

**В. А. Смирнов
И. М. Смирнова**

ГЕОМЕТРИЯ

Базовый и углубленный уровни

11

КЛАСС

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЯ**



**МОСКВА
БИНОМ. Лаборатория знаний
2020**

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
С50

С50 Смирнов, В. А. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 11 класс. Методическое пособие для учителя / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. — Москва. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 94, [2] с. — ISBN 978-5-9963-5196-1.

Данное методическое пособие входит в УМК «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 10—11 классы» В. А. Смирнова, И. М. Смирновой. В нем представлено примерное тематическое планирование учебного материала по геометрии в 11-м классе, самостоятельные и контрольные работы, даны методические рекомендации по решению задач повышенной трудности.

**УДК 372.8:514
ББК 74.262.21**

ISBN 978-5-9963-5196-1

© ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020
© Оформление. ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»,
2020
Все права защищены

Введение

Данное методическое руководство является составной частью учебно-методического комплекта «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 10—11 классы».

Пособие предназначено учителям, работающим в 11-м классе по учебнику «Геометрия» авторов В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. Оно сориентирует педагога в его работе, позволит качественно спланировать процесс обучения геометрии старшеклассников.

В пособие включено:

- примерное тематическое планирование;
- методические рекомендации по решению задач повышенной трудности;
- самостоятельные работы;
- контрольные работы.

В конце пособия даны ответы к предложенным самостоятельным и контрольным работам.

Геометрия, как ни один другой предмет, нужна каждому человеку, поскольку именно она развивает необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения различных фигур, что позволяет человеку правильно ориентироваться в окружающем мире. С другой стороны, геометрия дает метод научного познания, способствует развитию мышления, формирует навыки дедуктивных рассуждений. Помимо этого, изучение геометрии вырабатывает необходимые практические навыки в изображении, моделировании и конструировании плоских и пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, величин углов, площадей, объемов и др.).

Кроме сказанного, геометрия обладает интересным содержанием, имеет богатую историю, яркие приложения, она занимательна, изучает красивые объекты. Все это постепенно будет раскрываться и представляться учащимся по мере изучения ее курса.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) в направлении личностного развития:

— формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

— развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

— формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

— воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

— формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

— развитие интереса к математике;

— развитие математических способностей;

2) в метапредметном направлении:

— развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

— формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) в предметном направлении:

— овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

— создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Одна из особенностей предлагаемого учебно-методического комплекта для 10—11-го классов состоит в том, что с самого начала обучения стереометрии вводятся многогранники (параллелепипед, призма, пирамида, правильные и полуправильные многогранники). Это позволяет, с одной стороны, проиллюстрировать на многогранниках важные теоретические положения стереометрии, например, свой-

ства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, а с другой — постепенно формировать практические умения учащихся по нахождению геометрических величин, расстояний и углов.

Рассматриваются способы изготовления моделей многогранников из разверток и геометрического конструктора. Моделирование многогранников способствует развитию у школьников: пространственных представлений, конструкторских, рационализаторских способностей, формированию понятия математической модели, раскрытию прикладных возможностей геометрии, эстетическому воспитанию.

Модели, самостоятельно изготовленные учащимися, являются средством конкретной наглядности, использование которой является начальной стадией для развития способности к восприятию абстрактной наглядности — чертежа — и формирования умений работать с ним. Модели могут быть использованы учителем для иллюстрации новых понятий, доказательств теорем, решения задач. Красиво сделанные модели являются украшением любого кабинета математики, рабочего уголка школьника и т. п.

Развитие пространственных представлений учащихся предполагает формирование умений правильно изображать основные геометрические фигуры и исследовать их взаимное расположение. Именно от этого во многом зависит успешность обучения геометрии. Поэтому большое внимание в курсе уделяется вопросам изображения пространственных фигур.

Помимо изображения пространственных фигур в параллельной проекции, рассматриваются методы изображения пространственных фигур в ортогональной проекции, приводятся примеры таких изображений (сферы, цилиндра, конуса и др.).

Кроме многогранников, рассматриваются фигуры вращения. Исследуется взаимное расположение многогранников и тел вращения, в том числе изучаются вписанные и описанные многогранники, вписанные и описанные цилиндры и конусы.

Формулы объемов фигур выводятся с помощью принципа Кавальери, что позволяет не только получить общие формулы для нахождения объемов призмы и цилиндра, пи-

рамыды и конуса, шара и его частей, но и сформировать необходимые представления учащихся об объеме, заложить основы использования интеграла для вычисления объемов.

Расширены аналитические методы геометрии и их приложения. Помимо уравнений сферы и плоскости, учащиеся знакомятся с уравнениями прямой, аналитическим заданием многогранников и фигур вращения, уравнениями кривых и поверхностей в пространстве.

Предлагаются исторические сведения о возникновении и развитии геометрии. Они направлены на формирование мировоззрения учащихся, так как сведения о научных поисках, открытиях помогают увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным. Основной целью введения исторического материала является проникновение в мировоззренческий смысл науки, в процесс формирования ее основных идей и методов. История математики демонстрирует учащимся, каким может быть трудным и длительным путь ученого к истине, которая сегодня формулируется, например, в виде короткого утверждения.

Включение разнообразного геометрического материала, учитывающего интересы каждого учащегося, способствует повышению мотивации, интереса и желания учащихся заниматься геометрией.

Примерное тематическое планирование

11 класс

(Вариант 1 (базовый уровень): 1,5 часа в неделю,
всего 51 час за год;

вариант 2 (углубленный уровень): 2 часа в неделю,
всего 68 часов за год)

Пункт	Тема	Кол-во часов	
		Вар. 1	Вар. 2
	Глава I. Круглые тела	10	10
1	Сфера и шар	2	2
2	Взаимное расположение сферы и плоскости, сферы и прямой	2	2
3	Взаимное расположение двух сфер	2	2
4	Фигуры вращения. Цилиндр	2	2
5	Фигуры вращения. Конус	2	2
	Глава II. Вписанные и описанные фигуры в пространстве	1	11
6	Многогранники, вписанные в сферу. Призма		2
7*	Многогранники, вписанные в сферу. Пирамида		2
8	Многогранники, описанные около сферы		2
	<i>Контрольная работа 1</i>	1	1
9	Вписанные и описанные цилиндры		2

Пункт	Тема	Кол-во часов	
		Вар. 1	Вар. 2
10	Вписанные и описанные конусы		2
	Глава III. Объем. Площадь поверхности	13	13
11	Объем фигур в пространстве	2	2
12	Принцип Кавальери. Объем призмы и цилиндра	3	3
13	Объем пирамиды и конуса	3	3
14	Объем шара и его частей	2	2
15	Площадь поверхности	2	2
	<i>Контрольная работа 2</i>	1	1
	Глава IV. Векторы	6	6
16	Векторы в пространстве	2	2
17	Операции над векторами	2	2
18	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	2	2
	Глава V. Координаты	11	18
19	Прямоугольная система координат в пространстве	2	2
20	Расстояние между точками в пространстве. Уравнение сферы	2	2
21	Координаты вектора	2	2
22	Уравнение плоскости в пространстве	2	2

Пункт	Тема	Кол-во часов	
		Вар. 1	Вар. 2
23*	Уравнения прямой в пространстве	2	2
24*	Аналитическое задание пространственных фигур		3
25*	Аналитические методы нахождения расстояний и углов в пространстве		4
	<i>Контрольная работа 3</i>	1	1
	Обобщающее повторение	10	10
26	Углы	1	1
27	Расстояния	1	1
28	Сечения	2	2
29	Вписанные и описанные фигуры	2	2
30	Объем многогранника	2	2
31	Фигуры вращения. Площадь поверхности	1	1
32	Фигуры вращения. Объем	1	1

Методические рекомендации

Глава I

Круглые тела

1. Сфера и шар

Цель обучения — познакомить учащихся с понятиями сферы, шара; научить изображать сферу, решать задачи на нахождение центров и радиусов сфер.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Окружность» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 18. Для данных изображений сферы и экватора (рис. 1.9) изобразите полюсы.

Замечание. Нумерация задач и рисунков взята из учебника В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 11 класс / М. : БИНОМ. Лаборатория знаний.

Решение. Полюсы изображены на рисунке 1.

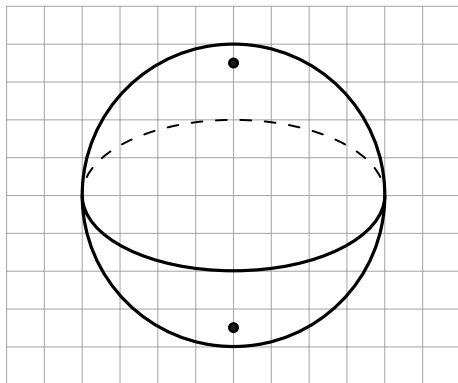


Рис. 1

Задача 19. Для данных изображений сферы и полюсов (рис. 1.10) изобразите экватор.

Решение. Экватор изображен на рисунке 2.

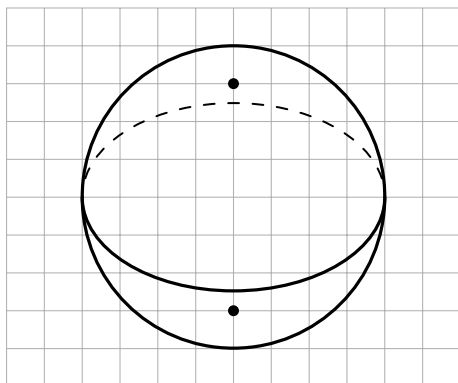


Рис. 2

2. Взаимное расположение сферы и плоскости, сферы и прямой

Цель обучения — установить случаи взаимного расположения сферы и плоскости, сферы и прямой; научить распознавать эти случаи.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Взаимное расположение окружности и прямой» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 12*¹. Укажите геометрическое место центров сфер данного радиуса, которые касаются данной плоскости.

Решение. Искомым геометрическим местом являются две параллельные плоскости, находящиеся от данной плоскости на расстоянии, равном радиусу сферы.

¹ Здесь и далее знаком * отмечены задачи повышенного уровня сложности.

Задача 13*. Укажите геометрическое место центров сфер, которые касаются двух параллельных плоскостей.

Решение. Искомым геометрическим местом является плоскость, параллельная данным и расстояние от которой до двух данных плоскостей равно половине расстояния между этими плоскостями.

Задача 14*. Укажите геометрическое место касательных прямых к сфере, проходящих через данную точку на этой сфере.

Решение. Искомым геометрическим местом является плоскость, касающаяся сферы в данной точке.

3. Взаимное расположение двух сфер

Цель обучения — установить случаи взаимного расположения двух сфер; научиться распознавать эти случаи.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Взаимное расположение двух окружностей» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 8*. Радиусы двух сфер равны 3 и 4. Расстояние между их центрами равно 5. Найдите радиус окружности, по которой эти сферы пересекаются.

Решение. Пусть O_1 , O_2 — центры данных сфер, A — точка на окружности их пересечения (рис. 3). Треуголь-

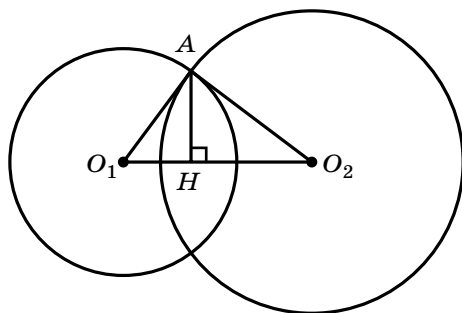


Рис. 3

ник O_1O_2A прямоугольный, $O_1A = 3$, $O_2A = 4$, $O_1O_2 = 5$. Искомый радиус окружности равен высоте AH этого треугольника. Он равен 2,4.

Задача 10*. Найдите геометрическое место центров сфер радиусом 1, касающихся сферы радиусом: а) 1; б) 2.

Решение. а) Сфера радиусом 2; б) две сферы радиусами 1 и 3.

Задача 11*. Две сферы одинакового радиуса не имеют общих точек. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся этих сфер: а) внешним образом; б) внутренним образом.

Решение. а), б) Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего центры этих сфер, и перпендикулярная этому отрезку.

Задача 12*. Три сферы одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

Решение. Расстояния между центрами этих сфер равны их удвоенному радиусу. Следовательно, стороны треугольника с вершинами в центрах этих сфер равны. Значит, этот треугольник правильный.

Задача 14*. Четыре сферы одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Вершинами какого многогранника являются центры этих сфер?

Решение. Центры любых трех из четырех данных сфер являются вершинами правильного треугольника. Следовательно, центры всех четырех сфер являются вершинами правильного тетраэдра.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. Наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки, расположенной вне сферы, до точек сферы равны 7 см и 8 см. Найдите радиус сферы.

2. Как расположены две сферы, если их радиусы равны 2 см и 3 см, а расстояние между их центрами равно 1 см?

3. Радиусы двух сфер равны 5 см. Расстояние между их центрами равно 8 см. Найдите радиус окружности, по которой эти сферы пересекаются.

4. Шар, радиус которого равен 10 см, пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сечения.

5*. Сечения шара радиусом 5 см двумя параллельными плоскостями имеют радиусы 3 см и 4 см. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по разные стороны от центра.

Вариант 2

1. Наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки, расположенной внутри сферы, до точек сферы равны 7 см и 8 см. Найдите радиус сферы.

2. Как расположены две сферы, если их радиусы равны 2 см и 3 см, а расстояние между их центрами равно 5 см?

3. Радиусы двух сфер равны 10 см. Расстояние между их центрами равно 12 см. Найдите радиус окружности, по которой эти сферы пересекаются.

4. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Как относится площадь получившегося сечения к площади большого круга данного шара?

5*. Сечения шара радиусом 10 см двумя параллельными плоскостями имеют радиусы 6 см и 8 см. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по одну сторону от центра.

4. Фигуры вращения.

Цилиндр

Цель обучения — познакомить учащихся с понятием фигуры вращения; привести примеры фигур вращения; определить цилиндр как фигуру вращения; научить изображать цилиндр и находить его элементы; устанавливать вид фигур вращения плоских и пространственных фигур.

Рекомендации по решению задач

Задача 13*. Какая фигура получается вращением многоугольника $ABCDEF$, изображенного на рисунке 4.10, соседние стороны которого образуют прямые углы, вокруг прямой, содержащей сторону: а) AF ; б) BC ?

Решение. Искомые фигуры изображены на рисунках соответственно 4, а, б.

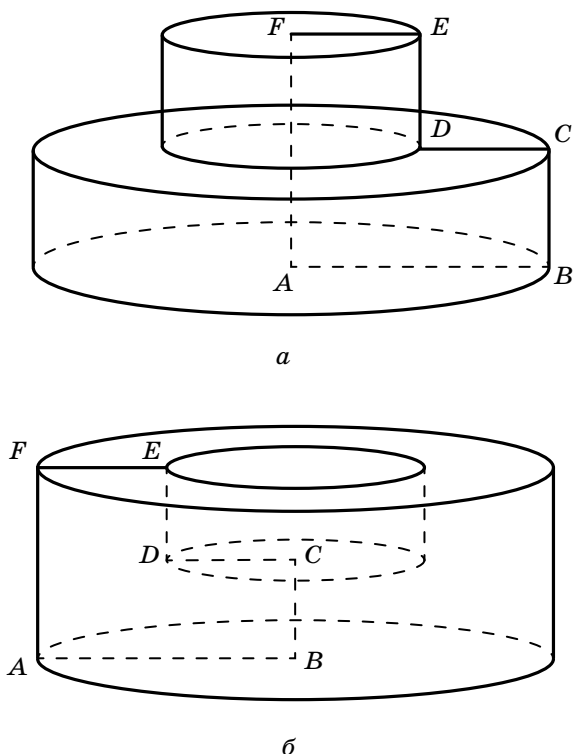


Рис. 4

Задача 14*. Какая фигура получается вращением многоугольника $ABCDEFGH$, изображенного на рисунке 4.11, соседние стороны которого образуют прямые углы, вокруг прямой AB ?

Решение. Искомая фигура изображена на рисунке 5.

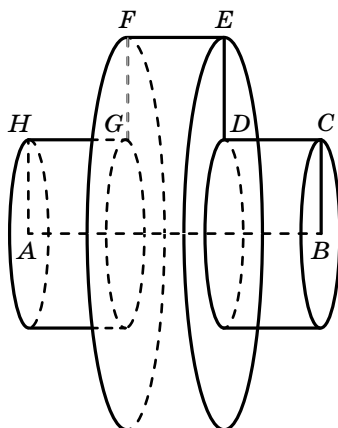


Рис. 5

Задача 21*. Какая фигура получится при вращении многогранника, изображенного на рисунке 4.15, все двугранные углы которого прямые, вокруг прямой AA_2 ?

Решение. Искомая фигура изображена на рисунке 6.

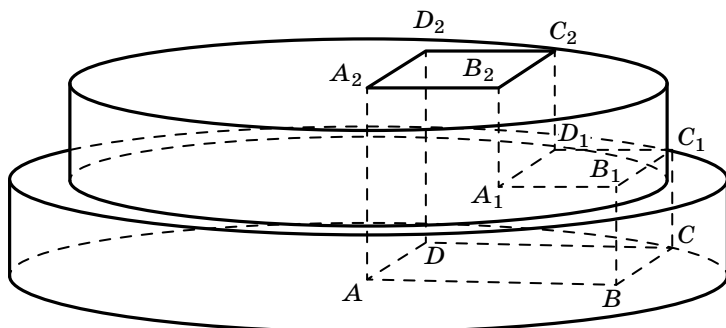


Рис. 6

Задача 23*. Радиус основания цилиндра равен 2, образующая равна 3. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра из одной вершины A осевого сечения в противоположащую вершину C (рис. 4.16).

Решение. Рассмотрим развертку боковой поверхности цилиндра (рис. 7). Кратчайшим путем из вершины A в вершину C является отрезок AC . Его длина равна $\sqrt{4\pi^2 + 9}$.

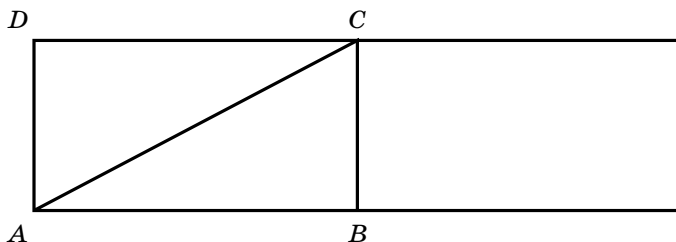


Рис. 7

5. Фигуры вращения. Конус

Цель обучения — определить конус и усеченный конус как фигуры вращения; научить изображать конус, усеченный конус и находить их элементы; устанавливать вид фигур вращения плоских и пространственных фигур.

Рекомендации по решению задач

Задача 20*. Какая фигура получается при вращении тупоугольного равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей его боковую сторону (рис. 5.8)?

Решение. Искомая фигура является конусом, из которого вырезан другой конус с тем же основанием (рис. 8).

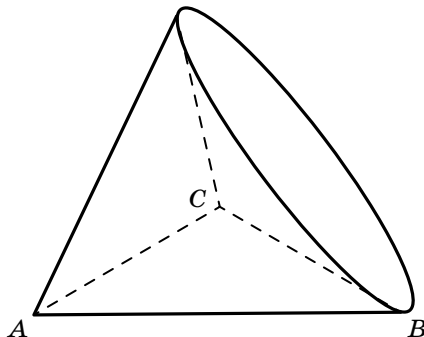


Рис. 8

Задача 21*. Какая фигура получается при вращении квадрата вокруг прямой, содержащей его диагональ (рис. 5.9)?

Решение. Искомая фигура состоит из двух конусов с общим основанием (рис. 9).

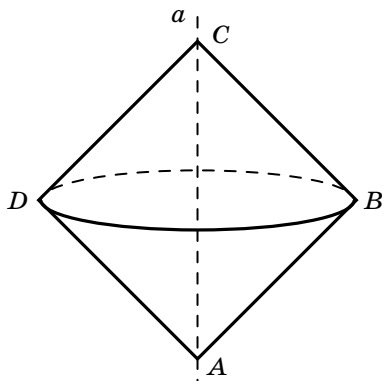


Рис. 9

Задача 26*. Какая фигура получится при вращении октаэдра вокруг прямой, соединяющей его противоположные вершины (рис. 5.12)?

Решение. Искомая фигура состоит из двух конусов с общим основанием (рис. 10).

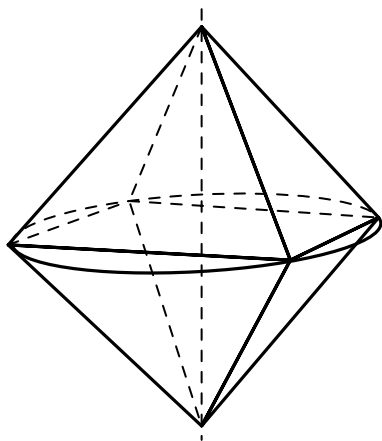


Рис. 10

Задача 27*. Конус получен вращением правильного треугольника ABC , стороны которого равны 1, вокруг прямой, содержащей его высоту CO (рис. 5.13). Точка D — середина стороны BC . Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого конуса из точки A в точку D .

Решение. Разверткой боковой поверхности данного конуса является полукруг радиусом 1 (рис. 11). Кратчайшим путем из точки A в точку D является отрезок AD . Его длина равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

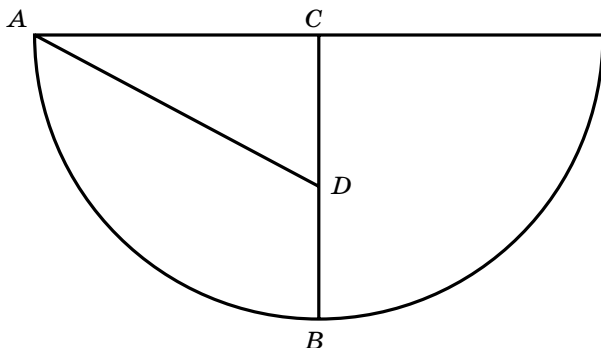


Рис. 11

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. Радиус основания и высота цилиндра равны 10 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси и находящейся от нее на расстоянии 6 см. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью.

2. Найдите радиус основания цилиндра, получающегося вращением правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, проходящей через центры оснований этой призмы.

3. Радиус основания конуса равен 4, образующая равна 5. Найдите высоту конуса.

4. Найдите радиус основания конуса, получающегося вращением правильной четырехугольной пирамиды, сторо-

ны основания которой равны 1, вокруг прямой, содержащей ее высоту.

5*. Конус получен вращением равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC = 2$, $AB = 1$) вокруг прямой, содержащей его высоту CO . Найдите площадь развертки боковой поверхности этого конуса.

Вариант 2

1. Осевым сечением цилиндра является квадрат со стороной 10 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно плоскости этого квадрата и находящейся от нее на расстоянии 3 см. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью.

2. Найдите радиус основания цилиндра, получающегося вращением единичного куба вокруг прямой, проходящей через центры его противоположных граней.

3. Радиус основания конуса равен 6, образующая равна 10. Найдите высоту конуса.

4. Найдите радиус основания конуса, получающегося вращением правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, вокруг прямой, содержащей ее высоту.

5*. Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$) вокруг прямой, содержащей его катет BC . Найдите площадь развертки боковой поверхности этого конуса.

Глава II

Вписанные и описанные фигуры в пространстве

6. Многогранники, вписанные в сферу.

Призма

Цель обучения — определить понятие многогранника, вписанного в сферу; выяснить, в каком случае около параллелепипеда и призмы можно описать сферу; научить находить элементы призмы, вписанной в сферу, и радиус сферы, описанной около призмы.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Многоугольники, вписанные в окружность» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 14*. Докажите, что если около многогранника можно описать сферу, то около каждой его грани можно описать окружность.

Решение. Если около многогранника описана сфера, то плоскость каждой его грани пересекает эту сферу по окружности, описанной около этой грани. Следовательно, около каждой грани такого многогранника можно описать окружность.

Задача 15*. Докажите, что около наклонного параллелепипеда нельзя описать сферу.

Решение. У наклонного параллелепипеда некоторые грани являются параллелограммами, отличными от прямоугольников. Так как около параллелограмма, отличного от прямоугольника, нельзя описать окружность, то согласно предыдущей задаче около наклонного параллелепипеда нельзя описать сферу.

Задача 16*. Докажите, что около наклонной призмы нельзя описать сферу.

Решение. У наклонной призмы некоторые боковые грани являются параллелограммами, отличными от прямо-

угольников. Так как около параллелограмма, отличного от прямоугольника, нельзя описать окружность, то согласно предыдущей задаче около наклонной призмы нельзя описать сферу.

7*. Многогранники, вписанные в сферу. Пирамида

Цель обучения — определить понятие пирамиды, вписанной в сферу; выяснить, в каком случае около пирамиды можно описать сферу; научить находить элементы пирамиды, вписанной в сферу, и радиус сферы, описанной около пирамиды.

Рекомендации по решению задач

Задача 14*. Докажите, что около октаэдра можно описать сферу. Найдите ее радиус, если ребра октаэдра равны 1 (рис. 7.7).

Решение. Центром сферы, описанной около октаэдра, является середина его диагонали. Радиус этой сферы равен половине диагонали, т. е. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 15*. Найдите радиус сферы, описанной около кубооктаэдра, ребра которого равны 1 (рис. 7.8).

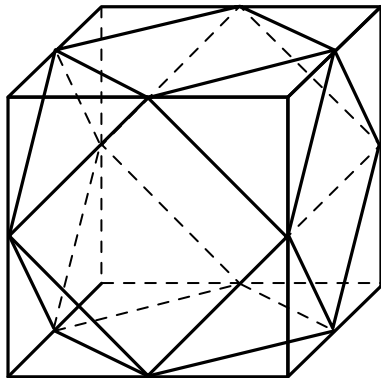


Рис. 12

Решение. Ребра куба (рис. 12), из которого получается кубооктаэдр, равны $\sqrt{2}$. Центром сферы, описанной около кубооктаэдра, является центр этого куба. Радиус этой сферы равен расстоянию от центра куба до его ребра. Он равен 1.

Задача 16*. Приведите пример многогранника, около каждой грани которого можно описать окружность, но около самого многогранника нельзя описать сферу.

Решение. Примером такого многогранника является многогранник, составленный из двух правильных четырехугольных пирамид с общим основанием, у одной из которых все ребра равны 1, а у другой боковые ребра меньше 1 (рис. 13).

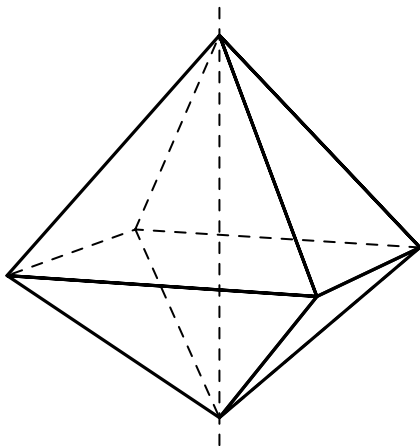


Рис. 13

8. Многогранники, описанные около сферы

Цель обучения — определить понятие многогранника, описанного около сферы; выяснить, в каком случае в призму и пирамиду можно вписать сферу; научить находить элементы многогранников, описанных около сферы, и радиус сферы, вписанной в многогранник.

Рекомендации по решению задач

Задача 16*. Найдите радиус сферы, вписанной в октаэдр, ребро которого равно 1 (рис. 8.8).

Решение. Центром сферы, вписанной в октаэдр $SABCD S'$, является точка O пересечения его диагоналей (рис. 14). Радиус этой сферы равен расстоянию от точки O до плоскости, например, грани SBC октаэдра. Он равен высоте OH прямоугольного треугольника SOE , где E — середина ребра BC . Эта высота равна $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

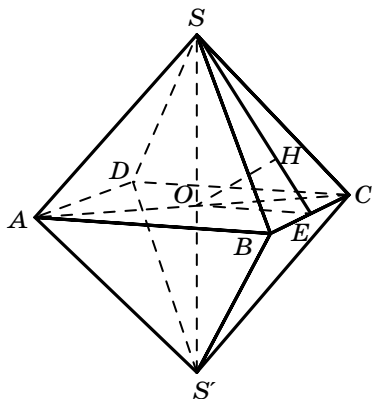


Рис. 14

Задача 17*. Можно ли вписать сферу в кубookтаэдр (рис. 8.9)?

Решение. Нет. Кубookтаэдр (рис. 12) можно представить составленным из правильных треугольных и четырехугольных пирамид с общей вершиной в центре описанной сферы, основаниями которых являются грани кубookтаэдра. Так как боковые ребра этих пирамид равны, то высоты треугольных пирамид будут больше высот четырехугольных пирамид. Следовательно, расстояния между противоположными треугольными гранями будут больше расстояний между противоположными квадратными гранями. Если бы в кубookтаэдр можно было вписать сферу, то эти расстояния должны были бы быть равны диаметру этой сферы.

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Шар радиусом 2 пересечен плоскостью. Площадь сечения равна половине площади большого круга. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2. Стороны основания правильной треугольной призмы равны 1. Цилиндр получен вращением этой призмы вокруг прямой, содержащей ее боковое ребро. Найдите радиус основания этого цилиндра.

3. Найдите радиус сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1, 2, 3.

4. Найдите радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 8.

5*. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 4, радиус вписанной в эту пирамиду сферы равен 1. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

1. Шар радиусом 3 пересечен плоскостью. Площадь сечения равна одной третьей площади большого круга. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2. Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 1. Конус получен вращением этой пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту. Найдите радиус основания этого конуса.

3. Найдите радиус сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 2, 3, 4.

4. Стороны основания правильной шестиугольной призмы равны 4, радиус описанной около этой призмы сферы равен 5. Найдите высоту призмы.

5*. Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 6, радиус вписанной в эту пирамиду сферы равен 1. Найдите высоту пирамиды.

9. Вписанные и описанные цилиндры

Цель обучения — определить понятия вписанного и описанного цилиндров; выяснить, в каком случае около цилиндра можно описать сферу и в каком случае в цилиндр можно вписать сферу; научить находить соответствующие элементы цилиндров и сфер.

Рекомендации по решению задач

Задача 17*. В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите радиус окружности основания цилиндра, вписанного в эту призму.

Решение. Радиус окружности основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC (рис. 15), катеты AC и BC равны соответственно 8 и 6. Обозначим r искомый радиус, A_1, B_1, C_1 точки касания вписанной окружности соответствующих сторон треугольника ABC .

Тогда $A_1C = B_1C = r$, $AC_1 = AB_1 = 8 - r$, $BC_1 = BA_1 = 6 - r$, $AB = AC_1 + BC_1 = 14 - 2r$. Учитывая, что $AB = 10$, получаем $r = 2$.

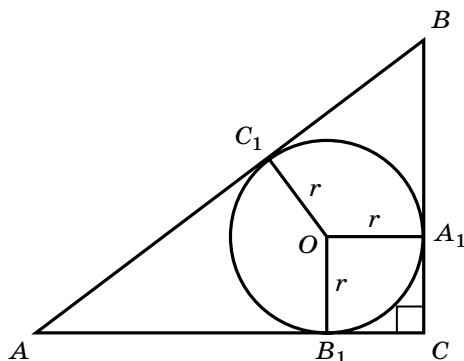


Рис. 15

Задача 18*. На рисунке 9.11 изображена сфера. Нарисуйте цилиндр, описанный около этой сферы.

Решение. Искомый цилиндр изображен на рисунке 16.

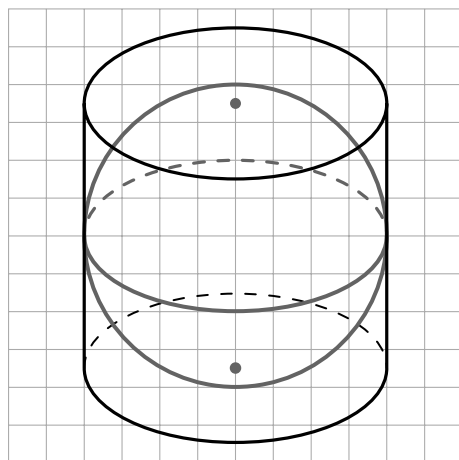


Рис. 16

Задача 19*. На рисунке 9.12 изображен цилиндр. Нарисуйте правильную треугольную призму, описанную около этого цилиндра.

Решение. Искомая правильная треугольная призма изображена на рисунке 17. Вершина C_1 выбрана на прямой D_1O_1 так, чтобы $C_1O_1 : O_1D_1 = 2 : 1$.

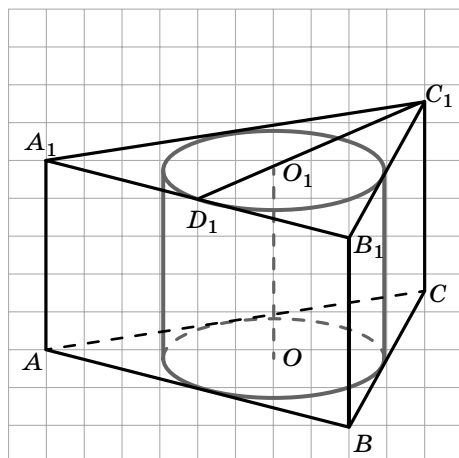


Рис. 17

10. Вписанные и описанные конусы

Цель обучения — определить понятия вписанного и описанного конусов; выяснить, в каком случае около конуса можно описать сферу и в каком случае в конус можно вписать сферу; научить находить соответствующие элементы конусов и сфер.

Рекомендации по решению задач

Задача 19*. На рисунке 10.13 изображена сфера. Нарисуйте конус, описанный около этой сферы.

Решение. Искомый конус изображен на рисунке 18.

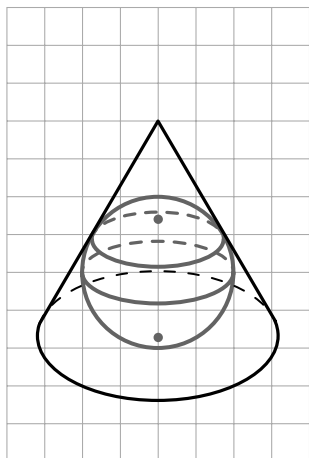


Рис. 18

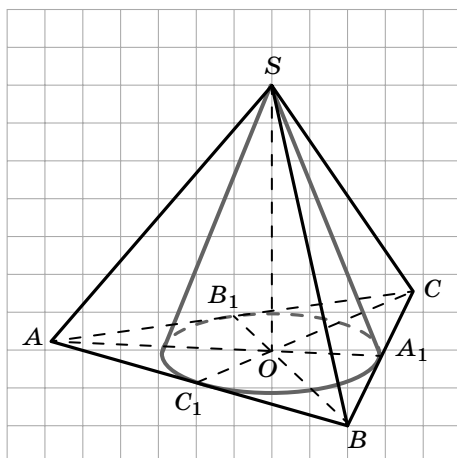


Рис. 19

Задача 20*. На рисунке 10.14 изображен конус. Нарисуйте правильную треугольную призму, описанную около этого конуса.

Решение. Искомая призма изображена на рисунке 19. Вершина C выбрана на прямой C_1O так, чтобы $CO : OC_1 = 2 : 1$.

Глава III

Объем. Площадь поверхности

11. Объем фигур в пространстве

Цель обучения — определить понятие объема фигуры в пространстве; рассмотреть свойства объема; научить находить объемы прямоугольного параллелепипеда и многогранников, составленных из прямоугольных параллелепипедов.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Площади».

Рекомендации по решению задач

Задача 15*. Площади трех граней параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. Пусть ребра параллелепипеда равны x, y, z . Тогда $xy = 1, xz = 2, yz = 3$. Решая эти уравнения, находим $x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = \frac{\sqrt{6}}{2}, z = \sqrt{6}$. Следовательно, объем параллелепипеда равен $\sqrt{6}$.

Задача 16*. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. Ребра параллелепипеда равны 2, 2 и 1. Его объем равен 4.

Задача 17*. Параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его объем.

Решение. Ребра параллелепипеда равны 2. Его объем равен 8.

Задача 18*. Какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?

Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда, a, b, c . Воспользуемся тем,

что среднее геометрическое трех неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, т. е.

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3},$$

причем принимает наибольшее значение в случае равенства этих чисел. Из этого следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед — куб с ребром $\frac{1}{3}$.

Задача 19*. Докажите, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда, делит его на две равновеликие части.

Решение. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии. Плоскость, проходящая через эту точку, делит параллелепипед на две центрально-симметричные части. Значит, объемы этих частей равны.

12. Принцип Кавальери.

Объем призмы и цилиндра

Цель обучения — представить метод нахождения объемов пространственных фигур, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери; определить понятие обобщенного цилиндра, частными случаями которого являются цилиндр и призма; вывести формулу объема обобщенного цилиндра; научить находить объемы обобщенных цилиндров.

Рекомендации по решению задач

Задача 26*. Какой наибольший объем может иметь цилиндр, вписанный в единичную сферу?

Решение. Обозначим x половину высоты цилиндра. Тогда радиус основания цилиндра будет равен $\sqrt{1 - x^2}$. Объем цилиндра равен $\pi(1 - x^2)2x$. Для нахождения наибольшего значения функции $f(x) = \pi(1 - x^2)2x$ на отрезке $[0, 1]$ воспользуемся производной. Производная $f'(x) = \pi(2 - 6x^2)$

обращается в ноль в точке $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, в которой функция принимает наибольшее значение, равное $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$.

Задача 27*. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, делит его на две равновеликие части.

Решение. Середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, является его центром симметрии. Плоскость, проходящая через эту точку, делит цилиндр на две центрально-симметричные части. Значит, объемы этих частей равны.

Задача 28*. Пусть плоскость перпендикулярна образующим обобщенного цилиндра и пересекает его боковую поверхность (рис. 12.12). Докажите, что объем V обобщенного цилиндра равен произведению площади S сечения обобщенного цилиндра этой плоскостью и образующей b .

Решение. Разобьем обобщенный цилиндр на две части плоскостью сечения и составим из них обобщенный цилиндр, совместив основания F и F' . Площадь основания этого обобщенного цилиндра будет равна S , а высота равна b . Следовательно, его объем будет равен произведению S и b .

13. Объем пирамиды и конуса

Цель обучения — определить понятие обобщенного конуса, частными случаями которого являются конус и пирамида; вывести формулу объема обобщенного конуса; научиться находить объемы обобщенных конусов.

Рекомендации по решению задач

Задача 27*. Правильный тетраэдр $ABCD$, объем которого равен 1, повернут вокруг прямой, проходящей через середины ребер AB и CD , на угол 90° . Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.

Решение. Общей частью исходного тетраэдра и повернутого является октаэдр (рис. 20). Он получается из тетраэдра отсечением четырех тетраэдров, ребра которых в два раза меньше ребер исходного тетраэдра. Объем каждого такого отсеченного тетраэдра равен одной восьмой объема исходного тетраэдра. Следовательно, объем октаэдра равен 0,5.

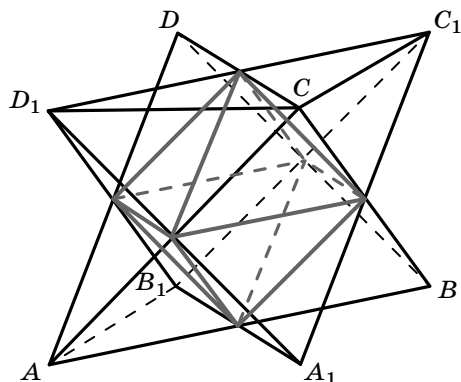


Рис. 20

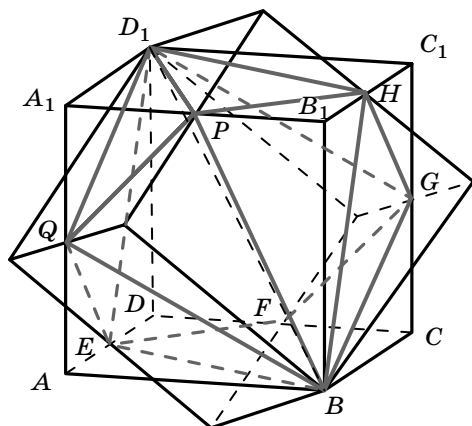


Рис. 21

Задача 28*. Единичный куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ повернут вокруг прямой, содержащей диагональ DB_1 , на угол 60° . Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

Решение. Общей частью исходного куба и повернутого является многогранник, состоящий из двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием (рис. 21).

Стороны основания этих пирамид равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а высоты равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, объем общей части равен 0,75.

Задача 29*. Докажите, что если одно из боковых ребер пирамиды равно c и образует с основанием площадью S угол φ , то объем V этой пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S \cdot c \cdot \sin \varphi.$$

Решение. Искомая формула следует из формулы объема пирамиды и того, что высота данной пирамиды равна $\frac{1}{3} c \cdot \sin \varphi$.

Задача 30*. Пусть боковые ребра треугольной пирамиды равны a , b , c . Ребра a и b образуют угол ψ , а ребро c наклонено к плоскости ребер a и b под углом φ . Докажите, что объем V этой пирамиды выражается формулой

$$V = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot c \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi.$$

Решение. Искомая формула следует из формулы предыдущей задачи и того, что площадь грани этой пирамиды с ребрами a и b равна $\frac{1}{2} a \cdot b$.

Задача 31*. На боковых ребрах SA , SB , SC треугольной пирамиды $SABC$ взяты точки соответственно A_1 , B_1 , C_1 (рис. 13.9) так, что $\frac{SA_1}{SA} = k$, $\frac{SB_1}{SB} = l$, $\frac{SC_1}{SC} = m$. Докажите, что для объемов V и V_1 пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ выполняется равенство $\frac{V_1}{V} = k \cdot l \cdot m$.

Решение. Пусть $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $SA_1 = a_1$, $SB_1 = b_1$, $SC_1 = c_1$. По формуле объема пирамиды из предыдущей задачи имеем

$$V_1 = \frac{1}{6} a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{6} k \cdot a \cdot l \cdot b \cdot m \cdot c \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi = k \cdot l \cdot m \cdot V,$$

откуда следует требуемое равенство.

Задача 32*. На двух скрещивающихся прямых a и b расположены два отрезка соответственно A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 13.10). Докажите, что объем тетраэдра $A_1A_2B_1B_2$ не зависит от положений этих отрезков на прямых, а зависит только от их длины.

Решение. Рассмотрим отрезок $B_1'B_2'$, равный отрезку B_1B_2 и лежащий на прямой b (рис. 22). Докажем, что объемы тетраэдров $A_1A_2B_1B_2$ и $A_1A_2B_1'B_2'$ равны. Действительно, площадь треугольника $A_2B_1B_2$ равна площади треугольника $A_2B_1'B_2'$, так как у них равны стороны B_1B_2 , $B_1'B_2'$, а высота, опущенная из вершины A_2 , общая. Кроме того, эти тетраэдры имеют общую высоту, опущенную из вершины A_1 . Следовательно, объемы этих тетраэдров равны. Значит, объем тетраэдра не зависит от положения отрезка B_1B_2 на прямой b . Аналогичным образом доказывается, что объем тетраэдра не зависит от положения отрезка A_1A_2 на прямой a .

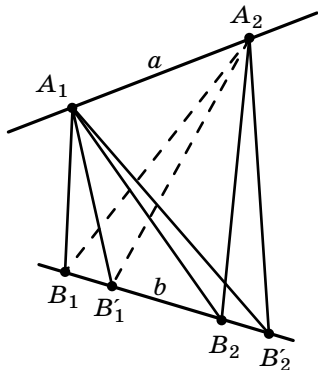


Рис. 22

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.

2. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали?

3. Найдите объем конуса, площадь основания которого равна 2, а образующая равна 6 и наклонена к плоскости основания под углом 30° .

4. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около сферы, радиус которой равен 1.

5*. Два противолежащих ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3 и 4. Расстояние между ними равно 2. Найдите объем тетраэдра.

Вариант 2

1. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

2. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза больше первого?

3. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем.

4. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1.

5*. Единичный тетраэдр $ABCD$ повернут на 60° вокруг высоты DD_1 . Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.

14. Объем шара и его частей

Цель обучения — вывести формулу объема шара; научить находить объемы шара и его частей.

Рекомендации по решению задач

Задача 15*. Дан единичный куб. Шар, радиус которого равен 1, имеет своим центром вершину этого куба. Найдите объем общей части куба и шара.

Решение. Заметим, что единичными кубами можно заполнить все пространство. При этом в вершинах будет сходиться восемь кубов. Они разбивают шар с центром в одной такой вершине на восемь равных частей (рис. 23). Следовательно, объем общей части шара и куба равен одной восьмой части объема шара, т. е. равен $\frac{\pi}{6}$.

Задача 16*. Дана правильная четырехугольная пирамида, стороны основания которой равны 2, а высота равна 1. Шар, радиус которого равен 1, имеет своим центром вершину этой пирамиды. Найдите объем общей части пирамиды и шара.

Решение. Заметим, что куб с ребром 2 можно представить составленным из шести правильных четырехугольных пирамид с общей вершиной в центре куба, основаниями которых являются грани куба. Шар с центром в центре куба и радиусом 1 будет вписанным в этот куб. Указанные пирамиды разбивают этот шар на шесть равных частей. Следовательно, объем общей части шара и одной пирамиды равен одной шестой части объема шара, т. е. равен $\frac{2\pi}{9}$.

15. Площадь поверхности

Цель обучения — определить понятие площади поверхности; вывести формулу площади поверхности шара; научиться находить площади поверхностей многогранников и фигур вращения.

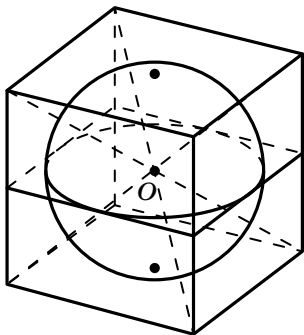


Рис. 23

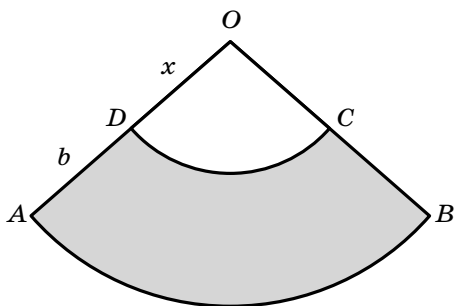


Рис. 24

Рекомендации по решению задач

Задача 25*. Докажите, что площадь S боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого равны R и r , а образующая равна b , вычисляется по формуле $S = \pi b(R + r)$.

Решение. Рассмотрим развертку боковой поверхности усеченного конуса (рис. 24). Представим ее как разность секторов OAB и OCD . $|\widehat{AB}| = 2\pi R$, $|\widehat{CD}| = 2\pi r$. Пусть $OD = x$. Секторы OAB и OCD подобны. Коэффициент подобия равен отношению $b + x$ и x . Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{b + x}{x} = \frac{R}{r}.$$

Из этого уравнения находим

$$x = \frac{br}{R - r}, \quad x + b = \frac{bR}{R - r}.$$

Площадь сектора OAB равна $\frac{\pi b R^2}{R - r}$. Площадь сектора OCD равна $\frac{\pi b r^2}{R - r}$. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна разности этих площадей и равна $\pi b(R + r)$.

Задача 34*. Дан единичный куб. Шар, радиус которого равен 1, имеет своим центром вершину этого куба. Найдите площадь поверхности части шара, содержащейся в кубе.

Решение аналогично решению задачи 15 пункта 14. Площадь поверхности части шара равна одной восьмой площади поверхности шара, т. е. равна $\frac{\pi}{2}$.

Задача 35*. Дана правильная четырехугольная пирамида, стороны основания которой равны 2, а высота равна 1. Шар, радиус которого равен 1, имеет своим центром вершину этой пирамиды. Найдите площадь поверхности части шара, содержащейся в пирамиде.

Решение аналогично решению задачи 16 пункта 14. Площадь поверхности части шара равна одной шестой площади поверхности шара, т. е. равна $\frac{2\pi}{3}$.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Центры граней куба, ребро которого равно 2, служат вершинами октаэдра. Найдите его объем.

2. Диаметр основания конуса равен 12, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Найдите объем конуса.

3. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него куба.

4*. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна Q , а расстояние от нее до противоположного ребра равно d . Найдите объем призмы.

5*. Докажите, что площадь полной поверхности равностороннего конуса (осевое сечение — равносторонний треугольник) равна площади поверхности шара, имеющего диаметром высоту конуса.

Вариант 2

1. В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Найдите объем тетраэдра.

2. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площадью 9. Найдите объем конуса.

3. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него куба.

4*. В наклонной треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное a . Площади этих граней равны S_1 и S_2 . Найдите объем призмы.

5*. Докажите, что если равносторонний конус (осевое сечение — равносторонний треугольник) и полушар имеют общее основание, то площадь боковой поверхности конуса равна площади поверхности полушара.

Глава IV

Векторы

16. Векторы в пространстве

Цель обучения — определить понятия вектора в пространстве, коллинеарных и компланарных векторов; научить устанавливать равенство векторов, находить их длины.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Векторы» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 13*. Точки E и F являются серединами соответственно ребер AB и C_1D_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 16.8). Докажите, что векторы $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ компланарны.

Решение. Вектор $\overrightarrow{CE}$ равен вектору $\overrightarrow{FA_1}$, вектор $\overrightarrow{BB_1}$ равен вектору $\overrightarrow{AA_1}$. Векторы $\overrightarrow{FA_1}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AA_1}$ лежат в одной плоскости. Следовательно, они компланарны.

Задача 14*. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рис. 16.9) векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CE}$ компланарны.

Решение. Вектор $\overrightarrow{BD_1}$ равен вектору $\overrightarrow{AE_1}$, вектор $\overrightarrow{CE}$ равен вектору $\overrightarrow{C_1E_1}$. Векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AE_1}$, $\overrightarrow{C_1E_1}$ лежат в одной плоскости. Следовательно, они компланарны.

17. Операции над векторами

Цель обучения — определить операции сложения векторов и умножения вектора на число; рассмотреть свойства этих операций; сформулировать и доказать теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам; научить производить операции над векторами.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить определения сложения векторов и умножения вектора на число на плоскости.

Рекомендации по решению задач

Задача 13*. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и не равны. Будут ли векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны?

Решение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (1+t)\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b} = (1-t)\vec{a}$. Следовательно, векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны.

Задача 14*. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Решение. В силу предыдущей задачи из коллинеарности векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ следует коллинеарность векторов $2\vec{a} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b})$ и $2\vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b})$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Задача 15*. В тетраэдре $ABCD$ точки E , F являются точками пересечения медиан соответственно граней ADB и BDC (рис. 17.4). Докажите, что векторы $\vec{EF}$ и $\vec{AC}$ коллинеарны. Найдите отношение длин этих векторов.

Решение. Обозначим K , L середины ребер соответственно AB и BC тетраэдра $ABCD$ (рис. 25). Тогда $\vec{EF} = \frac{2}{3}\vec{KL} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.

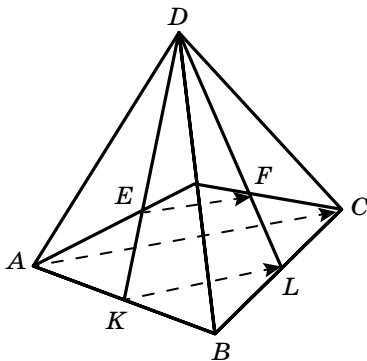


Рис. 25

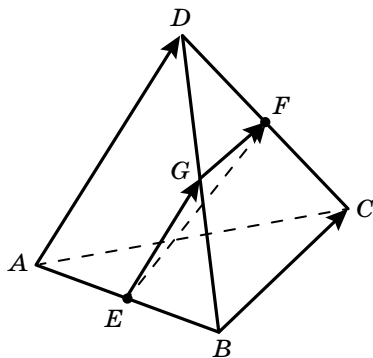


Рис. 26

Задача 16*. В тетраэдре $ABCD$ точки E и F являются серединами ребер соответственно AB и CD (рис. 17.5). Докажите, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Решение. Обозначим G середину ребра BD тетраэдра $ABCD$ (рис. 26). Тогда $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

18. Угол между векторами.

Скалярное произведение векторов

Цель обучения — определить понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов; научить решать задачи на нахождение углов и скалярного произведения векторов.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить определения угла между векторами и скалярного произведения векторов на плоскости.

Рекомендации по решению задач

Задача 11*. Из точки C , не принадлежащей плоскости α , опущен перпендикуляр CA на эту плоскость. Докажите, что для произвольной точки B плоскости α скалярное произведение $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ не зависит от положения точки B .

Решение. Имеем (рис. 27)

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \angle ACB = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CB}|} = |\overrightarrow{CA}|^2.$$

Следовательно, скалярное произведение $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ не зависит от положения точки B .

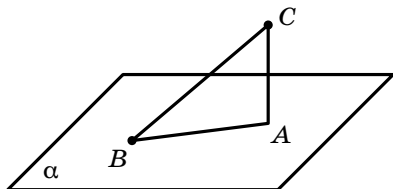


Рис. 27

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. Сколько различных векторов задают всевозможные пары вершин правильной четырехугольной пирамиды?

2. Для параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите сумму векторов $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{C_1 C} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1 C_1}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{BF_1}$.

4. Для единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.

5*. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ выразите вектор $\overrightarrow{BC_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

Вариант 2

1. Сколько различных векторов задают всевозможные пары вершин треугольной призмы?

2. Для параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите сумму векторов $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C_1 A_1}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{CE_1}$.

4. Для единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{AD}$.

5*. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ выразите вектор $\overrightarrow{CB_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

Глава V

Координаты

19. Прямоугольная система координат в пространстве

Цель обучения — определить понятие прямоугольной системы координат в пространстве; научить решать задачи на нахождение координат точек в пространстве.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Прямоугольная система координат на плоскости» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 11*. Используя теорему о пропорциональных отрезках, докажите, что если точка A принадлежит отрезку, соединяющему точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, и делит этот отрезок в отношении k , т. е. $\frac{A_1A}{AA_2} = k$, то она имеет координаты

$$A\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}\right).$$

Решение. Пусть $A(x, y, z)$ — точка, принадлежащая отрезку A_1A_2 , $\frac{A_1A}{AA_2} = k$. Спроектируем этот отрезок на

плоскость Oxy (т. е. проведем из точек A_1, A_2 прямые, перпендикулярные плоскости Oxy) (рис. 28).

В плоскости Oxy получим соответственно точки $A'_1(x_1, y_1, 0)$, $A'(x, y, 0)$, $A'_2(x_2, y_2, 0)$. Так как параллельное проектирование сохраняет отношение отрезков, лежащих на одной прямой, то точка A' будет делить отрезок $A'_1A'_2$ в отношении k , т. е.

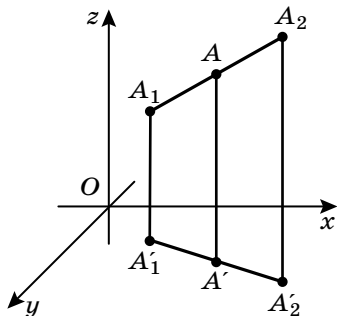


Рис. 28

$\frac{A_1A'}{A'A_2} = k$. В силу соответствующей теоремы геометрии на

плоскости, она имеет координаты $\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, 0 \right)$.

Аналогичным образом, рассматривая ортогональную проекцию отрезка A_1A_2 на плоскость Oxz (или Oyz), получим

$z = \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}$. Таким образом, точка A отрезка A_1A_2 имеет

координаты $\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \frac{z_1 + kz_2}{1 + k} \right)$.

20. Расстояние между двумя точками в пространстве. Уравнение сферы

Цель обучения — вывести формулу расстояния между двумя точками и уравнение сферы; научить решать задачи на нахождение расстояний между точками с заданными координатами; составлять уравнения сфер; распознавать сферы по заданным уравнениям.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить темы «Расстояние между двумя точками», «Уравнение окружности» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 16*. Напишите уравнение сферы с центром в точке $A_0(1, 2, 2)$, касающейся сферы с центром в точке $O(0, 0, 0)$ и радиусом 1.

Решение. Расстояние от точки $A_0(1, 2, 2)$ до начала координат равно 3. Сфера с центром в этой точке может касаться сферы с центром в начале координат и радиусом 1 внешним или внутренним образом. Радиус сферы, касающейся внешним образом, равен 2, а уравнение этой сферы имеет вид $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$. Радиус сферы, касающейся внутренним образом, равен 4, а уравнение этой сферы имеет вид

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 16.$$

21. Координаты вектора

Цель обучения — определить понятие координат вектора; вывести формулу скалярного произведения векторов с заданными координатами; научить находить координаты векторов и решать задачи на применение скалярного произведения векторов.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Координаты вектора» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 20*. Докажите, что в треугольнике ABC , где $A(2, 1, 3)$, $B(1, 1, 4)$ и $C(0, 1, 3)$, угол B прямой.

Решение. Вектор $\overrightarrow{BA}$ имеет координаты $(1, 0, -1)$. Вектор $\overrightarrow{BC}$ имеет координаты $(-1, 0, -1)$. Их скалярное произведение равно нулю. Следовательно, эти векторы перпендикулярны. Значит, угол B прямой.

Задача 21*. Докажите, что точки $A(2, 4, -4)$, $B(1, 1, -3)$, $C(-2, 0, 5)$, $D(-1, 3, 4)$ являются вершинами параллелограмма.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(-1, -3, 1)$. Вектор $\overrightarrow{DC}$ имеет такие же координаты. Следовательно, эти векторы равны. Значит, точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма.

22. Уравнение плоскости в пространстве

Цель обучения — вывести уравнение плоскости в пространстве; научить составлять уравнения плоскостей и распознавать взаимное расположение плоскостей по их уравнениям.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Уравнение прямой на плоскости» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 16*. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение симметричной плоскости относительно: а) начала координат; б) плоскости Oxy ; в) плоскости Oxz ; г) плоскости Oyz ; д) прямой Ox ; е) прямой Oy ; ж) прямой Oz .

Решение. а) При центральной симметрии относительно начала координат точка с координатами (x, y, z) переходит в точку с координатами $(-x, -y, -z)$. Точка с координатами (x, y, z) принадлежит плоскости $ax + by + cz + d = 0$ тогда и только тогда, когда точка с координатами $(-x, -y, -z)$ принадлежит плоскости $-ax - by - cz + d = 0$. Следовательно, плоскость, заданная уравнением $-ax - by - cz + d = 0$, является симметричной данной плоскости относительно начала координат.

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом.

Задача 17*. Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке с координатами: а) $(0, 3, 0)$; б) $(2, -2, 1)$.

Решение. а) Так как плоскость, касающаяся сферы, перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то вектор нормали плоскости, касающейся сферы в точке с координатами $(0, 3, 0)$, будет иметь такие же координаты $(0, 3, 0)$. Следовательно, уравнение искомой плоскости будет иметь вид $3(y - 3) = 0$, или $y = 3$.

б) Вектор нормали плоскости, касающейся сферы в точке с координатами $(2, -2, 1)$, будет иметь такие же координаты $(2, -2, 1)$. Следовательно, уравнение искомой плоскости будет иметь вид $2(x - 2) - 2(y + 2) + (z - 1) = 0$, или $2x - 2y + z - 9 = 0$.

23*. Уравнения прямой в пространстве

Цель обучения — вывести параметрические уравнения прямой в пространстве; научить составлять уравнения прямых и распознавать взаимное расположение прямых по их уравнениям.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Уравнение прямой на плоскости» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 12*. Прямая в пространстве задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt. \end{cases}$$

Напишите параметрические уравнения прямых, симметричных данной относительно: а) начала координат; б) плоскости Oxy ; в) плоскости Oxz ; г) плоскости Oyz ; д) прямой Ox ; е) прямой Oy ; ж) прямой Oz .

Решение. а) При центральной симметрии относительно начала координат точка с координатами (x, y, z) переходит в точку с координатами $(-x, -y, -z)$. Точка с координатами (x, y, z) принадлежит данной прямой тогда и только тогда, когда точка с координатами $(-x, -y, -z)$ принадлежит прямой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = -x_0 - kt, \\ y = -y_0 - lt, \\ z = -z_0 - mt. \end{cases}$$

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом.

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. Найдите координаты середины отрезка GH , если $G(2, -3, 5)$, $H(4, 1, -3)$.

2. Запишите уравнение сферы с центром в точке $C(-2, 0, 3)$ и проходящей через точку $K(1, -4, 3)$.

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $H(-3, 0, 7)$ и перпендикулярную вектору с координатами $(1, -1, 3)$.

4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $G(-1, 3, 2)$ и параллельную плоскости $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

5*. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, -2, -3)$, $B(2, -3, 4)$.

Вариант 2

1. Найдите координаты середины отрезка GH , если $G(3, -2, 4)$, $H(5, 2, -6)$.

2. Запишите уравнение сферы с центром в точке $C(0, -5, 6)$ и проходящей через точку $H(2, -3, 5)$.

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $P(5, -1, 0)$ и перпендикулярную вектору с координатами $(0, -3, 5)$.

4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(1, 2, 3)$ и параллельную плоскости $3x - 2y + z - 1 = 0$.

5*. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $C(2, -3, -1)$, $B(4, -2, 3)$.

24*. Аналитическое задание пространственных фигур

Цель обучения — познакомить учащихся с аналитическими методами задания фигур в пространстве; привести примеры аналитического задания фигур; научить аналитически задавать простейшие фигуры в пространстве.

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить тему «Аналитическое задание фигур на плоскости» учебника геометрии 7—9-го классов.

Рекомендации по решению задач

Задача 10*. Какой из полуправильных многогранников задается системой неравенств

$$\begin{cases} |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1, \\ |x| + |y| + |z| \leq 2? \end{cases}$$

Решение. Системой неравенств $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ задается куб. Неравенством $|x| + |y| + |z| \leq 2$ задается октаэдр. Системой, состоящей из всех этих неравенств, задается фигура, являющаяся пересечением куба и октаэдра. Эта фигура является кубооктаэдром (рис. 29).

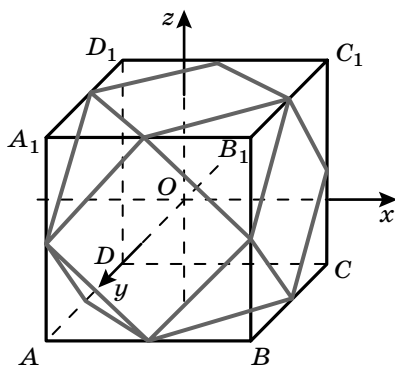


Рис. 29

Задача 11*. Найдите неравенства, которые задают правильный тетраэдр с вершинами в точках с координатами $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, -1, -1)$.

Решение. Указанный тетраэдр изображен на рисунке 30. Плоскость грани BA_1C_1 задается уравнением $x + y + z = 1$. Плоскость симметричной ей грани DA_1C_1 относительно оси Oz задается уравнением $-x - y + z = 1$. Пересечение полупространств, определяемых этими плоскостями, задается неравенством $z \leq 1 - |x + y|$. Плоскость грани BDA_1 задается уравнением $-x + y - z = 1$. Плоскость симметричной ей грани BDC_1 относительно оси Oz задается уравнением $x - y - z = 1$. Пересечение полупространств, определяемых этими плоскостями, задается неравенством $|x - y| - 1 \leq z$. Октаэдр является пересечением всех четырех полупространств. Он задается неравенствами $|x - y| - 1 \leq z \leq 1 - |x + y|$.

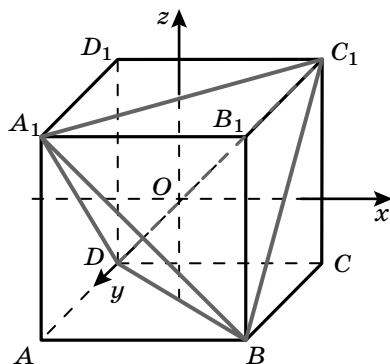


Рис. 30

25*. Аналитические методы нахождения расстояний и углов в пространстве

Цель обучения — научить применять аналитические методы для нахождения расстояний и углов в пространстве.

Рекомендации по решению задач

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вершина D — начало координат, ребра DC , DA , DD_1 лежат на осях координат Ox , Oy и Oz соответственно и $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB_1}$ имеет координаты $(3, 0, 1)$. Вектор $\overrightarrow{BC_1}$ имеет координаты $(0, -2, 1)$. Косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (рис. 31).

Задача 4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вершина D — начало координат, ребра DC , DA , DD_1 лежат на осях координат Ox , Oy и Oz соответственно и $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. Найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и BCD_1 .

Решение. Плоскость ABC_1 задается уравнением $\frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. Плоскость BCD_1 задается уравнением $\frac{x}{3} + \frac{z}{1} = 1$. Их векторы нормалей соответственно имеют координаты $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ и $\left(\frac{1}{3}, 0, 1\right)$. Косинус угла между данными плоскостями равен $\frac{6\sqrt{2}}{10}$ (рис. 32).

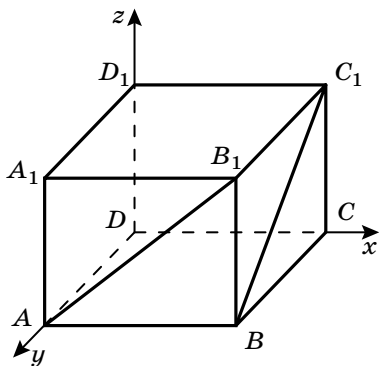


Рис. 31

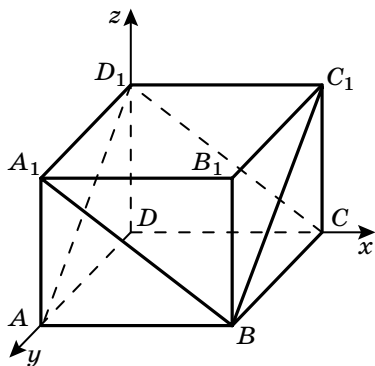


Рис. 32

Задача 6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вершина D — начало координат, ребра DC , DA , DD_1 лежат на осях координат Ox , Oy и Oz соответственно и $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. Найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью ABC_1 .

Решение. Вектор $\overrightarrow{DB_1}$ имеет координаты $(3, 2, 1)$. Вектор нормали плоскости ABC_1 имеет координаты $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$. Синус угла между прямой DB_1 и плоскостью ABC_1 равен косинусу угла между этими векторами и равен $\frac{2\sqrt{70}}{35}$ (рис. 33).

Задача 11*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вершина D — начало координат, ребра DC , DA , DD_1 лежат на осях координат Ox , Oy и Oz соответственно и $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости ACD_1 .

Решение. Плоскость ACD_1 задается уравнением

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1.$$

Расстояние от вершины D до этой плоскости равно $1\frac{1}{6}$ (рис. 34).

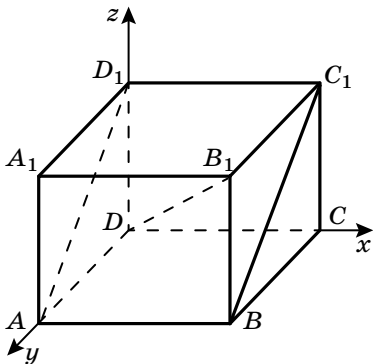


Рис. 33

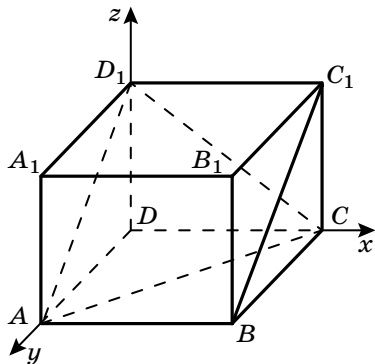


Рис. 34

Задача 12*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости ACD_1 (рис. 53.4).

Ответ. Расстояние от вершины B_1 до этой плоскости равно $2\frac{1}{3}$ (рис. 34).

Задача 13*. Найдите объем многогранника, координаты (x, y, z) точек которого удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ x + y + z \leq 6. \end{cases}$$

Решение. Искомым многогранником является тетраэдр $OABC$ (рис. 35). Его объем равен 36.

Задача 14*. Найдите объем многогранника, координаты (x, y, z) точек которого удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ x + 2z \leq 4, \\ 2y + 3z \leq 6. \end{cases}$$

Решение. Искомым многогранником является четырехугольная пирамида $SOABC$ (рис. 36). Ее объем равен 8.

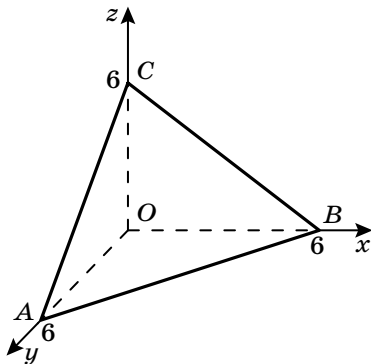


Рис. 35

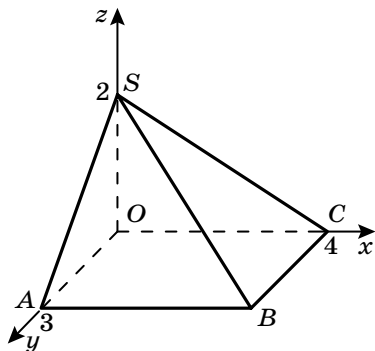


Рис. 36

Приложение

Использование компьютерной программы GeoGebra для моделирования пространственных фигур

Программа GeoGebra — это свободно распространяемая программа, которую можно скачать с официального сайта <http://geogebra.org>.

Она позволяет моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные, интегралы, получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, эта программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для использования ее в преподавании геометрии в пространстве (стереометрии).

Более подробно с возможностями программы GeoGebra можно познакомиться на сайте vasmirnov.ru.

1. Инструменты GeoGebra

Рабочее окно программы показано на рисунке 37. В его верхней части находятся окошки с инструментами. Если нажать левой кнопкой мыши на одно из окошек, то откроются дополнительные инструменты. Например, при нажатии на окошко с изображением пирамиды откроются инструменты, среди которых: Пирамида, Призма, Конус, Цилиндр, Тетраэдр, Куб.

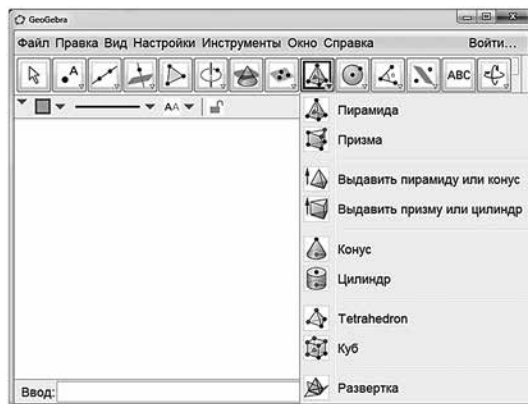


Рис. 37

Инструмент «Пирамида» позволяет строить пирамиду в пространстве. Для этого нужно сначала построить или указать многоугольник (основание пирамиды), а затем указать ее вершину. На рисунке 38 показана четырехугольная пирамида.

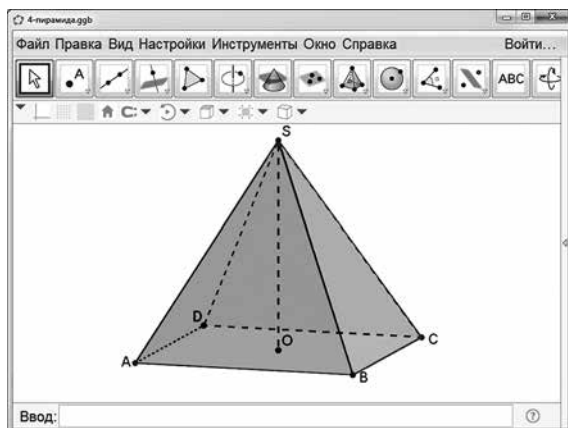


Рис. 38

Пирамиду можно увеличивать или уменьшать, поворачивать в разные стороны. Обозначения вершин, цвет и толщину линий можно изменять. То же самое можно делать и с другими моделями пространственных фигур.

Инструмент «Призма» позволяет строить призму в пространстве. Для этого нужно сначала построить или указать многоугольник (основание призмы), а затем указать первую вершину ее второго основания. На рисунке 39 показана правильная шестиугольная призма.

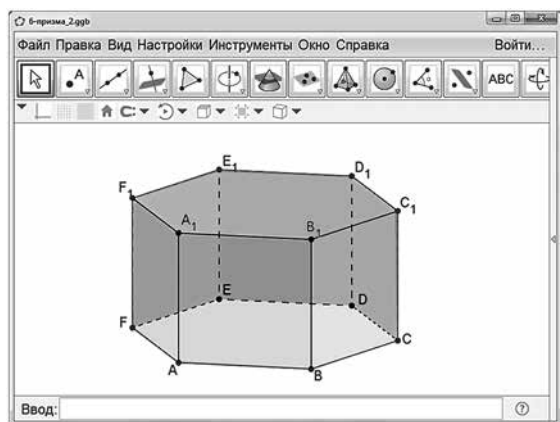


Рис. 39

Инструмент «Тетраэдр» позволяет получать изображения правильного тетраэдра. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины тетраэдра). На рисунке 40 показан пример такого тетраэдра.

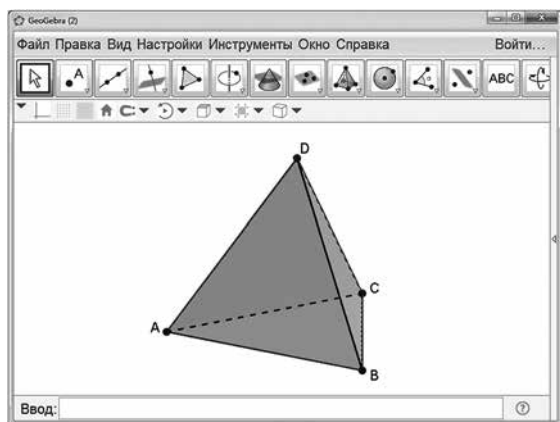


Рис. 40

Инструмент «Куб» позволяет получать изображения куба. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины куба). На рисунке 41 показан пример такого куба.

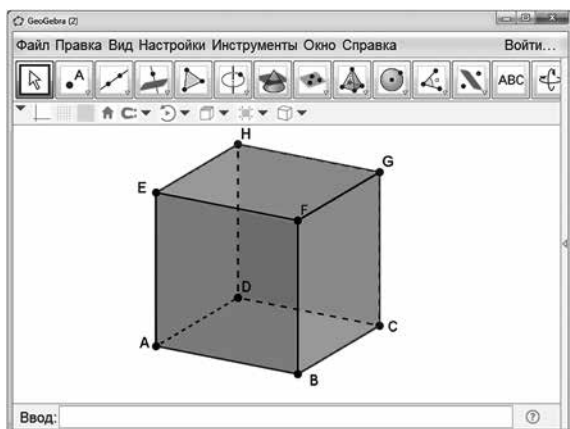


Рис. 41

Инструмент «Развертка» позволяет получать развертки многогранников. Для этого нужно кликнуть левой кнопкой мыши по изображению многогранника. Например, на рисунке 42 показана развертка куба.

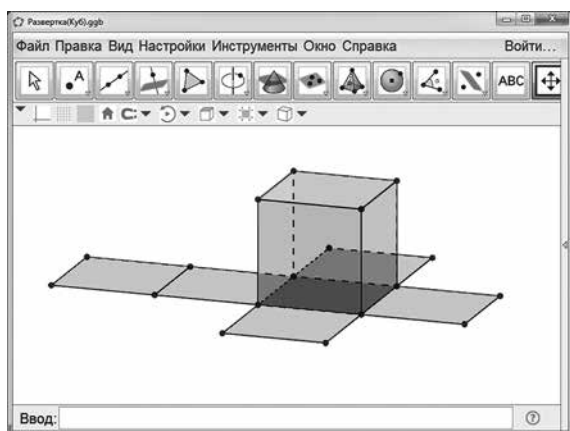


Рис. 42

Кроме указанных выше многогранников, можно получать и другие многогранники, в частности правильные многогранники.

Для получения октаэдра нужно выбрать две точки (вершины октаэдра), например, A и B . В строке «Ввод» написать «Октаэдр[A, B]» и нажать «Enter». На рисунке 43 показан пример такого октаэдра.

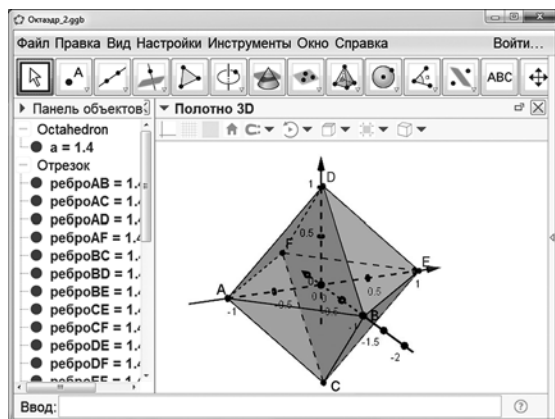


Рис. 43

Для получения икосаэдра нужно выбрать две точки (вершины икосаэдра), например, A и B . В строке «Ввод»

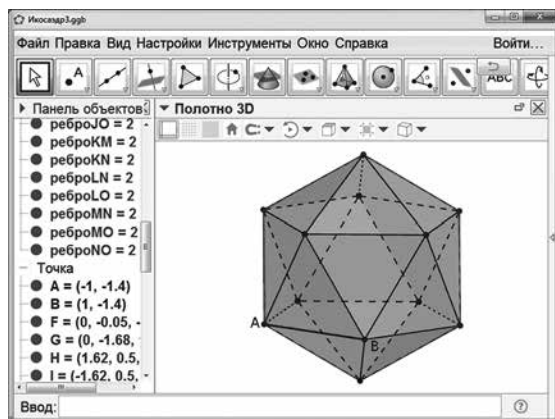


Рис. 44

написать «Икосаэдр[A, B]» и нажать «Enter». На рисунке 44 показан пример такого икосаэдра.

Для получения додекаэдра нужно выбрать две точки (вершины додекаэдра), например, A и B. В строке «Ввод» написать «Додекаэдр[A, B]» и нажать «Enter». На рисунке 45 показан пример такого додекаэдра.

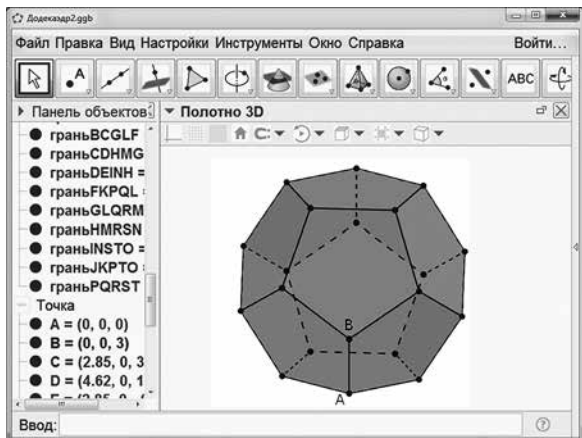


Рис. 45

Инструмент «Конус» позволяет получить конус. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр основания, а затем вершину конуса. Откроется окно, в котором нужно указать радиус основания конуса. После этого появится изображение конуса (рис. 46).

Инструмент «Цилиндр» позволяет получить цилиндр. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр одного основания, а затем центр другого основания. Откроется окно, в котором нужно

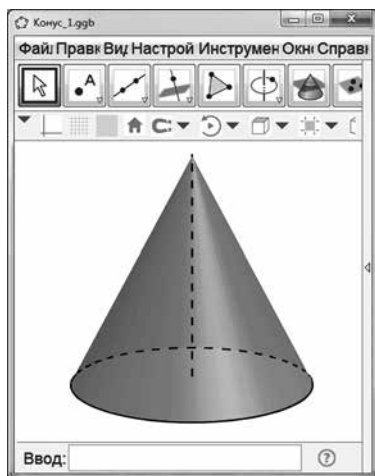


Рис. 46

указать радиус основания цилиндра. После этого появится изображение цилиндра (рис. 47).

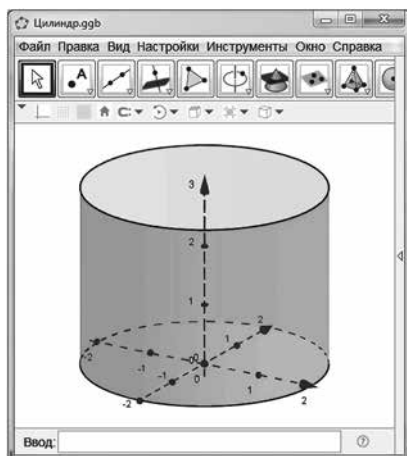


Рис. 47

2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Рассмотрим примеры использования программы GeoGebra для формирования представлений о взаимном расположении прямых в пространстве и для нахождения углов между двумя прямыми.

Пример 1. Как в пространстве расположены прямые AB_1 и BC_1 , изображенные на рисунке 48, проходящие через вершины куба?

Ответ. Поворачивая куб, можно увидеть, что данные прямые скрещиваются (рис. 49).

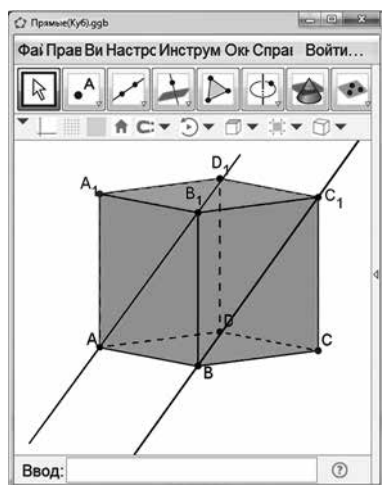


Рис. 48

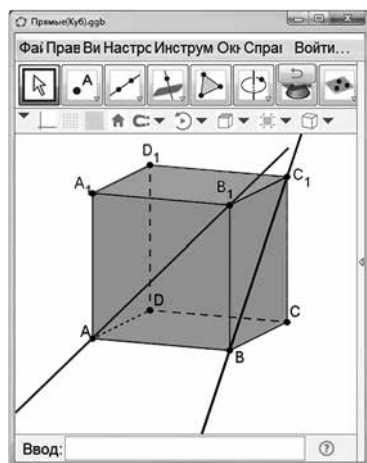


Рис. 49

Пример 2. Как в пространстве расположены прямые AD и BC , изображенные на рисунке 50, проходящие через вершины правильного тетраэдра?

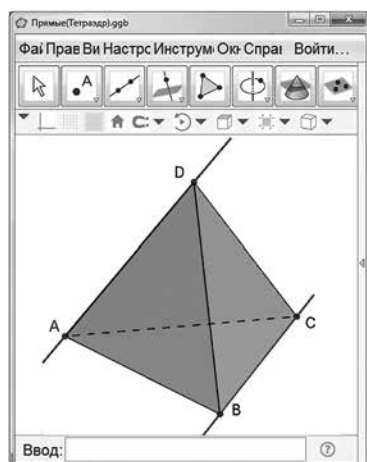


Рис. 50

Ответ. Поворачивая тетраэдр, можно увидеть, что данные прямые скрещиваются (рис. 51).

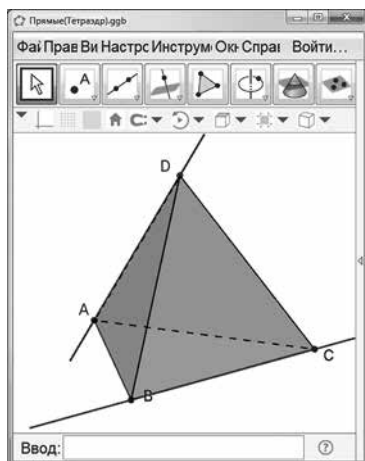


Рис. 51

Пример 3. Как в пространстве расположены отрезки EF и FG , изображенные на рисунке 52, соединяющие середины ребер правильного тетраэдра?

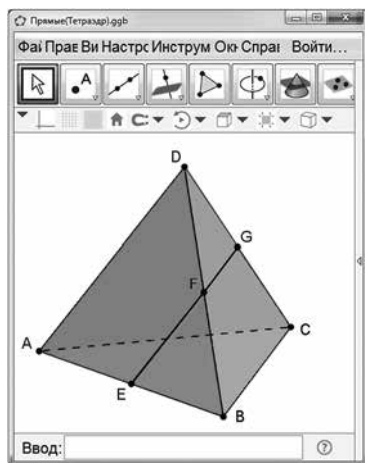


Рис. 52

Ответ. Поворачивая тетраэдр, можно увидеть, что данные отрезки не лежат на одной прямой (рис. 53). Отрезки EF и FG являются средними линиями треугольников соот-

ветственно ABD и BCD . Так как ребра AD и BC правильного тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны, то и отрезки EF и FG также перпендикулярны.

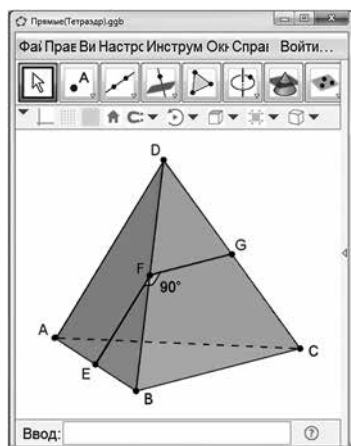


Рис. 53

Пример 4. Как в пространстве расположены прямые BA_1 и B_1D_1 , изображенные на рисунке 54, проходящие через вершины правильной шестиугольной пирамиды $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$?

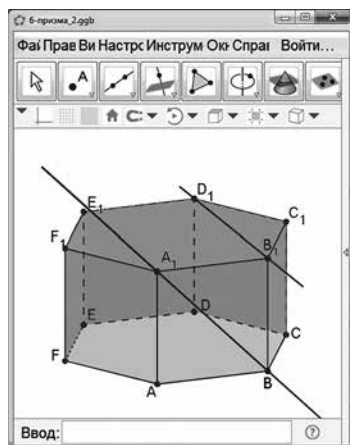


Рис. 54

Ответ. Повернув призму $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рис. 55), убеждаемся, что эти прямые скрещиваются.

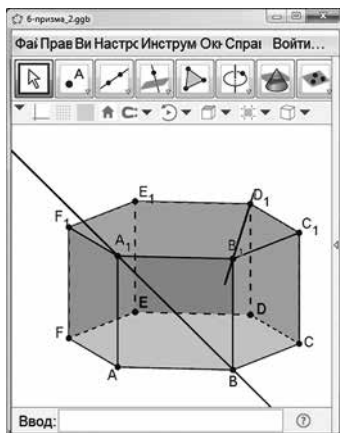


Рис. 55

Пример 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 56) найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .

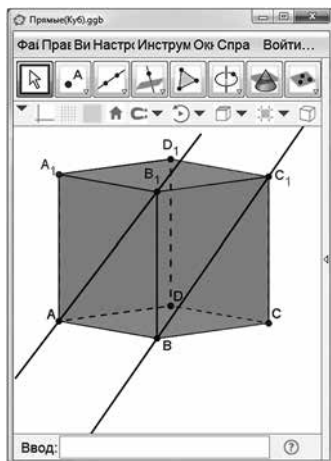


Рис. 56

Решение. Проведем прямую AD_1 , параллельную BC_1 (рис. 57). Выберем инструмент «Угол». Кликнем левой

кнопкой мыши по прямым AB_1 и AD_1 . На экране появится величина этого угла, равная 60° .

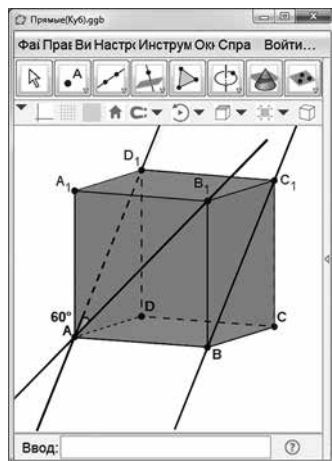


Рис. 57

3. Расстояния в пространстве

Рассмотрим примеры использования инструмента «Перпендикулярная линия» программы GeoGebra для построения прямой, перпендикулярной данной, и нахождения расстояния от точки до прямой.

Пример 1. Опустите перпендикуляр из вершины A единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на прямую $B_1 D_1$. Найдите расстояние от точки A до прямой $B_1 D_1$ (рис. 58).

Решение. Через точку A проведем прямую, пер-

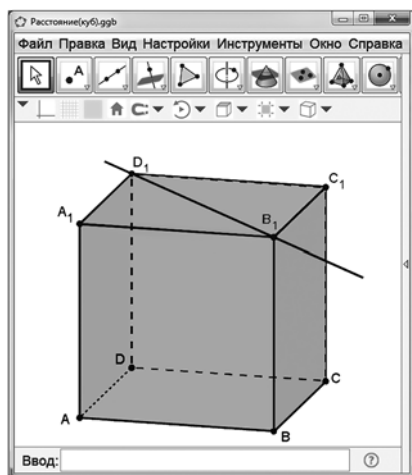


Рис. 58

пендикулярную прямой B_1D_1 . Найдем их точку пересечения O_1 . Искомый перпендикуляр AO_1 показан на рисунке 59 (O_1 — середина отрезка B_1D_1). Его длина равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

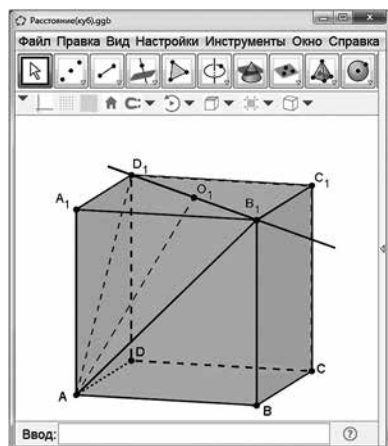


Рис. 59

Пример 2. Опустите перпендикуляр из вершины A единичного куба на прямую BD_1 . Найдите расстояние от точки A до прямой BD_1 (рис. 60).

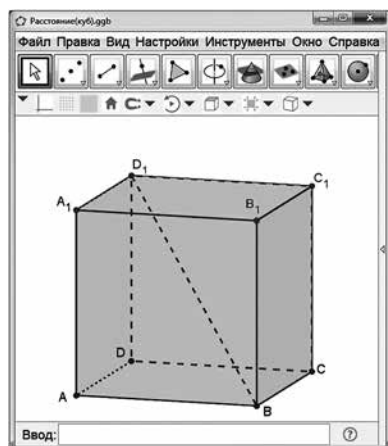


Рис. 60

Решение. Через точку A проведем прямую, перпендикулярную прямой BD_1 . Найдем их точку пересечения E . Искомый перпендикуляр AE показан на рисунке 61. Его длина равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

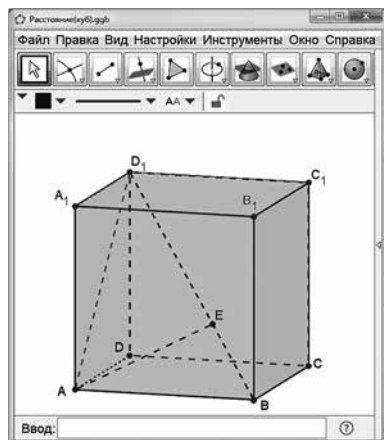


Рис. 61

Пример 3. Опустите перпендикуляр из середины E ребра AA_1 единичного куба на прямую BD_1 . Найдите расстояние от точки E до прямой BD_1 (рис. 62).

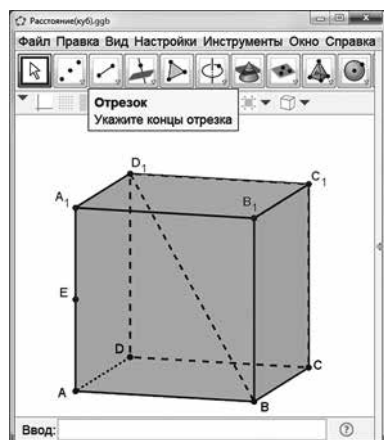


Рис. 62

Решение. Через точку E проведем прямую, перпендикулярную прямой BD_1 . Найдем их точку пересечения F . Искомый перпендикуляр EF показан на рисунке 63 (F — середина диагонали BD_1). Его длина равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

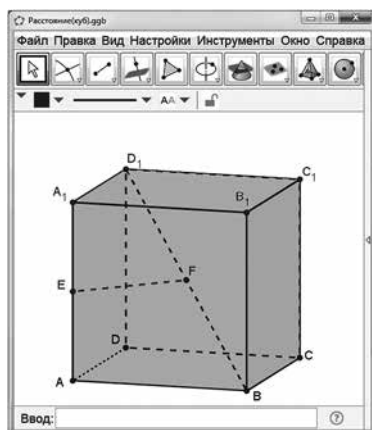


Рис. 63

Пример 4. Опустите перпендикуляр из вершины A правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1, на прямую BC_1 . Найдите расстояние от точки A до прямой BC_1 (рис. 64).

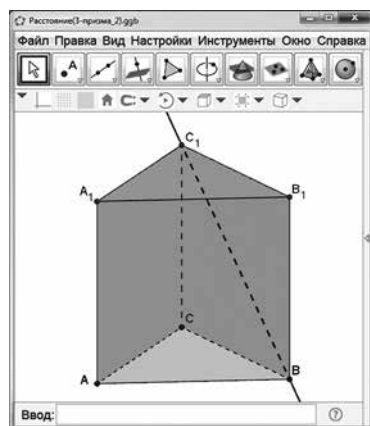


Рис. 64

Решение. Через точку A проведем прямую, перпендикулярную прямой BC_1 . Найдем их точку пересечения H . Искомый перпендикуляр AH показан на рисунке 65. Его длина равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

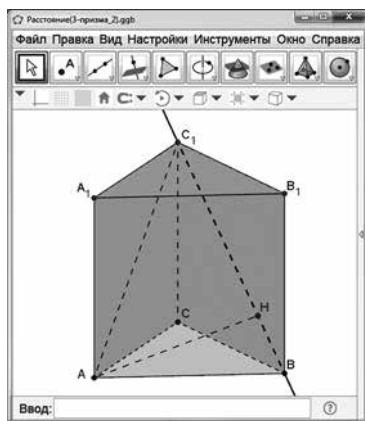


Рис. 65

Пример 5. Опустите перпендикуляр из вершины A правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, на прямую CD_1 . Найдите расстояние от точки A до прямой CD_1 (рис. 66).

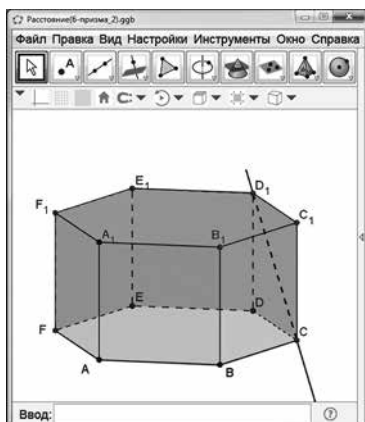


Рис. 66

Решение. Через точку A проведем прямую, перпендикулярную прямой CD_1 . Искомый перпендикуляр AC показан на рисунке 67. Его длина равна $\sqrt{3}$.

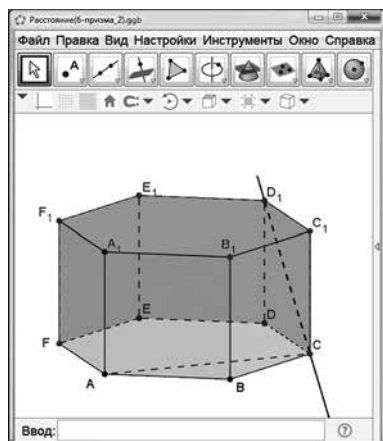


Рис. 67

Пример 6. Опустите перпендикуляр из вершины A правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, на прямую BE_1 . Найдите расстояние от точки A до прямой BE_1 (рис. 68).

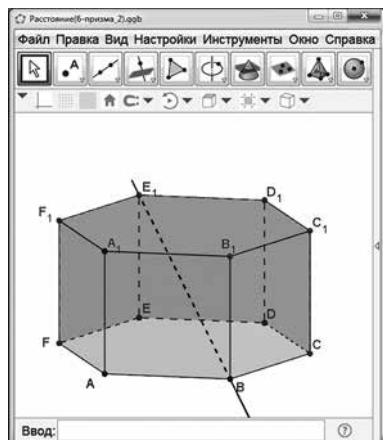


Рис. 68

Решение. Через точку A проведем прямую, перпендикулярную прямой BE_1 . Найдем их точку пересечения G . Искомый перпендикуляр AG показан на рисунке 69. Его длина равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

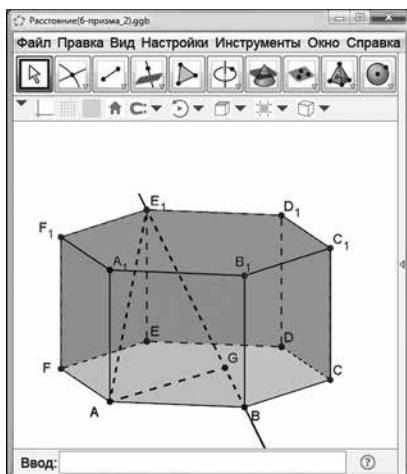


Рис. 69

4. Сечения

Программа GeoGebra позволяет строить сечения различных пространственных фигур плоскостью. Рассмотрим примеры построения сечений многогранников.

Пример 1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F , G (рис. 70).

Решение. Выберем в меню окошко с изображением трех точек и плоскости. Отметим левой кнопкой мыши указан-

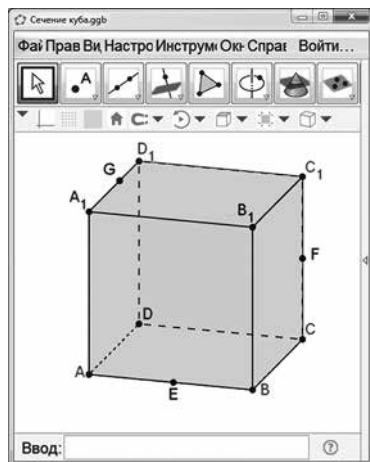


Рис. 70

ные три точки. В результате появится плоскость, проходящая через эти точки (рис. 71).

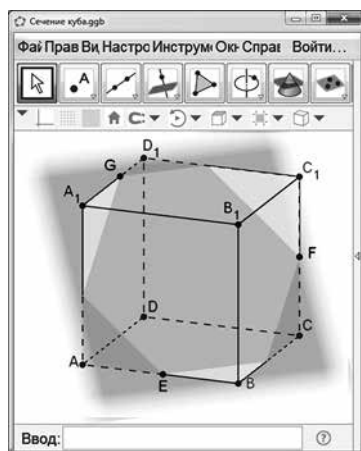


Рис. 71

Для получения сечения куба этой плоскостью выберем в меню окошко с изображением конуса, пересеченного плоскостью. Нажмем левой кнопкой мыши по надписи «Cube» в левой верхней части рабочего окна и затем по плоскости. В результате получится искомое сечение (рис. 72).

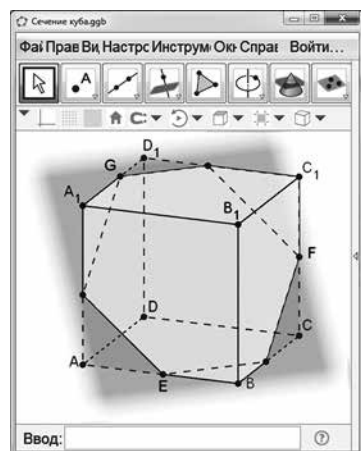


Рис. 72

Саму плоскость можно убрать, нажав на нее правой кнопкой мыши и затем нажав на окошко в строке «Показывать объект». Положение точек, указанных для построения сечения, можно изменять. Для этого нужно нажать левой кнопкой мыши на одну из них и перемещать ее по ребру. При этом сечение будет также изменяться. На рисунке 73 показан пример такого изменения.

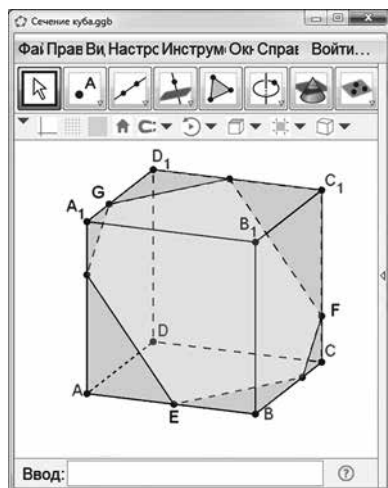


Рис. 73

Пример 2. Постройте сечение правильной треугольной призмы, проходящее через данные точки (рис. 74).

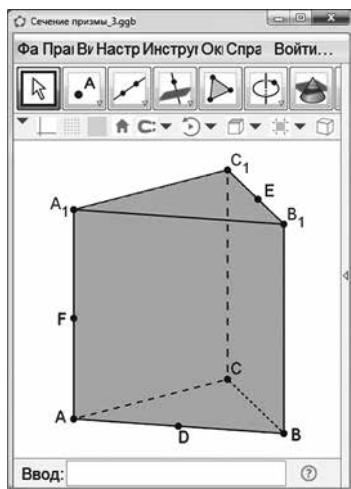


Рис. 74

Ответ. Построение аналогично построению предыдущего примера. Искомое сечение показано на рисунке 75.

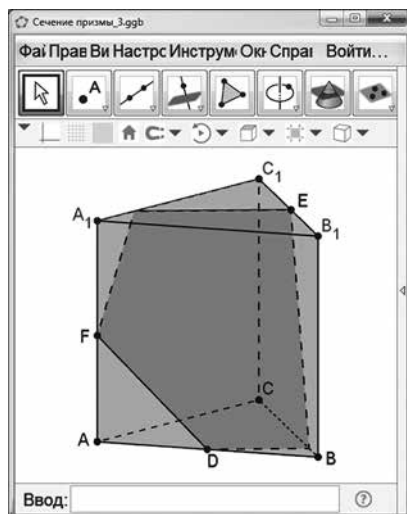


Рис. 75

Пример 3. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды, проходящее через данные точки (рис. 76).

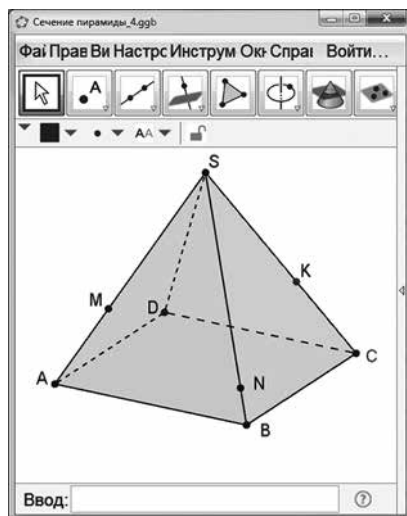


Рис. 76

Ответ. Сечение показано на рисунке 77.

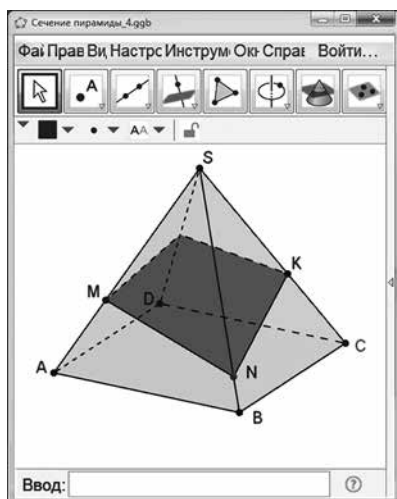


Рис. 77

Пример 4. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через данные точки K, L, M (рис. 78).

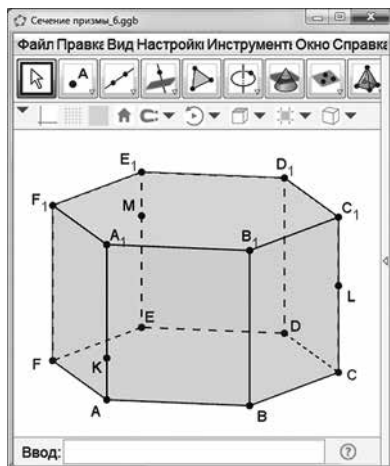


Рис. 78

Ответ. Сечение показано на рисунке 79.

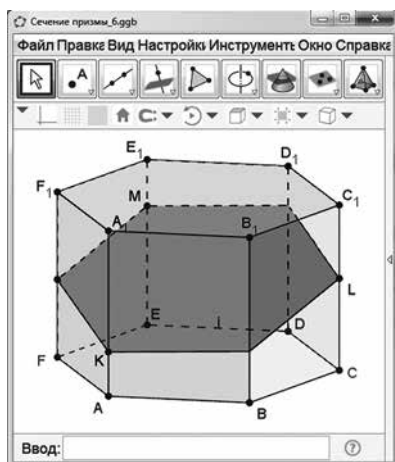


Рис. 79

Пример 5. Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды, проходящее через данные точки (рис. 80).

Ответ. Сечение показано на рисунке 81.

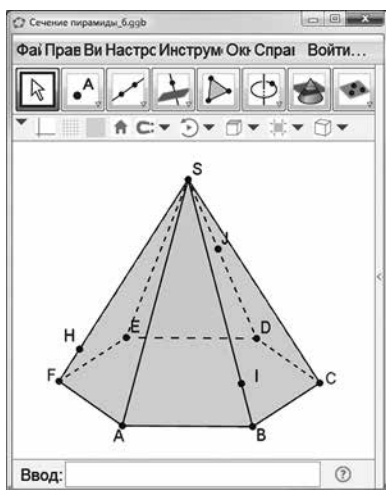


Рис. 80

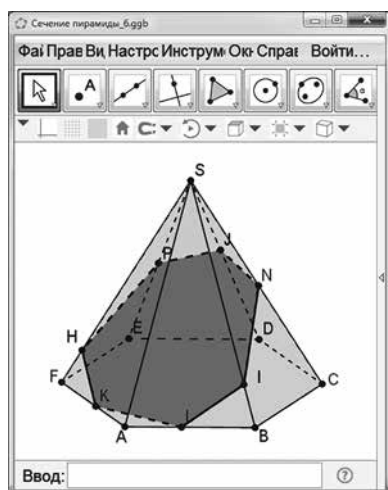


Рис. 81

5. Вписанные и описанные фигуры

Рассмотрим примеры использования программы GeoGebra для изображения вписанных и описанных фигур в пространстве.

Пример 1. На рисунке 82 изображена правильная шестиугольная призма, вписанная в цилиндр.

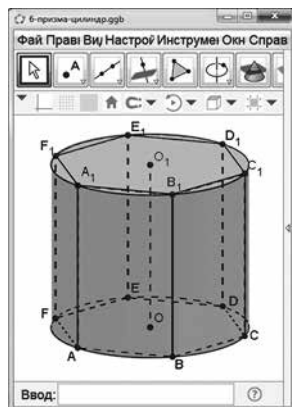


Рис. 82

Пример 2. На рисунке 83 изображена правильная шестиугольная призма, описанная около цилиндра.

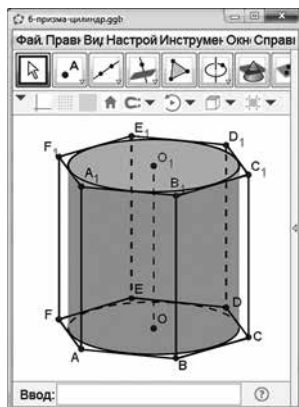


Рис. 83

Пример 3. На рисунке 84 изображена правильная шестиугольная пирамида, вписанная в конус.

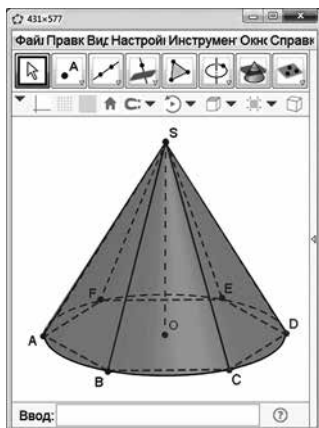


Рис. 84

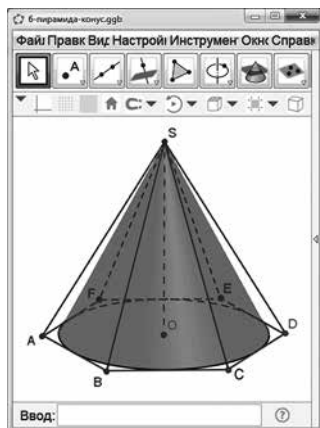


Рис. 85

Пример 4. На рисунке 85 изображена правильная шестиугольная пирамида, описанная около конуса.

Пример 5. На рисунке 86 изображена сфера с центром в начале координат и радиусом 2. На ней дополнительно изображены экватор и два меридиана, лежащие в координатных плоскостях.

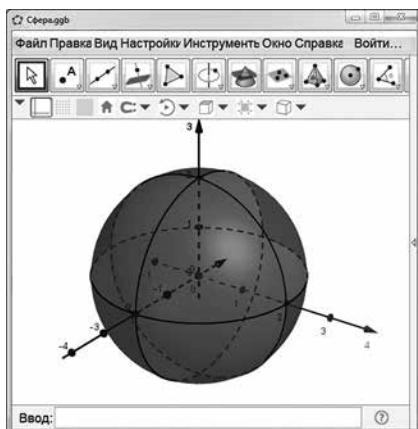


Рис. 86

Пример 6. На рисунке 87 изображена сфера, вписанная в цилиндр.

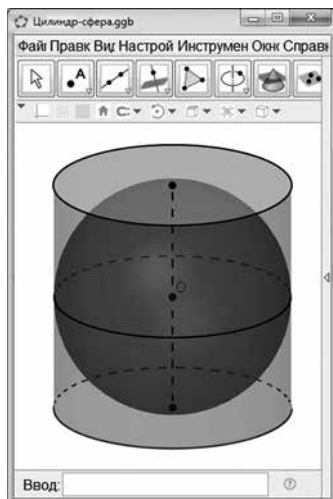


Рис. 87

Пример 7. На рисунке 88 изображена сфера, описанная около цилиндра.

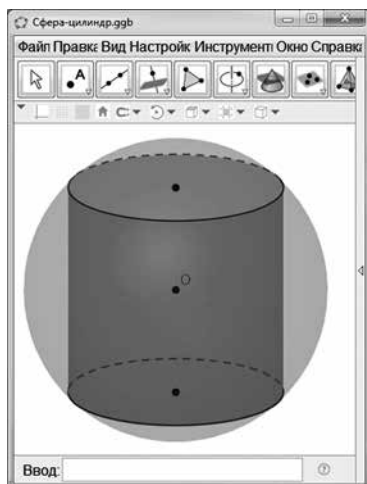


Рис. 88

Пример 8. На рисунке 89 изображена сфера, вписанная в конус.

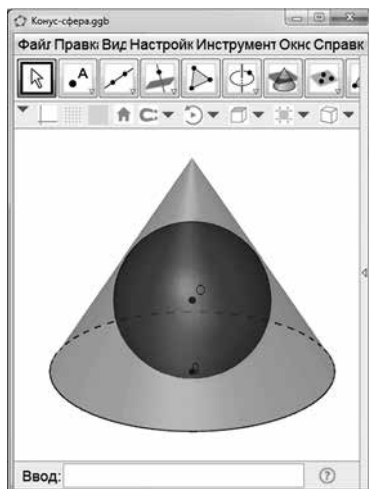


Рис. 89

Пример 9. На рисунке 90 изображена сфера, описанная около конуса.

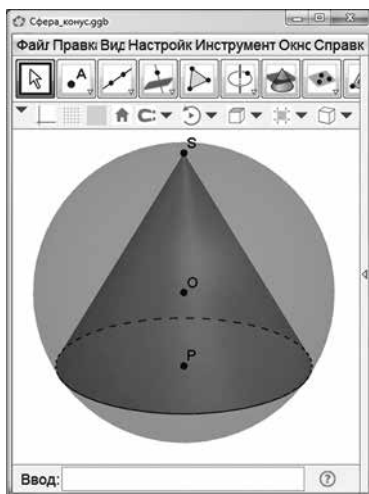


Рис. 90

Пример 10. На рисунке 91 изображена сфера, вписанная в куб.

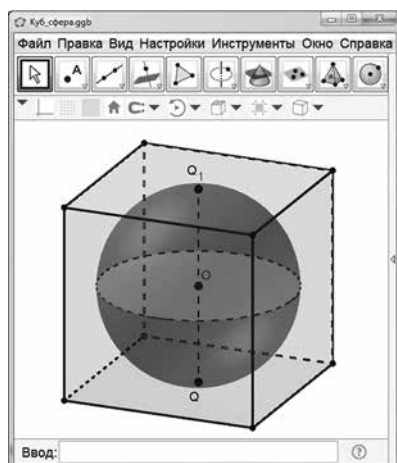


Рис. 91

Пример 11. На рисунке 92 изображена сфера, описанная около куба.

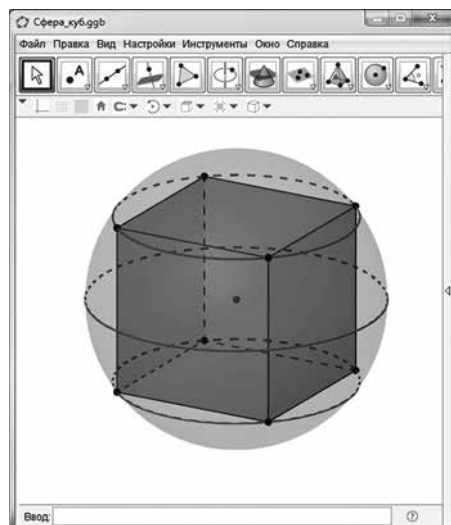


Рис. 92

Пример 12. На рисунке 93 изображена сфера, вписанная в тетраэдр.

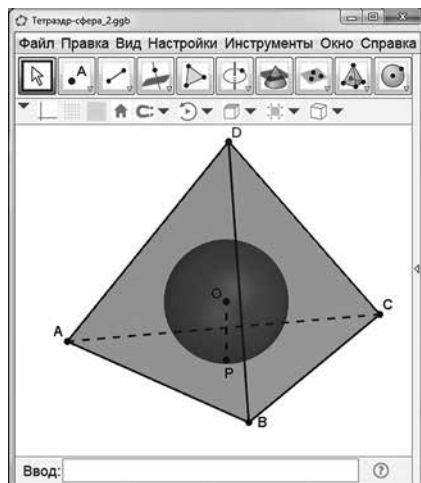


Рис. 93

Пример 13. На рисунке 94 изображена сфера, описанная около тетраэдра.

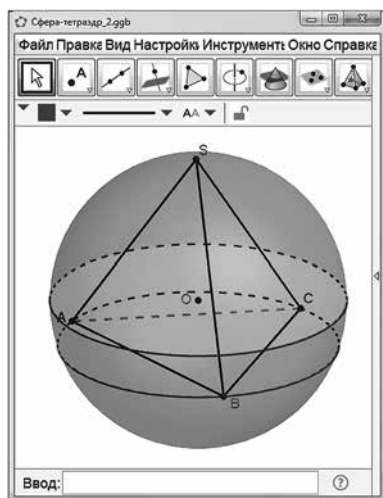


Рис. 94

Пример 14. На рисунке 95 изображена сфера, вписанная в правильную треугольную призму.

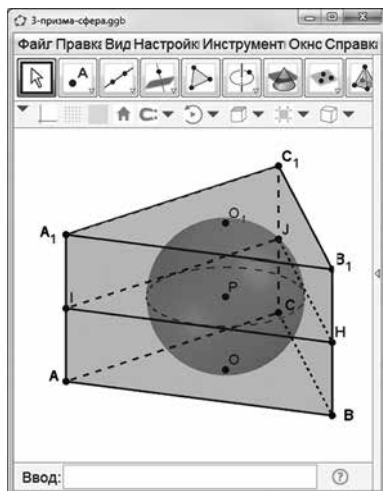


Рис. 95

Пример 15. На рисунке 96 изображена сфера, описанная около правильной треугольной призмы.

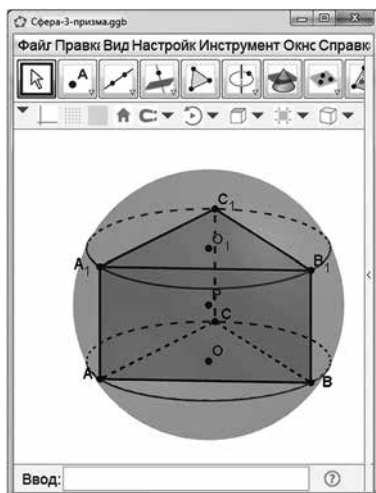


Рис. 96

Пример 16. На рисунке 97 изображена сфера, вписанная в правильную шестиугольную призму.

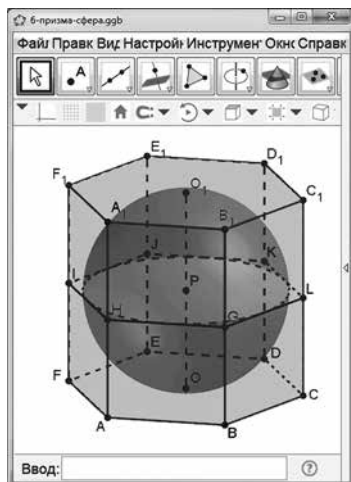


Рис. 97

Пример 17. На рисунке 98 изображена сфера, описанная около правильной шестиугольной призмы.

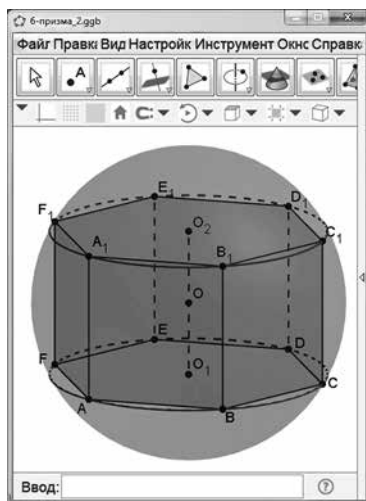


Рис. 98

Пример 18. На рисунке 99 изображена сфера, вписанная в правильную четырехугольную пирамиду.

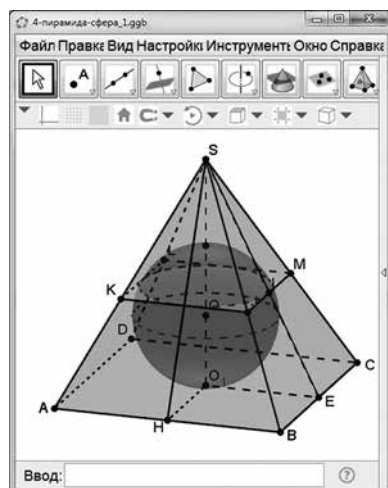


Рис. 99

Пример 19. На рисунке 100 изображена сфера, вписанная в правильную шестиугольную пирамиду.

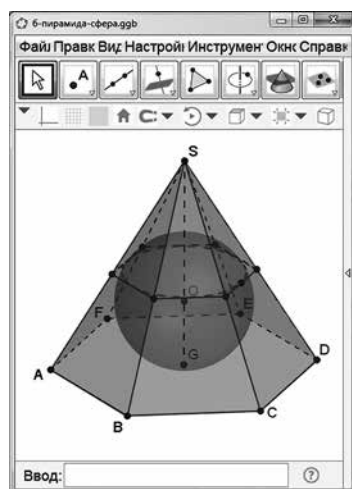


Рис. 100

6. Поворот. Фигуры вращения

Инструмент «Вращать объект вокруг точки» программы GeoGebra позволяет изобразить фигуру, полученную из данной фигуры поворотом на данный угол. Для этого нужно изобразить фигуру, провести прямую, которая будет осью поворота. Затем левой кнопкой мыши указать фигуру и ось поворота. Откроется окно, в котором нужно указать величину угла поворота и нажать «Enter».

Пример 1. На рисунке 101 показана правильная треугольная призма и призма, полученная из нее поворотом вокруг прямой, проходящей через центры оснований, на угол 60° . Общей частью исходной призмы и повернутой является правильная шестиугольная призма.

Пример 2. На рисунке 102 показан куб и куб, полученный из него поворотом вокруг прямой, проходящей через центры противоположащих граней, на угол 45° . Общей частью исходного куба и повернутого является правильная восьмиугольная призма.

Пример 3. На рисунке 103 показан тетраэдр $ABCD$ и тетраэдр, полученный из него поворотом вокруг прямой,

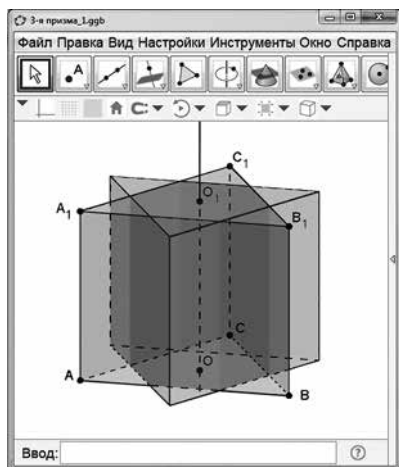


Рис. 101

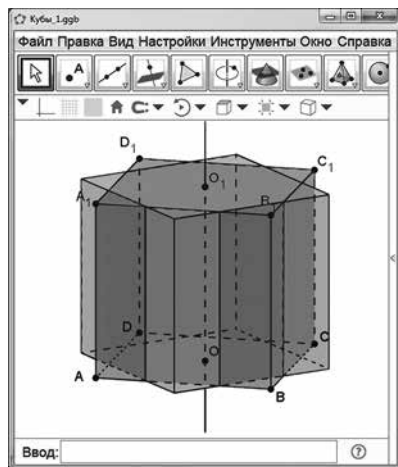


Рис. 102

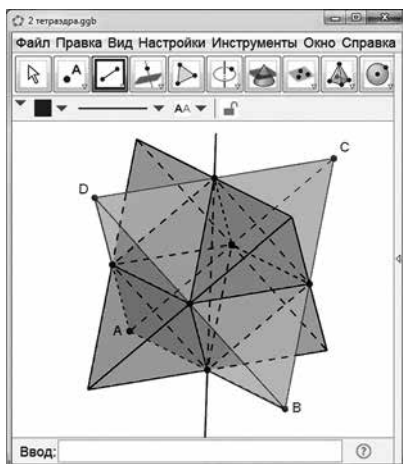


Рис. 103

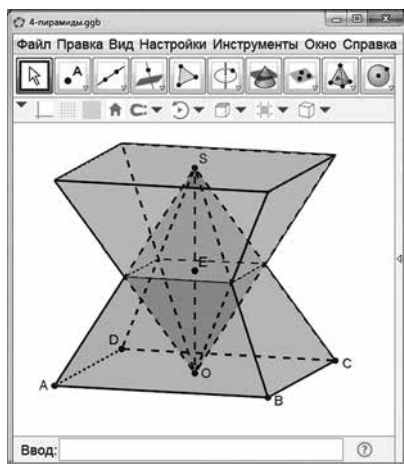


Рис. 104

проходящей через середины противоположных ребер, на угол 90° . Общей частью исходного тетраэдра и повернутого является октаэдр.

Пример 4. На рисунке 104 показана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и пирамида, полученная из нее центральной симметрией относительно середины E высоты SO . Общей частью исходной пирамиды и симметричной является правильная четырехугольная бипирамида.

Пример 5. На рисунке 105 показан куб и куб, полученный из него поворотом на угол 60° вокруг прямой, содержащей диагональ AC_1 куба. Общей частью исходного куба и повернутого является правильная шестиугольная бипирамида с вершинами A и C_1 .

Пример 6. На рисунке 106 показан куб и куб, полученный из него поворотом на угол 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер куба. Общей частью исходного куба и повернутого является многогранник, составленный из правильной четырехугольной призмы, на основания которой поставлены равные правильные четырехугольные пирамиды.



Рис. 105



Рис. 106

Инструмент «Вращать объект вокруг точки» можно использовать для создания анимации вращения фигуры. Для этого нужно изобразить фигуру, провести прямую, которая будет осью вращения. Создать ползунок, в котором угол α изменяется от 0° до 360° . Левой кнопкой мыши указать фигуру и ось вращения. Откроется окно, в котором в качестве угла поворота нужно указать α . После этого нажать правой кнопкой мыши на ползунок и запустить анимацию. Фигура будет вращаться вокруг указанной прямой.

Пример 7. На рисунке 107 показан конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой, содержащей его катет BC .

Пример 8. На рисунке 108 показана фигура, составленная из двух конусов с общим основанием, полу-

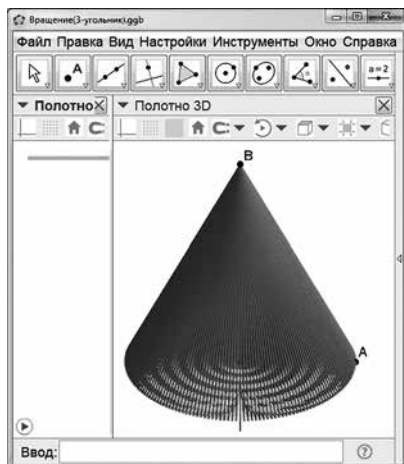


Рис. 107

ченная вращением квадрата $ABCD$ вокруг прямой, содержащей его диагональ.

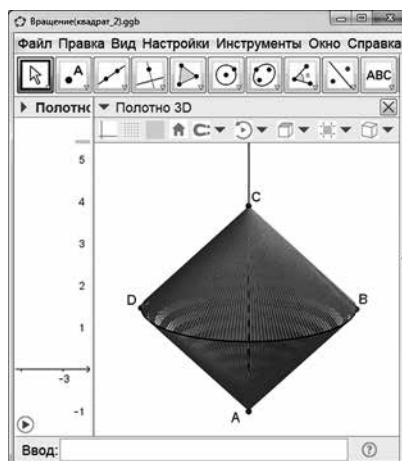


Рис. 108

Пример 9. На рисунке 109 показана фигура, называемая тором, полученная вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости этой окружности и не имеющей с ней общих точек.

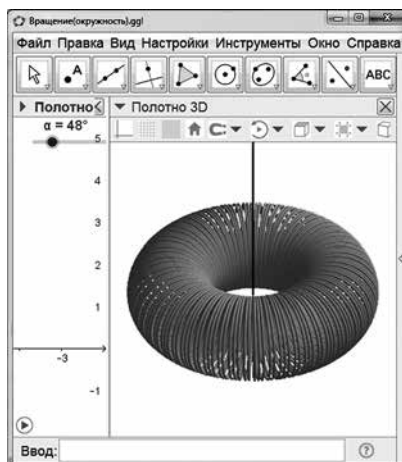


Рис. 109

Пример 10. На рисунке 110 показан гиперболоид вращения. Он получается вращением прямой, скрещивающейся с осью вращения.

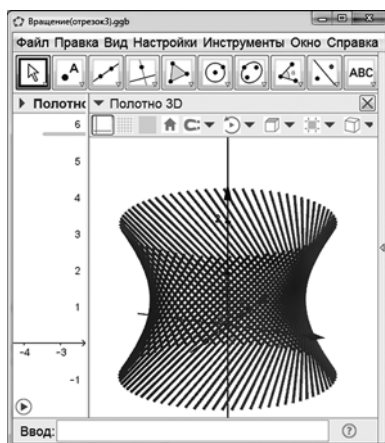


Рис. 110

Пример 11. На рисунке 111 показана фигура, полученная вращением куба вокруг прямой, содержащей его диагональ. Поверхность этой фигуры состоит из боковых поверхностей двух равных конусов и гиперболоида вращения.

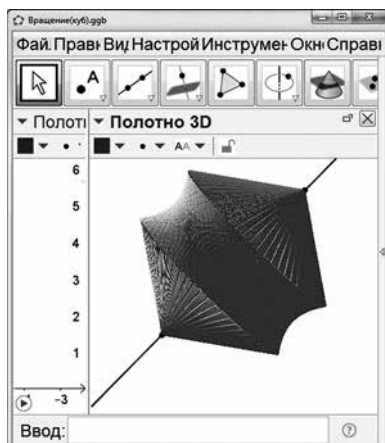


Рис. 111

Пример 12. На рисунке 112 показана фигура, полученная вращением тетраэдра вокруг прямой, проходящей через середины его противоположащих ребер. Поверхность этой фигуры состоит из двух равных кругов и гиперboloида вращения.

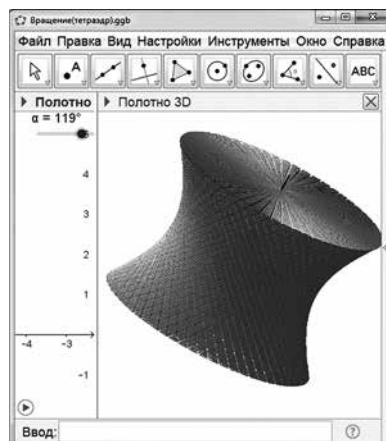


Рис. 112

Ответы

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. 0,5 см. 2. Касаются внутренним образом. 3. 3 см.
4. 19π см². 5*. 7 см.

Вариант 2

1. 5,5 см. 2. Касаются внешним образом. 3. 8 см.
4. 3 : 4. 5*. 2 см.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. 160 см². 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. 3. 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 5*. π .

Вариант 2

1. 80 см². 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. 8. 4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5*. 2 π .

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. 5. 2. 3 л. 3. 2. 4. $6\sqrt{3}$. 5*. 4.

Вариант 2

1. 4. 2. 2 см. 3. 128л. 4. $2\sqrt{3}$. 5*. $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. 16. 2. $\overline{AA_1}$. 3. 2. 4. 1. 5*. $-\overline{AB} + \overline{AA_1} + \overline{AC}$.

Вариант 2

1. 20. 2. $\overline{AA_1}$. 3. 2. 4. 1. 5*. $-\overline{AC} + \overline{AA_1} + \overline{AB}$.

Контрольные работы

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. $\sqrt{2}$. 2. 1. 3. $\frac{\sqrt{14}}{2}$. 4. 5. 5*. $2\frac{2}{3}$.

Вариант 2

1. $\sqrt{6}$. 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. $\frac{\sqrt{29}}{2}$. 4. 6. 5*. 3.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. $1\frac{1}{3}$. 2. 72π . 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 4*. $\frac{Q \cdot d}{2}$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{3}$. 2. 9π . 3. $\frac{\pi}{3}$. 4*. $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. $(3, -1, 1)$. 2. $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$.
3. $x - y + 3z - 18 = 0$. 4. $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

5*.
$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - t, \\ z = -3 + 7t. \end{cases}$$

Вариант 2

1. $(4, 0, -1)$. 2. $x^2 + (y + 5)^2 + (z - 6)^2 = 9$.
3. $-3y + 5z - 3 = 0$. 4. $3x - 2y + z - 2 = 0$.

5*.
$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -3 + t, \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

Оглавление

Введение	3
Примерное тематическое планирование	7
Методические рекомендации	10
Глава I. Круглые тела	10
1. Сфера и шар	10
2. Взаимное расположение сферы и плоскости, сферы и прямой	11
3. Взаимное расположение двух сфер	12
<i>Самостоятельная работа 1</i>	13
4. Фигуры вращения. Цилиндр	14
5. Фигуры вращения. Конус	17
<i>Самостоятельная работа 2</i>	19
Глава II. Вписанные и описанные фигуры в пространстве	21
6. Многогранники, вписанные в сферу. Призма	21
7*. Многогранники, вписанные в сферу. Пирамида	22
8. Многогранники, описанные около сферы	23
<i>Контрольная работа 1</i>	25
9. Вписанные и описанные цилиндры	26
10. Вписанные и описанные конусы	28
Глава III. Объем. Площадь поверхности	29
11. Объем фигур в пространстве	29
12. Принцип Кавальери. Объем призмы и цилиндра	30
13. Объем пирамиды и конуса	31
<i>Самостоятельная работа 3</i>	34
14. Объем шара и его частей	35
15. Площадь поверхности	36
<i>Контрольная работа 2</i>	38
Глава IV. Векторы	39
16. Векторы в пространстве	39
17. Операции над векторами	39

18.	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	41
	<i>Самостоятельная работа 4</i>	42
Глава V. Координаты		43
19.	Прямоугольная система координат в пространстве	43
20.	Расстояние между двумя точками в пространстве. Уравнение сферы	44
21.	Координаты вектора	45
22.	Уравнение плоскости в пространстве	45
23*.	Уравнения прямой в пространстве	46
	<i>Контрольная работа 3</i>	48
24*.	Аналитическое задание пространственных фигур	49
25*.	Аналитические методы нахождения расстояний и углов в пространстве	50
Приложение		54
	Использование компьютерной программы GeoGebra для моделирования пространственных фигур	54
1.	Инструменты GeoGebra	54
2.	Взаимное расположение прямых в пространстве ...	60
3.	Расстояния в пространстве	65
4.	Сечения	71
5.	Вписанные и описанные фигуры	77
6.	Поворот. Фигуры вращения	86
Ответы		92
	Самостоятельные работы	92
	Контрольные работы	93

Учебно-методическое издание

**Смирнов Владимир Алексеевич,
Смирнова Ирина Михайловна**

Геометрия
Базовый и углубленный уровни
11 класс

Методическое пособие для учителя

Редактор *С. В. Бахтина*
Художественное оформление *Э. В. Алексеев*
Внешнее оформление *Н. А. Новак*
Компьютерная верстка: *Э. В. Алексеев*
Корректор *С. О. Никулаев*

Подписано в печать 28.04.20. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 300. Заказ №

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3
тел. (495)181-53-44, e-mail: binom@blbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Приобрести книги издательства
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
можно в магазине по адресу:
Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
тел. (495)181-60-77, e-mail: shop@blbz.ru
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются
Коммерческим департаментом издательства:
тел. (495)181-53-44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в