств следует равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

10. Сложение векторов

Цель обучения — определить операцию сложения векторов; сформулировать и доказать свойства сложения; научиться применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 10. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

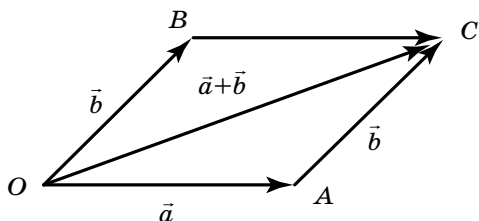


Рис. 23

При каком расположении векторов достигается равенство?

Решение. Рассмотрим случай, когда эти векторы не нулевые и не лежат на одной прямой. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от точки O .

Получим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Для получившихся векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ рассмотрим параллелограмм $OACB$ (рис. 23).

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = OC$, $|\vec{a}| = OA$, $|\vec{b}| = AC$. Требуемое неравенство следует из неравенства треугольника, применённого к треугольнику OAC ($OC < OA + AC$).

В случае, если данные векторы лежат на одной прямой и одинаково направлены, то имеет место равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

В случае, если данные векторы лежат на одной прямой и противоположно направлены, то имеет место равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. Дан ромб $ABCD$. Отложите вектор, равный $\overrightarrow{AB}$: а) от точки C ; б) от середины стороны AD .

2. Изобразите на координатной плоскости вектор $\overrightarrow{OE}$, если O — начало координат, $E(-5, 6)$.

3. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$; б) $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HG}$.

4*. Упростите: а) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{FC}$;

б) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Вариант 2

1. В прямоугольнике $EFGH$ укажите равные векторы с началами и концами в вершинах.

2. Дан параллелограмм $POQH$. Запишите, суммой каких векторов является вектор $\overrightarrow{OH}$.

3. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE}$; б) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FH}$.
- 4*. Верно ли равенство: а) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{CO}$;
 б) $\overrightarrow{ZM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XM}$?

11. Умножение вектора на число.

Разность векторов

Цель обучения — определить операции умножения вектора на число и разности векторов; сформулировать и доказать их свойства; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Выберем какую-нибудь точку X (рис. 24).

Тогда $\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$. Из этих равенств непосредственно следует требуемое равенство $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

Задача 10. Докажите, что $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

Решение. Рассмотрим случай, когда эти векторы не нулевые и не лежат на одной прямой. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от точки O . Получим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Для получившихся векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ рассмотрим треугольник OAB (рис. 25).

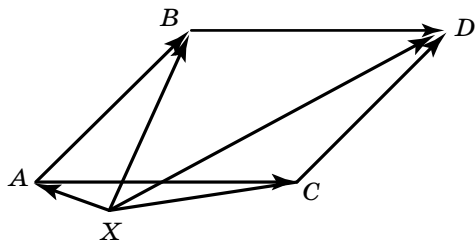


Рис. 24

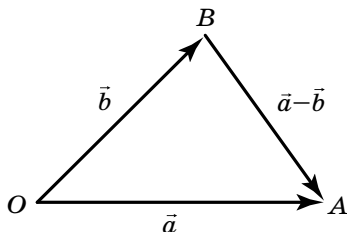


Рис. 25

Тогда $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = AB$, $|\vec{a}| = OA$, $|\vec{b}| = OB$. Требуемое неравенство следует из неравенства треугольника, применённого к треугольнику OAB ($AB > OA - OB$).

В случае, если данные векторы лежат на одной прямой и одинаково направлены, то имеет место равенство $|\vec{a} - \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$.

В случае, если данные векторы лежат на одной прямой и противоположно направлены, то имеет место равенство $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

12. Разложение вектора

Цель обучения — сформулировать и доказать теорему о разложении вектора; научить применять её при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Точка C — середина отрезка AB , O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $OADB$ (рис. 26). Середина C отрезка AB является точкой пересечения диагоналей этого параллелограмма. Тогда $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$. Следовательно, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Задача 10. Докажите, что для произвольной точки C отрезка AB имеет место равенство $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$, где $0 \leq t \leq 1$ (O — произвольная точка плоскости).

Доказательство. Рассмотрим треугольник OAB (рис. 27).

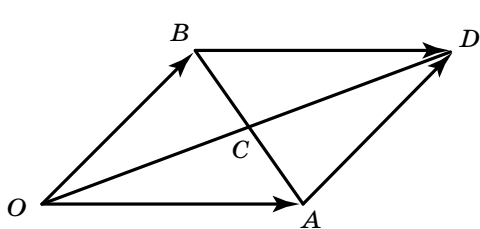


Рис. 26

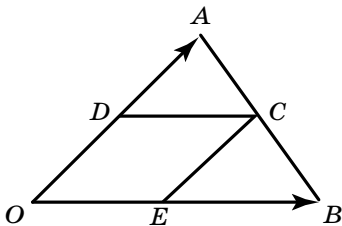


Рис. 27

Пусть C — произвольная точка отрезка AB . Обозначим t отношение $BC : AB$ ($0 \leq t \leq 1$). Тогда $AC : AB = 1 - t$. Через точку C проведём прямые, параллельные прямым OB и OA . Обозначим D и E их точки пересечения соответственно с отрезками OA и OB . По теореме о пропорциональных отрезках имеют место равенства отношений $OD : OA = t$, $OE : OB = 1 - t$. Следовательно, $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Постройте: а) $2\vec{a}$; б) $-\frac{1}{2}\vec{a}$.
2. Даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Постройте: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
3. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Найдите: а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; б) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$; в) $-\overrightarrow{DC}$.
4. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, укажите вектор, равный вектору $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$. Найдите его длину.
- 5*. В треугольнике KLM от вершины K на его сторонах отложены отрезки KH и KP , составляющие одну третью часть соответствующих сторон KL и KM . Докажите, что $\overrightarrow{HP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ML}$.

Вариант 2

1. Дан ненулевой вектор $\vec{b}$. Постройте: а) $-5\vec{b}$; б) $0,5\vec{b}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Найдите: а) $(-1)\overrightarrow{AB}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$; в) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
3. В четырёхугольнике $EFGH$ выполняется равенство $\overrightarrow{EH} = -4\overrightarrow{GF}$. Докажите, что данный четырёхугольник является трапецией.
4. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, укажите вектор, равный вектору $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$. Найдите его длину.

5*. В треугольнике XYZ проведена медиана XM . Выразите вектор $\overrightarrow{XM}$ через $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{XZ}$.

Глава III. Многоугольники и окружности

13. Углы, связанные с окружностью

Цель обучения — определить понятия вписанного и центрального углов окружности; установить соотношения между ними; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 13. Используя рисунок 13.8, докажите, что угол ACB с вершиной C внутри окружности измеряется полусуммой дуг $\overset{\diamond}{AB}$ и $\overset{\diamond}{DE}$, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол DCE .

Решение. Угол ACB является внешним углом треугольника BCD . Значит, он равен сумме углов ADB и DBE . Угол ADB измеряется половиной дуги $\overset{\diamond}{AB}$, а угол DBE измеряется половиной дуги $\overset{\diamond}{DE}$. Следовательно, угол ACB измеряется полусуммой дуг $\overset{\diamond}{AB}$ и $\overset{\diamond}{DE}$.

Задача 16. Используя рисунок 13.9, докажите, что угол ACB с вершиной C вне окружности, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг $\overset{\diamond}{AB}$ и $\overset{\diamond}{DE}$ окружности, заключённых внутри этого угла.

Решение. Угол ADB является внешним углом треугольника BCD . Значит, угол ACB равен разности углов ADB и DBE . Угол ADB измеряется половиной дуги $\overset{\diamond}{AB}$, а угол DBE измеряется половиной дуги $\overset{\diamond}{DE}$. Следовательно, угол ACB измеряется полуразностью дуг $\overset{\diamond}{AB}$ и $\overset{\diamond}{DE}$.

Задача 19. Используя рисунок 13.10, докажите, что угол между касательной AC к окружности и хордой, проведённой через точку касания C , измеряется половиной дуги окружности $\overset{\diamond}{BC}$, заключённой внутри этого угла.

Решение. Угол ACD прямой, измеряется половиной дуги CBD . Угол BCD измеряется половиной дуги BD . Следовательно, угол ACB между касательной и хордой измеряется половиной дуги BC .

Задача 20. Используя рисунок 13.11, докажите, что угол между двумя касательными CA и CB к окружности (A и B — точки касания), проведёнными из одной точки C , измеряется полуразно-

стью дуг ADB и AEB , заключённых между его сторонами.

Решение. Соединим отрезками точки A, E и B, E (рис. 28). Угол ACD равен разности углов AED и CAE . Следовательно, измеряется полуразно-

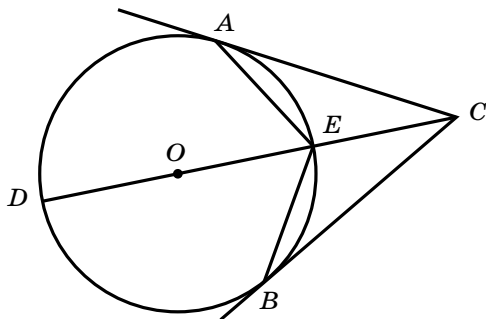


Рис. 28

ностью дуг AD и AE . Угол BCD равен разности углов BED и CBE . Следовательно, измеряется полуразноностью дуг BD и BE . Складывая углы ACD и BCD , получаем, что угол ACB измеряется полуразностью дуг ADB и AEB .

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. Центральный угол на 35° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Найдите каждый из этих углов.

2. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{8}$ окружности.

3. Хорда делит окружность на две дуги, относящиеся как $2 : 7$. Под какими углами видна эта хорда из точек окружности?

4*. Из концов дуги в 200° проведены касательные до взаимного пересечения. Найдите угол между ними.

Вариант 2

1. Вписанный угол равен 87° . Определите дугу, на которую он опирается.

2. Окружность разделена тремя точками на части, которые относятся как $4 : 5 : 9$. Через точки деления проведены хорды. Определите вид получившегося треугольника.

3. Одна хорда делит окружность в отношении $1 : 5$, а другая, параллельная ей хорда, делит окружность в отношении $2 : 3$. Определите дуги, заключённые между этими хордами. (Хорды расположены по одну сторону от центра окружности.)

4*. В окружности проведён диаметр AB . Через точку B проведена касательная, на которой отложен отрезок $BC = AB$. Точки A и C соединены. Точка D — точка пересечения отрезка AC и окружности. Докажите, что дуга AD равна дуге BD .

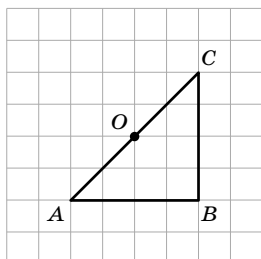
14. Треугольники, вписанные в окружность

Цель обучения — определить понятие треугольника, вписанного в окружность; сформулировать и доказать теорему о существовании окружности, описанной около треугольника; научить применять её при решении задач.

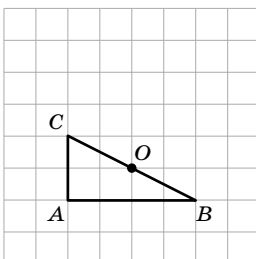
Рекомендации по решению задач

Задача 2. Для данных треугольников (рис. 14.4) изобразите центры описанных окружностей.

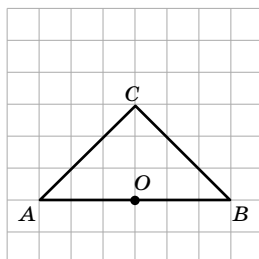
Ответ. Искомые центры окружностей показаны на рисунке 29.



а



б

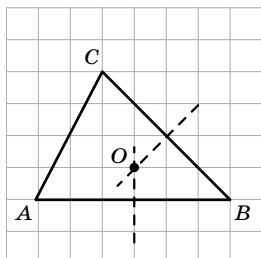


в

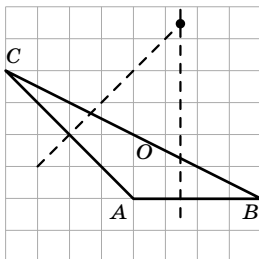
Рис. 29

Задача 3. Для данных треугольников (рис. 14.5) изобразите центры описанных окружностей.

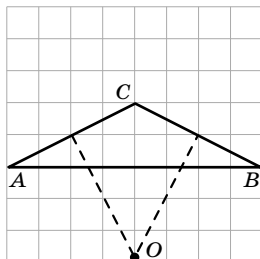
Ответ. Искомые центры окружностей показаны на рисунке 30.



а



б



в

Рис. 30

Задача 4. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Обозначим O середину гипотенузы AB . С центром в точке O и диаметром AB опишем окружность (рис. 31). Так как угол C треугольника ABC прямой, то точка C принадлежит этой окружности.

Задача 5. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Обозначим CM медиану. На её продолжении отложим отрезок MD , равный CM . Соединим отрезками точки A и D , B и D (рис. 32).

Треугольники AMC и BMD равны по двум сторонам и углу между ними ($AM = BM$, $CM = DM$, $\angle AMC = \angle BMD$). Следовательно, $AC = BD$, $\angle MAC = \angle MBD$. Из этих ра-

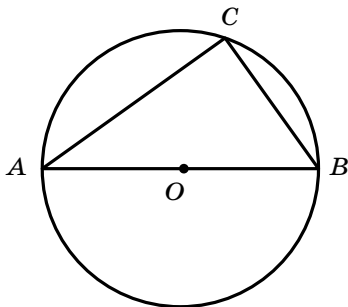


Рис. 31

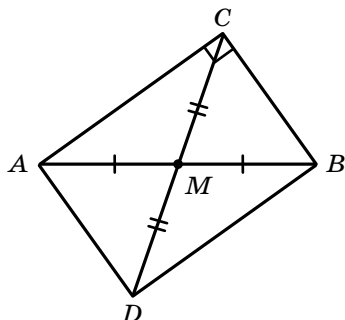


Рис. 32

венств получаем, что отрезки AC и BD равны и параллельны. Значит, четырёхугольник $ADBC$ — параллелограмм. Так как угол $C = 90^\circ$, то этот параллелограмм является прямоугольником. Из равенства диагоналей прямоугольника следует равенство отрезков $CM = AM = BM$. Значит, медиана CM равна половине гипотенузы.

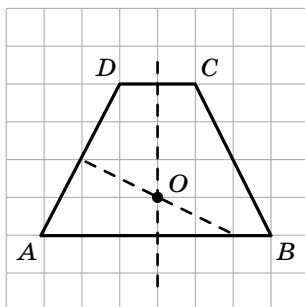
15. Многоугольники, вписанные в окружность

Цель обучения — определить понятие многоугольника, вписанного в окружность; сформулировать и доказать теоремы об окружностях, описанных около четырёхугольника и правильного многоугольника; научить применять их при решении задач.

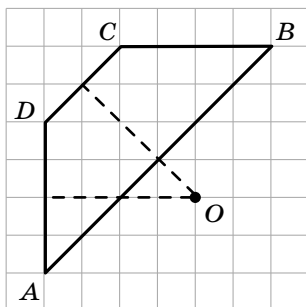
Рекомендации по решению задач

Задача 14. Укажите центры окружностей, описанных около трапеций, изображённых на рисунке 15.8.

Ответ. Искомые центры окружностей показаны на рисунке 33.



а



б

Рис. 33

Задача 20. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Если около него можно описать окружность, то сумма двух его противоположных углов равна 180° (рис. 34). Из равенства этих углов следует, что каждый из них равен 90° . Значит, этот параллелограмм является прямоугольником.

Задача 21. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция является равнобедренной.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Если около неё можно описать окружность, то сумма двух её противоположных углов B и D равна 180° (рис. 35). Так как сумма углов A и D этой трапеции также равна 180° , то углы A и B равны. Следовательно, трапеция $ABCD$ является равнобедренной.

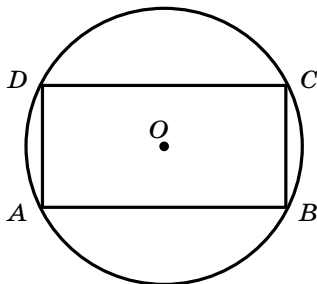


Рис. 34

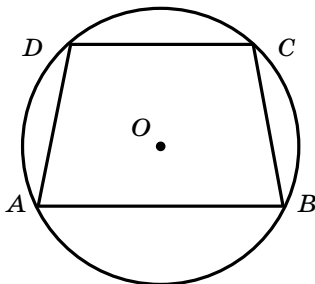


Рис. 35

Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15 см. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

2. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в 100° .

3. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого, взятые последовательно, относятся как $2 : 3 : 4 : 11$?

4*. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне a и радиусу описанной окружности R .

Вариант 2

1. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 11 см. Найдите гипотенузу этого треугольника.

2. Найдите углы вписанного в окружность остроугольного равнобедренного треугольника, основание которого стягивает дугу в 80° .

3. Найдите неизвестные углы вписанного в окружность четырехугольника, если два угла этого четырехугольника равны 32° и 105° .

4*. Постройте треугольник ABC по стороне $AC = b$, углу A и радиусу R описанной окружности.

16. Треугольники, описанные около окружности

Цель обучения — определить понятие треугольника, описанного около окружности; сформулировать и доказать теорему о существовании окружности, вписанной в треугольник; научить применять её при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Постройте центры окружностей, вписанных в треугольники, изображённые на рисунке 16.3.

Ответ. Искомые центры окружностей показаны на рисунке 36.

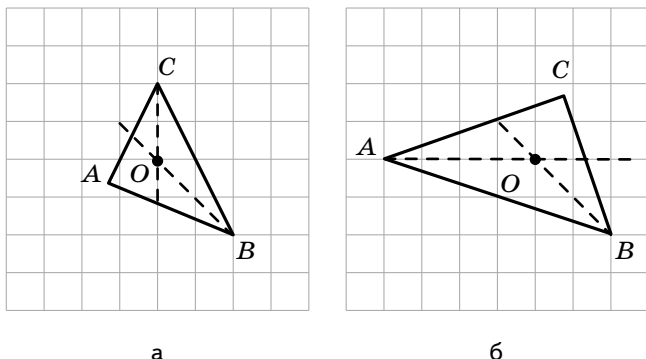


Рис. 36

Задача 6. Катеты прямоугольного треугольника равны 4 см и 3 см, гипотенуза равна 5 см (рис. 16.5). Найдите радиус вписанной окружности.

Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник, $AC = 4$ см, $BC = 3$ см, $AB = 5$ см. Обозначим O центр вписанной окружности, r её радиус (рис. 37). Из точки O опустим перпендикуляры OD , OE и OF на стороны треугольника. Четырёхугольник $CDOE$ является квадратом. Следовательно, $CD = CE = r$. Тогда $AD = 4 - r$, $BE = 3 - r$. Из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, получаем $AF = AD = 4 - r$, $BF = BE = 3 - r$. Складывая эти равенства будем иметь $AF + BF = 7 - 2r$. Учитывая, что $AF + BF = AB = 5$ см, находим $r = 1$ см.

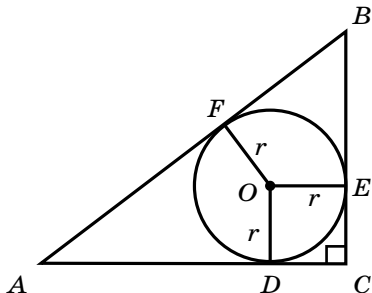


Рис. 37

Задача 7. Докажите, что для правильного треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

Решение. В правильном треугольнике биссектрисы, медианы и высоты, проведённые из одной вершины, совпадают. Следовательно, совпадают точки пересечения биссектрис и серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, т. е. совпадают центры вписанной и описанной окружностей.

Задача 9. Докажите, что если центры вписанной и описанной около треугольника окружностей совпадают, то треугольник — правильный.

Решение. Если для треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают, то биссектрисы этого треугольника лежат на серединных перпендикулярах к соответствующим сторонам. Следовательно, биссектрисы, медианы и высоты треугольника, проведённые из одной вершины, совпадают. Значит, этот треугольник правильный.

Задача 10. Докажите, что радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен половине радиуса окружности, описанной около этого треугольника (рис. 16.6).

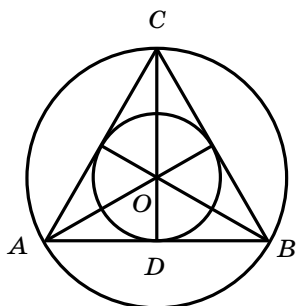


Рис. 38

Решение. Пусть ABC — правильный треугольник, O — центр вписанной и описанной окружности (рис. 38).

Обозначим CD высоту треугольника ABC . В прямоугольном треугольнике AOD угол A равен 30° . Так как катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы, то радиус OD вписанной окружности равен половине радиуса OA описанной окружности.

17. Многоугольники, описанные около окружности

Цель обучения — определить понятие многоугольника, описанного около окружности; сформулировать и доказать теоремы об окружностях, вписанных в четырёхугольник и правильный многоугольник; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 14. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник является квадратом.

Решение. Если в прямоугольник можно вписать окружность (рис. 39), то суммы его противоположных сторон равны. Из этого и из равенства противоположных сторон прямоугольника следует равенство всех сторон прямоугольника. Следовательно, этот прямоугольник является квадратом.

Задача 15. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм является ромбом.

Решение. Если в параллелограмм можно вписать окружность (рис. 40), то суммы его противоположных сторон равны. Из этого и из равенства противоположных сторон параллелограмма следует равенство всех сторон параллелограмма. Следовательно, этот параллелограмм является ромбом.

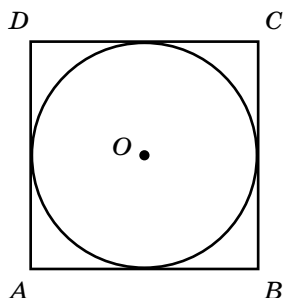


Рис. 39

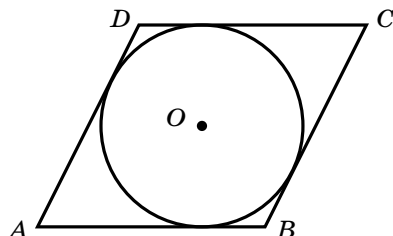


Рис. 40

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. Найдите углы, под которыми видны стороны равностороннего треугольника из центра вписанной в него окружности.

2. Нарисуйте равнобедренный треугольник и постройте центр окружности, вписанной в него.

3. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник, а в него вписана окружность. Найдите её радиус.

4*. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, большая диагональ которого равна 18 см, а тупой угол равен 120° .

Вариант 2

1. В равнобедренный треугольник с углом при основании 70° вписана окружность. Найдите углы, под которыми видны стороны треугольника из центра вписанной окружности.

2. Нарисуйте прямоугольный треугольник и постройте центр окружности, вписанной в него.

3. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность, а в неё вписан равносторонний треугольник. Найдите его сторону

4*. Три последовательные стороны описанной около окружности трапеции равны 13 см, 8 см и 13 см. Найдите радиус окружности.

18. Замечательные точки и линии треугольника

Цель обучения — познакомить учащихся с замечательными точками и линиями треугольника; сформулировать

и доказать соответствующие теоремы; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 2. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 и отрезок AA_1 , пересекающий отрезок CC_1 в его середине D (рис. 18.6). Найдите отношение $CA_1 : A_1B$.

Решение. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную AA_1 . Обозначим A' её точку пересечения с отрезком BC . Отрезок DA_1 является средней линией треугольника CC_1A' , следовательно, $CA_1 = A_1A'$. Отрезок C_1A' является средней линией треугольника ABA_1 , следовательно, $A_1A' = A'B$. Значит, $CA_1 : A_1B = 1 : 2$.

Задача 3. Точки A_1, C_1 делят стороны BC и AB треугольника ABC в отношении $1 : 2$ (рис. 18.7). Найдите отношение, в котором точка D пересечения отрезков AA_1 и CC_1 делит отрезок CC_1 .

Решение. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную AA_1 . Обозначим A' её точку пересечения с отрезком BC . По теореме о пропорциональных отрезках, применённой к углу ABC и прямым AA_1, C_1A' , имеем равенство отношений $A_1A' : A'B = 1 : 2$. Так как $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, то $CA_1 : A_1A' = 6 : 1$. По теореме о пропорциональных отрезках, применённой к углу C_1CB и прямым DA_1, C_1A' , имеем равенство отношений $CD : DC_1 = 6 : 1$.

Задача 7. Докажите, что если AA_1, BB_1 — высоты треугольника ABC , то угол A_1AC равен углу B_1BC (рис. 18.10).

Решение. Угол A_1AC равен 90° минус угол C треугольника ABC . Угол B_1BC также равен 90° минус угол C треугольника ABC . Следовательно, угол A_1AC равен углу B_1BC .

Задача 8. Используя рисунок 18.11, докажите, что если AA_1, BB_1 — высоты треугольника ABC , то угол A_1AB равен углу A_1B_1B , угол B_1BA равен углу B_1A_1A .

Решение. Вписанные углы A_1AB и A_1B_1B опираются на одну и ту же дугу A_1B . Следовательно, они равны. Вписанные углы B_1BA и B_1A_1A опираются на одну и ту же дугу AB_1 . Следовательно, они равны.

Задача 9. Докажите, что если AA_1, BB_1 — высоты треугольника ABC , то угол CA_1B_1 равен углу CAB , угол CB_1A_1 равен углу CBA (рис. 18.11).

Решение. Угол CA_1B_1 равен 90° минус угол B_1A_1A . Угол CAB равен 90° минус угол B_1BA . В силу предыдущей задачи, углы B_1A_1A и B_1BA равны. Следовательно, равны и углы CA_1B_1 и CAB . Аналогично доказывается равенство углов CB_1A_1 и CBA .

Задача 10. Докажите, что если AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты треугольника ABC , то биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на соответствующих высотах треугольника ABC (рис. 18.12).

Решение. В силу предыдущей задачи, угол CA_1B_1 равен углу CAB . Аналогично, угол BA_1C_1 равен углу BAC . Значит, равны углы AA_1B_1 и AA_1C_1 . Следовательно, биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$, проведённая из вершины A_1 , лежит на высоте AA_1 треугольника ABC . Аналогичным образом доказывается, что две другие биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на соответствующих высотах треугольника ABC .

Задача 12. Докажите, что для любого треугольника основания медиан, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, принадлежат одной окружности (рис. 18.14). Она называется *окружностью девяти точек*, или *окружностью Эйлера*.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 42), H — точка пересечения высот треугольника; точки A_1 , B_1 , C_1 обозначают середины соответствующих сторон; A_2 , B_2 , C_2 — основания высот; A_3 , B_3 , C_3 — середины отрезков AH , BH и CH соответственно. Опишем окружность около треугольника $C_1C_2C_3$ (рис. 43).

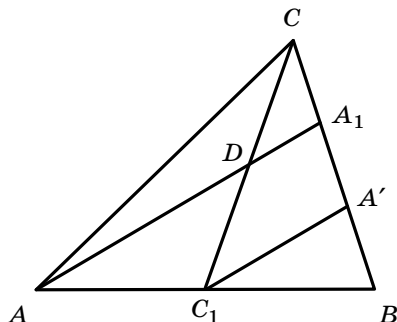


Рис. 41

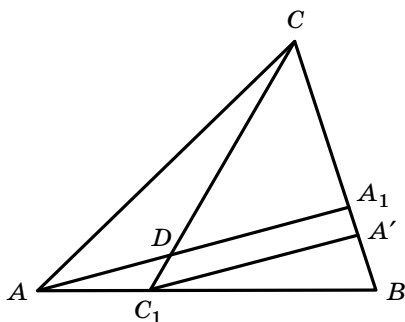


Рис. 42

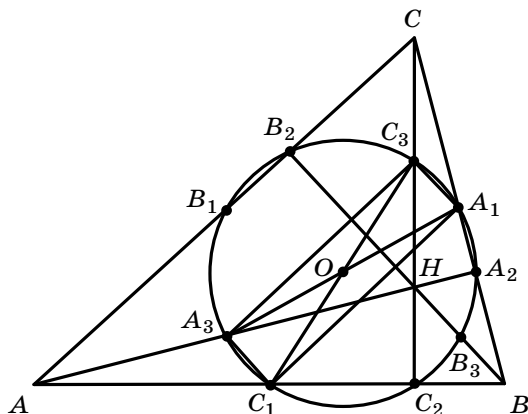


Рис. 43

Заметим, что её центром O является середина отрезка C_1C_3 . Докажем, что точка A_3 принадлежит этой окружности. Для этого достаточно доказать, что угол $C_1A_3C_3$ равен 90° . Действительно, C_1A_3 — средняя линия треугольника ABH , следовательно, C_1A_3 параллельна BH . Аналогично, A_3C_3 — средняя линия треугольника ACH , следовательно, A_3C_3 параллельна AB . Так как BH и AB перпендикулярны, то и C_1A_3 и A_3C_3 перпендикулярны, т. е. $\angle C_1A_3C_3 = 90^\circ$. Аналогичным образом доказывается, что $\angle C_1A_1C_3 = 90^\circ$, следовательно, точка A_1 принадлежит окружности. Заметим, что четырёхугольник $C_1A_1C_3A_3$ является прямоугольником, следовательно, отрезок A_1A_3 является диаметром окружности. Так как угол $A_1A_2A_3$ прямой, то точка A_2 также принадлежит этой окружности. Так как точки B_1, B_2, B_3 отличаются от точек A_1, A_2, A_3 только обозначениями, то они также принадлежат этой окружности. Таким образом, все девять точек принадлежат окружности.

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Под каким углом виден каждый катет из центра окружности, описанной около данного треугольника?

2. Углы треугольника относятся как $3 : 7 : 8$. Под какими углами видны его стороны из центра вписанной окружности?

3. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 80° и 60° . Найдите остальные углы четырёхугольника.

4. Три последовательные стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся как $1 : 3 : 5$. Периметр четырёхугольника равен 36 см. Найдите его стороны.

5*. Для треугольника ABC (рис. 44) постройте точку пересечения высот или их продолжений.

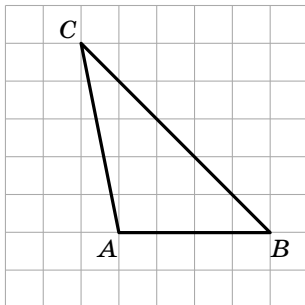


Рис. 44

Вариант 2

1. Угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, равен 80° . Под каким углом видна каждая сторона треугольника из центра описанной около него окружности?

2. Два угла треугольника равны 36° и 48° . Под какими углами видны его стороны из центра вписанной окружности?

3. Три последовательные угла вписанного в окружность четырёхугольника относятся как $3 : 4 : 6$. Найдите углы четырёхугольника.

4. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность. Сторона AB на 4 см больше стороны CD , а стороны BC и AD относятся соответственно как $1 : 2$. Найдите стороны данного четырёхугольника, если его периметр равен 48 см.

5*. Для треугольника ABC (рис. 45) постройте точку пересечения высот или их продолжений.

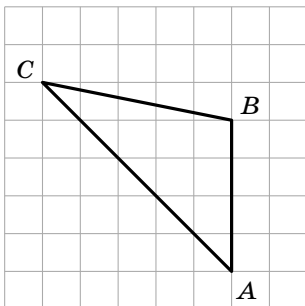


Рис. 45

Глава IV. Движение

19. Центральная симметрия и её свойства

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием центральной симметрии; сформулировать и доказать её свойства; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 16. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

Решение. Так как диагонали параллелограмма $ABCD$ в точке O их пересечения делятся пополам (рис. 46), то точки A и C , B и D симметричны относительно точки O . Следовательно, точка O пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

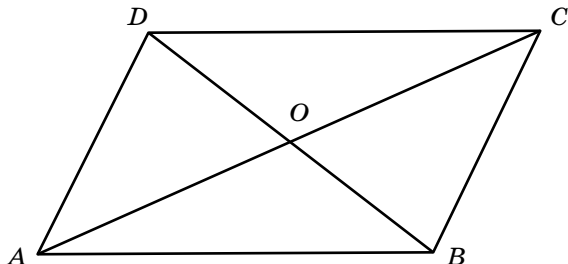


Рис. 46

Задача 17. Докажите, что если четырёхугольник имеет центр симметрии, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Решение. Пусть четырёхугольник $ABCD$ имеет центр симметрии O (рис. 46). Тогда треугольник AOB равен треугольнику COD по двум сторонам и углу между ними ($AO = CO$, $BO = DO$, $\angle AOB = \angle COD$). Следовательно, $AB = CD$, $\angle OAB = \angle OCD$. Значит, стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ равны и параллельны. Следовательно, по первому признаку параллелограмма, этот четырёхугольник — параллелограмм.

Задача 18. Докажите, что центральная симметрия переводит окружность в окружность.

Решение. Пусть точка A_1 при центральной симметрии переводится в точку A_2 . Так как центральная симметрия со-

храняет расстояния, то точки B_1 , находящиеся на расстоянии R от точки A_1 , переводятся в точки B_2 , находящиеся на том же расстоянии от точки A_2 , и наоборот. Следовательно, окружность с центром A_1 и радиусом R переходит в окружность с центром A_2 и радиусом R .

Задача 19. Докажите, что центральная симметрия сохраняет величины углов.

Решение. Пусть угол $A_1B_1C_1$ при центральной симметрии переводится в угол $A_2B_2C_2$. Так как центральная симметрия сохраняет расстояния, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны по трём сторонам. Следовательно, равны и углы $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

Задача 20. Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно два центра симметрии.

Решение. Предположим, что точки O_1 и O_2 являются центрами симметрии фигуры Φ . Докажем, что в этом случае точка O_3 , симметричная точке O_1 относительно центра O_2 , также будет центром симметрии фигуры Φ (рис. 47). Рассмотрим какую-нибудь точку A , принадлежащую фигуре Φ . Обозначим A_3 точку, симметричную точке A относительно точки O_3 . Обозначим A_1 точку, симметричную точке A относительно точки O_2 . Обозначим A_2 точку, симметричную точке A_3 относительно точки O_2 . Тогда точки A_1 , A_2 , A , A_3 являются вершинами параллелограмма, причём O_1 является серединой отрезка A_1A_2 . Следовательно, точка A_2 симметрична точке A_1 относительно точки O_1 . Так как точка A_1 симметрична точке A относительно центра симметрии O_2 , то она принадлежит фигуре Φ . Так как точка A_2

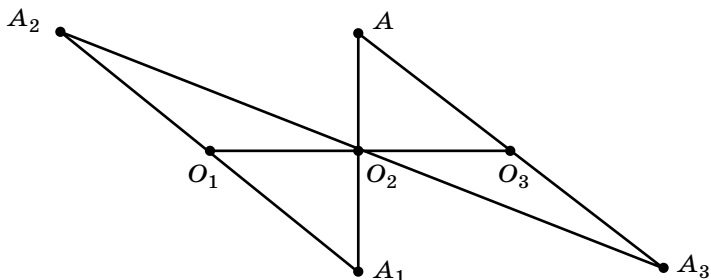


Рис. 47

симметрична точке A_1 относительно центра симметрии O_1 , то она принадлежит фигуре Φ . Так как точка A_3 симметрична точке A_2 относительно центра симметрии O_2 , то она принадлежит фигуре Φ . Таким образом, для любой точки A фигуры Φ симметричная ей точка A_3 относительно точки O_3 принадлежит фигуре Φ . Значит, O_3 является центром симметрии фигуры Φ . Аналогичным образом доказывается, что точка O_4 , симметричная точке O_2 относительно точки O_3 , также является центром симметрии фигуры Φ и т. д. В результате получаем, что у фигуры Φ имеется бесконечно много центров симметрии.

20. Поворот. Симметрия n -го порядка

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями поворота и симметрии n -го порядка; сформулировать и доказать их свойства; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. Отрезок CD получен поворотом отрезка AB (рис. 20.8). Укажите центр поворота.

Ответ. Центр поворота указан на рисунке 48.

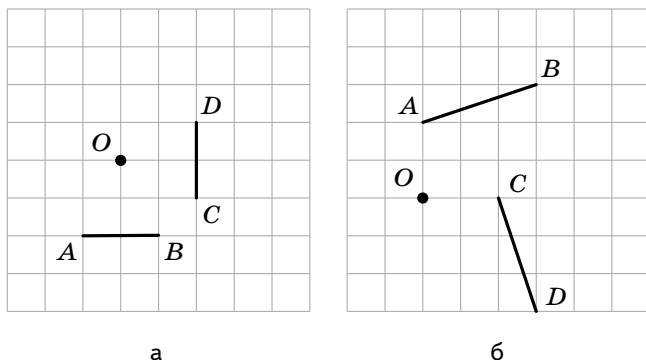
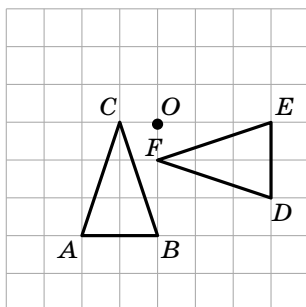


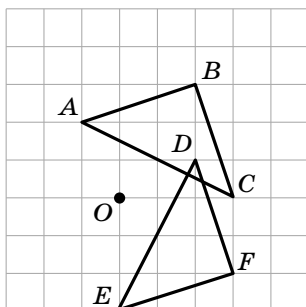
Рис. 48

Задача 10. Треугольник DEF получен поворотом треугольника ABC (рис. 20.10). Укажите центр поворота.

Ответ. Центр поворота указан на рисунке 49.



а



б

Рис. 49

Самостоятельная работа 9

Вариант 1

1*. Постройте треугольник, центрально-симметричный данному относительно точки O (рис. 50).

2*. Приведите пример фигуры, которая имеет центр симметрии 3-го порядка.

3. На какой угол нужно повернуть прямую вокруг не принадлежащей ей точки, чтобы получить параллельную ей прямую?

4. Изобразите треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки (рис. 51).

5*. Правильный пятиугольник повернут вокруг его центра описанной окружности на угол 36° . Какой фигурой является общая часть исходного пятиугольника и повернутого?

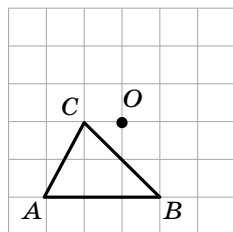


Рис. 50

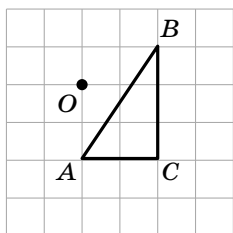


Рис. 51

Вариант 2

1*. Постройте треугольник, центрально-симметричный данному относительно точки O (рис. 52).

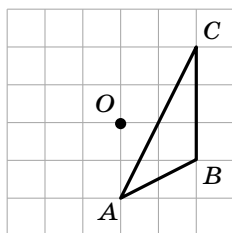


Рис. 52

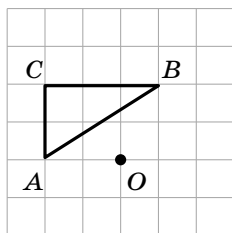


Рис. 53

2*. Приведите пример фигуры, которая имеет центр симметрии 4-го порядка.

3. На какой угол нужно повернуть прямую вокруг не принадлежащей ей точки, чтобы получить перпендикулярную ей прямую?

4. Изобразите треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол 90° по часовой стрелке (рис. 53).

5*. Правильный шестиугольник повернут вокруг его центра описанной окружности на угол 30° . Какой фигурой является общая часть исходного шестиугольника и повернутого?

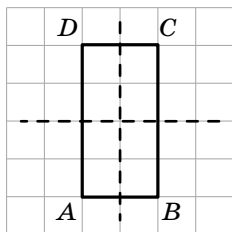
21. Осевая симметрия и её свойства

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием осевой симметрии; сформулировать и доказать её свойства; научить применять их при решении задач.

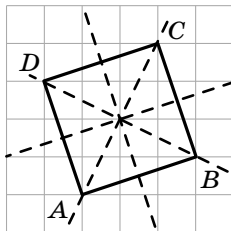
Рекомендации по решению задач

Задача 17. Изобразите оси симметрии для четырёхугольников, изображённых на рисунке 21.9.

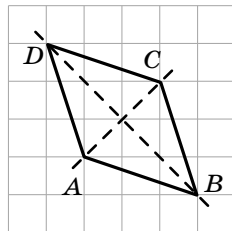
Ответ. Оси симметрии изображены на рисунке 54.



а



б



в

Рис. 54

Задача 18. Изобразите оси симметрии для многоугольников, изображённых на рисунке 21.10.

Ответ. Оси симметрии изображены на рисунке 55.

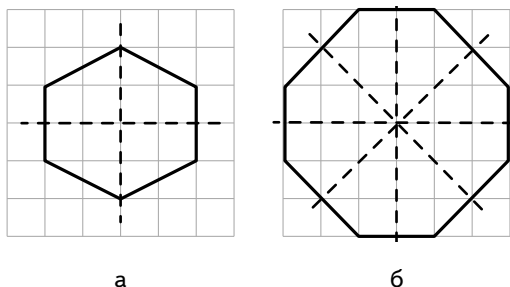


Рис. 55

22. Параллельный перенос

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием параллельного переноса; сформулировать и доказать его свойства; научить применять его при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 8. Населённые пункты C и D расположены на противоположных берегах реки a и b (рис. 22.7). В каком месте реки следует построить мост и проложить дороги до населённых пунктов так, чтобы общая длина пути из C в D была наименьшей? (Берега реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам.) Выберите из предложенных вариантов 1, 2, 3 путь наименьшей длины.

Решение. Рассмотрим общую ситуацию, изображённую на рисунке 56. Обозначим h ширину реки. Проведём отрезок CC' , перпендикулярный a и равный h . Если AB — искомым мостом, то четырёхугольник $ACC'B$ — параллелограмм, следовательно, $CA + AB + BD = CC' + C'B + BD$. Так

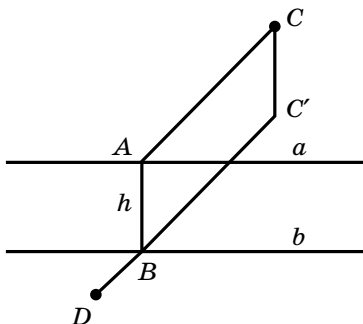


Рис. 56

как длина отрезка CC' постоянна, то сумма $CA + AB + BD$ принимает наименьшее значение, если сумма $C'B + BD$ имеет наименьшее значение. Это произойдёт в случае, если C' , B и D принадлежат одной прямой. Таким образом, для нахождения моста AB нужно построить отрезок CC' , перпендикулярный a и равный h . Затем провести прямую $C'D$ и найти её точку пересечения B с прямой b . Провести отрезок AB перпендикулярный прямой b . Он и будет давать искомое положение моста. В нашем случае (рис. 22.7) искомым путём наименьшей длины является путь под номером 1.

Самостоятельная работа 10

Вариант 1

- 1*. Сколько осей симметрии имеют две параллельные прямые?
- 2*. Приведите примеры цифр, имеющих оси симметрии.
3. Сколько осей симметрии имеет правильный пятиугольник?
4. Докажите, что если треугольник имеет ось симметрии, то он является равнобедренным.
- 5*. Докажите, что композиция двух параллельных переносов является параллельным переносом.

Вариант 2

- 1*. Сколько осей симметрии имеют две перпендикулярные прямые?
- 2*. Приведите пример букв русского алфавита, имеющих оси симметрии.
3. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник?
4. Докажите, что если ось симметрии параллелограмма содержит его диагональ, то этот параллелограмм является ромбом.
- 5*. Докажите, что композиция двух параллельных переносов является параллельным переносом.

23. Движение и его свойства. Равенство фигур

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями движения и равенства фигур; сформулировать и доказать их свойства; научить применять их при решении задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 7. Для двух данных равных отрезков (рис. 23.5) укажите движение, переводящее один в другой.

Ответ. Одним из возможных движений, переводящих отрезок AB в отрезок CD , является композиция параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{AC}$ и осевой симметрии относительно прямой c (рис. 57).

Задача 8. Для двух данных равных углов (рис. 23.6) укажите движение, переводящее один в другой.

Ответ. Одним из возможных движений, переводящих угол A в угол B , является композиция поворота вокруг точки A на 90° и параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 58).

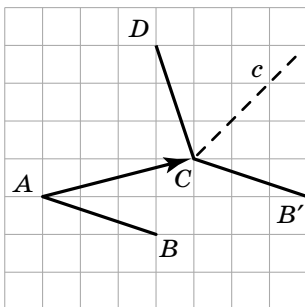


Рис. 57

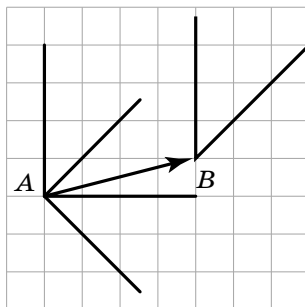


Рис. 58

Задача 10. Докажите, что два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ и $\angle A = \angle A_1$, равны.

Решение. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, существует движение, переводящее треугольник ABD в треугольник $A_1B_1D_1$. Так как движение сохраняет расстояния и углы, то сторона BC перейдёт в сторону B_1C_1 , а сторона CD перейдёт в сторону C_1D_1 . Значит, параллелограмм $ABCD$ перейдёт в параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Следовательно, эти параллелограммы равны.

Задача 11. Сформулируйте какие-нибудь признаки равенства: а) прямоугольников; б) квадратов; в) ромбов.

Ответ. а) Два прямоугольника равны, если их соответствующие стороны попарно равны; б) два квадрата равны,

если равны их стороны; в) два ромба равны, если равны их стороны и равны соответствующие углы.

Задача 12. Сформулируйте какой-нибудь признак равенства правильных многоугольников.

Ответ. Два правильных многоугольника равны, если равны их стороны и равны соответствующие углы.

24*. Паркеты

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием паркета на плоскости; рассмотреть примеры паркетов; сформулировать и доказать теорему о паркете из выпуклых четырёхугольников; научить составлять паркет из многоугольников.

Рекомендации по решению задач

Задача 2. Аналогично паркету на рисунке 24.3, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке 24.14. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 59.

Задача 3. Аналогично паркету на рисунке 24.4, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов и треугольников, равных данным (рис. 24.15). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 60.

Задача 4. Аналогично паркету на рисунке 24.5, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников и треугольников, равных данным (рис. 24.16). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 61.

Задача 5. Аналогично паркету на рисунке 24.6, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из восьмиугольников и квадратов, равных данным (рис. 24.17). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окраше-

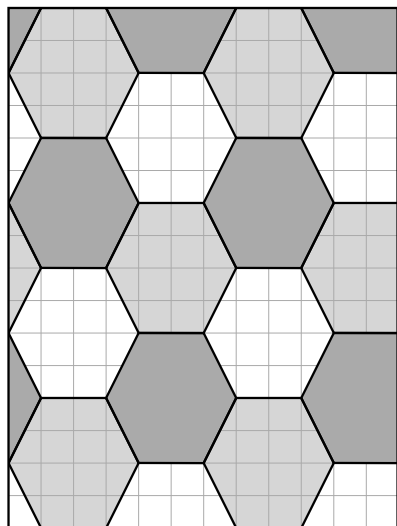


Рис. 59

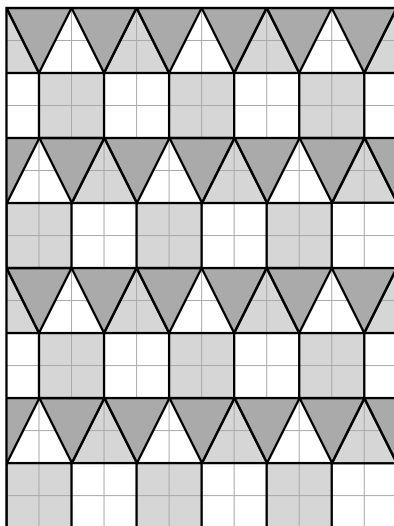


Рис. 60

ны разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 62.

Задача 7. Аналогично паркету на рисунке 24.7, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников и треугольников, равных данным (рис. 24.18). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 63.

Задача 8. Аналогично паркету на рисунке 24.8, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов и треугольников, равных данным (рис. 24.19). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 64.

Задача 9. Аналогично паркету на рисунке 24.9, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, квадратов и треугольников, равных данным (рис. 24.20). Раскрасьте многоугольники так, чтобы сосед-

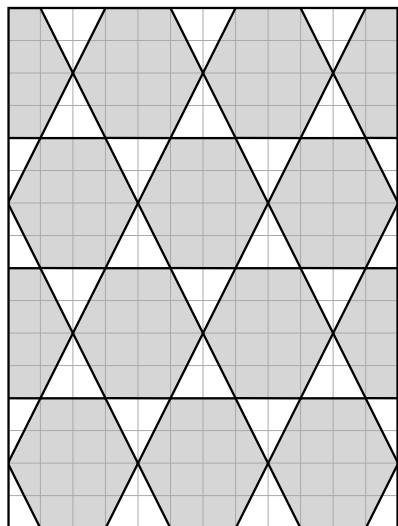


Рис. 61

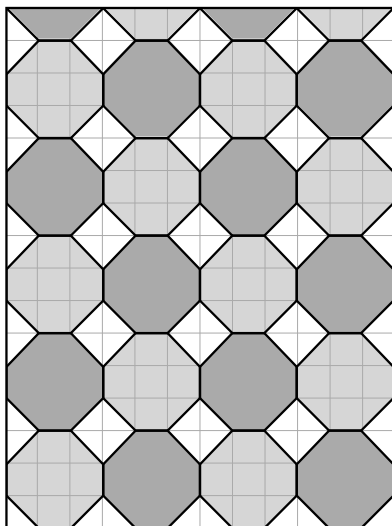


Рис. 62

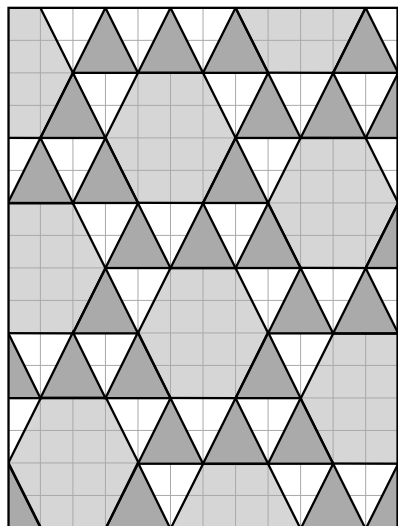


Рис. 63

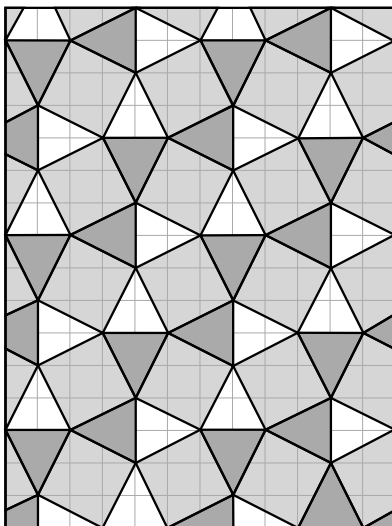


Рис. 64

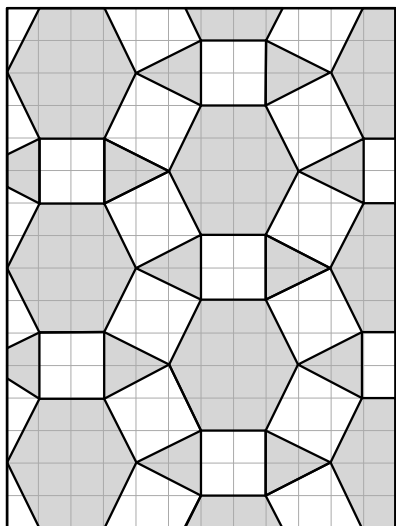


Рис. 65

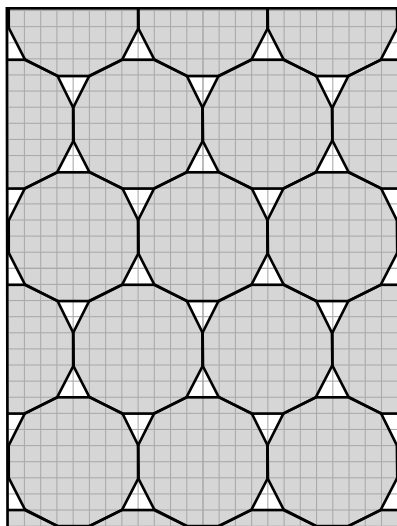


Рис. 66

ние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 65.

Задача 10. Аналогично паркету на рисунке 24.10, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из двенадцатиугольников и треугольников, равных данным (рис. 24.21). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 66.

Задача 11. Аналогично паркету на рисунке 24.11, на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из двенадцатиугольников, шестиугольников и квадратов, равных данным (рис. 24.22). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Ответ. Паркет изображён на рисунке 67.

Задача 12. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному (рис. 24.23). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

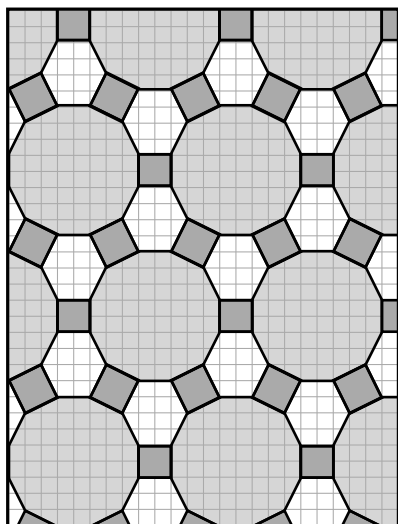


Рис. 67

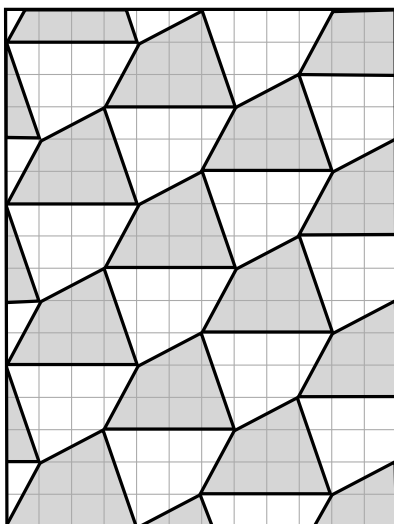


Рис. 68

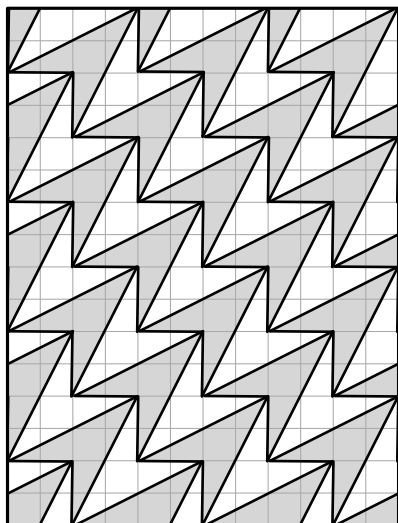


Рис. 69

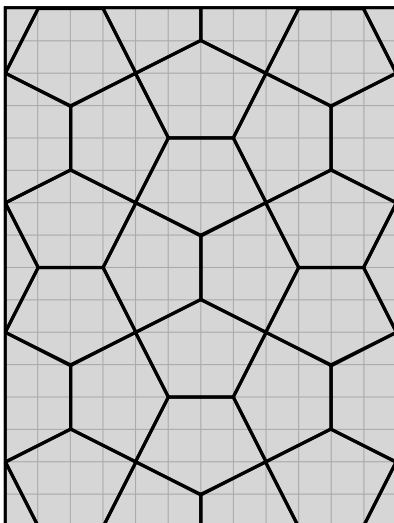


Рис. 70

Ответ. Паркет изображён на рисунке 68.

Задача 13. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному (рис. 24.24). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

Ответ. Паркет изображён на рисунке 69.

Задача 14. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из пятиугольников, равных данному (рис. 24.25). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

Ответ. Паркет изображён на рисунке 70.

Задача 15. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному (рис. 24.26). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

Ответ. Паркет изображён на рисунке 71.

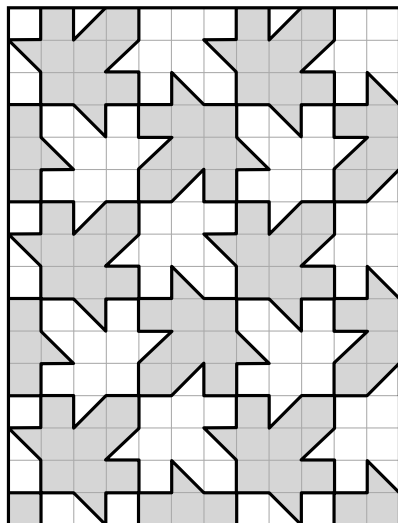


Рис. 71

Самостоятельная работа 11

Вариант 1

1. Приведите примеры движений, которые каждую прямую переводят в себя или в параллельную прямую.
2. Сколько имеется различных движений, переводящих правильный треугольник в себя?
3. Изобразите какой-нибудь треугольник. Составьте из него паркет.
4. Изобразите какой-нибудь выпуклый четырёхугольник. Составьте из него паркет.
- 5*. Докажите, что из правильного пятиугольника нельзя составить паркет.

Вариант 2

1. Приведите примеры движений, которые каждую прямую переводят в пересекающую её прямую.

2. Сколько имеется различных движений, переводящих квадрат в себя?

3. Изобразите какой-нибудь треугольник. Составьте из него паркет.

4. Изобразите какой-нибудь выпуклый четырёхугольник. Составьте из него паркет.

5*. Докажите, что из правильного семиугольника нельзя составить паркет.

Глава V. Площади

25. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием площади и её свойствами; научить находить площадь простейших фигур.

Рекомендации по решению задач

Задача 14. Найдите площадь фигуры на рисунке 25.11 (стороны квадратных клеток равны 1).

Решение. Данная фигура состоит из пяти квадратов, площади которых равны 2 (рис. 72).

Следовательно, площадь этой фигуры равна 10.

Задача 15. Найдите площадь фигуры на рисунке 25.12 (стороны квадратных клеток равны 1).

Решение. Площадь данной фигуры (рис. 73, а) равна площади квадрата, изображённого на рисунке 73, б, следовательно, равна 9.

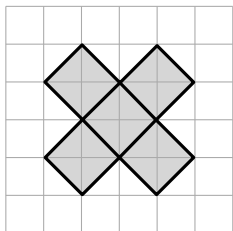
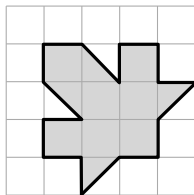
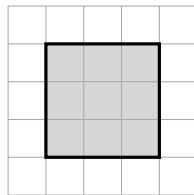


Рис. 72



а



б

Рис. 73

26. Теорема Пифагора

Цель обучения — сформулировать и доказать теорему Пифагора; научить применять её для решения задач; представить исторические сведения о Пифагоре, более подробно с которыми можно познакомиться по книге: *Г. И. Глейзер. История математики в школе: Пособие для учителей.* — М. : Просвещение, 1982.

Рекомендации по решению задач

Задача 18. Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды (рис. 26.9). Найдите глубину озера в месте, где растёт камыш.

Решение. Обозначим x глубину озера (рис. 74). Тогда длина AB камыша равна $x + 1$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC , получим уравнение $x^2 + 4 = (x + 1)^2$. Решая это уравнение, находим $x = 1,5$ м. Таким образом, глубина озера равна 1,5 м.

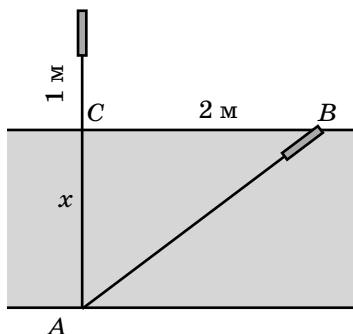


Рис. 74

Самостоятельная работа 12

Вариант 1

1. Найдите площадь прямоугольника, если его стороны равны 2,8 см и 15 см.

2. Участок прямоугольной формы имеет площадь, равную 45 000 м². Чему равна эта площадь в квадратных километрах?

3. Найдите площадь участка по рисунку 75, соседние стороны которого перпендикулярны.

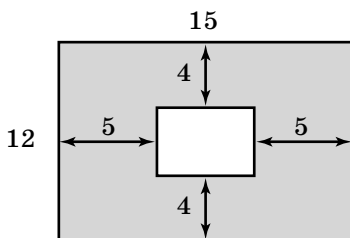


Рис. 75

4. Стороны прямоугольника равны 9 м и 16 м. Найдите сторону равновеликого ему квадрата.

Вариант 2

1. Найдите сторону прямоугольника, если его площадь и одна из сторон равны соответственно 132 м^2 и 20 м .

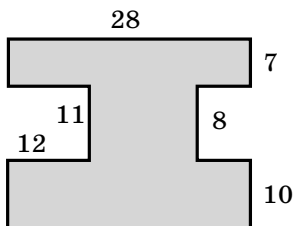


Рис. 76

2. Площадь прямоугольного участка равна 5000 м^2 . Чему равна эта площадь в квадратных километрах?

3. Найдите площадь участка по рисунку 76, соседние стороны которого перпендикулярны.

4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 490 м^2 , а отношение сторон $2 : 5$.

27. Площадь параллелограмма

Цель обучения — сформулировать и доказать теорему о площади параллелограмма; научить применять её для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 10. В параллелограмме вырезали дырку прямоугольной формы (рис. 27.5). Проведите прямую, делящую оставшуюся часть параллелограмма на две равновеликие части.

Решение. Искомой прямой является прямая c , проходящая через центры симметрии O_1 , O_2 параллелограмма и вырезанного прямоугольника (рис. 77). Действительно, прямая, проходящая через центр симметрии фигуры разбивает эту фигуру на две симметричные между собой части.

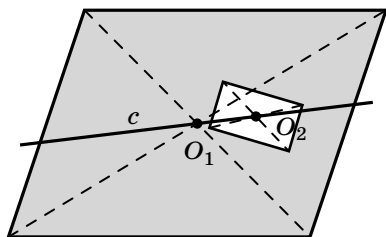


Рис. 77

Следовательно, площади этих частей будут равны. В нашем случае будут равны площади частей параллелограмма и равны площади частей прямоугольника. Значит, будут равны и разности площадей частей параллелограмма и прямоугольника.

28. Площадь треугольника

Цель обучения — сформулировать и доказать теоремы о площади треугольника и следствия из них; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 20. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников (рис. 28.11).

Решение. Медианы треугольника ABC делятся в точке O их пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника. Медиана CC_1 разбивает треугольник ABC на два равновеликих треугольника ACC_1 и BCC_1 . Так как отрезок OC_1 составляет одну треть отрезка CC_1 , то площадь треугольника AOC_1 равна одной третьей площади треугольника ACC_1 , т. е. равна одной шестой площади треугольника ABC . Аналогичным образом доказывается, что площади всех остальных треугольников, на которые медианы разбивают треугольник ABC , равны одной шестой площади треугольника ABC , следовательно, все эти треугольники равновелики.

Задача 22. Середины сторон параллелограмма $ABCD$ последовательно соединены между собой. Используя рисунок 28.12, докажите, что площадь получившегося параллелограмма $EFGH$ равна половине площади исходного параллелограмма $ABCD$.

Решение. Отрезок GH является средней линией треугольника ACD . Следовательно, он параллелен диагонали AC , а площадь треугольника GDH равна одной четвёртой площади треугольника ACD . Аналогично, отрезок EF является средней линией треугольника ABC . Следовательно, он параллелен диагонали AC , а площадь треугольника EFB равна одной четвёртой площади треугольника ACB . Таким образом, сумма площадей треугольников GDH и EFB равна одной четвёртой площади параллелограмма $ABCD$. Аналогично, отрезки EH и FG параллельны диагонали BD , а сумма площадей треугольников AEH и CFG равна одной четвёртой площади параллелограмма $ABCD$. В результате получаем, что у четырёхугольника $EFGH$ противолежащие стороны параллельны, т. е. он является параллелограммом, а его площадь равна половине площади параллелограмма $ABCD$.

Задача 23. Докажите, что площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей равносторонних треугольников, построенных на его катетах (рис. 28.13).

Решение. Обозначим a , b катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенузу. Тогда площади равносторонних треугольников, построенных на катетах и гипотенузе, соответственно равны $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, $\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$, $\frac{\sqrt{3}c^2}{4}$. По теореме Пифагора выполняется равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{\sqrt{3}a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}b^2}{4} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$, т. е. площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей равносторонних треугольников, построенных на его катетах.

Самостоятельная работа 13

Вариант 1

1. Стороны параллелограмма равны 21 см и 14 см. Высота, проведённая к большей стороне, равна 7 см. Найдите другую высоту параллелограмма.

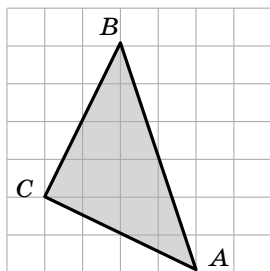


Рис. 78

2. Площадь параллелограмма равна 24. Найдите площадь параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

3. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 10, а основание равно 12.

4*. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 78. Стороны квадратных клеток равны 1.

Вариант 2

1. Стороны параллелограмма равны 10 см и 9 см. Высота, проведённая к меньшей стороне, равна 5 см. Найдите другую высоту параллелограмма.

2. Середины сторон параллелограмма являются вершинами четырёхугольника. Определите его вид и найдите площадь, если площадь параллелограмма равна 36 см^2 .

3. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 5, а гипотенуза равна 13.

4*. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 79. Стороны квадратных клеток равны 1.

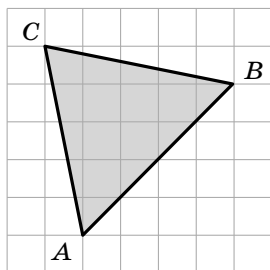


Рис. 79

29. Площадь трапеции

Цель обучения — сформулировать и доказать теорему о площади трапеции; научить применять её для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 14. В трапеции $ABCD$ точка E — середина боковой стороны AD (рис. 29.9). Докажите, что площадь треугольника BCE равна половине площади трапеции $ABCD$.

Решение. Проведём в трапеции $ABCD$ среднюю линию EF (рис. 80). Из вершин B и C опустим перпендикуляры BG и CH на прямую EF . Площадь треугольников BEF и CEF равны половине произведения стороны EF на высоту соответственно BG и CH , проведённую к этой стороне. Сумма этих высот равна высоте трапеции. Площадь треугольника BCE равна сумме площадей треугольников BEF и CEF , а сумма высот BG и CH равна высоте трапеции. Следова-

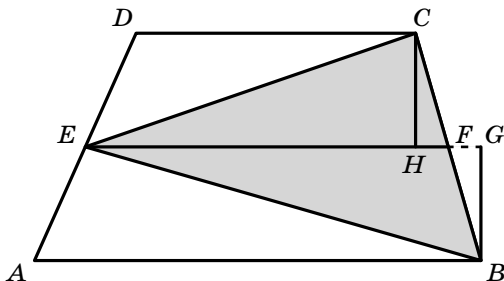


Рис. 80

тельно, площадь треугольника BCE равна половине произведения средней линии EF на высоту трапеции, значит, равна половине площади трапеции $ABCD$.

30. Площадь многоугольника

Цель обучения — показать способ нахождения площади многоугольника; сформулировать и доказать теоремы о площади выпуклого четырёхугольника; научить применять их для решения задач.

Рекомендации по решению задач

Задача 7. Докажите, что площадь четырёхугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине произведения его диагоналей (рис. 30.6).

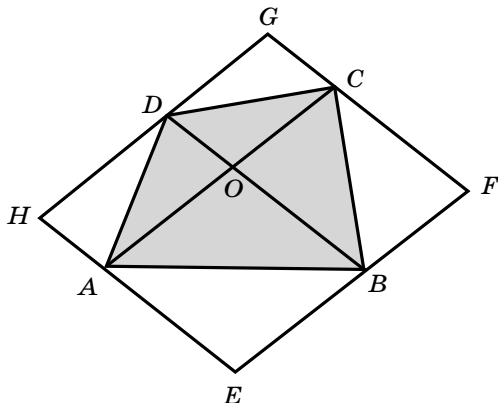


Рис. 81

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине произведения AC и BO . Площадь треугольника ACD равна половине произведения AC и DO . Следовательно, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна половине произведения AC и BD .

Задача 9. Докажите, что если через вершины выпуклого

четырёхугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, образованного этими прямыми, в два раза больше площади данного четырёхугольника (рис. 30.7).

Решение. Обозначим $EFGH$ параллелограмм, стороны которого содержат вершины четырёхугольника $ABCD$ и параллельны диагоналям этого четырёхугольника (рис. 81). Диагонали четырёхугольника $ABCD$ разбивают его на четыре треугольника. Четырёхугольник $EFGH$ состоит из параллелограммов, площадь каждого из которых равна

удвоенной площади соответствующего треугольника. Следовательно, площадь четырёхугольника $EFGH$ в два раза больше площади четырёхугольника $ABCD$.

Задача 12. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник, изображённый на рисунке 30.8 (стороны квадратных клеток равны 1).

Решение. а) Четырёхугольник является ромбом. Его площадь равна половине произведения диагоналей и равна 8. Стороны этого ромба равны $\sqrt{10}$. Следовательно, радиус

вписанной окружности равен $\frac{2\sqrt{10}}{5}$;

б) площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей и равна 12. Стороны этого четырёхугольника равны 3 и $\sqrt{17}$. Следовательно, радиус вписанной окружности равен $\frac{3(\sqrt{17} - 3)}{2}$.

Самостоятельная работа 14

Вариант 1

1. Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 11 см, а высота 28 см.

2. Одно основание трапеции равно 8 см, высота — 14 см, площадь — 70 см^2 . Найдите другое основание.

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 8 и 10. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырёхугольник?

4*. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 82. Стороны клеток равны 1.

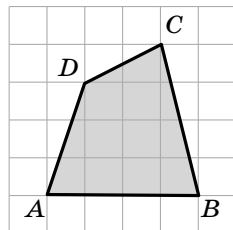


Рис. 82

Вариант 2

1. Найдите площадь трапеции, основания которой 6 см и 8 см, а высота 7 см.

2. Высота трапеции равна 20 см, площадь — 300 см^2 . Найдите среднюю линию трапеции.

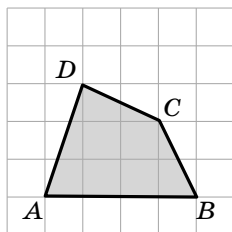


Рис. 83

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 6 и 8. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырёхугольник?

4*. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 83. Стороны клеток равны 1.

31*. Равносоставленность. Задачи на разрезание

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием равносоставленности фигур на плоскости; научить решать задачи на разрезание.

Подробнее с понятием равносоставленности и задачами на разрезание можно познакомиться в книгах: *М. А. Екимова, Г. П. Кукин. Задачи на разрезание.* — М. : МЦНМО, 2002.

Рекомендации по решению задач

Задача 1. Параллелограмм (рис. 31.2) разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник.

Решение показано на рисунке 84.

Задача 2. Треугольник (рис. 31.3) разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

Решение показано на рисунке 85.

Задача 3. Трапецию (рис. 31.4) разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.

Решение показано на рисунке 86.

Задача 4. Трапецию (рис. 31.5) разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

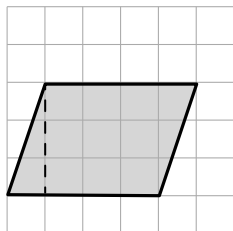


Рис. 84

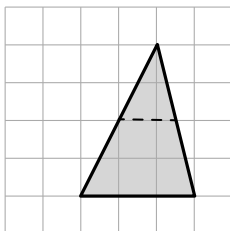


Рис. 85

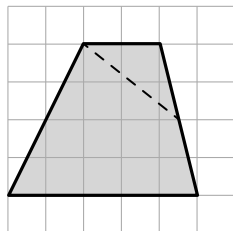


Рис. 86

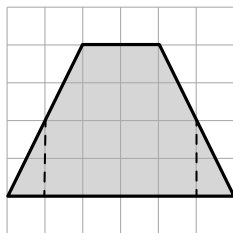


Рис. 87

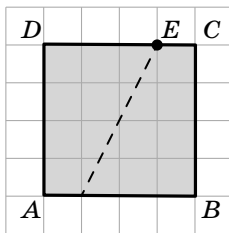


Рис. 88

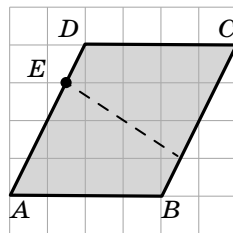


Рис. 89

Решение показано на рисунке 87.

Задача 5. Через точку E проведите прямую, делящую квадрат $ABCD$ (рис. 31.6) на две равновеликие части.

Решение показано на рисунке 88.

Задача 6. Через точку E проведите прямую, делящую параллелограмм $ABCD$ (рис. 31.7) на две равновеликие части.

Решение показано на рисунке 89.

Задача 7. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 31.8, на четыре равные части.

Решение показано на рисунке 90.

Задача 8. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 31.9, на четыре равные части.

Решение показано на рисунке 91.

Задача 9. Разрежьте правильный: а) шестиугольник; б) восьмиугольник на параллелограммы (рис. 31.10).

Решение показано на рисунке 92.

Задача 10. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 31.11, на две равные части.

Решение показано на рисунке 93.

Задача 11. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 31.12, на две равные части.

Решение показано на рисунке 94.

Задача 12. Греческий крест (рис. 31.13) разрежьте на несколько частей, из которых можно сложить квадрат.

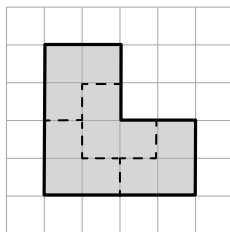


Рис. 90

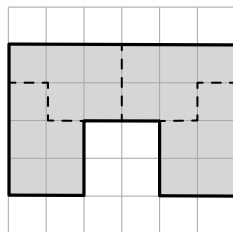
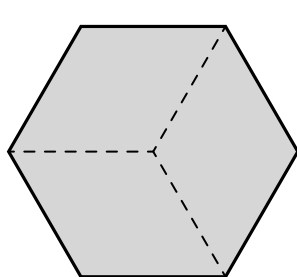
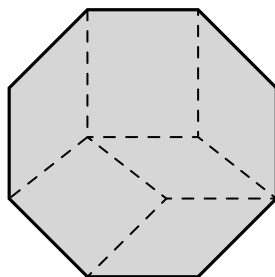


Рис. 91



а



б

Рис. 92

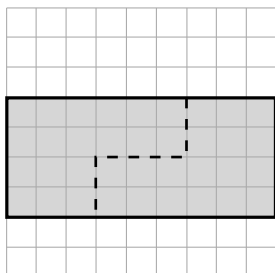


Рис. 93

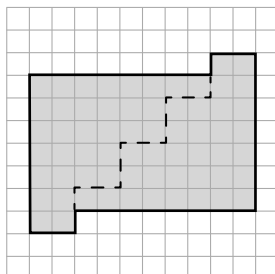


Рис. 94

Решение показано на рисунке 95.

Задача 13. Разрежьте прямоугольник, изображённый на рисунке 31.14, на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.

Решение показано на рисунке 96.

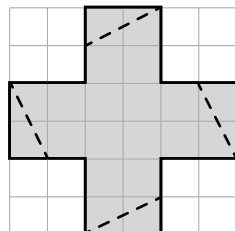


Рис. 95

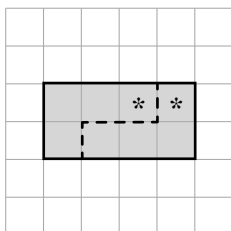


Рис. 96

Задача 14. Разрежьте прямоугольник, изображённый на рисунке 31.15, на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.

Решение показано на рисунке 97.

Задача 15. Из квадрата 8×8 вырезали два угловых квадрата 1×1 .

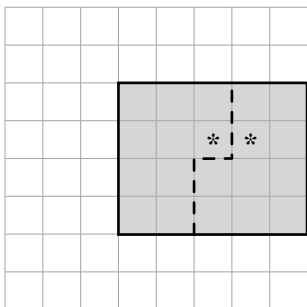


Рис. 97

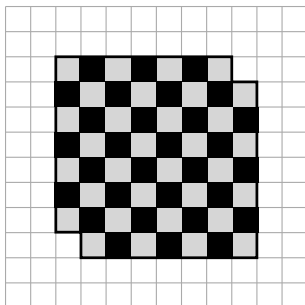


Рис. 98

(рис. 31.16). Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники, состоящие из двух квадратных клеток?

Решение. Раскрасим клетки данной фигуры как клетки шахматной доски (рис. 98).

Каждый прямоугольник, состоящий из двух клеток, содержит одну белую клетку и одну чёрную клетку. Если бы данную фигуру можно было бы разрезать на прямоугольники, то количество белых и чёрных клеток должно было быть одинаковым. Шахматная доска содержит одинаковое количество белых и чёрных клеток. Данная фигура получена из шахматной доски вырезанием двух чёрных клеток. Следовательно, она содержит на две чёрные клетки меньше, чем белых клеток. Значит, её нельзя разрезать на прямоугольники, состоящие из двух клеток.

Контрольная работа 4

Вариант 1

1. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна 4.
2. Как изменится площадь прямоугольника, если все его стороны увеличить в три раза?
3. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 4 см и 5 см.
4. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой основания равны 14 см и 6 см, а большая боковая сторона равна 10 см.
- 5*. Найдите площадь правильного шестиугольника, стороны которого равны 2 см.

В а р и а н т 2

1. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна 6.
2. Как изменится площадь прямоугольника, если все его стороны уменьшить в четыре раза?
3. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 5 см и 6 см.
4. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 24 см и 12 см, а боковая сторона равна 10 см.
- 5*. Найдите площадь правильного шестиугольника, большая диагональ которого равна 2 см.

Глава VI*. Геометрия в пространстве

32. Основные понятия стереометрии

Цель обучения — познакомить учащихся с основными понятиями и аксиомами стереометрии; научить распознавать взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Рекомендации по решению задач

Задача 11. Докажите, что через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Решение. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C . Выберем на этих прямых соответственно точки A и B (рис. 99). По аксиоме 2 через точки A , B , C проходит единственная плоскость. Назовём её α . В силу доказанной теоремы, прямые a и b лежат в этой плоскости. Докажем, что эта плоскость единственна. Всякая плоскость, проходящая через прямые a и b , будет проходить также через точки A , B , C . По аксиоме 2 она должна совпадать с плоскостью α .

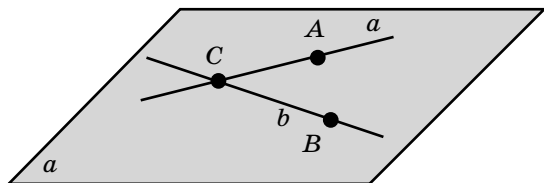


Рис. 99

Задача 13. В пространстве даны n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через различные тройки этих точек?

Решение. Заметим, что никакие три точки из данных n точек не принадлежат одной прямой. Так как в этом случае были бы четыре точки, принадлежащие одной плоскости. Так как через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость, то число плоскостей равно числу сочетаний из n элементов по 3, т. е.

равно $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

33. Фигуры в пространстве

Цель обучения — познакомить учащихся с основными пространственными фигурами; научить решать задачи комбинаторного характера на нахождение их элементов.

Рекомендации по решению задач

Задача 31. Изобразите какие-нибудь невыпуклые: а) призм; б) пирамиды.

Ответ. Примеры невыпуклых призм и пирамид показаны на рисунке 100.

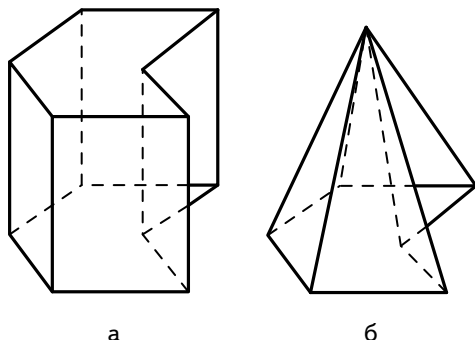


Рис. 100

34. Правильные многогранники

Цель обучения — познакомить учащихся с правильными многогранниками; научить решать задачи комбинаторного характера на нахождение их элементов.

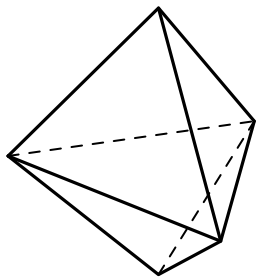


Рис. 101

Рекомендации по решению задач

Задача 7. Многогранник получен сложением двух равных правильных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней. Будет ли он правильным многогранником? Почему?

Ответ. Нет. В вершинах такого многогранника сходится разное число граней (рис. 101).

35. Развёртки многогранников

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием развёртки многогранника; научить решать задачи распознавание многогранников и развёрток; применять метод развёрток для нахождения кратчайших путей по поверхностям многогранников.

Рекомендации по решению задач

Задача 9. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра $ABCD$ (рис. 35.15), соединяющего середины рёбер AB и CD .

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра, изображённую на рисунке 102.

Кратчайшим путём из E в F является отрезок EF , длина которого равна 1.

Задача 10. Три ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 35.16) равны 5, 4, 3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого параллелепипеда, соединяющего вершины A и C_1 .

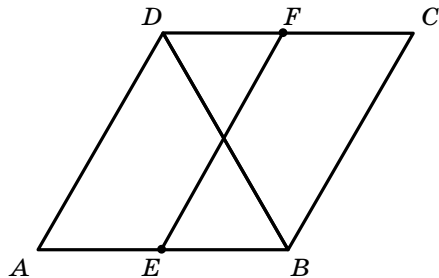


Рис. 102

по поверхности этого параллелепипеда, соединяющего вершины A и C_1 .

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного параллелепипеда, изображённую на рисунке 103. Кратчайшим путём из A в C_1 является от-

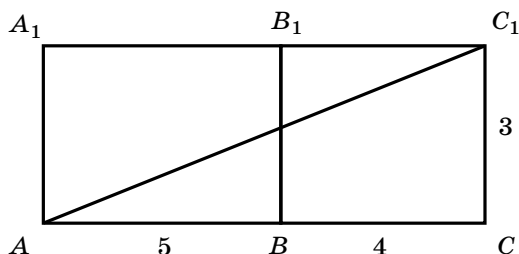


Рис. 103

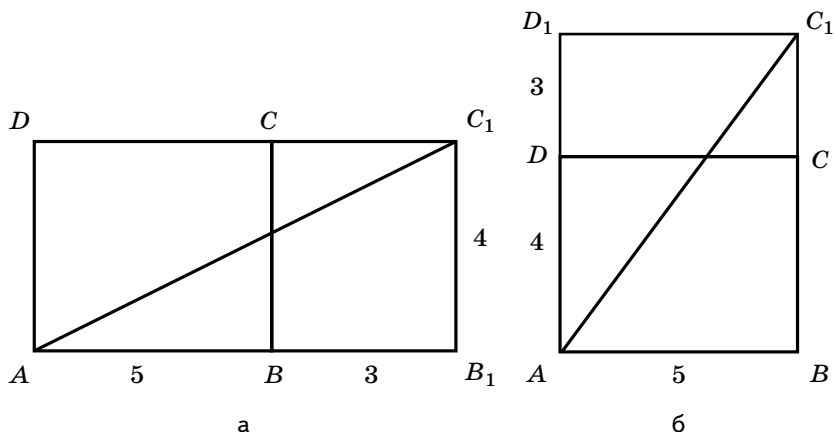


Рис. 104

резок AC_1 , длина которого равна $3\sqrt{10}$. Однако этот путь не является кратчайшим. Рассмотрим другие возможные развёртки граней данного параллелепипеда (рис. 104).

Длины соответствующих путей равны $4\sqrt{5}$ и $\sqrt{74}$. Наименьшая длина равна $\sqrt{74}$.

Задача 11. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного октаэдра, соединяющего две его противоположные вершины A и B (рис. 35.17).

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного октаэдра, изображённую на рисунке 105.

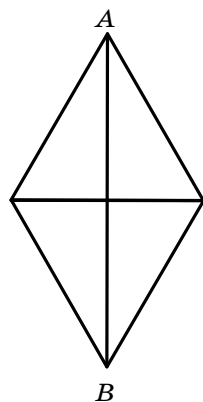


Рис. 105

Кратчайшим путём из A в B является отрезок AB , длина которого равна $\sqrt{3}$.

Самостоятельная работа 15

Вариант 1

1. Верно ли утверждение: а) всякие три точки пространства принадлежат одной плоскости; б) всякие четыре точки пространства не принадлежат одной плоскости.

2. Сколько плоскостей можно провести через три точки?

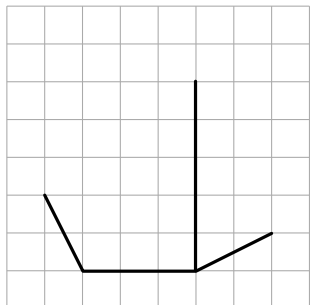


Рис. 106

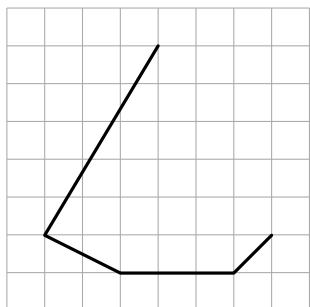


Рис. 107

3. На клетчатой бумаге изображены рёбра шестиугольной призмы (рис. 106). Изобразите всю призму.

4. Сколько граней у пятиугольной пирамиды?

5*. Изобразите развёртку куба.

Вариант 2

1. Могут ли две плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки; в) общую прямую?

2. Три прямые пересекаются в одной точке. Сколько плоскостей можно провести через различные пары из этих прямых?

3. На клетчатой бумаге изображены рёбра шестиугольной пирамиды (рис. 107). Изобразите всю пирамиду.

4. Сколько граней у пятиугольной призмы?

5*. Изобразите развёртку тетраэдра.

36. Объём фигур в пространстве

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием объёма; научить находить объёмы простейших многогранников.

Рекомендации по решению задач

Задача 12. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань единичного куба, а вершиной — центр этого куба (рис. 36.11).

Решение. Единичный куб может быть составлен из четырёх равных пирамид, основаниями которых являются грани куба, а вершинами — центр куба. Следовательно, объём каждой такой пирамиды равен одной шестой объёма куба, т. е. равен $\frac{1}{6}$.

37. Площадь поверхности многогранника

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием площади поверхности; научить находить площади поверхностей простейших многогранников.

Рекомендации по решению задач

В качестве дополнительной задачи учащимся можно предложить следующую задачу.

Задача. Площадь поверхности одного куба в четыре раза больше площади поверхности второго куба. Во сколько раз объём первого куба больше объёма второго куба?

Решение. Ребро первого куба в два раза больше ребра второго куба. Следовательно, объём первого куба в восемь раз больше объёма второго куба.

Контрольная работа 5

Вариант 1

1. Сколько рёбер у пятиугольной призмы?
2. Вершинами какого многогранника являются центры граней куба?
3. Нарисуйте развёртку правильной четырёхугольной пирамиды.
4. Во сколько раз уменьшится объём прямоугольного параллелепипеда, если все его рёбра уменьшить в 2 раза?
- 5*. Найдите площадь поверхности икосаэдра, если его ребро равно 2 см.

Вариант 2

1. Сколько граней у пятиугольной пирамиды?

2. Вершинами какого многогранника являются центры граней тетраэдра?

3. Нарисуйте развёртку правильной треугольной призмы.

4. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза?

5*. Найдите площадь поверхности октаэдра, если его ребро равно 2 см.

ОТВЕТЫ

Самостоятельные работы

1

Вариант 1

1. 30° . 30° , 150° , 150° . 2. 3 см, 3 см, 5 см, 5 см.

Вариант 2

1. 72° . 72° , 108° , 108° . 2. 6 см, 6 см, 9 см, 9 см.

2

Вариант 1

1. 80 см. 2. 40° . 40° , 140° , 140° .

Вариант 2

1. 5 см. 2. 30° . 30° , 150° , 150° .

3

Вариант 1

1. 10,5 см. 2. 4 см, 6 см, 8 см. 3. Параллелограмм.
4. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны.

Вариант 2

1. 6 см. 2. 8 см. 3. Параллелограмм, 12 см.

4

Вариант 1

1. 60° . 70° , 110° , 120° . 2. 8 см. 3. 28 см. 4. 4 см и 5 см.

Вариант 2

1. 75° . 75° , 105° , 105° . 2. 2 см. 3. 7 см. 4. 8 см и 12 см.

5

Вариант 1

3. а) $\overline{DB}$; б) $\vec{0}$. 4. а) $\overline{DK}$; б) $\overline{AG}$.

Вариант 2

2. $\overline{OP} + \overline{PH}$; $\overline{OQ} + \overline{QH}$. 3. а) $\overline{BC}$; б) $\vec{0}$. 4. а), б) Да.

6

Вариант 1

1. 35° и 70° . 2. $22^\circ 30'$. 3. 40° и 140° . 4. 20° .

Вариант 2

1. 174° . 2. Прямоугольный. 3. 42° .

7

Вариант 1

1. 7,5 см. 2. 80° , 50° , 50° . 3. Нет.

Вариант 2

1. 22 см. 2. 40° , 70° , 70° . 3. 148° и 75° .

8

Вариант 1

1. 120° , 120° , 120° . 3. $\frac{R}{2}$. 4. 4,5 см.

Вариант 2

1. 110° , 110° , 140° . 3. $\frac{a}{2}$. 4. 6 см.

9

Вариант 1

1. Требуемый треугольник изображён на рисунке 108.
 2. Правильный треугольник. 3. На 180° . 4. Требуемый треугольник изображён на рисунке 109. 5*. Правильным десятиугольником.

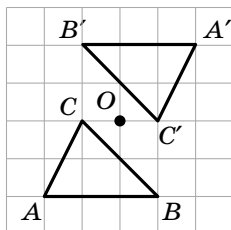


Рис. 108

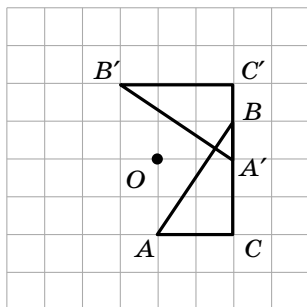


Рис. 109

Вариант 2

1. Требуемый треугольник изображён на рисунке 110.
 2. Квадрат. 3. На 90° . 4. Требуемый треугольник изображён на рисунке 111. 5*. Правильным двенадцатиугольником.

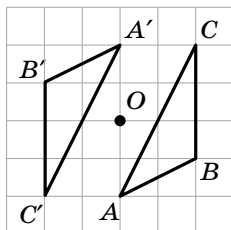


Рис. 110

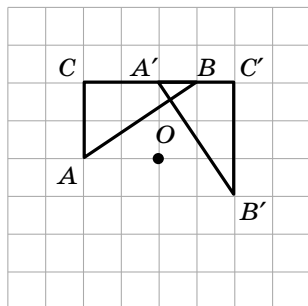


Рис. 111

10

Вариант 1

1. Бесконечно много. 2. 0, 3, 8. 3. 5.

Вариант 2

1. 4. 2. А, В, Е, Ж, З, К, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Э. 3. 6.

11

Вариант 1

1. Центральная симметрия, параллельный перенос. 2. 6.

Вариант 2

1. Поворот на угол, отличный от 180° . 2. 8.

12

Вариант 1

1. 42 см^2 . 2. $0,045 \text{ км}^2$. 3. 160. 4. 12 м.

Вариант 2

1. 6,6 м. 2. $0,005 \text{ км}^2$. 3. 564. 4. 98 м.

13

Вариант 1

1. 10,5 см. 2. 12. 3. 48. 4. 10.

Вариант 2

1. 4,5 см. 2. Параллелограмм, 18 см^2 . 3. 30. 4. 12.

14

Вариант 1

1. 308 см^2 . 2. 2 см. 3. 40. 4. 10,5.

Вариант 2

1. 49 см^2 . 2. 15 см. 3. 24. 4. 7,5.

15

Вариант 1

1. а) Да; б) нет. 2. Одну, если точки не принадлежат одной прямой, бесконечно много в противном случае. 4. 6.

Вариант 2

1. а, б) Нет; в) да. 2. Три, если прямые не лежат в одной плоскости, одну в противном случае. 4. 7.

Контрольные работы

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. 80° , 80° , 100° , 100° . 2. 2 см, 2 см, 5 см, 5 см. 3. 10 см.
4. 6 см и 8 см. 5. 2:1.

Вариант 2

1. 80° , 80° , 100° , 100° . 2. 6 см, 6 см, 10 см, 10 см. 3. 6 см.
4. 3 см и 4 см. 5. 1:2.

Контрольная работа 2

Вариант 1

3. а) $\overline{AO}$, $\overline{OC}$; б) $\overline{OD}$, $\overline{BO}$; в) $\overline{CD}$, $\overline{BA}$. 4. $\overline{AD}$, 2.

Вариант 2

2. а) $\overline{BA}$, $\overline{CD}$; б) $\overline{DO}$, $\overline{OB}$; в) $\overline{DO}$, $\overline{OB}$. 4. $\overline{CF}$, 2.
5. $\frac{1}{2}(\overline{XY} + \overline{XZ})$.

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. 60° , 120° . 2. 105° , 125° , 130° . 3. 100° , 120° . 4. 3 см, 9 см, 15 см, 9 см. 5*. Точка пересечения продолжения высот показана на рисунке 112.

Вариант 2

1. 100° , 100° , 160° . 2. 108° , 114° , 138° . 3. 60° , 80° , 120° , 100° . 4. 14 см, 8 см, 10 см, 16 см. 5. Точка пересечения продолжения высот показана на рисунке 113.

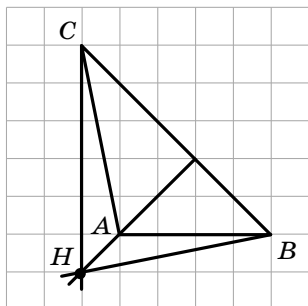


Рис. 112

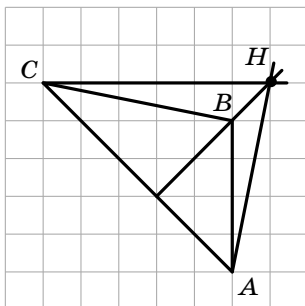


Рис. 113

Контрольная работа 4

Вариант 1

1. 8. 2. Увеличится в 9 раз. 3. 10 см^2 . 4. 60 см^2 . 5. $6\sqrt{3} \text{ см}$.

Вариант 2

1. $2\sqrt{3}$. 2. Уменьшится в 16 раз. 3. 15 см^2 . 4. 144 см^2 .
5. $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см}$.

Контрольная работа 5

Вариант 1

1. 15. 2. Октаэдра. 4. В 8 раз. 5. $20\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. 6. 2. Тетраэдра. 4. В 27 раз. 5. $8\sqrt{3}$.

Содержание

Введение	3
Примерное тематическое планирование	5
Методические рекомендации	8
Глава I. Четырёхугольники	8
Контрольная работа 1	17
Глава II. Векторы и их свойства	22
Контрольная работа 2	22
Глава III. Многоугольники и окружность	28
Контрольная работа 3	32
Глава IV. Движение	42
Глава V. Площадь	43
Контрольная работа 4	56
Глава VI*. Геометрия в пространстве	68
Контрольная работа 5	58
Ответы	75