МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Э.И. Александрова

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ *в начальной школе*

2 класс

Пособие для учителя

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

Александрова, Э.И.

Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс: Пособие для учителя. — электрон. текст. дан. (43 Мб) — 1 опт. компакт. диск (CD-ROM).

Пособие содержит описание методов, форм организации и общения детей, новые методические приемы, которые помогут учителю при реализации идей развивающего обучения на материале обучения математике во 2 классе.

Пособие написано в соответствии с программой обучения математике Э.И. Александровой в начальной школе.

Минимальные системные требования:
Pentium III 1 ГГц (или аналог от AMD), 256 Мб ОЗУ, видеокарта с 32 Мб памяти, 64 Мб свободного места на HDD, 32x CD-ROM, клавиатура, мышь.
Windows 2000sp4/XPsp3/Windows Vista/Windows 7, Windows 8,
Adobe Acrobat Reader версии 7.0 и выше.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
Тел.: (495) 181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

ОТ АВТОРА

Уважаемые коллеги!

Предлагаемое методическое пособие является частью учебно-методического комплекта по математике, включающего учебник для 2 класса (в двух частях) и две учебные тетради.

Это пособие — вторая книга для учителя, раскрывающая методику обучения математике по системе Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова. В первой книге были подробно описаны методические приемы, используемые в обучении, в схематичной форме даны принципы конструирования и подбора заданий, рассмотрены особенности формирования учебных действий при решении учебно-практических и учебных задач. Поэтому в этой книге нет смысла вновь возвращаться к этим вопросам. Но хотелось бы напомнить о рефлексивном характере учебника.

Необходимым условием усвоения математического содержания в форме учебной деятельности является выполнение ребенком сначала предметных действий, которые нельзя заменить рассмотрением иллюстраций в учебнике, а затем умственных.

Формирование умственных действий происходит посредством перехода от предметно-преобразующих действий к умственным через графические и знаковые (буквенно-знаковые) модели, в которых зафиксировано то общее отношение, которое составляет смысл учебной задачи.

В данном методическом пособии описаны системы учебных ситуаций, приводящих к постановке и решению учебной или учебно-практической задачи. Задания из учебника — а они не читаются в классе — помогут ребенку воспроизвести после урока то, о чем говорилось в классе, дадут возможность подвести итог изученному на уроке материалу.

Первая часть учебника для 2 класса по структуре не отличается от учебника для 1 класса. А вот во второй части учебника тема «Сложение и вычитание многозначных чисел» представлена в форме математических рассказов от имени детей 3 класса. Естественно, что эти рассказы не читаются на уроке, они, как и содержащиеся в них задания, предназначены для восстановления в памяти детей логики коллективного рассуждения в классе. У ребенка во время урока необходимо создать целостную картину, целостное представление о решении поставленной задачи. Восприняв целое, дети, без сомнения, смогут выделить его составляющие, которые и станут предметом изучения. Тренируя детей в решении частных задач, основанных на *общем способе действия*, не забывайте о том, чтобы ребенок не терял связь между частями и целым. Нужно стремиться к тому, чтобы ребенок понимал не только как выполнять те или иные задания, но и зачем они необходимы, чему он учится, выполняя эти задания, как научить других решать такие же задачи.

Ответить на вопросы, **зачем**, **чему** и **как**, — значит обратиться к самому себе, к обоснованию собственных действий. Такой подход к изучению понятий создает необходимые предпосылки как для более глубокого понимания самой математики, логики ее построения, так и для формирования основ теоретического мышления: рефлексии, анализа, планирования, для развития памяти, воображения и других познавательных процессов.

Организуя на уроке совместную деятельность детей, важно представлять, какие вопросы могут возникнуть в процессе обсуждения, какие варианты решений могут предложить дети, что может стать предметом дискуссии.

Для того чтобы представить содержание атмосферы совместных рассуждений и возможных диалогов, в учебник включены задания, в которых описаны точки зрения детей. Нет смысла напоминать, что читать объемные тексты в этих заданиях не нужно. Их назначение уже описано выше, а принцип подбора заданий к уроку тот же, что и в 1 классе. Для индивидуальной работы дети могут выбирать те задания, которые им нравятся. Выполнив задание, они должны обосновать свой выбор.

Если заданий по данному разделу много, то их можно распределить по группам. Внутри группы дети сами организуют свои действия: либо сначала обсуждают способы выполнения, а затем каждый самостоятельно пробует выполнить эти задания, либо сначала каждый пробует выполнить то или иное задание, а потом сравнивает свой способ решения со способами других детей.

Если заданий, представленных в учебнике, окажется недостаточно, то их число учитель всегда может увеличить. Однако не количество заданий, а *качество*, т. е. *глубина осмысления* способов их выполнения, составляет основную *цель обучения*.

В дополнение к учебнику подготовлены две учебные тетради, содержащие тренировочные задания для нуждающихся в них детей и задания повышенной трудности для желающих углубить свои знания и умения.

Как учебник, так и тетради могут быть использованы учителями, работающими по различным программам, но особо эффективными они будут для тех, кто прошел переподготовку в ИУУ по программам развивающего обучения.

Пользуясь случаем, хочу поблагодарить всех учителей, с которыми имела возможность общаться во время курсов, семинаров, конференций, за тот неоценимый вклад в становление этой системы обучения, и данной программы в частности. Отдельная благодарность Варваре Игоревне Желтухиной и ее ученикам за бескорыстное участие в подготовке и апробации этого учебно-методического комплекта, за душевность и готовность помочь. Спасибо!

ВВЕДЕНИЕ

Главная цель изучения курса математики в начальной школе, как известно, состоит в том, чтобы сформировать у детей полноценную концепцию действительного числа, основой которого является понятие величины. Именно это понятие и доминирует в основном содержании дочислового периода, который составляет программу обучения в 1 классе. К концу дочислового периода у учащихся складывается содержательное расчлененное представление о величинах, их свойствах, операциях над ними (сравнение, сложение, вычитание) и свойствах этих операций (свойства равенства, неравенства, сложения), формируется умение решать уравнения и задачи в буквенно-знаковой форме. Таким образом, до усвоения понятия числа ребенок может фиксировать результаты разностного сравнения предметно представленных величин с помощью таких буквенных формул, как $A = B$, $A < B$, $A > B$, и производить преобразования типа $A + B = C$, $A + B > C$, $A + B < C$, $A = B - C$, $A + C = B + C$ и др., опираясь на свойства отношений.

Однако в некоторых ситуациях трудно или вообще невозможно выполнить непосредственное (разностное) сравнение величин, установить отношение между ними. Например, когда предметы пространственно удалены друг от друга и нет возможности их приблизить или предметы существуют в разные временные периоды. Простейшая ситуация, с которой сталкиваются дети, — это сравнение длин отрезков, изображенных на листе бумаги или на доске так, что невозможно соотнести их длины на глаз или непосредственно взять их в руки и наложить один на другой. Это приводит детей к мысли о необходимости поиска подходящего способа решения задачи сравнения величин в ситуации, когда нельзя *непосредственно* сравнивать объекты.

Дети предлагают свои способы действия, которые в итоге сводятся к необходимости использования *посредника*, т. е. приходят к выводу о том, что в аналогичных ситуациях (условиях) нужно выполнять опосредствованное сравнение.

Как выполнять такое сравнение? Какими средствами его можно выполнить и к каким результатам это приведет? Поиск ответа на эти и другие вопросы приводит ребенка к решению учебной задачи по отысканию нового способа действия, предусматривающего анализ и теоретическое (содержательное) обобщение. Решение этой задачи требует от ребенка выполнения определенных действий, которые и называют учебными, включающих принятие от учителя или самостоятельную *постановку* учебной задачи, *преобразование* условий задачи с целью обнаружения всеобщего отношения изучаемого объекта, *моделирование* выделенного отношения в предметной, графической и буквенной формах, *преобразование* модели отношения для изучения его свойств «в чистом виде», *построение системы* частных задач, решаемых общим способом, *контроль* за выполнением предыдущих действий и *оценку* усвоения общего способа как результата решения данной учебной задачи (Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. М.: — Интор, 1996. — С. 159–160).

Рассматривая конкретную учебную задачу, требующую открытия и усвоения *общего способа опосредствованного* разностного сравнения величин, дети осуществляют *учебные действия*, позволяющие решить эту задачу, опираясь на *кратное сравнение величин с помощью числа*.

Суть нового способа — в использовании *посредника*, которым первоначально выступает мерка, равная одной из сравниваемых величин (этот способ сравнения фактически уже использовался детьми раньше, например, при сравнении периметров фигур с помощью нитки или проволоки), а затем и *число*, которое вместе с меркой (сначала меньшей, чем заданная величина, а затем и большей ее) служит средством для воспроизведения такой же величины в другом месте или в другое время. Появляются *задача измерения* и обратная ей *задача отмеривания*, которые сначала требуют ответа на вопрос, *какие предметы* можно использовать в качестве той или иной мерки, сформулировав требования к ним (одно из них — это неизменность свойства при перемещении в пространстве или с течением времени), затем приводят к исследованию вопроса о том, как в разное время разными людьми назывались и записывались числа, которые получались в результате измерения, и, наконец, появляется основная исследовательская (собственно учебная) задача, требующая оценки отношений между величиной и меркой (ясно, что речь идет о величине и мерке одного рода). Теперь характеристикой величины является число, которое зависит не только от самой этой величины, но и от выбранной мерки (единицы измерения).

Число как кратное отношение величин одновременно является *результатом измерения* величины и *средством для ее восстановления*.

Это общее понимание числа фиксируется в графической модели, которой становится числовая прямая, и в буквенных обозначениях чисел: $a = \frac{A}{E}$, где A — измеряемая величина, E — мерка того же рода.

Теперь, сравнивая числа a и b, полученные в результате измерения двух величин A и B одной и той же меркой E, мы сможем опосредствованно сравнивать величины, и наоборот, конструирование операций над числами будет опираться на соответствующие операции над величинами. Таким образом, появляется число, которое рассматривается не только как результат действия измерения-отмеривания, т. е. как количественное и порядковое число, но и как результат действий с другими числами.

Далее рассмотрим подробно те учебно-практические задания для каждой темы программы, которые приводят ребенка к решению учебной задачи, связанной с поиском, обнаружением, овладением общим способом опосредствованного сравнения величин и изучением свойств, характеризующих *кратное отношение величин*, фиксация которого в буквенно-знаковой модели как раз и обозначает число (в общем случае — действительное).

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ВО 2 КЛАССЕ

4 ч × 34 нед. = 136 ч

I полугодие (64 ч)

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Учебник, книга 1. Глава 1. Откуда появились числа. Как люди записывают числа (20 ч)

1. Проверочная работа на решение задач, связанных с описанием отношений между величинами с помощью схем и формул. Переход от схемы к формулам и наоборот (повторение). Анализ работы: составление справочника ошибок (***задания 1–8***[1]) .... 2 ч
2. Подбор величины по заданному отношению (повторение). Решение текстовых задач. Проверочная работа (***задания 9–16***) .... 3 ч
3. Подбор мерок, удобных для измерения величин. Простые и составные мерки. Построение величин с помощью мерки и числа. Проверочная работа (***задания 17–27***) .... 3 ч
4. Число как результат измерения величины и как средство для ее восстановления. Игра «Я измеряю, а ты отмеривай». Формулы: $\frac{A}{E} = a$ и $A = a\,E$ (например: $\frac{A}{E} = 3$ и $A = 3E$). Компоненты действия измерения (***задания 28–29***) .... 2 ч
5. Запись числа в форме меток, с помощью считалок (***задания 30–36***) .... 2 ч
6. Знакомство с различными нумерациями. Использование различных нумераций для записи результатов измерения (***задания 36–37)*** .... 1 ч
7. Сравнение чисел, записанных в различных нумерациях, с помощью соответствующих величин и наоборот (***задания 38–42***) .... 1 ч
8. Составление собственных нумераций и их использование (***задание 43***) .... 1 ч

---

[1] Если рекомендуемых на урок заданий много, они могут быть выполнены по выбору ребенка либо распределены между группами детей или между детьми в группе.

9. Зависимость между величиной, меркой и числом. Проверочная работа (***задания 44–49***) .... 2 ч

10. Решение задач, связанных с отношением между величиной, меркой и числом. Проверочная работа. Составление справочника ошибок (***задания 50–74***) .... 3 ч

Учебник, книга 1. Глава 2. Числовая прямая — какая она? (15 ч)

11. «Изобретение» линейки как предметной модели процесса измерения. Знакомство с приборами («линейками») для измерения различных величин. Шкалы приборов (***задания 75–80***) .... 1 ч

12. Конструирование числовой прямой и числового луча как нового вида графической модели (схемы), отражающей результат и процесс измерения (***задания 81–83***) .... 1 ч

13. Место числа на числовой прямой. Число ноль как начало отсчета. Проверочная работа (***задания 84–86***) .... 1 ч

14. Условия, необходимые для построения числовой прямой: наличие начала отсчета, направления и единичной мерки (***задания 87–91***) .... 2 ч

15. Поиск места числа и поиск начала по его месту на числовой прямой. Проверочная работа (***задания 92–94, 108***) .... 2 ч

16. Сравнение чисел с помощью числовой прямой. Обозначение числа буквой. Знакомство с числовым кругом и другими числовыми линиями (***задания 95–97, 109, 110***) .... 2 ч

17. Последующее число и предыдущее число. Формула числа, предыдущего данному и последующего. Сравнение чисел. Проверочная работа (***задания 98–107, 111, 112***) .... 2 ч

18. Решение задач (***задание 113***) .... 2 ч

19. Контрольная работа по итогам четверти и ее анализ. Составление справочника ошибок .... 2 ч

ТЕМА 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ

Учебник, книга 1. Глава 3. Как выполнять сложение и вычитание на числовой прямой (29 ч)

20. Сравнение чисел с помощью числовой прямой и линейки. Изготовление линейки с шагом, равным шагу на числовой прямой (***задания 114–116***) .... 1 ч

21. Сравнение чисел с помощью двух линеек. Изготовление пар одинаковых линеек. Конкурс линеек (***задания 117–120***) .... 3 ч

22. Сложение чисел с помощью двух одинаковых линеек (***задания 121–127***) .... 2 ч

23. Вычитание чисел с помощью двух линеек .... 2 ч

24. Сложение и вычитание чисел с помощью двух линеек. Проверочная работа (***задания 128–130***) .... 2 ч

25. Решение примеров и задач на вычисления с помощью линеек. Проверочная работа (***задания 131–132***) .... 2 ч

26. Сравнение, сложение и вычитание чисел с помощью двух и более числовых лучей или числовых прямых. Проверочная работа (***задания 133–140***) .... 2 ч

27. Сложение и вычитание чисел с помощью одной числовой прямой. Проверочная работа (***задания 141–142***) .. 2 ч

28. Присчитывание и отсчитывание как новый способ нахождения суммы и разности с опорой и без опоры на числовую прямую. Проверочная работа (***задания 143–144, 166***) .... 3 ч

29. Решение и составление математических выражений, уравнений и задач с заменой буквенных данных на числовые данные (в пределах десятка) и наоборот (***задания 151–181***) .... 4 ч

30. Контрольная работа по итогам 2-й четверти и ее анализ. Составление справочника ошибок .... 2 ч

31. Итоги полугодия: решение задач на определение и изменение порядка действий с опорой на схему. Решение задач на сложение и вычитание:
а) с подбором подходящих чисел к заданному сюжету.......... 2 ч
б) с подбором сюжетов к схемам с заданными числами (***задания 153–156, 159***).. 2 ч

II полугодие (72 ч)

ТЕМА 3. МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Учебник, книга 1. Глава 4. Как появилось многозначное число (26 ч)

1. Задачи на измерение (отмеривание). Повторение способа измерения величины с помощью мерки. Ситуация, когда величина намного больше мерки. Набор мерок для измерения такой величины. Выбор подходящей мерки (***задания 182—186***) .... 2 ч

2. Измерение величины с помощью набора мерок. Запись результата измерения. Проверочная работа (***задания 187—189***) .... 3 ч

3. Табличная форма записи результата измерения. Построение величины с помощью табличной (позиционной) формы записи числа (***задания 190—192***) ...... 2 ч

4. Составление заготовок для записи числа. Понятие разряда. Проверочная работа (***задания 193—197***).................... 3 ч

5. Определение отношения между мерками. Фиксация этих отношений (***задания 198—201***) .... 2 ч

6. Построение систем мерок, в которых отношение между мерками выражено одним и тем же числом (основание системы, или коэффициент укрупнения). Проверочная работа (***задания 202—205***)................................. 3 ч

7. Измерение и построение величины с помощью системы мерок с заданным основанием системы. Проверочная работа (***задания 206—210***)................................. 4 ч

8. Системы счисления. Запись и чтение чисел в различных системах счисления. Место нуля в записи многозначных чисел. Контрольная работа и ее анализ. Составление справочника ошибок (***задания 211—217***) .... 4 ч

9. Десятичная система счисления. Знакомство с названиями первых четырех разрядов. Чтение и запись чисел, заданных в десятичной системе счисления. Проверочная работа. Из истории о системах счисления (***задания 218—226***) .... 3 ч

Учебник, книга 2. Глава 1. Как сравнивают многозначные числа (4 ч)

10. Сравнение многозначных чисел. Место многозначного числа на числовой прямой (***задания 1—23***).............................. 4 ч

ТЕМА 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Учебник, книга 2. Глава 2. Как складывают и вычитают многозначные числа (42 ч)

11. Постановка задачи сложения многозначных чисел как переход от присчитывания и отсчитывания к конструированию способа выполнения действия «в столбик». Конструирование общего способа. Запись «в столбик» при сложении многозначных чисел (***задания 24—27***) .... 2 ч

12. Определение разрядов, которые переполняются. Выделение задачи на необходимость знания состава числа — основания системы счисления. Определение переполнения в разряде, когда сумма чисел равна основанию системы счисления (***задания 28—54***) .... 3 ч

13. Проверочная работа .... 1 ч

14. Определение количества цифр в сумме. Проверочная работа (***задания 55—63***) .... 2 ч

15. Постановка задачи на нахождение цифры в каждом разряде суммы. Необходимость составления таблицы сложения многозначных чисел. Составление таблицы сложения (таблица Пифагора) (***задания 64—65***) .... 2 ч

16. Использование таблицы сложения как справочника при сложении многозначных чисел. Исследование свойств таблицы сложения (***задания 66—68***) .... 2 ч

17. Проверочная работа .... 1 ч

18. Постановка задачи запоминания табличных случаев и выделение из них трудных случаев перехода через десяток. Исследование зависимости между цифрами в сумме и изменяющимся слагаемым как основы непроизвольного запоминания. Проверочная работа (***задания 69—70***) .... 2 ч

19. Вычисление сумм многозначных чисел. Решение текстовых задач и уравнений, требующих действий с многозначными числами (***задания 71—97***) .... 4 ч

20. Контрольная работа и ее анализ. Составление справочника ошибок .... 2 ч

21. Задача вычитания многозначных чисел. Конструирование способа (***задания 98—102***) .... 1 ч

22. Определение разрядов, которые «разбиваются» (***задания 103–108***) .... 2 ч

23. Определение количества цифр в разности (***задания 109–118***) .... 2 ч

24. Выделение табличных случаев вычитания. Конструирование способа вычитания с переходом через разряд. Проверочная работа (***задания 119–120***) .... 2 ч

25. Выполнение заданий, требующих сложения и вычитания многозначных чисел (***задания 121–199***) .... 6 ч

26. Итоговая контрольная работа и ее анализ. Составление справочника ошибок и его использование .... 2 ч

27. Конструирование приемов устного сложения и вычитания (***задания 200–225***) .... 3 ч

28. Решение задач повышенной сложности (***задания 226–282***) .... 3 ч

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1.1. ЗАДАЧА НЕПОСРЕДСТВЕННОГО И ОПОСРЕДСТВОВАННОГО СРАВНЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Изучение этой темы было начато в 1 классе, но там речь шла только о непосредственном сравнении величин: дети *подбирали* величину, *равную* данной, *уравнивали* неравные величины путем увеличения или уменьшения одной из них либо одновременного изменения обеих, составляли целую величину из частей и находили часть величины по известному целому и другой части (другим частям).

Во 2 классе учащиеся сталкиваются с ситуацией, при которой известный им способ непосредственного сравнения не подходит, так как предметы, представляющие сравниваемые величины, разделены во времени или в пространстве. В результате дети осознают потребность в новом способе действия. Конструирование такого способа и его фиксация с помощью предметных, графических и буквенно-знаковых моделей и составляет *цель* изучения данной темы. Научиться опосредствованному сравнению величин — это значит научиться:

1) измерять (восстанавливать, отмеривать, строить) величины, осуществляя реальные предметные действия;
2) фиксировать с помощью графической модели собственный способ действия;
3) записывать, читать и сравнивать числа, полученные в результате измерения, составляя формулы, фиксирующие все компоненты действия измерения-отмеривания: величину, мерку и число.

Способ сравнения двух величин с помощью третьей фактически применялся детьми и раньше, но на том этапе он не являлся предметом их исследования. Теперь же эта третья величина (того же рода), необходимая для измерения сравниваемых величин, становится центром внимания. Ее назвали *меркой* — единицей измерения (слово «мера» будем употреблять позже для стандартных мер).

Поиском подходящих мерок, т. е. мерок, удобных для измерения величин, дети и начали заниматься еще в 1 классе. Здесь же нужно начать с заданий, требующих ответа на вопросы:

1) можно ли использовать тот или иной предмет в качестве мерки;

2) что конкретно в этом предмете можно использовать как мерку;
3) в каком случае предмет можно считать неподходящим, неудобным для использования в качестве мерки.

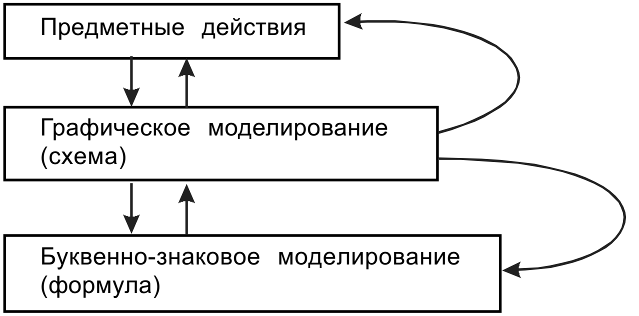
Однако прежде чем приступить к практической работе над такими заданиями, необходимо провести стартовые проверочные работы.

Задания с 1 по 6 мы уже предлагали детям в конце первого учебного года в качестве контрольных. Теперь они могут быть предложены детям для выполнения без всякого специального повторения, с тем чтобы и дети, и учителя смогли спланировать повторение изученного в 1 классе.

На первом уроке предложите каждому ребенку из первых шести заданий выбрать только те, которые он сможет выполнить. После выполнения дайте возможность объединиться в группы тем детям, которые выбрали одни и те же задания. Пусть обсудят:
1) какие ошибки можно допустить при их выполнении;
2) что нужно восстановить в памяти из изученного ранее, с тем чтобы выполнять любое из предложенных заданий.

Без сомнения, дети при обсуждении придут к выводу о том, что нужно восстановить в памяти, что такое величина, с какими величинами они умеют действовать, а именно: сравнивать, складывать, вычитать; как можно изображать величины и действия с ними в графической форме и как их можно описывать с помощью формул, т. е. на языке математики.

Задания с 7 по 18 предназначены для повторения способов сравнения величин и действий с ними на трех основных уровнях: предметных действий и при необходимости предметного моделирования (с помощью полосок), графического моделирования (с помощью отрезков) и буквенно-знакового моделирования (с помощью формул) — с взаимными переходами с одного уровня на другой:



Так, ***задания 7 и 8*** помогут выяснить, овладел ли ребенок понятием отношений «больше» и «меньше» и умеет ли он описать отношения между величинами с помощью схемы.

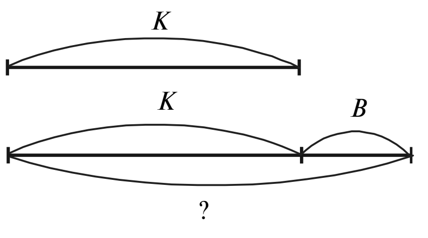
Выполнение этих заданий можно предложить для парной работы: двое учащихся договариваются между собой о том, кто какое из этих заданий будет выполнять, а затем составляют схемы и сравнивают их.

Учитель предлагает научить детей способу получения и построения величины, о которой известно, что она больше или меньше данной.

При этом дети работают с конкретными величинами (длиной, площадью, объемом), носителями которых являются предметы. Это значит, что у учителя на столе должны быть заготовлены, например, полоски, длины которых будут соответствовать данным величинам A и B из задания 7 и A и C из задания 8. Кроме длин полосок, можно использовать объемы (количество) воды (соответственно A, B и C), площади фигур и т. д., с помощью которых дети смогут продемонстрировать *способ* получения величины с опорой на разностное отношение.

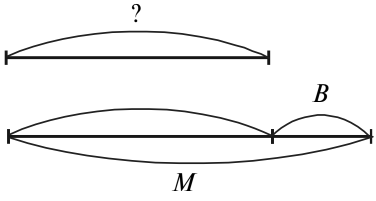
Работа над заданиями 7 и 8 даст возможность перейти к выполнению следующего ***задания 9.*** Для решения данной задачи подходит только схема «в». Остальные схемы нужно использовать для придумывания детьми соответствующих задач. Для этого каждая группа может выбрать для себя одну из оставшихся схем и по ней придумать текст задачи. Таким образом, одновременно разными группами будет придумано еще три задачи. Затем пусть *каждый* ребенок решит одну из придуманных задач, подобрав к ней подходящие числа и выполнив, если это будет возможно, необходимые вычисления.

После описанной работы над данным заданием можно преобразовать любую из данных схем следующим образом. Пусть схема «в» преобразуется в такую:



Предложите детям, опираясь на данный в задании 9 текст, преобразовать его в соответствии со схемой, проанализировав (в группах) те изменения, которые внесены в схему. Понятно, что речь идет об обратной задаче, так как в первой задаче величина B, характеризующая разность между двумя значениями величин, была известной, а теперь стала неизвестной.

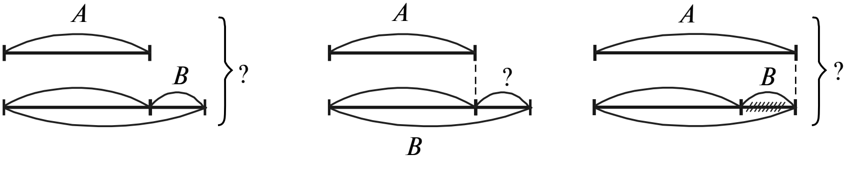
На основании данной схемы можно составить еще одну обратную задачу, в которой неизвестным значением величины оказывается количество деревьев, посаженных в первый день, а известными значениями величин — количество деревьев, посаженных во второй день, и то, на сколько их больше посадили, чем в первый:



В описанных трех задачах отношения между значениями величин одни и те же, ролями меняются только известные и неизвестные значения величин и способ их нахождения: либо с помощью сложения, либо с помощью вычитания.

По итогам работы над задачей предложите детям ***проверочную работу*** на 10–15 минут: «Выбери схему, по которой ты можешь решить задачу, и реши ее. Подбери подходящие числа и, если сможешь, вычисли результат и запиши ответ.

Схема 1 Схема 2 Схема 3



Какая из этих схем подходит к задаче: «В одной банке было 3 литра воды, а в другой — 1 литр. В какой банке воды было больше и на сколько?»?

Какими буквами на схеме обозначены 3 л и 1 л?»

Задание 10 может быть рекомендовано для домашней работы.

Предложите детям подобрать два предмета по выбору, представленному в вариантах от «а» до «г».

Обсуждение поставленного в задании вопроса нужно обязательно выполнить на уроке в группах, сделав вывод о том, что какие бы величины мы ни сравнивали, между ними можно установить отношение либо «равно», либо «больше—меньше».

В данном задании отношение было задано («равно»), поэтому схемы у всех получились одинаковые: отрезки равной длины. Интересно обсудить и то, какими буквами дети обозначили сравниваемые величины. Использование букв A, B, C и т. д. вместо букв L для длины, S для площади, V для объема и M для массы подчеркнет тождественность отношений, независимость их от конкретной величины.

Задание 11 — обратное по отношению к предыдущему. Оно может быть выполнено как в группах (в том числе в парах), так и самостоятельно. Выбор должен быть за ребенком.

Задание сначала выполняется, а затем обсуждается в классе.

Если кто-либо из детей, выполняющих задание в одиночку, или какая-либо группа детей выполнит задание раньше остальных, то предложите им придумать свое такое же задание. Это значит придумать другую схему (схему, описывающую другое отношение), по которой можно было бы подобрать подходящие величины.

Задание 12 лучше выполнить опираясь на фронтальную работу, однако обсуждение того, кто из детей правильно описал результат сравнения величин после изменения одной из них, лучше провести в группах.

Главные вопросы, на которые должны ответить дети: «Как можно узнавать по формуле, какую величину уменьшали? Что в формуле указывает на это?»

Важно, чтобы дети увидели, что Оля и Вова записали одинаковые формулы: если прочитать одну из этих формул не слева направо, а справа налево, то это легко обнаружить. А вот Таня записала неправильно: если из двух равных величин одну уменьшили, то она, естественно, стала меньше, чем другая.

К такому выводу можно прийти, не прибегая к схеме.

Задание 13. Предложите детям выполнить его самостоятельно, а затем пусть они по мере выполнения образуют группы для сопоставления результатов.

Выводы, которые могут быть получены:

1) если затрудняешься установить отношение между величинами, то нужно начертить схему и с ее помощью установить искомое отношение;
2) без опоры на схему можно сравнить величины в том случае, если представляешь, что происходит, когда: а) уменьшали или увеличивали только одну из равных величин; б) $A + C > B$; $A > B - K$; $A < B + M$; равные величины увеличивали или уменьшали на одну и ту же величину ($A + K = B + K$; $A - E = B - E$); если к равным величинам добавить или отнять равные, то отношение будет тем же. Позже этот вывод будет звучать так: равенство не нарушается, если к обеим его частям мы

прибавим или отнимем одно и то же число или выражение; в) одну из равных величин уменьшили, а другую увеличили: $A - D < B + M$;

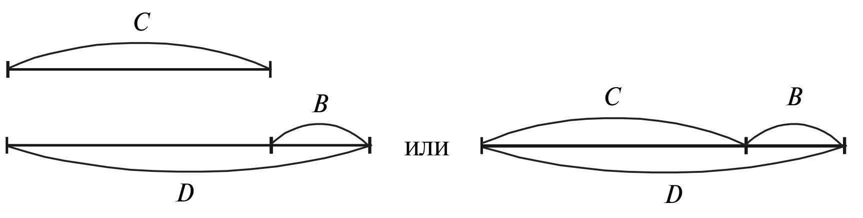
3) если равные величины увеличили или уменьшили, а отношение между величинами, на которые изменили данные, не указали, то эта ситуация должна быть расценена детьми как «ловушка» в связи с неоднозначностью результата. Нельзя установить однозначное отношение между величинами $A + K$ и $B + C$, величинами $B - K$ и $A - C$. Отношение между указанными парами будет зависеть от отношения между величинами K и C: а) если $K > C$, то $A + K > B + C$, а $B - K < A - C$; б) если $K = C$, то $A + K = B + C$ и $B - K = A - C$; в) если $K < C$, то $A + K < A + C$, а $B - K > A - C$.

Фактически речь идет об условиях перехода от равенства к неравенству (условия, при которых нарушается равенство) и от равенства к равенству (условия, при которых равенство не нарушается).

Задание 14 можно предложить для домашней работы с последующим обсуждением в классе. Аналогичное задание можно дать для проверочной работы.

Задание 15 дети выполняют в группе, обсуждая прежде всего «методические» вопросы: «Как научить других? Зачем это нужно уметь делать?»

Схемы, которые могут начертить дети:



Основные формулы к схемам: $C + B = D$; $D - B = C$; $D - C = B$.

Задание 16. Сначала предложите каждой группе выбрать величину, с которой они хотели бы поработать, а затем выполнить задание, обсудив в группах ответ на вопрос. Затем это же задание дети самостоятельно выполняют дома, объясняя взрослым, как они узнают, равны ли величины. Понятно, что речь идет о повторении способов сравнения величин.

Итак, если вы обнаружили у детей проблемы с построением схем, записью формул и трудности при решении обратных задач, обратных переходах, нужно непременно вернуть детей к «ручному» мышлению, т. е. к реальным действиям с предметами, сравнивая которые по тому или иному признаку дети вновь *осмысливают* собственный способ действия.

Такой возврат спустя некоторый период времени, в течение которого у детей интенсивно развивались мышление и речь, дает возможность слабым или медлительным детям осмысливать или переосмысливать собственные действия, которые они могли выполнять и раньше на уровне умений. Знаний, лежащих в основании умений, либо могло у них не быть, либо они на поверку оказались поверхностными.

Задания 17 и 18 предназначены для домашней работы, однако их выполнение зависит от того, как отреагируют на задание дети. Учитель чертит на доске отрезок (задание 17) и просит из дома принести ленточку (нитку и т. д.) *такой же* длины. Если дети не задумаются над способом выполнения такого задания, а для его выполнения нужен помощник (полоска такой же длины, или нитка, или еще что-либо), то задание будет заведомо невыполнимо, о чем важно предупредить родителей. Обсуждение причин невыполнимости задания и приведет ребенка к мысли о необходимости посредника (помощника).

Итогом работы станет вывод: если нельзя сравнить две величины непосредственно (т. е. сразу), то надо использовать помощника-посредника.

Посредником в этом случае может быть либо величина, равная первой (длине отрезка, площади боковой грани кубика в задании 18), причем сама величина будет представлена, естественно, предметом, либо мерка и *число*, сообщающее о том, сколько раз данная мерка вмещается в величину.

Таким образом, для того чтобы в другом месте и в другое время построить (отмерить, восстановить, воспроизвести) величину, равную данной (т. е. подобрать или изготовить предмет, обладающий нужным свойством), необходимо сначала измерить данную величину удобной меркой, а затем с помощью этой мерки и числа, характеризующего отношение измеряемой величины к мерке, отмерить величину такую же, как данная.

Задания с 19 по 21 выполняются в классе и дома. В классе дети производят измерение, в результате которого получают число. Записав, какое было число, и изготовив в классе нужную мерку, дети дома по числу и мерке восстанавливают величину. Проблема, которая может возникнуть у ребенка, связана с тем, что наверняка окажется, что кто-то из них (или из детей «другого» класса) забудет либо то, какая была в классе мерка, либо то, какое получилось число, ведь целью выполнения данных заданий было *само дей-*

ствие измерения, а *не способ* его описания. Возникает необходимость фиксации того, какова была мерка и каково было число, полученное в результате измерения.

Такими способами фиксации могут стать схемы или таблица, представленные в заданиях 22, 23 и 24.

В ***задании 22*** описана игра, которую учитель должен организовать в классе (*читать* по учебнику описание игры *не надо*, этот *текст поможет* ребенку дома рассказать взрослым об игре в классе).

Игра преследует две основные цели. Она позволит:

1) еще раз вернуться к мысли о том, что *один* и тот же предмет (здесь кубик) *обладает рядом свойств*, т. е. является носителем разных величин (длины, площади, объема, массы и т. д.), значит, при использовании конкретных предметов необходимо четко определить, *что* в данном предмете ты собираешься использовать в качестве мерки длины или мерки площади и т. д., а лишь затем выполнять *практическое действие*;

2) осознать необходимость фиксации результата измерения, которым является *число,* и используемой мерки.

Так, в ***задании 23*** дана таблица, в которой изображена мерка и записано число. С помощью мерки и числа нужно восстановить величину, которую измеряли. Нет необходимости в который раз повторять, что носителем величины будет предмет, однако *для упрощения речи* будем продолжать говорить о восстановлении, подборе, изготовлении *величины.* Итак, детям нужно предложить по мерке и числу восстановить величину. Урок следует провести тоже в форме игры без предварительного знакомства с содержанием этого задания по учебнику.

Нужно выставить предметы, которыми как мерками якобы пользовались другие дети, произведшие измерение и получившие число (геометрические фигуры: квадрат, треугольник, угол — вырезать из бумаги, а отрезок изобразить на листе бумаги). Раздав парам или тройкам детей указанные мерки и числа (число можно написать на карточке и выдать в комплекте с соответствующей меркой), предложите детям построить (изобразить и вырезать) величину, которая измерялась.

Мерки под номерами 6—8 можно назвать *составными* после сравнения их с мерками под номерами 1—5, которые могут быть названы *простыми*.

Задание 24 предложите выполнить дома. При обсуждении результатов выполнения этих заданий в классе дети смогут восстановить в памяти понятия *равновеликости* и *равносоставленности*, о которых шла речь еще в первом классе (1 класс, книга 1, задания 33—40).

Задание 25 можно использовать в качестве проверочной работы, а ***задание 26*** предложить выполнить дома.

Задание 27 проигрывается с детьми и предназначено для того, чтобы дети задумались над способом описания отношений между величиной, меркой и числом. Обсудите все детские варианты с позиций того, о чем своей зашифрованной записью, которую придумают дети в группе, они хотят сообщить. Это задание готовит их к игре «Я измеряю, а ты отмеривай», предложенной в ***задании 28***. Цель игры, описание которой читать в классе *не надо* (дома дети смогут по тексту восстановить смысл и результат игры), состоит в том, чтобы осознать потребность и сконструировать в знаковой форме описание способа и результата измерения в виде формулы $\frac{A}{E} = 3$. Если же будут известны мерка и число, а нужно построить (изготовить, восстановить, отмерить, подобрать) величину по мерке и числу, то формула, описывающая способ, будет выглядеть так: $A = 3E$ или $A = E + E + E$.

Задание 29 предназначено для проверки освоения детьми чтения формул (1) и записи в виде формулы словесного описания способов измерения (а): $\frac{D}{E} = 8$ — и построения (б): $B = 3C$.

К этим формулам, компонентами которых являются величина, мерка и число, мы еще не раз вернемся, поэтому нет необходимости отрабатывать переход от формулы (буквенно-знаковая модель) к ее словесному описанию (словесная модель).

1.2. ЧИСЛО КАК РЕЗУЛЬТАТ ДЕЙСТВИЯ ИЗМЕРЕНИЯ

Переход от непосредственного сравнения величин к сравнению чисел, характеризующих величины, требует особого рассмотрения как самого действия измерения и установления связи между величиной, меркой и числом, так и способов письменного и устного описания результата измерения (письменная и устная нумерация) в форме числа, с помощью уже известных детям из дошкольного опыта цифр и соответствующих числительных. Рассматривая запись чисел как исследовательскую задачу, дети должны совершить исторический экскурс, знакомясь с меточной формой числа, с различными древними нумерациями. Известно, что число возникло в глубокой древности, потребовав для себя названия и записи.

Язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними называют системой счисления. Знакомство с позиционными и непозиционными системами счисления необходимо не только учителю начальных классов, но и ученикам, поскольку позволяет, *во-первых*, сконцентрировать внимание детей не на результате измерения, который может быть зафиксирован разными способами (системами счисления), а на самом процессе измерения или построения величины, а *во-вторых*, дает возможность развести в сознании ребенка смысл числа как отношения величин и цифры как знака для его обозначения, проводя аналогию в различии между звуком и буквой в русском языке. Для знакомства с историей этого вопроса предлагаем воспользоваться следующими сведениями:

«Называть числа и вести счет люди научились еще до появления письменности. В этом им помогали, прежде всего, пальцы рук и ног. Издревле употреблялся еще такой вид инструментального счета, как деревянные палочки с зарубками, шнуры и веревки с узлами. Веревочные счеты с узелками употреблялись в России и во многих странах Европы.

Способ «записи» чисел при помощи зарубок или узлов был не слишком удобным, так как для записи больших чисел приходилось делать много зарубок или узлов, что затрудняло не только запись, но и сравнение чисел друг с другом и действия над ними. Поэтому возникли иные, более экономичные записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Наряду с группами по 10 элементов встречались группы по 5, 12, 20 элементов. Так, счет двадцатками использовали люди племени майя. «Следы» такого счета сохранились в датском и некоторых других европейских языках. Иногда применялся счет пятками, а также группами в 12 элементов. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц. Например, число 185 представлялось как 3 раза по 60 и еще 5. Записывалось такое число с помощью всего двух знаков, один из которых обозначал, сколько раз взято по 60, а другой — сколько взято единиц. Древневавилонская система используется до сих пор при измерении времени и углов в минутах и секундах.

Наибольшее распространение получила десятичная система записи чисел. Эта система, принятая сейчас почти всюду, основана на группировании десятками и берет свое начало от счета на пальцах. Десятичная система счисления возникла в Индии в VI в. Однако древняя запись индийских цифр значительно отличается от современной. В течение многих столетий, переходя от народа к народу, старинные индийские цифры много раз изменялись, пока не приняли современную форму.

Первыми заимствовали у индийцев цифры и десятичную систему счисления арабы. Распространению же этого способа записи чисел и правил выполнения арифметических действий над числами способствовала книга среднеазиатского ученого аль-Хорезми «Об индийском счете», написанная им в начале IX в.

Европейцы познакомились с достижениями индо-арабской математики в XI в. Расширение торговли повлекло за собой значительное усложнение счета, появилась потребность в совершенствовании методов счета. Поэтому европейские математики обратились к трудам греческих и арабских ученых, перевели их на латинский язык. С десятичной системой счисления европейцы познакомились через перевод книги аль-Хорезми. В 1202 г. выходит «Книга абака» Л. Фибоначчи, где также вводятся индийские цифры и нуль. С XIII в. начинается внедрение десятичной системы, и к XVI в. она стала повсеместно использоваться в странах Западной Европы.

Распространению десятичной системы в России способствовала книга выдающегося русского педагога-математика Л. Ф. Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», вышедшая в 1703 г. Она являлась энциклопедией математических знаний того времени. Все вычисления в ней проведены при помощи цифр индийской нумерации. В «Арифметике...» выделено особое действие «нумерация, или счисление»: «Нумерация есть счисление (называние) словами всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять значащих; последняя же 0, если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей, то увеличивает в десять раз, как будет показано в дальнейшем». Однозначные числа в книге Л. Ф. Магницкого называются «перстами»; числа, составленные из единиц и нулей, — «суставами»; все остальные числа — «сочинениями». Таблица с названиями круглых чисел доведена Магницким до числа с 24 нулями. В «Арифметике...» в стихотворной форме подчеркнуто: «Число есть бесконечно...»

Различают позиционные и непозиционные системы счисления. В позиционных системах один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Так, шестидесятеричная вавилонская и десятичная системы счисления являются позиционными.

Непозиционные системы характеризуются тем, что каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Примером такой системы может служить римская система, возникшая в средние века. В этой системе счисления имеются знаки для узловых чисел: единица обозначается I, пять — V, пятьдесят — L, сто — C, пятьсот — D, тысяча — M. Все остальные числа получаются при помощи двух арифметических операций — сложения и вычитания. Вычитание производится тогда, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV — четыре, XC — девяносто.

В России до XVII в. в основном употреблялась славянская нумерация, более стройная и удобная, чем римская, но тоже непозиционная. В ней числа изображались буквами славянского алфавита, над которыми для отличия ставили особый знак — титло.

Естественно, что такие системы записи чисел, как римская или славянская, были удобнее, чем зарубки на бирках, поскольку позволяли записывать большие числа. Однако выполнение действий над ними в таких системах было весьма сложным делом. Поэтому на смену им пришла десятичная система счисления»[1].

Рассмотрение непозиционных систем счисления дополнено использованием различных детских считалок и стихов, которые можно заменять теми, которые знают дети. Весь этот раздел носит ознакомительный характер, но, как показывает практика, изучается детьми с огромным удовольствием, давая простор фантазии. Однако каждая из рассматриваемых нумераций имеет ряд недостатков, в отличие от той стандартной системы числительных, с которой дети были знакомы, но не осознавали ее смысла и условий происхождения.

Итак, с ***задания 30*** дети начинают исследовать способы записи числа, рассматривая разные формы числа — от меточной до позиционной.

Однако исследование целесообразно начать не с меточной формы (изображения меток-палочек при откладывании мерок), а с детских считалок, которые детям ближе, причем речь идет как о количественном аспекте числа (число как количественная характеристика величины), так и о порядковом.

С помощью считалок или стихов, которые могут быть использованы в качестве считалок, дети выявляют основные требования к считалке (стиху), которые в дальнейшем и помогут ребенку осмыслить порядковый и количественный аспекты числа:

1) слова в считалке (а они играют роль метки) должны употребляться в определенном порядке;
2) слова в считалке не должны повторяться, т. е. каждое слово должно встречаться только один раз.

Задание 34 позволяет определить, осмыслены ли ребенком указанные требования, а ***задания 31, 32 и 33*** дают возможность их выявить.

Использование таких нестандартных числительных (слов из считалки) дает, с одной стороны, возможность производить счет

---

[1] Стойлова Л. П. Математика: Учебное пособие для студентов средних педагогических учебных заведений. — М.: Академия, 1997.

осмысленно, а не механически повторять знакомые с детства числительные, а с другой стороны, поможет ребенку в дальнейшем осознать необходимые свойства числового ряда, признав ограниченность используемой системы счета. Конструируя общепринятую систему числительных, ребенок сможет осознать основные свойства этой системы:

1) для всех людей числа должны быть одни и те же, так как люди должны понимать друг друга;
2) они должны идти одно за другим в определенном порядке, иначе будет нарушен порядок соответствующих величин;
3) числа в ряду не должны повторяться, а значит, у каждого числа в ряду должно быть свое место, в противном случае одному и тому же числу могут соответствовать разные величины;
4) ряд чисел всегда можно продолжить: какое число ни возьмешь, всегда найдется число, которое будет следовать за ним, а это значит, что всегда найдется величина больше той, которую уже измеряли. Поскольку каждое слово в считалке выполняет роль метки, то словами-метками можно пользоваться как при измерении величины меркой (количественный аспект числа), так и при построении (отмеривании) величины (порядковый аспект числа), однако в обоих случаях необходимо всем знать всю считалку наизусть, поскольку одного слова-метки будет недостаточно. Считалка при этом должна быть бесконечной, иначе для измерения или построения величины ее может не хватить, что явно неудобно.

Осознание этих неудобств использования считалок возвращает ребенка к привычному с раннего детства счету с помощью пальцев (***задание 35***).

Маленькие дети пользуются пальцами, количество которых ограниченно, что тоже неудобно. А вот древние люди и вовсе не умели считать.

Предложите детям представить себя первобытным человеком и поразмышлять о том, как же они могли вести счет. ***Задание 36*** поможет детям действовать так, как мог действовать древний человек. Изучение таблицы цифр, которыми пользовались в разное время разные люди (народы), позволит вернуться к способу сегодняшнего написания цифр. Предложите каждому ребенку сначала записать по 5—6 цифр, которые у него получаются лучше всего.

Выясните путем сопоставления записанных цифр, кто какие цифры записал, считая их легкими для письма, а затем пусть обсудят, в чем трудность написания тех или иных цифр, сформировав группы соответственно «трудным» цифрам. Затем пусть каждый потренируется в написании цифр или их элементов столько, сколько он сам считает нужным. Красиво получившиеся цифры дети пусть, как и прежде, отметят другим цветом.

Задания 37—43 помогут ребенку осознать те условия, которые характеризуют числовой ряд. Так, в ***задании 43*** Маша и Оля нарушили одно из требований: значок «O» повторяется дважды, чего быть не должно. Именно по этой причине сравнить числа, одно из которых обозначено таким значком, невозможно («ловушка»). Предложите детям избавиться от этой ошибки («ловушки») путем замены одного из чисел, обозначенных значком «O», другим значком, которого нет в данном ряду.

1.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНОЙ, МЕРКОЙ И ЧИСЛОМ

Для осмысления понятия *числа* как характеристики величины, *которая зависит* не только *от* самой этой *величины*, но и *от* выбранной *мерки*, представляя собой *отношение между величинами*, важно организовать работу так, чтобы дети сами могли выделить существенные признаки предметов как носителей величин (*задания 44—72*).

В результате исследования зависимости между величиной, меркой и числом дети должны понять, что при измерении одной и той же величины разными мерками они получат разные числа, причем чем больше мерка, тем меньше число, и наоборот. При измерении разных величин одной и той же меркой также будут получаться разные числа, только теперь соотношение будет другим: чем больше измеряемая величина, тем бо́льшим числом она будет охарактеризована.

Может быть рассмотрена и третья ситуация, при которой число остается постоянным при увеличении мерки и измеряемой величины в одно и то же число раз, однако эта ситуация, при которой, измеряя разные величины разными мерками, можно получить одинаковые числа, не является на данном этапе обучения учебно-практической, она используется лишь на уровне предметных действий.

Первые две ситуации измерения и построения величины не только рассматриваются на уровне предметных действий, но и фиксируются в знаковой форме (***задания 44 и 45***).

Опишем более подробно организацию урока в соответствии с ***заданием 44*** (читать задание по учебнику, как и прежде, не надо!). Длительность этого урока не должна быть ограничена 40—45 минутами. Поставленная задача должна быть решена без перерыва.

К уроку учитель готовит столько полосок одинакового цвета и одинаковой длины (24 см), сколько групп по 4 человека образовано для работы по измерению длины этой полоски, и столько мерок разных длины и цвета, сколько нужно, чтобы их раздать (в закрытом конверте, чтобы дети их не видели раньше времени) всем группам, кроме одной. Одной из групп нужно дать точно такую же, как одна из мерок, розданных другим группам (дети об этом знать не должны). Таким образом, если в классе 6 групп по 4 человека, то мерки лучше взять длиной 3 см, 6 см, 8 см, 12 см и две мерки длиной 4 см, отметив, какую сторону у полоски-мерки нужно использовать () как меру длины. Чтобы не получилось так: вы рассчитывали, что мерка уместится в величине 6 раз, а она там уместится 8 раз или 9,5 раза и т. п.

Полоски, которые нужно будет измерять, следует раздать демонстративно, чтобы все обратили внимание на то, что они одинаковые, однако специально указывать на это не следует, ведь дети должны с удивлением увидеть, что, измеряя *одинаковые* величины (здесь длину), они получили *разные* числа. Поэтому мерки, которыми они должны будут измерять длину данной на каждую группу полоски (24 см), дети не должны видеть.

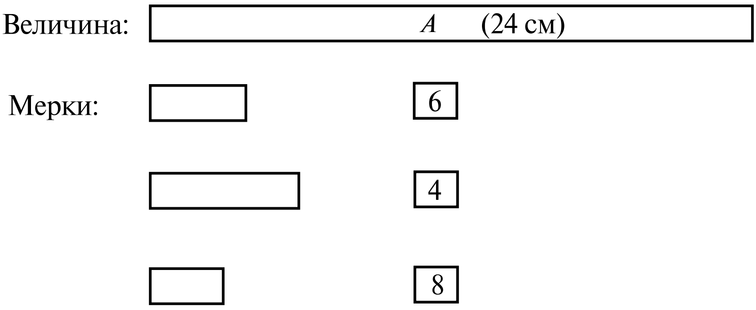
Учитывая то, что у 2 из 6 групп числа окажутся одинаковыми, вы непременно выразите сомнение по поводу точности измерения остальными группами. Вот тут-то вы и спросите детей, обратили ли они внимание на то, какие полоски им раздали для измерения. Ответ однозначный — одинаковые по всем признакам.

Тогда неясно, говорите вы, почему числа у вас оказались разными. Значит, неверно измерили, делаете вы вывод и предлагаете проверить действие измерения еще раз, послав к «ошибавшимся» тех, кто якобы сделал верно (это, как вы помните, дети из двух групп, которые получили *одинаковые* результаты, так как вы им «подсунули» одинаковые мерки).

Теперь-то дети наверняка обнаружат (если до этого они не выдвинули предположение о том, что мерки могли быть разными), что мерки у них были *разные*. Тогда вы непременно согласитесь с их точкой зрения, добавив (после того, как они поднимут вверх мерки, которыми измеряли, так, чтобы всем было видно, какая группа какой меркой измеряла), что мерки действительно разные: у одних — красная, у других — зеленая, у третьих — желтая, поэтому-то и числа получились разные. А вот у двух групп мерки были одинакового цвета, поэтому и числа у них оказались одинаковыми.

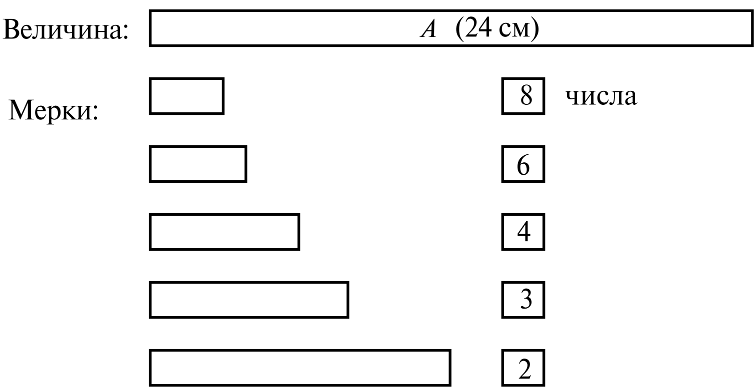
Такая версия должна быть с радостью и со смехом опровергнута детьми. При чем здесь цвет, когда речь идет о длине? Не в цвете дело, а в длине полоски, *цвет не имеет значения при измерении длины* — вот вывод, к которому придут дети и с которым вы, конечно, согласитесь, если дети будут убедительны в своих суждениях.

Теперь, когда дети осознали причину, по которой *одна и та же* величина может быть охарактеризована *разными* числами, предложите им на доске прикрепить величину, мерку, а под ней карточку с числом, которое получилось в результате измерения:



и т. д.

Заметили ли дети что-либо интересное? Вот вопрос, ответ на который требует перестройки мерок либо в порядке убывания, либо в порядке возрастания. Перемена мерок местами потребует и перемены местами соответствующих чисел. В итоге картина на доске выглядит так:



Вывод: чем больше мерка, тем меньше число, и наоборот.

В качестве домашнего задания можно предложить детям дома по мерке, которую они могут взять любой, и числу, которое они выберут из чисел от 2 до 9, построить в тетради величину $B = kE$, где k — выбранное число, а E — выбранная мерка.

Обсуждение следующего урока может начаться с того, почему оказалось (а так и будет), что числа дети брали одинаковые, а величины оказались разные, и наоборот, некоторые дети числа брали *разные*, а величины оказались *одинаковые* (понятно, что, прежде чем обсуждать такие «парадоксы», детям придется собраться по группам в зависимости от выбранного числа. Если же в классе не окажется детей с такими числами, мерками и величинами, то вы всегда можете предложить нужные для обсуждения варианты от имени детей, которые когда-то у вас учились, либо детей из другого класса, в котором вы были на аналогичном уроке).

Так же как в описанной ситуации строится урок по исследованию зависимости между величиной, меркой и числом, когда мерка не меняется, т. е. она одинаковая у всех групп, а величина, которую измеряют, — разная.

Вывод, к которому придут дети, будет звучать так: чем больше величина, тем больше число, которое получается при измерении разных величин одной и той же меркой, и наоборот.

Условием перехода от сравнения величин к сравнению чисел, характеризующих эти величины, является измерение всех сравниваемых величин (одного рода) одной и той же меркой, что позволяет детям осознать необходимость и понять назначение стандартных единиц (мер) измерения и недостаточность наличия в их распоряжении натуральных чисел. Конструирование числовой прямой и работа с ней дадут возможность еще раз осознать смысл опосредствованного сравнения величин с опорой на их числовые значения.

Итак, рассмотрим дальше систему заданий.

Задание 46 предложите выполнить дома, а затем организовать взаимопроверку и ответить на поставленные вопросы.

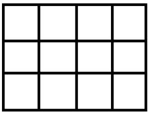
Задание 47 нужно проиграть в группах: каждой группе выдать по одинаковой мерке, а числа на карточках написать разные. Двум далеко сидящим друг от друга группам выдайте карточки с одинаковыми числами, не предупреждая об этом. Банки, в которые дети должны будут налить соответствующее количество воды, должны быть одинаковыми, иначе ответ на поставленный вопрос будет требовать дополнительных действий.

Для выполнения ***задания 48*** можно предложить детям обсудить способ работы и дать свои предложения. Так, например, можно образовать группу из 6 человек, так как дано 6 мерок и нужно подобрать 6 подходящих чисел. Несмотря на то что вписать в прямоугольник (на карточку) можно любое число, его нужно соотнести с меркой, причем в первом ряду мерки одинаковые, значит, числа лучше взять разные, а во втором ряду мерки разные, значит, для исследования лучше взять числа одинаковые. Такой подбор чисел даст возможность вновь осмыслить отношения между величиной, меркой и числом: при использовании одинаковой мерки для построения величины окажется, что чем больше число, тем больше величина. При построении величины с помощью одинаковых чисел и разных мерок также окажется, что чем больше мерка, тем больше величина. Такой вывод сделают дети без труда, если организовать работу по аналогии с ***заданием 44***.

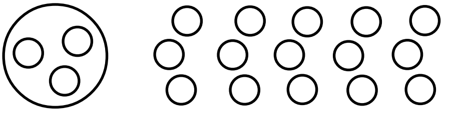
Задание 49. Для выполнения этого задания отрезки должны быть начерчены на доске ($\frac{A}{E} = 3$; $\frac{A}{K} = 4$; $\frac{A}{M} = 12$), а круг и его части должны быть вырезаны из разноцветной бумаги. Задание можно выполнить фронтально.

Задания 50–54. Предложите каждому выбрать любое из этих заданий и выполнить, а затем пусть в группы соберутся дети, которые выполняли одинаковые задания. Рисунки должны быть вынесены на доску, причем перерисовывать яблоки, кубики, цветы и карандаши нет необходимости.

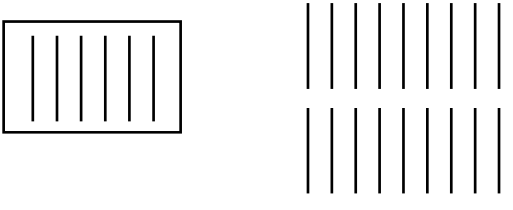
К ***заданию 50*** рисунок на доске может выглядеть так:



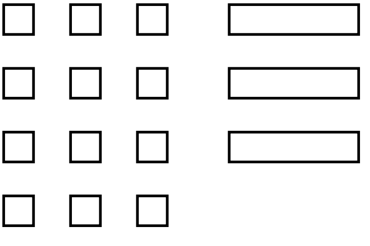
К ***заданию 51*** — так:



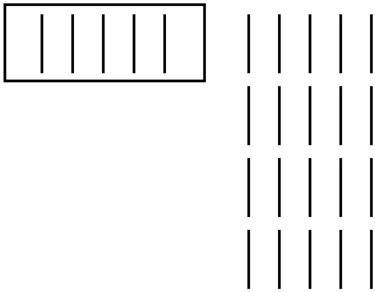
К ***заданию 52*** — так:



К ***заданию 53*** — так:

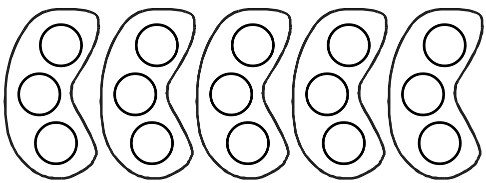


К *задание 54* — так:



Дети собираются около «своего» задания и на схеме показывают способ выполнения. Например:

Задание 51:



Ответ дети дают устно: «Нужно 5 тарелок» — или записывают формулу: $\frac{A}{E} = 5$.

Задания 55 и 56 используйте в качестве проверочной работы, предоставив детям возможность выбора мерки (№ 55) или формулы (№ 56). Результаты сопоставьте здесь же, на уроке.

Задания 57 и 58 предложите для домашней работы, обсудив затем в классе способ выполнения каждого путем ответа на вопросы: «Как научить других людей подбирать мерки, зная, сколько раз мерка должна уместиться в величине? (Задание 57.) Как изготовить мерку, если есть величина и известно число, рассказывающее о том, сколько раз мерка должна уместиться в этой величине?» (Задание 58.) Затем нужно всем вместе «проиграть» ***задание 64*** (читать не надо!).

Задания 59, 60 и 61 раздайте по группам (в 2—3 группах будет, естественно, одинаковое задание).

Затем проведите обсуждение. Проговаривать, как дети выполняли задание, не надо. Пусть лучше зададут группе вопросы, если они возникли.

Мерки к ***заданиям 59 и 61*** дайте готовые (нужно вырезать квадрат и угол).

Задание 62 предложите выполнить дома, обсудив способ решения уравнений. Затем предложите в парах выполнить ***задание 63***. Каждая пара берет одно из трех уравнений: в одном неизвестна мерка, а величина и число должны быть выбраны детьми произвольно. Для выполнения такого задания нужно использовать полоски.

Задание 64 проиграйте с детьми. Читать не нужно.

Задание 65 используйте для проверочной работы. Предложите детям сначала сделать только те задания, которые они могут выполнить без опоры на схему, доказав, что решили правильно, а затем те, для которых нужна схема. Способ выполнения остальных заданий предложите обсудить либо в парах, либо в группах (кому как удобно).

«Ловушку» (11) расшифруйте, дав соответственно несколько вариантов избавления от нее путем доопределения задания, с опорой на предыдущие (это задание с недостающими данными, поэтому нет однозначного ответа).

Задания 66—74 предназначены для диагностики средствами математики того, как ребенок осмыслил основные лингвистические понятия: звук и буква, слог и слово, предложение и др.

Так, в ***задании 66*** в слове «яма» букв — 3, а звуков — 4 [й, а, м, а], в предложении (2) 5 слов. В предложение включены слова, записанные с помощью одной буквы: «я», «и». Выполнение этого задания поможет в работе над следующим, ***67-м заданием***, в котором нужно подобрать слова, состоящие из одного звука (не буквы!). К этим словам не будет относиться слово «я», так как оно состоит из двух звуков: [й, а]. Это и есть «ловушка».

Задание 68 нужно не читать по учебнику, впрочем, так же как и предыдущее, а дать возможность детям подобрать нужные слова и лишь затем, если нужно, предложить «от себя» те слова, которые даны в задании.

Так же как и слова, которые записывают с помощью специальных знаков — букв, числа тоже записывают с помощью знаков — цифр. Одна цифра (знак) — однозначное число, и т. д. Такую аналогию нужно провести при обсуждении ***заданий 69 и 70***.

Задание 71 дайте как проверочную работу, а ***задания 72—74*** предложите для домашней работы, обсудив впоследствии в классе.

К ***заданию 72*** могут быть подобраны слова: «юла», «Юля», «яма», «ярд».

В ***задании 73*** слово «машина» «измерим» меркой «слог», значит, результат «измерения» можно записать, например, так: $\frac{\text{Сл}}{\text{Сг}} = 4$ (выбор удобной записи остается за детьми, так как ни в языке, ни в математике нет специальной формы записи для данного соотношения).

Слово «пальцы» измеряли меркой «слово»: $\frac{\text{Сл}}{\text{Сл}} = 1$; в слове «самовар» пропущены орфограммы, значит, можно записать так: $\frac{\text{Сл}}{\text{Ор}} = 2$.

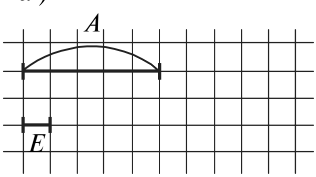
Итак, ***критериями усвоения данной темы*** должны стать:

1) умение описывать результат измерения с помощью общепринятых арабских цифр; общее представление о других нумерациях, в частности о римской;
2) умение решать задачи на построение (отмеривание, восстановление) величины с помощью мерки и числа и нахождение мерки с помощью величины и числа.

В качестве ***проверочной работы***, которая впоследствии ляжет в основу контрольной работы, можно предложить следующие задания (по выбору):

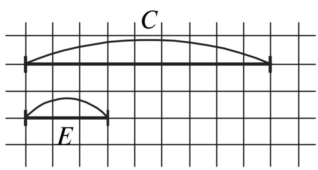
1) Проверь, правильно ли ученик измерил длину и записал результат. Если неверно, то запиши свою формулу.

а)



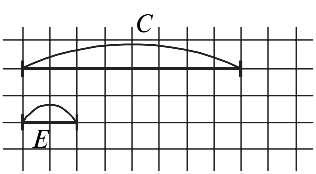
$\frac{B}{E} = 5$

б)



$\frac{A}{E} = 9$

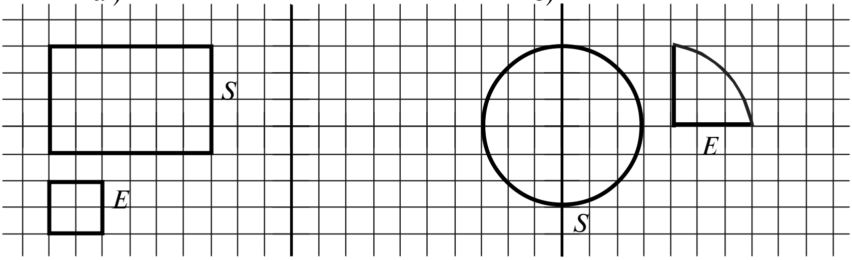
в)



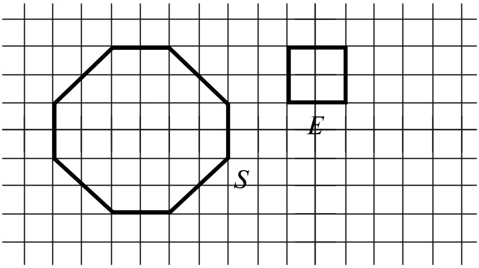
$\frac{C}{E} = 4$

2) Измерь площадь S меркой E и запиши результат:

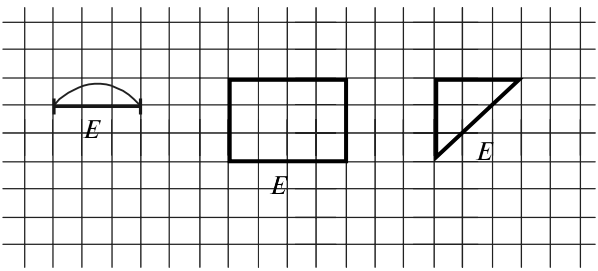
а) б)



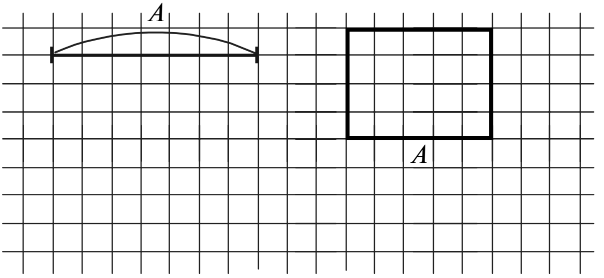
в)



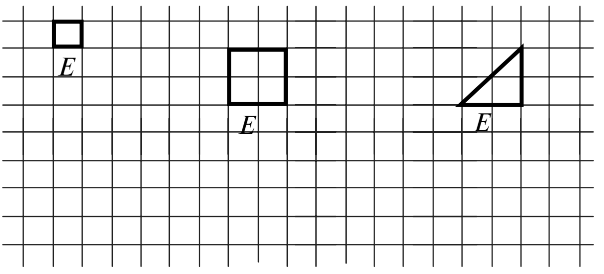
3) Построй величину A, если известно, что:
а) $A = 3E$; б) $A = 2E$; в) $A = 4E$.



4) Определи, какой меркой измеряли величину A, и нарисуй ее, если известно, что: а) $\frac{A}{E} = 7$; б) $\frac{A}{E} = 4$.

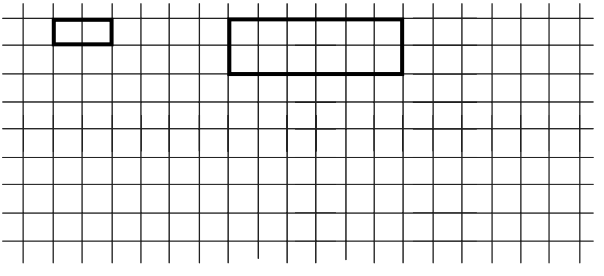


5) Построй площадь S по мерке E, если:
а) $S = 6E$; б) $S = 5E$; в) $S = 4E$.



6)[1] Дети сравнивали два прямоугольника по разным признакам: длине, ширине, площади — и записали формулы: $A = 2B$, $C = 3K$, $D = 6M$.

Определи, что они обозначили буквами A, B, C, K, D и M, и покажи на прямоугольниках.



[1] Предложить только тем детям, которые раньше других выполнили все задания. Все чертежи к заданиям 1—6 должны быть заранее изображены на клетчатых листах.

1.4. ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ

Введение числовой прямой обусловлено необходимостью описания процесса измерения с помощью графической модели. Другими словами, числовая прямая позволяет «в чистом виде» представить процесс измерения и построения произвольной величины любой меркой того же рода. Какой бы ни была мерка, она изображается с помощью единичного отрезка, который является графической моделью мерки.

Числовая прямая задается началом отсчета, направлением и единичным отрезком (изображенным отдельно или показанным непосредственно на числовой прямой).

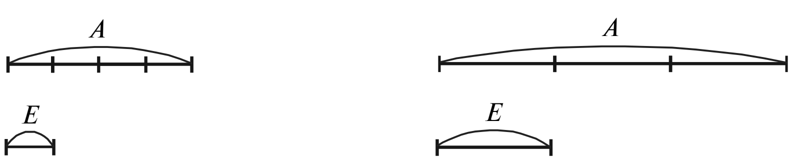
Любой из этих трех компонентов, отличающих прямую от числовой прямой, может быть задан либо в прямой форме, либо в косвенной. Например, если на прямой отмечено два любых числа, отношение между которыми известно, например $a > b$, то можно утверждать, что числовая прямая задана, так как можно сначала восстановить направление, а затем единичный отрезок (мерку, как должны говорить дети).

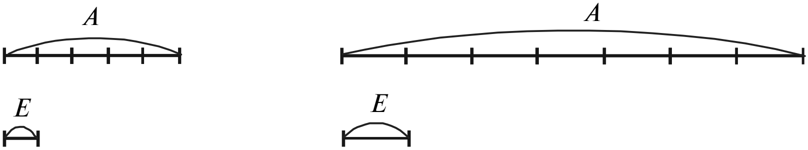
Если $a - b = c$, то, разделив отрезок $[b, a]$ на c равных частей, можно узнать единичный отрезок (мерку), а значит, восстановить начало отсчета. В качестве примера можно привести ***задания 88, 91, 94***.

В качестве «ловушки» можно предложить восстановить числовую прямую, когда задано только одно число: либо нуль — начало отсчета, либо любое другое число без указания нуля (***задание 88***).

Итак, чтобы процесс измерения был описан с помощью числовой прямой, необходимо сначала произвести такие предметные действия, которые привели бы ребенка к мысли о необходимости конструирования сначала предметной модели, а затем графической и буквенной.

Предпосылки к конструированию учащимися числовой прямой уже есть. Дети умеют изображать величины и мерки с помощью отрезков, причем для каждой величины и мерки дети изображают свой отрезок:



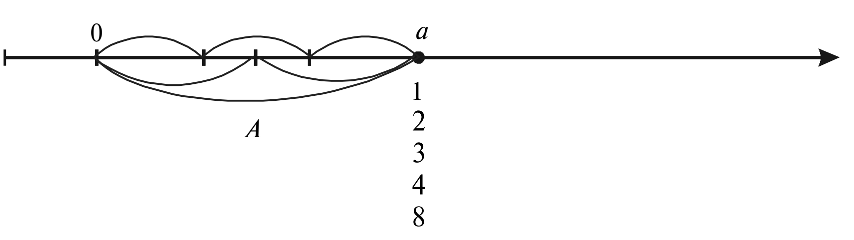


Записывают формулы, фиксирующие результат измерений (количественный аспект числа: $\frac{A}{E} = 4$, $\frac{A}{E} = 3$, $\frac{A}{E} = 5$, $\frac{A}{E} = 7$ и т. д.), или формулы, указывающие на способ построения величины с помощью числа и мерки: $A = 4E$, $A = 3E$, $A = 5E$ и т. д. (порядковый аспект числа).

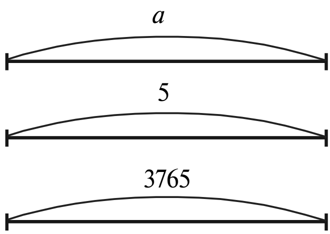
Теперь же необходимо создать такую учебно-практическую ситуацию, которая приведет к синтезу этих графических моделей — к *числовой прямой* как той всеобщей модели, которая отражает и *процесс измерения* величины, и *процесс отмеривания* (построения) величины с помощью мерки и числа, и *способ определения* мерки по величине и числу, т. е. *процесс разбиения* величины на равные части.

Другими словами, числовая прямая является универсальной моделью, удерживающей как различные аспекты числа (порядковый и количественный), так и зависимость (соотношение) между величиной, меркой и числом.

Понимая связь и зависимость между A, E и a, детям нетрудно будет обнаружить, что в любой взятой ими точке может оказаться любое число (***задания 92–95***), так как количественная характеристика величины зависит от мерки, которой эту величину измеряют, т. е.



Какое бы число вместо a ни написать, всегда найдется мерка, которая уместится в величине A такое же *число* раз. Именно поэтому при решении задач с буквенными или числовыми данными изображать величину можно с помощью отрезка любой длины. А значит, при решении *разных* задач можно изображать величины, заданные разными числами, отрезками одинаковой длины:

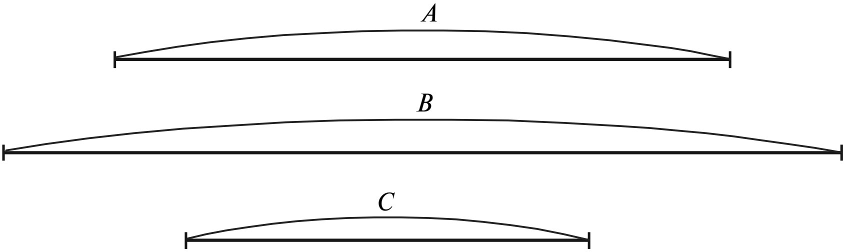


Итак, для того чтобы перейти от реального предметного действия измерения к его графическому описанию с помощью числовой прямой, нужно сначала создать, т. е. «изобрести», *предметную модель*, которой является измерительный прибор, имеющий специальную шкалу. Таким прибором для измерения *длины* является *линейка* (с любым шагом, в том числе и стандартным), для измерения объема — мерная кружка, бутылка или другая мерная емкость, для измерения массы — весы со шкалой (до сих пор дети пользовались рычажными весами) или безмен, для измерения угла — транспортир (кстати, хорошо бы обсудить, почему у транспортира всегда либо «дырка», либо большое пространство между вершиной луча, взятого за сторону угла, и шкалой, — для этого попробуйте сами изготовить этот прибор, вырезав мерку, равную величине угла в 1°). Важно, чтобы ребенок сам «изобрел» линейку для измерения длины и «линейку» для измерения объема — мерный сосуд, тогда ему будет понятно, как появились шкалы на других приборах и почему на приборе для измерения площади — палетке — нет шкалы. При знакомстве с различными приборами и их шкалами уместно вернуться к разговору о мерках, в частности о стандартных мерах длины (см, км, м, дм, мм), массы и т. д. (***задания 75—79***).

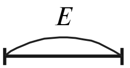
Для «изобретения» линейки на доске нужно вывесить много (штук 10—15) веревок (лент, тесьмы) разной длины (но каждый раз кратной выбранной мерке) и предложить их измерить данной (произвольной) меркой. Можно, если вы считаете это необходимым, вернуться к сказочному сюжету о Незнайке и его друзьях, в частности к задаче об изготовлении сетки для воздушного шара. Как вы помните, для сетки нужны были нитки (тесьма, лента, шнурки — возьмите что угодно, лишь бы они не растягивались, т. е. не меняли свою длину) двух видов: одна короче другой. Из множества других ниток путем непосредственного сравнения дети определяли, какая нитка подходит, а какая нет. Сейчас эта же задача может быть видоизменена так: есть две заготовки, т. е. два образца ниток для сетки, фактически две мерки разной длины, и есть разной длины куски от веревок, из которых можно нарезать кусочки такой же длины, как образцы. Возникает вопрос: как узнать, сколько заготовок может получиться из данных кусков веревки?

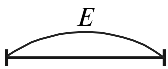
Если перевести эту задачу на язык математики, а именно это и нужно сделать, она сводится к измерению отрезков разной длины с помощью мерки, какова бы она ни была.

Итак, даны отрезки (а реально это нитки) разной длины:



и т. д.

Мерка такая: 

или такая: 

. Для поиска способа решения задачи длина мерки не имеет значения: если придумаем способ решения для одной мерки, то решение задачи не изменится, если взять другую мерку.

Понятно, к такому выводу дети придут без труда после выполнения реальных практических действий, от которых и перейдут к предметным моделям: сначала они должны изобрести линейку — она является исходной *предметной моделью*, удерживающей отношения между величиной, меркой и числом. Остальные предметные модели, представляющие собой шкалы различных приборов, — лишь частное проявление исходной модели. От предметных моделей дети легко переходят к описанию процесса измерения с помощью специально созданной графической модели — числовой прямой, именно она фиксирует целостность отношения.

Дети должны понимать, что шаг на числовой прямой, т. е. единичный отрезок, или мерку, как его пока называют дети, можно выбрать произвольно. Одинаковым меркам (реальным, которыми измеряли реальную величину) должны соответствовать одинаковые единичные отрезки (мерки на числовой прямой), или одинаковые шаги, как говорят дети.

Другими словами, выбрав единичный отрезок для изображения мерки, которой осуществлялось действие измерения величины, мы строим числовую прямую с равномерной шкалой (***зада-***

ния 80, 81, 83). Превращая прямую в числовую прямую (дети должны чувствовать себя волшебниками, которые умеют выполнять такие превращения), учащиеся должны будут отслеживать сохранность первоначально выбранного шага (***задание 89***).

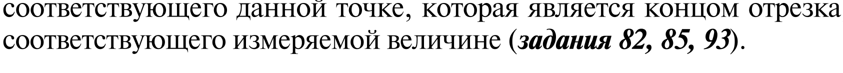
Для того чтобы проверить, удерживают ли они в памяти этот момент, вы от своего имени или от имени других детей будете превращать прямую в числовую прямую следующим образом:

Вы утверждаете, что это числовая прямая, так как на ней есть числа, включая нуль как начало отсчета.

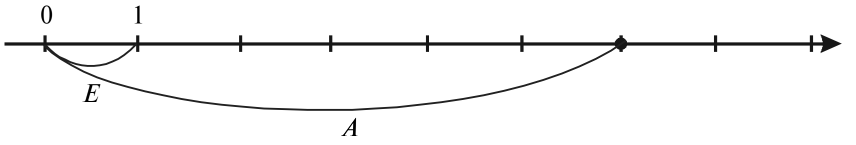
Дети должны доказать, что, несмотря на то, что числа действительно написаны на прямой, она не является числовой, так как при измерении пользуются одной и той же меркой (или множеством равных мерок, а это все равно что одной и той же), а значит, изображать ее нужно одним и тем же отрезком, шагом:

Все отрезки, обозначенные дужкой, равны между собой. Такую же цель, как и решение данной задачи, преследует и ***задание 77***. От наглядного представления процесса измерения с помощью числовой прямой дети перейдут к установлению связи между известной формулой (буквенно-знаковая модель) и числовой прямой.

Формула измерения выглядела так: $\frac{A}{E} = a$. Это значит, что величину A измерили меркой E и получили число a. На числовой прямой эта задача измерения выглядит как задача по определению числа, соответствующего данной точке, которая является концом отрезка, соответствующего измеряемой величине (***задания 82, 85, 93***).

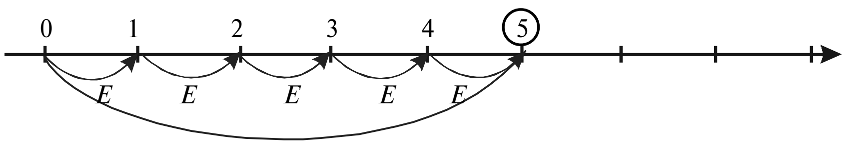


В отличие от принятой формулировки: «Какие числа соответствуют точкам, отмеченным на координатной прямой?» или «Какое число изображает точка?» и т. п., мы предлагаем говорить так: «Определи (узнай), какое число «живет» в указанной точке», так как *числовая прямая — это «дом, в котором живут все числа»*. Итак, если на числовой прямой отмечена точка, значит, можно показать отрезок, изображающий величину A, и отрезок, изображающий мерку. Для упрощения речи будем говорить: «Покажи величину A и мерку, которой ее измеряли».



Числом, рассказывающим о величине A, которое «живет» в этой точке — конце отрезка, изображающего величину, — будет на данной схеме число 6.

Если же мы предлагаем ребенку найти точку на числовой прямой, соответствующую заданному числу, т. е. найти место, где «живет» число 5, например, то речь идет уже о построении величины, состоящей из 5 мерок, т. е. конец пятой мерки соответствует концу построенной величины.



$$B = 5E$$

Задания 85, 90, 91, 92 помогут разобраться с описанными отношениями между числом и точкой, соответствующей этому числу на числовой прямой.

Итак, формула $\frac{A}{E} = a$ связана с определением *числа по точке*, данной на числовой прямой, а формула $A = aE$ позволяет *по числу найти* соответствующую ему *точку*. Именно эта формула удерживает способ конструирования числовой прямой, когда, откладывая мерку, дети ведут счет в определенном порядке. Итак:

1) числа должны идти в строго определенной последовательности;
2) они не должны повторяться, а это значит, что число должно встретиться только один раз (не путайте число с цифрой) и иметь одно место на числовой прямой;
3) какое бы число ни было названо или указано, всегда можно назвать или указать следующее, т. е. ряд чисел бесконечен;

4) числа, которые записывают с помощью специальных знаков (цифр), должны быть для всех людей одними и теми же, они должны быть всем понятны (о чем люди заранее договариваются). Другими словами, речь идет о стандартизации записей в форме знаков-цифр, т. е. о знаках, принятых в математической культуре. Таким образом, мы фактически выделяем четыре основных свойства порядкового аспекта числа (степень осмысления описанных свойств можно будет выявить при изучении сложения чисел с использованием линеек с разными шкалами).

Введение понятия числа и поиск его места на числовой прямой дают возможность сконструировать *универсальный способ сравнения чисел* (а значит, и величин) с опорой на числовую прямую: *из двух чисел больше то, которое дальше по направлению*. К такому выводу придут дети после выполнения ***заданий*** на сравнение чисел ***93, 98—112***. Традиционно приняты следующие способы сравнения: «Большему числу соответствует точка координатной прямой, расположенная правее, а меньшему числу соответствует точка, расположенная левее», или: «Из двух чисел больше (меньше) то, которое изображается на горизонтальной координатной прямой правее (левее)», но они нами не используются, потому что, как явствует из определений, предлагаемые способы сравнения привязаны к горизонтальному положению числовой (координатной) прямой и направлению слева направо. Это значит, что каждый из них является лишь частным случаем. Расположите числовую прямую вертикально с направлением снизу вверх (или наоборот) — и нужно формулировать другое правило. В этой логике каждое отличное от горизонтального положения изображение числовой прямой будет требовать своего правила (попробуйте его сформулировать для каждой из осей в трехмерном пространстве хотя бы для прямоугольной системы координат!). Итак, при сравнении мы будем опираться не на то, левее — правее или выше — ниже расположено одно число по отношению к другому (левее — правее, выше — ниже — это относительные понятия), а на место сравниваемых чисел по отношению к выбранному направлению, тогда на результат сравнения не будет влиять не только положение прямой на плоскости, но и место нуля на числовой прямой. Из двух чисел больше то, которое расположено дальше по направлению.

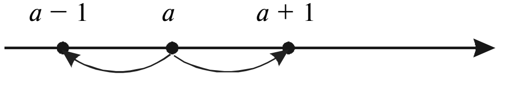
При работе над ***заданием 105*** вы указкой показываете поочередно (в любом порядке) числа на разных числовых прямых, а дети реагируют в форме физкультминутки. Если вы показываете большее из двух чисел, данных на каждой прямой (кроме одной, на которой даны три числа, — ее показываете последней, причем сначала числа a и c, а потом b), то дети поднимают руки вверх, а если меньшее, то приседают (целесообразно это задание дать во второй половине урока). Только делать все нужно быстро и весело, чтобы можно было у детей спросить: «Как вы так быстро узнаете, какое число больше, а какое меньше? Научите меня». Как правило, дети с легкостью и без ошибок сравнивают числа.

Ваш вопрос вынуждает их осмыслить собственный способ действия. Если же кого-то из детей родители научили так, как учили их самих, т. е. с опорой на положение одного числа относительно другого (правее — левее) или на расстояние до начала отсчета (до нуля), что не исключено, несмотря на то, что и нуля-то на этих прямых нет, вы это сразу увидите.

Следующие ***задания 106—112*** дети будут выполнять и обосновывать свою правоту с опорой на сформулированный ими самими способ сравнения чисел с помощью числовой прямой.

К этому способу мы еще не раз будем возвращаться в связи с появлением новых видов чисел (многозначных, дробных, положительных и отрицательных).

И последнее. Построение числовой прямой предполагает, как мы уже обсуждали, откладывание мерок (единичных отрезков) одной за другой и ведение счета. Каждое называемое число при этом находится на расстоянии *одного* шага от предшествующего (назовем его **предыдущим**) и от следующего за ним числа (назовем его **последующим**). Именно эти понятия — предшествующего, или предыдущего, числа и следующего за ним, или последующего, числа по отношению к третьему — также являются предметом осмысления. Сами слова «предыдущее» и «последующее» детям, безусловно, понятны *в житейском смысле*: все, что «перед», — предыдущее, все, что «после», — последующее, однако математический смысл этих понятий в том, что *предыдущее число* (предшествующее данному) — это число *на единицу меньше* данного: $a - 1$, а *последующее* (непосредственно следующее за данным числом) — *на единицу больше* данного: $a + 1$.



Если же мы имеем дело с парой соседних чисел, например 4 и 5, то число 4 будет предыдущим по отношению к 5, а 5 будет последующим по отношению к 4.

Таким образом, в ***заданиях 98—100, 103***, использующих понятия последующего числа и предыдущего числа, может быть задана либо пара, либо тройка чисел. Дети с удовольствием играют в следующую игру «на троих»: один называет любое число, а двое других, предварительно договорившись, будут называть предыдущее и последующее, причем контролером, следящим за правильностью выполнения этого задания, может быть либо ведущий, т. е. тот, кто взялся называть любое число, либо четвертый, специально взятый в игру ребенок.

Подводя итоги сказанному, выстроим *систему учебных ситуаций*, необходимых для введения понятия числовой прямой.

Первая ситуация, приводящая детей к мысли об изобретении линейки, описана в учебнике во вступлении к главе 2, а методика создания этой ситуации прописана несколькими страницами раньше.

Задание 75 позволит не только изучить уже изобретенную линейку, шаг на которой равен мерке (***задание 76*** дает возможность ею воспользоваться), но и порассуждать о том, как должна выглядеть «линейка» для измерения объема (речь идет о мерном сосуде). Образцы различных бутылочек, стаканов, банок с метками нужно принести на урок, чтобы дети не только увидели эти «изобретения», но и попробовали отмерить нужное количество воды.

Чтобы можно было с помощью чисел, полученных в результате измерения, опосредствованно сравнивать величины, необходимо, чтобы эти величины были измерены одними и теми же мерками. А значит, нужно договориться о размерах мерок и дать им название. Спросите, кто из детей уже знает, как называют стандартные (общепринятые) меры длины, объема, массы, углов. Изучая линейку для измерения длины, дети восстановят в памяти названия мер: сантиметр, метр, километр. Покажите детям рулетку, где есть отметки дециметров и метров. Изучите приборы (кроме спидометра) не по картинкам в учебнике (***задание 77***), а раздайте их по группам. Затем пусть каждая группа покажет остальным, как этим прибором пользуются для измерения. Дома же с помощью картинок дети расскажут родителям о работе в классе.

Задание 77, о котором идет речь, содержит «ловушку». Мерки, которыми промеряли сосуд, изображенный на рисунке (аналогичный нужно иметь в классе), были одинаковые, а вот расстояние между метками на сосуде, конечно, будет разное из-за формы сосуда. Однако при изображении способа промеривания с помощью схемы отрезки (шаги) на прямой должны быть одинаковыми, чтобы по схеме было понятно, что мерки в действительности были одинаковыми. Единичный отрезок, или шаг, является схематичным изображением мерки.

Задания 78 и 79 предложите для домашней работы с последующим обсуждением *способа* изготовления мерного сосуда и линейки.

Выводы, к которым придут дети при выполнении ***заданий 80 и 81***, должны быть получены после группового или парного обсуждения. Сами задания, как и прежде, читать не нужно (кроме рассмотрения рисунка в ***задании 80***). В задании 80 речь идет о двух мерках: массе воды в стакане и об укрупненной мерке — массе пустого ведра, которая равна 3 стаканам воды. Вывод: нельзя сравнивать числа, полученные в результате измерения разными мерками.

На верхней шкале записан счет стаканами, вмещающимися в ведрах, а на нижней ведется счет ведер. Эти шкалы показывают, что масса каждого пустого ведра равна массе воды, налитой трижды одним стаканом. Обратите внимание детей на то, что речь идет о массе, которую в быту часто называют весом, поскольку прибор, измеряющий массу, называется весы.

Вторая учебная ситуация, организуемая учителем в классе, направлена на конструирование числовой прямой. Числовая прямая должна быть получена как графическая модель (схема), описывающая (отражающая) процесс измерения любой величины. Шкала прибора отражает процесс измерения конкретной величины, а числовая прямая фиксирует общий способ действия.

Задание 81 дает возможность такую схему составить.

Схема, которую изобразят дети в виде прямой или луча, а именно она должна появиться в результате обсуждения поставленных вопросов, даст возможность назвать прямую *числовой*, а луч — *числовым*.

Числовая прямая (числовой луч) фактически является графической *моделью* процесса измерения. На этой модели еще нет направления, точнее, оно есть, но еще не обозначено стрелкой. Необходимость выбора направления при конструировании числовой прямой и его указания возникнет в ***задании 84,*** после обсуждения которого появятся все условия, необходимые для построения числовой прямой: начало, направление, мерка (единичный отрезок, шаг).

Задания 82 и 83 являются диагностическими. Они помогут увидеть, насколько ребенок понял, как может выглядеть схема, описывающая процесс измерения. Речь идет фактически о «рождении» числовой прямой, на которой есть начало, виден размер шага-мерки и отражен способ измерения. Выполнение этих заданий организуйте по желанию детей. Кто хочет, пусть делает сначала сам, а потом сопоставит свои результаты с результатами, полученными другими детьми.

Задание 85 даст возможность задуматься, где на числовой прямой находится число 0, которое характеризует нулевую величину при наличии любой мерки. Теперь вместо буквы Н, фиксирующей начало отсчета, можно писать число 0.

Задания в разделе «Проверь себя!» предложите выполнить самостоятельно либо в классе, либо дома (по вашему усмотрению).

Задания 86—91 предназначены для обсуждения условий, необходимых для определения направления числовой прямой, ее начала и мерки. Так, в ***задании 86*** предлагаются «заготовки», среди которых есть прямые и лучи. На луче стрелка не нужна, так как направление единственное, а вот на прямой, если нет стрелки, а есть только начало, появляется возможность выбора направления.

В точке Н теперь нужно писать 0 как характеристику нулевой величины.

В ***задании 87*** дети должны указать, где могло быть начало, т. е. найти место нуля на луче или прямой, которые можно преобразовать в числовые. На луче это место однозначно определено: число нуль совпадает с началом самого луча, а вот на прямой его можно поставить в любом месте, т. е. там, где удобно. Удобство определяется наличием места для последующего числа.

Задание 88 содержит «ловушку»: нельзя по одному числу (здесь по числу 0) на прямой однозначно определить направление.

Задание 89 отражает возможное представление слабого ребенка о числовой прямой как прямой, на которой есть начало, есть направление и есть числа. Здесь игнорируется один из существенных признаков числовой прямой — равномерность шагов (шаг должен быть везде одинаковым).

Задание 90 позволит детям вернуться к записи чисел с помощью цифр из других нумераций. Это задание хорошо дополнить заданием со «сказочными» цифрами, последовательность которых должна быть известна. Предложите на числовой прямой пару чисел, по которым можно установить направление, мерку и начало отсчета, а затем определить в указанном вами месте, какое число «живет» в этой точке.

Это задание на построение числовых прямых с разными нумерациями лучше дать на выбор группам детей, а потом сопоставить результаты и обсудить *способ организации* работы в группе над таким заданием.

Задания 91 и 92, во-первых, направлены на осмысление детьми взаимно-однозначного соответствия между числом и местом этого числа на числовой прямой, а во-вторых, в ***задании 92*** вновь рассматривается условие, при котором числа можно сравнивать между собой: они должны быть получены в результате измерения величин одной и той же меркой (естественно, речь идет об однородных величинах и мерках).

Оба задания содержат «ловушки»: в ***задании 91*** невозможно однозначно восстановить числовую прямую, если на ней осталось только одно число, причем независимо от того, указано при этом направление или нет. В остальных случаях числовые прямые восстановить можно, определив размер шага (мерки).

В ***задании 92*** смысл «ловушки» в том, что сравнивать можно числа, которые находятся на одной числовой прямой, что и гарантирует *единую* мерку.

Третья учебная ситуация состоит в том, чтобы закрепить у детей вывод: научившись сравнивать числа, каждое из которых является характеристикой величины, можно будет сравнивать величины, не прибегая к их восстановлению.

Другими словами, *вывод* о соотношении величин может быть сделан на основе сравнения чисел при условии использования *единой* мерки для измерения величин.

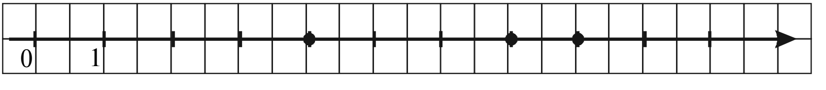
В дальнейшем операции над числами будут конструироваться на основе соответствующих операций над величинами.

Итак, начиная с ***задания 93*** ребенку предстоит:
1) поработать с числовыми прямыми, устанавливая отношения между величиной, меркой и числом;
2) поработать с отношениями между числами;
3) понять принцип образования каждого следующего числа на числовой прямой.

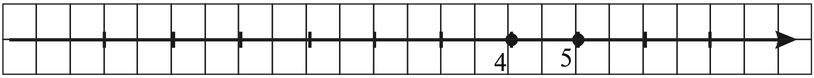
Способ работы над ***заданиями 93—113*** может быть выбран по вашему усмотрению.

Задания 102—104 можно использовать для промежуточной проверочной работы.

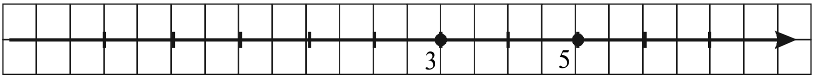
В качестве итоговой ***проверочной работы***, которая впоследствии ляжет в основу контрольной работы, можно предложить следующие задания (в два этапа или по выбору):
1) Построй числовой луч и отметь на нем точки, соответствующие числам 3, 5, 8.
2) Построй числовую прямую и отметь на ней:
   а) число, предшествующее числу 3; числу 5;
   б) число, следующее за числом 1; числом 4;
   в) число, предшествующее 7; следующее за числом 7.
3) Определи, какие числа «живут» в данных точках:



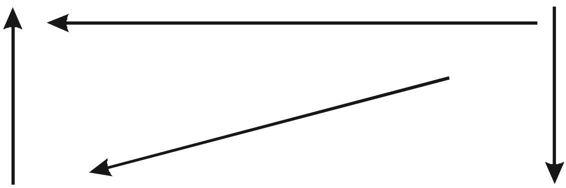
4) Определи, где было начало отсчета, если на числовой прямой остались числа 4 и 5, остальные случайно стерли:



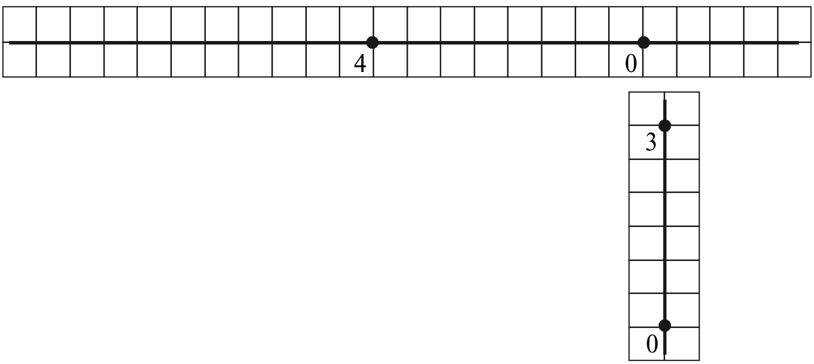
5) Отметь на числовой прямой числа 4 и 7, если дети из другого класса уже отметили числа 3 и 5.



6) Дети сравнивали «сказочные» числа. Известно, что Ω > Ψ. Покажи, как расположены эти «сказочные» числа на числовых прямых:



7) Определи направление числовой прямой и мерку:



После выполнения выбранных детьми заданий предложите им назвать самое легкое (Л), самое трудное (Т) и самое интересное (И).

Критерии усвоения данной темы:

1) умение строить числовую прямую и восстанавливать ее;
2) умение сравнивать числа с помощью числовой прямой;
3) понимание принципа образования числа, следующего за данным, и числа, предшествующего данному, т. е. понятия последующего и предыдущего чисел.

ТЕМА 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ

2.1. РАЗНОСТНОЕ СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

Сравнение чисел с опорой на числовую прямую создает предпосылки для конструирования действий сложения и вычитания чисел. В дошкольном опыте многие дети умели оперировать с небольшими (в пределах 10) числами. Однако осмысление действий с числами как характеристиками величин, изображенных на числовой прямой, даст возможность сконструировать эти действия без опоры на числовую прямую, т. е. «в чистом виде», когда числовое значение величины можно будет найти с опорой на числовые значения величин, составляющих искомую.

Другими словами, ребенку не нужно будет прибегать к изображению величины и мерки, чтобы найти числовое значение искомой величины. Действия сложения и вычитания с числами могут быть выполнены, например, путем присчитывания и отсчитывания, причем не только единицами, но и двойками, тройками, пятерками, десятками и т. д., т. е. чтобы к 5 прибавить 3, можно поступить так:

$$\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{5 + 1}_{6}) + 1}_{7}) + 1}_{8} = 8$$

После введения понятия многозначного числа на смену этому способу присчитывания и отсчитывания придет способ *поразрядного* сложения и вычитания: к 7381 можно прибавить 2 или 3, присчитывая по 1. 7381 + 3 = ((7381 + 1) + 1) + 1 = 7384, а вот прибавить 3869 тем же способом можно, конечно, но явно неудобно, а значит, дети приходят к необходимости *поиска* нового способа действия, которым и станет *поразрядное* сложение. Тогда для сложения многозначных чисел ребенок должен уметь быстро и правильно складывать однозначные числа (от 0 до 9).

Поэтому, несмотря на то, что с помощью числовой прямой можно складывать и многозначные числа, например двузначные и трехзначные (это зависит от того, сколько чисел вы отметите на числовой прямой), основной акцент необходимо сделать на *способе действия*, а не на счете в тех или других пределах. Владение способом дает возможность любому ребенку в случае затруднения при сложении (вычитании) в пределах 20 обратиться к числовой прямой и, опираясь на нее, сделать необходимые вычисления.

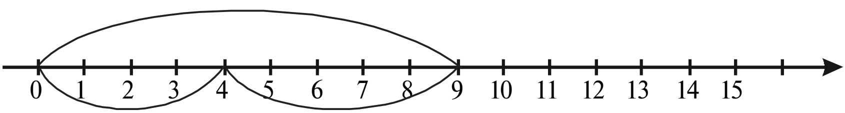
Итак, чтобы способ присчитывания и отсчитывания был осознан детьми именно как способ действия, необходимо создать такую учебную ситуацию, при которой ребенок сам сконструирует этот способ.

Рассмотрим *систему учебных ситуаций*, обеспечивающих переход к присчитыванию и отсчитыванию как новому способу действия.

Первая учебная ситуация связана со сравнением чисел. Сравнение чисел, как и соответствующее им сравнение величин, — это не только операция, фиксирующая отношение между ними (равны или неравны оказались сравниваемые объекты), но и количественная оценка этого отношения, которая может быть охарактеризована разностью между ними или кратностью. И то и другое дает возможность восстанавливать один из объектов с помощью другого. Так, если $5 > 3$ (на 2), то $5 = 3 + 2$ или $3 = 5 - 2$, где $2 = 5 - 3$; если же $6 > 2$ (в 3 раза), то $6 = 2 \times 3$ или $2 = 6 : 3$, где $3 = 6 : 2$.

На данном этапе обучения рассмотрим лишь разностное сравнение, когда необходимо не просто установить, какое число больше (меньше) другого, но и на сколько.

Очевидно, что ответ на этот вопрос можно получить, посчитав, сколько мерок укладывается в интервале между данными числами. Пусть нужно сравнить числа 4 и 9 с помощью числовой прямой и узнать, на сколько одно число больше другого.



Ответ на поставленный вопрос может быть зафиксирован с помощью такой записи:

$4 < 9$ (на 5) или $9 > 4$ (на 5).

Конечно, дети могут без труда посчитать, сколько мерок умещается в разности, и, опираясь на этот способ пересчитывания мерок, перейти к конструированию сложения или вычитания присчитыванием и отсчитыванием по единице, что явствует из модели. Однако есть две настораживающие причины, которые, как представляется, требуют другого подхода к конструированию желаемого приема счета.

Приведем необходимые аргументы.

Первый из них: если детей сразу «подтолкнуть» к конструированию способа, то алгоритм поиска суммы будет следующий. Пусть нужно к 4 прибавить 3:

1) найти место числа 4 на числовой прямой;

2) от этого места (точки) отсчитать еще 3 мерки (шага) по заданному направлению числовой прямой и попасть в нужную точку — конец полученной величины;

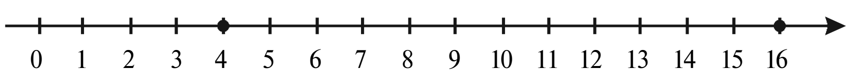
3) прочитать число, соответствующее найденной точке.

Казалось бы, все просто и ясно, однако тот, кто обучал детей такому способу действия, подтвердит, что всегда находится группа детей, пусть даже небольшая, которая поступит иначе: после того как найдено место числа 4 на числовой прямой, они ищут место числа 3 взамен присчитывания трех единиц. Фактически эти дети поступают так, как их учили: у каждого числа есть место на числовой прямой. Вот они и ищут место числа 3 и числа 4, отсчитывая нужное количество мерок от начала отсчета, в то время как 4 мерки нужно отсчитать от начала отсчета, а 3 мерки — от точки, соответствующей числу 4, а не от начала отсчета.

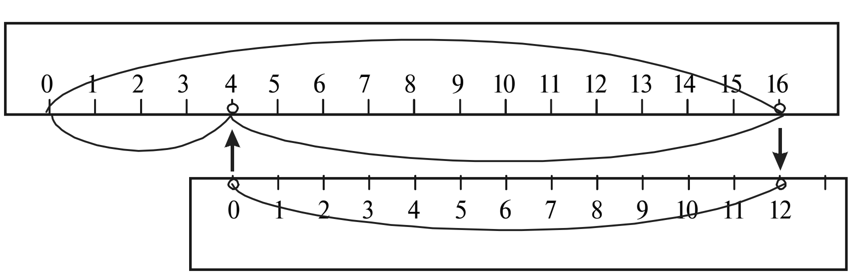
Второй аргумент связан с моментом пересчета количества мерок, составляющих разность между числовыми значениями величин. Возникает вопрос: зачем пересчитывать, сколько мерок вмещается между числами, если мы раньше изобрели способ, позволяющий не пересчитывать мерки при измерении, а сразу «считывать» (от слова «читать») готовый результат? Мы изобрели линейку. Значит, можно взять линейку с таким же шагом, с теми же знаками для обозначения чисел, взятыми в той же последовательности, и измерить разность. Именно подбор подходящей линейки для измерения величины, соответствующей разности чисел (***задания 117–120***), дает возможность ребенку осмыслить на содержательном уровне основные принципы конструирования числовой прямой, числового ряда.

Итак, для того чтобы узнать, на сколько 16 больше 4, нужно:

1) отметить на линейке (числовой прямой) оба числа;



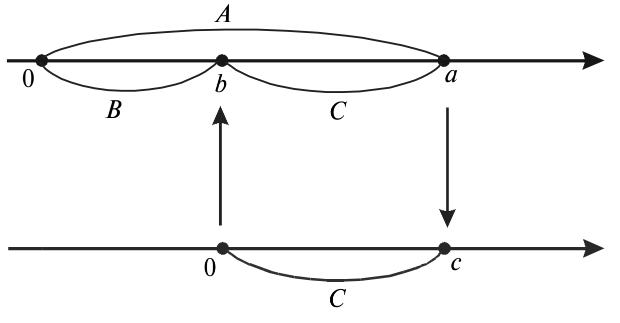
2) взять такую же линейку (числовую прямую) и, приложив 0 к 4, против числа 16 прочитать ответ:



Сначала используется пара линеек, специально изготовленных, затем одна из линеек заменяется числовой прямой, а в отсутствие линеек дети будут чертить пары числовых прямых (***задания 134—137***).

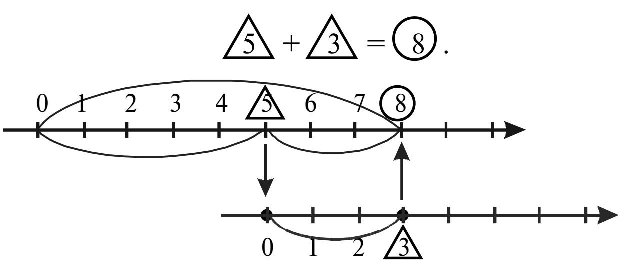
Вторая учебная ситуация позволяет сконструировать операции сложения и вычитания с опорой на числовую прямую (с помощью линеек).

Опираясь на числовую прямую как универсальную схему, дети могут записать несколько числовых равенств: $a = b + c$, $a - c = b$, $a - b = c$, если $a > b$ (на c).



Из первого равенства следует, что для сложения двух чисел с опорой на числовые прямые (линейки) нужно:

1) на первой линейке (числовой прямой) найти первое слагаемое;
2) совместить 0 на второй линейке с найденным числом и против второго слагаемого, найденного на второй линейке, прочитать готовый ответ на первой линейке, например:

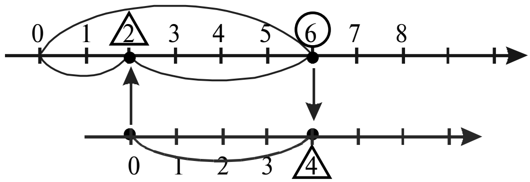


Из второго и третьего равенств следует, что для вычитания двух чисел с опорой на числовые прямые (линейки) можно применить два равнозначных способа.

Первый способ (***задания 121 и 124***):

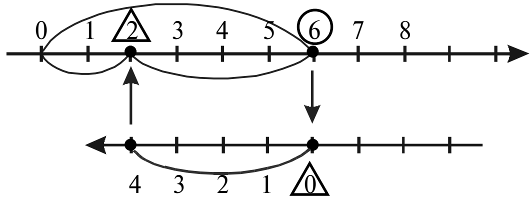
1) на первой линейке (числовой прямой) найти уменьшаемое;
2) совместить вычитаемое, найденное на второй линейке, с уменьшаемым и прочитать над 0 готовый ответ. Например:

$$6 - 4 = 2.$$



Второй способ:

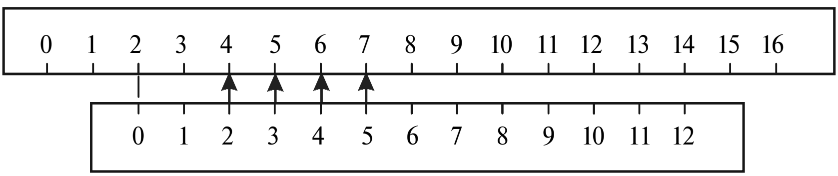
1) так же;
2) изменить направление второй линейки на противоположное и подвести 0 под уменьшаемое, тогда над вычитаемым прочитать готовый ответ.



Как правило, при обсуждении в группах дети «изобретают» оба способа, но после обсуждения выбирают первый как наиболее удобный (не нужно переворачивать линейку, говорят дети).

Задания 121–131 позволят детям овладеть описанными способами сложения и вычитания с помощью линеек. Предложите детям устроить выставку изготовленных пар линеек, у которых удобнее *шкалу* нанести так, чтобы *на одной* линейке она была *вверху*, а *на другой — внизу* (по типу «движка» в логарифмической линейке).

Пользоваться обычными линейками тоже можно, но менее удобно, так как при наложении (а именно так придется прикладывать вторую линейку) шкала оказывается прикрытой. Чем длиннее линейки, тем больше возможностей для нахождения суммы и разности чисел.



При таком расположении линеек можно найти значение выражения 2 + a и значения чисел c и b, если $c - b = 2$ (***задания 121, 122, 124, 129–130, 140***).

Например:

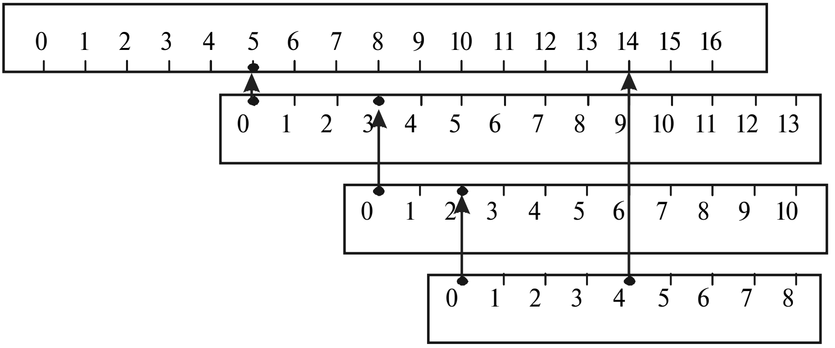
2 + 2 = 4	2 + 8 = 10	7 − 5 = 2
2 + 3 = 5	и т. д.	6 − 4 = 2
2 + 5 = 7		5 − 3 = 2 и т. д.

Итак, ничего не вычисляя, дети могут, пользуясь линейками с разными (в том числе и «сказочными») цифрами, находить сумму (целое) и разность (часть) двух чисел. Как только большинство детей овладеет этим способом нахождения результата действия сложения и вычитания, перейдем к созданию **третьей учебной ситуации**, при которой детям нужно предложить не 2 числа для сложения, а 3 или 4. Если для сложения и вычитания двух чисел нужно было ***две линейки*** (***задания 123–138***) и ***два*** ученика (именно парная работа должна быть основной при овладении способом), то для работы с тремя или четырьмя слагаемыми нужна тройка или четверка детей. К такой организации работы дети, как правило, приходят самостоятельно после непродолжительного группового обсуждения.

Покажем на рисунке, как дети организовали работу по нахождению следующей суммы (***задание 141***):

$$5 + 3 + 2 + 4.$$

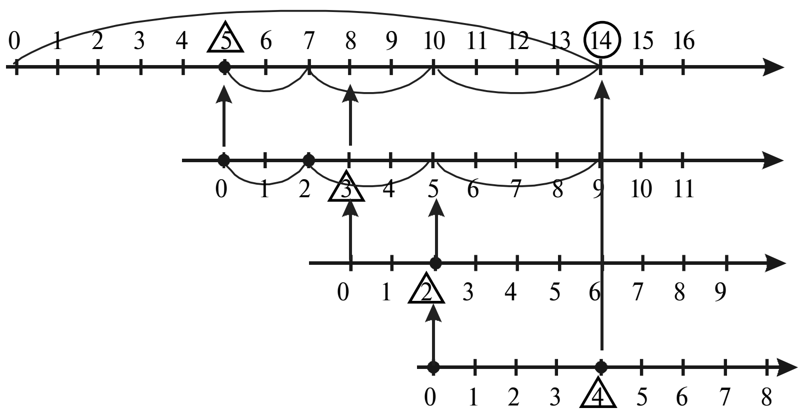
Первый ученик ищет число 5 на своей линейке и либо пальчиком, либо указкой показывает это число, *второй* приставляет свою линейку так, чтобы нуль (начало отсчета) попал под число 5. Далее ребенок самостоятельно либо вместе с третьим участником ищет на своей линейке число 3, так как второе слагаемое 3, а *третий* ученик подставляет свою линейку нулем под тройку на второй линейке и ищет на своей число 2. Наконец, *четвертый* приставляет свою линейку нулем под двойку и против числа 4 *читает ответ на первой линейке*.



Как правило, в классе формируется группа детей, которые считают, что нужно смотреть и записывать промежуточные ответы. Пусть класс разобьется на 2 группы (возможно, и на 3), которые подыщут аргументы в пользу своей точки зрения. Однако не исключено, что либо сразу после появления двух точек зрения, либо в процессе обсуждения может образоваться *третья* группа детей, которая придерживается обеих точек зрения. Они считают, что можно фиксировать промежуточные результаты, а можно и не фиксировать. После обсуждения лучше прийти к выводу о том, что в данном случае нет необходимости тратить время на поиск и фиксацию промежуточных результатов, тем более что такая запись $5 \overset{8}{+} 3 \overset{10}{+} 2 + 4 = 14$ чревата большими ошибками.

Для осмысления детьми сконструированного ими же и описанного выше способа действия сложения нескольких слагаемых было бы хорошо пригласить на такой урок гостей, которых дети могли бы научить, как складывать числа с помощью линеек, и от этого способа перейти к ситуации, когда линеек под рукой нет. Тогда придется повторить то же самое на схеме, т. е. на числовых прямых.

Очевидно, что чертить 4 числовые прямые (а их тоже должны чертить разные дети) каждый раз, да еще в одиночку, если нужно самому найти результат, очень долго:



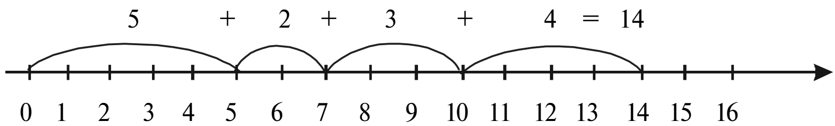
С помощью дужек мы показываем части и целое, используя при этом соответствующие значки: △ — для части и ○ — для целого.

Использование нескольких линеек громоздко, неудобно для выполнения этих практических действий одному человеку; изображение вместо линеек числовых прямых или числовых лучей тоже неудобно (большая трата времени). Именно эти обстоятельства и наводят детей на мысль о *поиске другого способа* действия, которым становится *присчитывание* или *отсчитывание* (***задание 141***).

2.2. ПРИСЧИТЫВАНИЕ И ОТСЧИТЫВАНИЕ КАК НОВЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ СУММЫ И РАЗНОСТИ

Мысль о необходимости поиска нового способа действия приводит детей к конструированию такого способа на основе преобразования графической модели. В этой модели четыре числовые прямые, на каждой из которых мы фиксировали число-слагаемое, *вновь* сливаются (синтезируются) в одну числовую прямую через присчитывание (при сложении) и отсчитывание (при вычитании) необходимого числа мерок в результате их движения вдоль числовой прямой в сторону соответственно либо увеличения (в указанном стрелкой направлении), либо уменьшения (в направлении, противоположном указанному).

На этой схеме хорошо видно, как можно выполнить эти действия на одной числовой прямой:

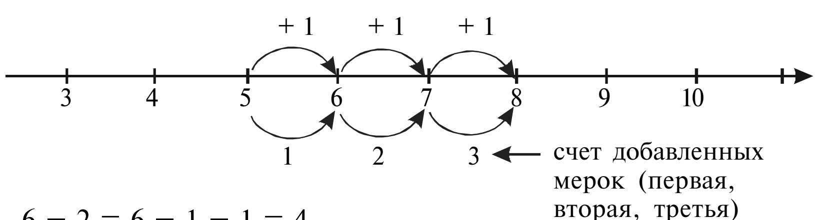


Затем и без опоры на числовую прямую, а именно:

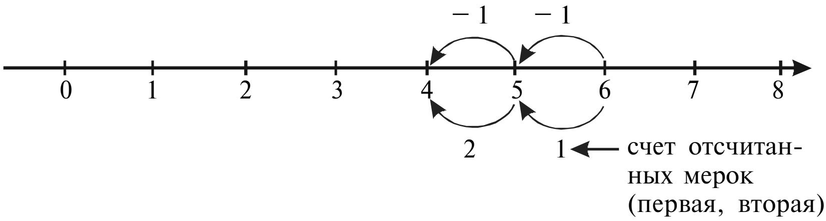
$$((5 + \underbrace{1 + 1}_{2}) + \underbrace{1 + 1 + 1}_{3}) + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1}_{4}$$

Для того чтобы научиться быстро складывать несколько чисел с опорой на числовую прямую и без нее, нужно сначала научиться складывать (вычитать) пару чисел, а именно:

$$5 + 3 = (\underbrace{(\underbrace{5 + 1}_{6}) + 1}_{7}) + 1 = 8$$



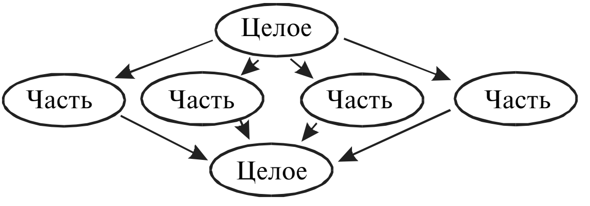
$$6 - 2 = \underbrace{6 - 1}_{5} - 1 = 4$$



Таким образом, мы сначала развели, «расчленили» в сознании ребенка способ действия, а затем вновь свели в обобщенной модели. Можно провести аналогию с изучением свойств предметов, когда в дошкольном опыте ребенка любой из окружающих его предметов предстает перед ним как нечто целое, нерасчлененное.

Одна из особенностей мышления, о которой писал Д. Б. Эльконин, — нерасчлененность восприятия разных свойств и признаков вещей, что демонстрировал в свое время Ж. Пиаже в описанных им опытах. Переход к систематическому обучению в школе, к усвоению научных знаний существенным образом изменил представления ребенка о свойствах и признаках вещей.

То, как мы учили ребенка, дало ему возможность видеть не только внешние свойства окружающих его предметов, вещей, но и существенные, те, которые он раньше не видел, например массу. Предмет, вещь ребенок видит во всем многообразии существенных свойств и в то же время воспринимает его как нечто целое, но состоящее из частей. Таким образом, ребенок в своем восприятии предмета видит его как целое, затем с помощью специальных учебно-практических ситуаций мы помогаем как бы расчленить это целое на части, отбрасывая несущественное, а затем вновь объединяем в целое:



Это новое, содержательное целое и есть осмысленное понятие, в основе формирования которого лежит абстрактное мышление, когда человек может абстрагироваться от несущественных признаков и свойств объекта изучения. Такой подход характерен для данной программы не только при изучении понятий величины, числа и действий с ними, но и при формировании понятий и представлений, напрямую не связанных с математикой, например о каллиграфии, об орфографическом режиме и др.

Итак, вернемся к способу нахождения суммы (разности) двух или более чисел с опорой на числовую прямую. Выполняя систему заданий (***задания 142—152***), решаемых с опорой на *общий способ*, необходимо дать детям *установку на запоминание*. Это значит, что в конце урока и начале следующего нужно предлагать ребенку назвать те суммы, которые он уже запомнил (***задания 143, 144, 151, 162, 166, 167, 171, 174***). Это значит, что он *не нуждается* в моделировании их на числовой прямой, хотя и может в случае надобности обосновать свой способ действия. Теперь при решении уравнений (***задания 157, 163, 164, 165, 175, 176***) и текстовых задач (***задания 152, 153, 154, 155, 156, 159, 161, 181***) он сможет при поиске числового значения результата действия сложения и вычитания обратиться к числовой прямой и с ее помощью найти или проверить сумму или разность в том случае, если устно, в уме, он этого сделать еще не может. Если данные в условии задачи заданы буквами (***задания 153, 154, 181***), то дети должны каждый раз подбирать подходящие числа, которые должны подойти к сюжету задачи, т. е. отражать реальную ситуацию, описанную в сюжете; числа, с которыми можно выполнить те действия, которые включены в буквенное выражение, описывающее способ нахождения результата; и наконец, с этими числами ребенок должен либо выполнять необходимые действия, либо фиксировать собственное незнание.

Если же схема, моделирующая текстовую задачу, содержит числовые данные, то *подбор сюжета* должен быть *ориентирован* на конкретные *числовые значения* величин, о которых идет речь в задаче.

Решение задач может требовать, в свою очередь, составления выражения (уравнения) с использованием скобок — знака, появившегося для описания способа действия (см. учебник: Математика. 1 класс. Книга 2, задание 198). Причем необходимо рассматривать выражения, в которых опустить скобки нельзя, так как это приведет к другому результату, и выражения, в которых скобки можно опустить (***задания 160, 169***).

Например, в выражении $A + (B + C)$ можно опустить скобки, так как $A + (B + C) = A + B + C$ (сочетательное свойство сложения), что подтверждается схемой. Аналогично $A + (B - C) = A + B - C$.

Однако $A - (B + C) \neq A - B + C$.

$A - (B - C) \neq A - B - C$.

Для того чтобы ребенок действовал со скобками осознанно, а на данном этапе обучения это можно сделать *только* с опорой на схему, *нельзя предлагать* ребенку заучивать *правила*. Сама формулировка правил должна быть следствием учебных действий, а не наоборот.

В ***проверочную работу*** по окончании изучения темы можно включить задания, из которых ребенок выберет для выполнения только те, которые он хочет.

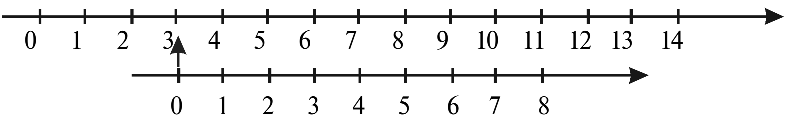
1) Реши только те примеры, в которых нужно найти целое:

4 − 1	5 + 4	6 + 1 + 2	8 − 1
8 + 2	7 − 5	3 − 3	4 + 3 + 2
6 + 3	9 − 4	7 + 2	5 + 4 − 3

2) Реши только те примеры, в которых нужно найти часть:

8 − 1	6 − 4	8 − 3 − 2
9 − 2	7 − 2	5 + 1 + 4
3 + 3	5 + 4	9 − 2 − 3

3) Запиши, какие примеры могли решать дети, если они начертили такую схему:

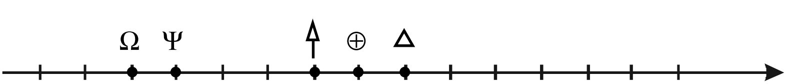


4) Соедини примеры с одинаковыми ответами:

5 + 1 + 1 + 1	5 + 4
5 + 1 + 1 + 1 + 1	5 − 2
5 − 1 − 1	5 + 3
6 + 1 + 1 + 1	6 + 2
6 − 1	5 + 0
5 + 3 + 2	5 − 1
5 − 2 − 2	5 − 0
5 − 2 − 3	5 + 5

Можно ли, не вычисляя ответов, сравнить числовые значения этих выражений?

5) На числовой прямой отмечены «сказочные» числа:



а) Вставь вместо *x* пропущенные числа, а вместо точек пропущенный знак:

Ω ... *x* (на 4)

x ... 5 (на 2)

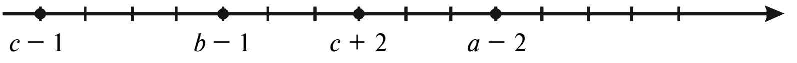
б) Определи, на сколько одно число больше или меньше другого:

⊕ ... Ω (на ...)

Ω ... (на ...)

Ψ ... ⊕ (на ...)

6) Найди на числовой прямой числа a, b и c, если известно:



***Критерии усвоения данной темы*:**

1) умение воспроизводить последовательность чисел от 0 до 10 в любом направлении, начиная с любого числа;
2) умение присчитывать и отсчитывать по 1, 2, 3 от любого числа в пределах 10, т. е. свободно складывать и вычитать в пределах 10 (на самом деле, опираясь на дошкольный опыт, можно значительно расширить описанные умения);
3) умение складывать и вычитать при помощи двух линеек;
4) умение при решении уравнений и текстовых задач опираться на числовую прямую для нахождения числового значения результата действия.

Поскольку эта тема представляет интерес для родителей, самостоятельно занимающихся со своими детьми, в помощь им подготовлен материал «Как научить детей считать» (см. приложение 1). Постарайтесь довести его до их сведения.

ТЕМА 3. МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

3.1. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА

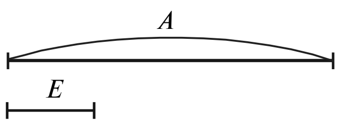
Введение понятия многозначного числа, так же как и других видов чисел, которые дети будут рассматривать позже (десятичные и обыкновенные дроби, числа положительные и отрицательные, иррациональные), начнем с постановки задачи измерения и обратной задачи отмеривания, требующей воспроизведения величины по мерке и числу.

Теперь детям для измерения и последующего воспроизведения предлагаются такая величина и такая мерка, когда, даже не выполняя действия (или только начав действовать), ребенок готов отказаться от известного ему способа измерения. Ситуация, в которой оказывается ребенок, с необходимостью требует нового способа действия, а именно измерения с помощью *набора или системы мерок*.

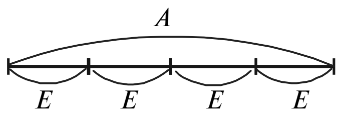
Очевидно, что *потребность в новом способе* действия *возникает* тогда, *когда величина* окажется *намного больше* данной *мерки*.

Опишем ситуации, в которых необходимо действовать старым и новым способами, описав их с помощью схемы и формулы, т. е. графической и буквенно-знаковой моделей.

Старый способ характеризуется такими величиной и меркой:



Измеряем:

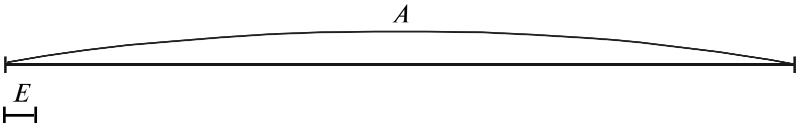


Получаем: $\frac{A}{E} = 4$ или $A = 4E$.

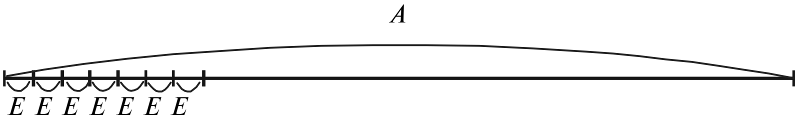
На этом этапе работы с числом акцент делался не столько на том, какое конкретно число появится и как его записать, а на самом способе измерения, поэтому вполне достаточно получать в результате измерения однозначное число, но и не избегать ситуаций, при которых могло получиться какое-либо двузначное число (второго десятка), знакомое ребенку по дошкольному опыту.

Научившись действовать с числами с опорой на числовую прямую и осмыслив свой способ действия, ребенок сталкивается со следующей ситуацией, когда $A >> E$ (A намного больше, чем E). Тогда новый способ будет задан с помощью такого отношения величины и мерки:

2)



Теперь измерять старым способом явно неудобно и долго:



Как быть в этой ситуации?

Ответ очевиден: нужно взять новую (другую) мерку побольше данной, потому что старая слишком мала и поэтому неудобна. Такую оценку соотношения величины и мерки мы уже делали в конце первого и начале второго класса, когда дети должны были *только констатировать* неудобство использования предложенной мерки и *обосновать* свою *точку зрения*.

Мерка могла быть отвергнута по разным причинам, в том числе и из-за того, что была либо слишком мала, либо велика *по сравнению* с величиной, либо она изготовлена из материала, который не обладал нужными свойствами: гибкостью, способностью сохранять величину при перемещении мерки в пространстве или существовании во времени.

Тогда дети лишь оценивали предлагаемые им в качестве мерки предметы. Теперь же они должны не только оценить возможность использования того или иного предмета в качестве мерки, но и, отказавшись от него по причине очевидного несоответствия величины и мерки ($A >> E$), сконструировать *новый* способ измерения *взамен* хорошо *известного* и *освоенного способа* измерения данной меркой.

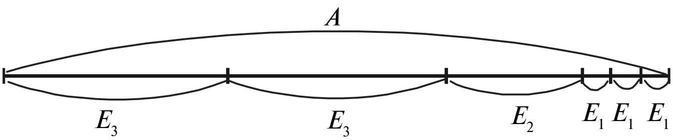
Суть нового способа состоит в том, что величина измеряется (и строится) по частям, причем при измерении дети пользуются системой мерок, укрупненных в одно и то же число раз. Первым шагом конструирования нового способа и будет использование **набора мерок**, в котором каждая дополнительная мерка больше, чем данная. Поскольку все мерки этого набора имеются в наличии для воспроизведения величины, то определять отношение между ними нет необходимости.

При таком способе измерения результат выражается не одним числом, а совокупностью, набором чисел, в котором каждое соответствует определенной мерке. Другими словами, по форме запись результата измерения позиционная, но она еще не является формой многозначного позиционного числа, при которой отношение между разрядами (мерками) выражено одним и тем же числом — основанием системы счисления.

Измерение величины A (длины, площади, объема и т. п.) набором мерок и запись в знаковой форме результата такого измерения могут выглядеть следующим образом.

Пусть $E_4 > A$, тогда измерять будем так: сначала меркой E_3, затем, если будет остаток, меркой E_2, затем, если еще будет остаток, меркой E_1, значит, результат измерения запишется соответственно с помощью трех чисел (величины и мерки подбираются заранее такими, чтобы после измерения последнего остатка меркой E_1 больше измерять было бы нечего).

Схема, показывающая способ измерения (и способ построения):



$$A = 2E_3 + 1E_2 + 3E_1$$

Следующая ситуация такова, что мерку E_1 (например, это спичка, длину которой используем в качестве мерки) может унести домой каждый, а вот мерки E_2 и E_3 — в единственном экземпляре, а поэтому дома для восстановления измеряемой величины (здесь длина) придется изготовить такие же мерки.

Для того чтобы изготовить или подобрать такие же мерки, как E_2 и E_3, придется измерить меркой E_1 мерку E_2, а затем меркой E_2 мерку E_3 и записать результат измерения так: $\frac{E_2}{E_1} = 4$, $\frac{E_3}{E_2} = 3$ или так: $E_2 = 4E_1$, $E_3 = 3E_2$.

Тогда, зная, что $A = 2E_3 + 1E_2 + 3E_3$, можно составить таблицу:

E_3	E_2	E_1
2	1	3

, где $E_2 = 4E_1$, $E_3 = 3E_2$.

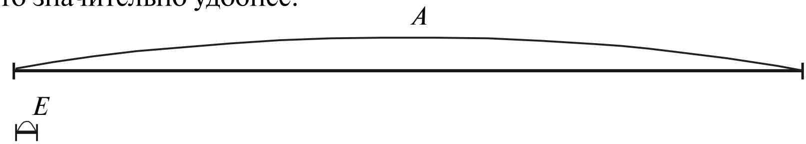
С помощью такой таблицы можно восстановить дома измеренную в классе веревку с помощью спички и двух дополнительных мерок, которые также можно изготовить дома.

Запись при этом можно упростить следующим образом:

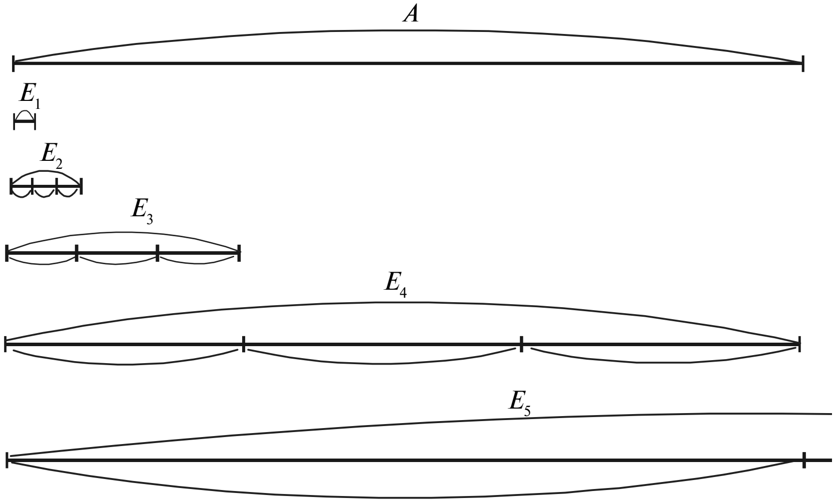
$$\overset{E_3}{2} \xleftarrow{3} \overset{E_2}{1} \xleftarrow{4} \overset{E_1}{3} \qquad \text{или} \qquad 2 \xleftarrow{3} 1 \xleftarrow{4} 3.$$

Частным случаем такой формы записи, которая появится позже, может быть число с нулями в середине или на конце. Как только появятся нули в середине или на конце, детям необходимо предложить дополнить запись нулями перед числом. Эти нули будут сообщать об отношении величины к меркам, бо́льшим ее самой. Впереди, таким образом, можно записать бесконечное множество нулей. Дети предложат их не писать, но тогда именно учитель будет предлагать опустить и нули в середине. Например, в записи 2003 зачеркнуть нули и оставить запись 23. Дети должны обосновать, почему этого нельзя делать. Тогда естественно возникает вопрос, почему нули в середине и на конце числа опускать нельзя, а впереди — можно. Мерки, бо́льшие, чем величина, не только не используем при измерении, но и строить их не нужно, поэтому и нули перед числом не нужны.

Теперь рассмотрим ситуацию, в которой для измерения величины A меркой E нужно укрупнить мерки в одно и то же число раз, что значительно удобнее.

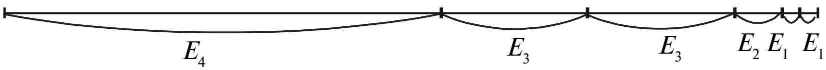


Выберем коэффициент укрупнения, например пусть $k = 3$, тогда, присвоив индекс данной мерке и каждой следующей, получим систему мерок (а не набор):



Мерка E_5 оказалась больше измеряемой величины A, значит, измерение величины A начнем меркой E_4 как самой удобной, так как она самая большая из всех мерок, меньших величины A. Измеряя A меркой E_4, мы можем получить остаток (а можем и не получить, все будет зависеть от того, какую величину мы предложим), тогда очевидно, что измерять остаток нужно меркой поменьше, а именно E_3 (размер остатка тоже можно и нужно регулировать).

Следующий остаток, который также можно (и нужно) запрограммировать, измеряется меркой E_2, и последний остаток — меркой E_1 (на этой мерке здесь и сейчас измерение должно закончиться):



Результатом такого способа измерения и станет запись:

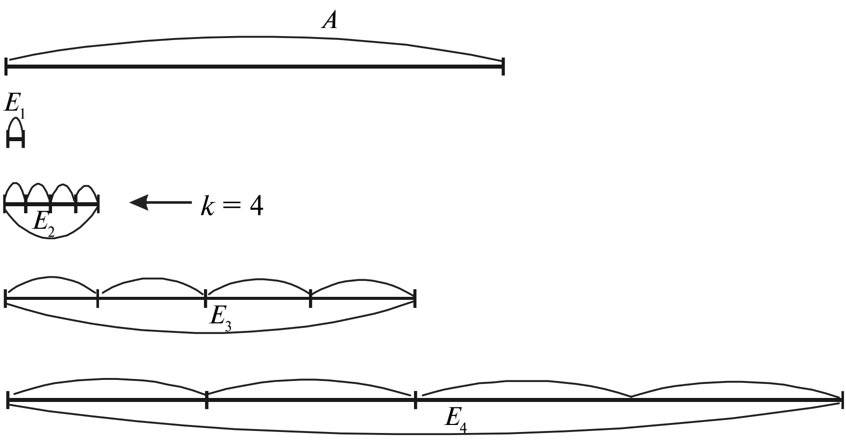
1212_3, где цифры 1 и 2 на разных местах (позициях) показывают результат измерения каждой меркой:

E_4	E_3	E_2	E_1
1	2	1	2_3

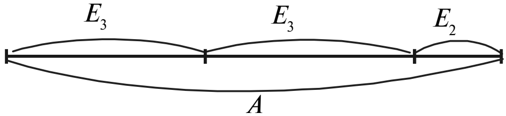
,

причем номер (индекс) мерки соответствует номеру разряда. Число 3 — основание системы счисления — указывает на отношение между мерками (коэффициент укрупнения).

Итак, мы кратко описали содержание позиционной формы многозначного числа. Понятно, что от того, какую величину и мерку вы будете предлагать детям для измерения, они будут получать многозначные числа с различным числом разрядов. Пропуск одной или нескольких мерок из системы мерок в процессе измерения будет фиксироваться нулем в соответствующем разряде:



$E_4 > A$, значит, результат измерения будет записан так: 210_4:



Вписав 0 на место мерки E_1, которая не понадобилась, ребенок неизбежно приходит к мысли о том, что тогда и на месте мерки E_4, которая оказалась больше величины A и тоже не понадобилась, нужно написать нуль, а также и на месте всех последующих за меркой E_4 мерок (E_5, E_6, E_7 и т. д.), а их число неограниченно, тоже нужно писать нули: 0000210_4 (выше мы уже рассматривали эту ситуацию).

В результате речь пойдет о «значащих» и «незначащих» нулях в записи числа. Нули впереди числа, полученного в результате измерения, можно не писать, а нули в середине и на конце не писать нельзя.

Так, записав вместо числа 210_4 число 21_4, мы при воспроизведении величины отложим 2 раза мерку E_2 и 1 раз мерку E_1, так как цифра 2 стоит на втором месте справа, а цифра 1 — на первом, в то время как для измерения величины A, которую хотим восстановить, мы 2 раза откладывали мерку E_3 и 1 раз мерку E_2.

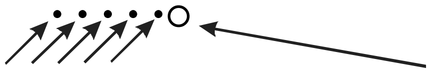
Итак, это лишь краткое описание содержания понятия позиционного многозначного числа в выбранной системе счисления.

Выбрав коэффициент укрупнения, равный 10, мы получим число в десятичной системе счисления, которая и будет рассматриваться как частный случай.

Анализ действия измерения системой укрупненных мерок дает возможность ввести естественное осмысленное ограничение (благодаря наличию контрольного действия) на каждую цифру в записи позиционного многозначного числа в заданной или выбранной системе счисления: если основание системы счисления равно 5, то цифры 5 и последующих цифр в записи уже быть не может: если бы какая-либо мерка вошла в величину 5 раз, то мы бы пользовались не этой меркой, а следующей, которая именно в 5 раз больше предыдущей. Измерение всегда начинается с самой большой из всех меньших величины мерок или равной ей и продолжается до тех пор, пока не получится остатка, меньшего выбранной мерки (в частном случае измерение может быть и окончено). После этого имеет смысл переходить к другой мерке, поэтому ни в старшем разряде, ни в любом младшем не может появиться цифра 5.

Если же в записи числа в пятеричной системе счисления оказалась вдруг цифра 5, 6 или любая бóльшая, то это значит, что измерение выполнялось нерациональным способом, при котором вместо того, чтобы приложить крупную мерку один раз, ребенок прикладывал меньшую мерку 5 (6, 7 и т. д.) раз.

Если же было сделано контрольное сравнение мерок с измеряемой величиной, например, было установлено, что $E_6 > A$, а $E_5 < A$, то измерять начнем меркой E_5, затем E_4, затем E_3 и т. д., сделав заготовку для чисел (цифр) в каждом разряде:



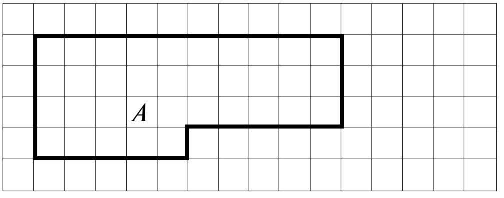
Таким образом, представление о позиционном многозначном числе формируется в рамках *задачи измерения величины системой мерок с заданным или выбранным отношением между ними*. Сначала определяется количество необходимых для измерения мерок (значит, становится известным, сколько цифр будет в записи числа), а лишь затем производится сама операция измерения (значит, определяется цифра каждого разряда), что позволяет впоследствии задать операционный состав способа выполнения любого арифметического действия как последовательного выполнения двух операций: определения количества цифр (разрядов) в искомом результате выполняемого действия и нахождения цифры, соответствующей каждому из этих разрядов.

Необходимость рассмотрения различных систем счисления продиктована несколькими обстоятельствами.

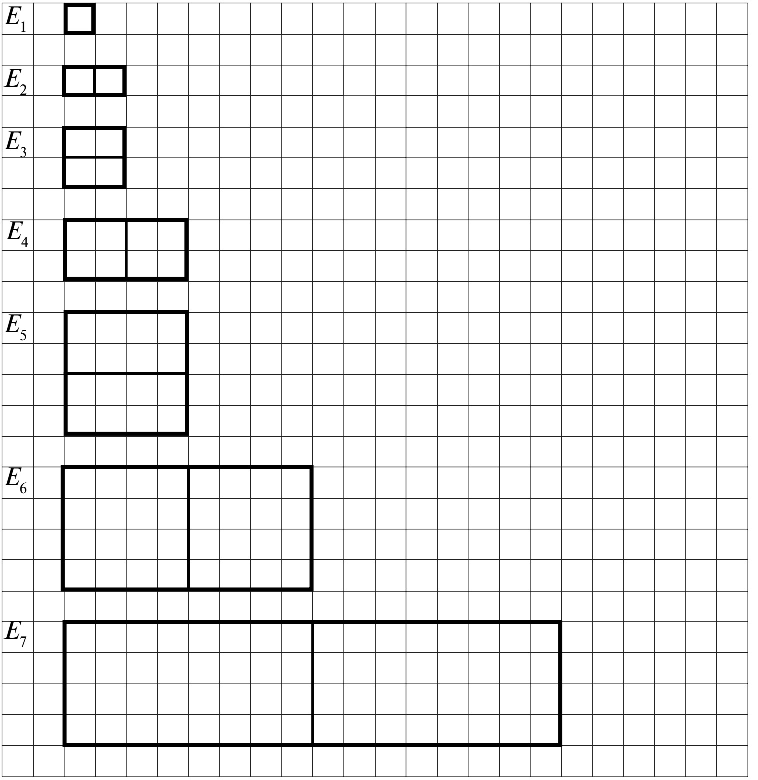
Во-первых, это нужно для того, чтобы дети смогли понять принцип образования многозначного позиционного числа, в частности в десятичной системе счисления. Суть его в том, что 10 единиц любого разряда образуют 1 единицу следующего разряда. При практических действиях, связанных с образованием новой укрупненной мерки для измерения величин, значительно бóльших исходной (основной) мерки, невозможно даже при самой маленькой исходной мерке показать образование четвертой, пятой и далее мерок. Работа в двоичной, троичной, четверичной системах мер дает такую возможность. Одна и та же величина может быть описана с помощью чисел, записанных в разных системах счисления, с разным числом знаков в записи числа.

Например, одну и ту же величину A (площадь) при одной и той же исходной (основной) мерке будут характеризовать равные числа, записанные в разных системах счисления, с разным (или одинаковым) количеством знаков. Количество знаков в записи числа будет зависеть от того, сколько мерок, а точнее, какую по счету мерку использовали первой для измерения данной величины системой мер с постоянным коэффициентом укрупнения. Если измерение начинаем меркой E_5, так как $E_6 > A$, то число должно быть пятизначным, если E_2, так как $E_3 > A$, то число будет двузначным.

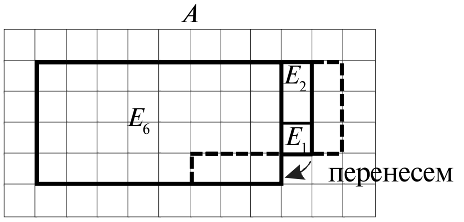
Так, если площадь A измерить с помощью разных систем мерок — десятичной, пятеричной, четверичной, троичной и двоичной, то легко понять, как образуется многозначное позиционное число. Пусть дана площадь A, которую будем измерять с помощью мерок в разных системах счисления.



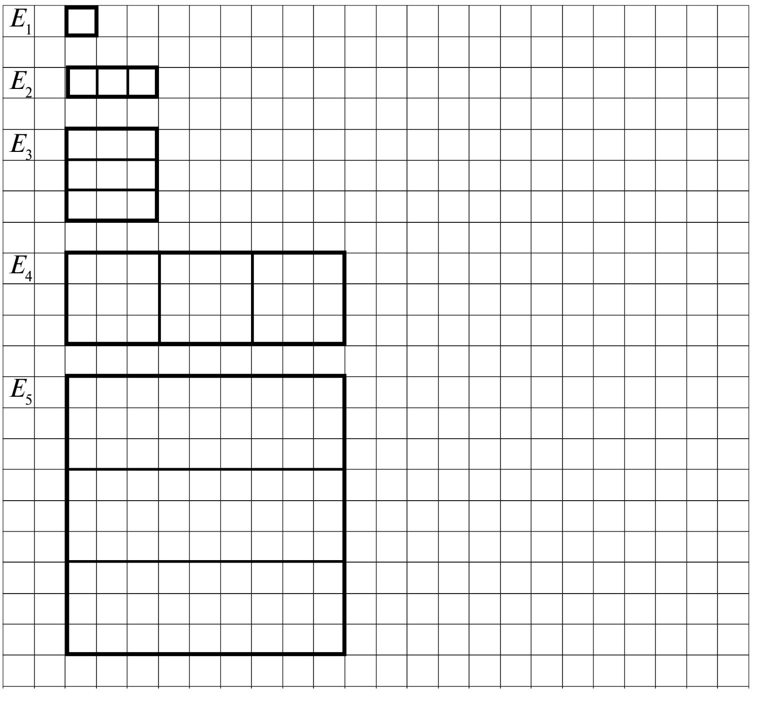
Двоичная система мерок:



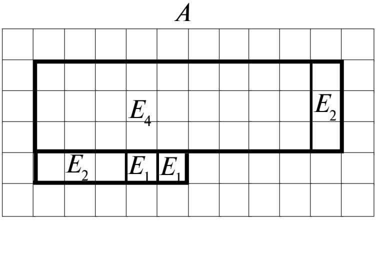
$E_7 > A$, значит, измерять будем меркой E_5, затем остаток меркой E_4 и т. д. до E_1. В результате измерения величины A получим число 100011_2:



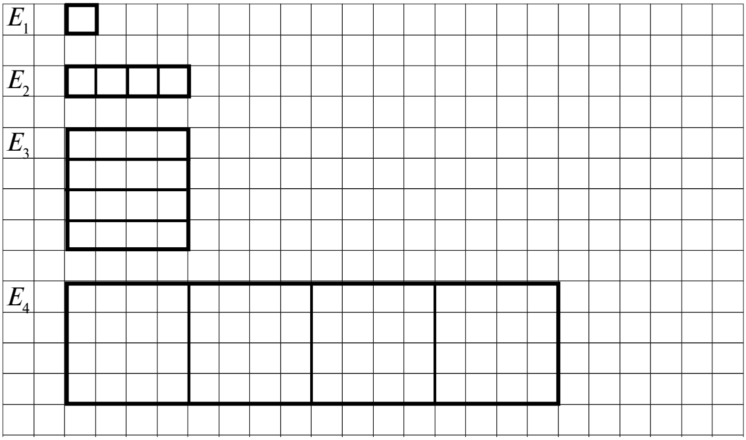
Троичная система мерок:



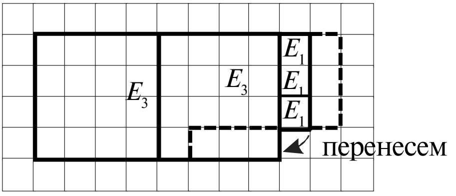
$E_5 > A$, значит, измерять будем мерками E_4, E_3, E_2 и E_1. В результате измерения величины получим число 1022_3:



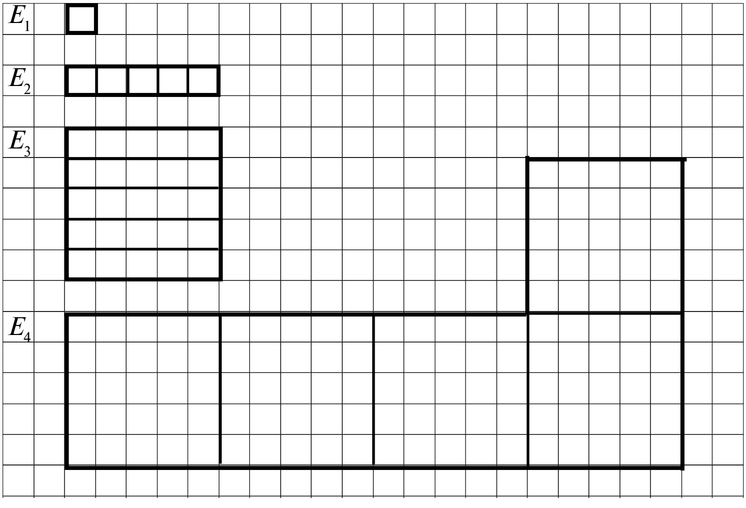
Четверичная система мерок:



$E_4 > A$, значит, измерять будем мерками E_3, E_2 и E_1. В результате измерения величины A получим число 203_4:

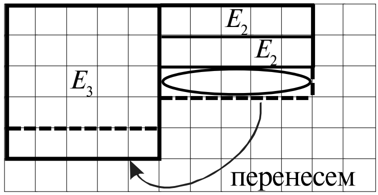


Пятеричная система мерок:



$E_4 > A$, значит, измерять будем мерками E_3, E_2 и E_1.

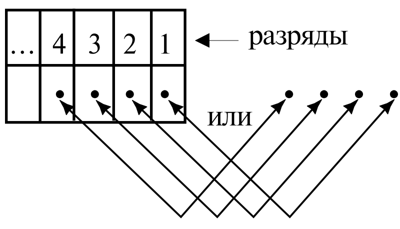
В результате измерения величины A получим число 120_5:



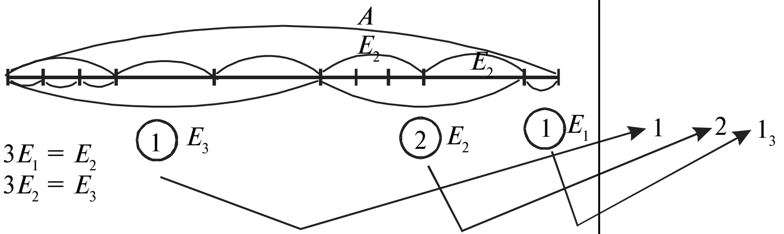
Таким образом, выполняя практические действия над разными видами величин: площадью, объемом, длиной и т. д., ребенок путем «ручного» мышления познает принцип образования многозначного числа. Недесятичные системы счисления (двоичная, четверичная и др.) дают возможность получить в результате практических действий запись числа с тремя, четырьмя и более разрядами, что невозможно сделать при десятикратном укрупнении мерки.

Вторым аргументом в пользу рассмотрения чисел в разных системах счисления является необходимость самостоятельного конструирования детьми действий сложения и вычитания чисел. Работая с недесятичными системами счисления, ребенок фактически вновь осмысливает счет в пределах 2, 3, 4, ... соответственно работе с числами в двоичной, троичной, четверичной и других системах, овладевает составом числа.

Операции с любыми числами он выполняет в практическом действии и в знаковой форме, он словно учится говорить на двух языках — языке измерений и языке чисел.

Язык измерений	**Язык чисел**
1) Номер мерки E_1, E_2, E_3, E_4, ... соответствует номеру разряда.	**1)**  Места для цифр (номер места в «заготовке» считать справа налево).
2) Отношение между соседними мерками $\frac{E_n}{E_{n-1}} = k$, где k показывает, во сколько раз каждая следующая мерка больше предыдущей. Это и есть основание системы счисления (k-ричная система).	**2)** • • • • $_k$ ← основание системы счисления

Язык измерений	**Язык чисел**
3) Длину A измерим троичной системой мерок, а это значит, что число, показывающее, сколько раз каждая мерка помещается в данной длине, соответствует цифре в каждом разряде:	**3)** Получили число: один два один в троичной системе счисления.



Таким образом, появление многозначного числа как результата измерения связано с ответом на два вопроса:

1) Сколько цифр будет в записи числа? На этот вопрос можно ответить ничего не измеряя, так как если мерка $E_4 > A$, то понадобится (в общем случае) *три* мерки, значит, число будет *трехзначным*, если $E_7 > A$, то мерок понадобится *шесть*, а значит, число будет *шестизначным*, и т. д.
2) Какова цифра в каждом разряде? Ответ на этот вопрос может быть получен после измерения каждой меркой (начиная с самой большой) величины A, а значит, сначала появляется цифра в самом старшем разряде, номер которого в числе можно узнать, посчитав разряды начиная с младшего.

Именно такой подход к введению понятия многозначного позиционного числа в разных системах счисления, при котором появление числа связано с последовательным выполнением двух практических действий и с последовательным ответом на указанные *два* вопроса, позволил принципиально изменить подход к нахождению числа как результата выполнения любого арифметического действия с числами — компонентами этого действия.

Другими словами, переход к числу как результату действий с другими числами (третий аспект числа) может осуществляться напрямую, без практического действия измерения, если мы находим:

1) способ определения количества цифр в числе — результате действия, опираясь на знание количества цифр у чисел-компонентов;

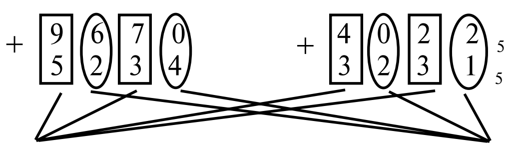
2) способ определения цифры в каждом разряде числа-результата, опираясь на знание каждой цифры в числах-компонентах.

Всеобщность этого способа — его применимость для нахождения результатов всех четырех арифметических действий — очевидна. Как известно, традиционная программа предусматривает лишь частичное использование этого способа — при делении многозначных чисел, тем самым явно *нарушая* прослеживаемую *логику* изучения остальных действий, которые, во-первых, не требовали определения количества цифр в результате (в сумме, в разности, в произведении), а *во-вторых*, выполнялись начиная с *младшего* разряда, т. е. справа налево, в то время как деление нужно выполнять со *старшего* разряда, т. е. слева направо. Такое нарушение логики *неизбежно* приводит к психологическим трудностям при освоении действия деления многозначных чисел, отнимая у ребенка много времени и сил для преодоления этого психологического барьера. Недаром изучение деления многозначных чисел является, без сомнения, самым трудным материалом как для детей, так и для учителя.

Из сказанного выше следует, что сначала нужно сконструировать способ *письменного* выполнения любого арифметического действия с многозначными числами, имеющими большое число разрядов, а необходимость письменного действия с многозначными числами и приводит ребенка к необходимости конструирования таблиц сложения и умножения, которых оказывается вполне достаточно для выполнения любых действий с любыми многозначными числами.

Повторимся: сложение чисел в двоичной системе счисления требует навыков счета в пределах 2, в троичной — в пределах 3 и т. д., в десятичной — в пределах 10, что кардинальным образом меняет подход к изучению таблиц сложения и умножения, которые рассматриваются на множестве *целых неотрицательных* чисел, а не на множестве *натуральных* чисел, как это принято традиционно, а случаи сложения и умножения с нулем рассматриваются как исключения.

Таблица сложения — это таблица сложения **однозначных** чисел, тех, которые могут оказаться в записи многозначного числа при сложении в столбик, например:



сложение однозначных с переходом через разряд, включая равенство состава числа — основания системы счисления

сложение однозначных чисел без перехода через разряд, включая сложение с нулем

Таким образом, нет необходимости заставлять ребенка зазубривать суммы (табличные) сначала в пределах 10, расширяя их позже до пределов 20. Работая с числами, заданными в разных системах счисления, мы еще не раз вернемся к аналогичным вычислениям.

Такая методика изучения действий с многозначными числами позволила, как это было сказано, изменить подход к конструированию таблиц сложения (вычитания) и умножения (деления). Это неизбежно приведет детей к эффективному *непроизвольному* запоминанию, что имеет огромное значение для формирования как необходимых вычислительных навыков, так и устойчивого (взамен ситуативного) познавательного интереса, который, в свою очередь, стимулирует детей к произвольному запоминанию. Дети начинают с удовольствием заучивать те табличные случаи, которые могли остаться за порогом непроизвольной памяти, используя специфические приемы запоминания, широко известные в психологии и инициирующие детей к придумыванию собственных приемов запоминания.

После овладения приемами **письменных вычислений** дети, столкнувшись с многозначными числами, действия над которыми не требуют письменных вычислений (2000 + 3000; 8000 + 27; 1 900 000 − 800 000 и т. д.), начинают конструировать **приемы устных вычислений**, обосновывая их с помощью графических моделей.

Значит, в отличие от традиционного способа обучения приемам устных вычислений, при котором дети овладевают вычислительными приемами для внетабличных случаев в пределах ста, а потом учатся письменному выполнению действий, здесь дети рассматривают эти же случаи, но как те, к которым *сводятся* действия над круглыми многозначными числами. Тем самым расширяется круг устных вычислений: дети рассматривают в дальнейшем такие случаи, которые в школьном курсе математики, как правило, не разбираются, а рекомендованы для факультативных или внеклассных занятий.

Третье обстоятельство, побудившее рассматривать числа в недесятичных системах счисления, связано с необходимостью понимания ребенком условий происхождения самого понятия. Использование нестандартных систем числительных, к которым относится «запись» чисел при помощи зарубок, камешков, узелков или стихов-считалок, приводит ребенка к мысли о необходимости создания стандартной системы, к новым способам действия, в том числе к укрупнению счета (счет группами), к укрупнению мерки. Наряду со счетом группами по 10 элементов (предметная модель — бухгалтерские счеты, уже фактически ушедшие в небытие) ранее встречались группы по 5, 12, 20 элементов. Так, например, счет двадцатками использовали люди племени майя, а следы такого счета сохранились до сих пор в датском, французском и других европейских языках. Группа из 12 элементов дошла до наших дней под названием *дюжина*, а число 13 называют «чертовой» дюжиной. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц, и до сих пор эта система счета используется при измерении времени и углов в минутах и секундах. Таким образом, знакомство с разными системами счисления закладывает основы более глубокого понимания действий с такими величинами, как время и угол, что, безусловно, имеет огромное значение для дальнейшего изучения физики и геометрии.

Четвертый аргумент в пользу рассмотрения действий с числами в разных системах счисления связан со стремительным изучением информатики. Как известно, при вычислениях на ЭВМ применяется двоичная система счисления.

Многие исследования и школьная практика показали повышенный интерес детей к разным системам счисления. К примеру, ученик 5 класса Сушин Дима (г. Междуреченск), интерес которого к системам счисления не только не исчез к 5 классу, но и усилился, подготовил к ежегодной международной олимпиаде школ развивающего обучения выступление на тему «Системы счисления». Вот что он пишет во вступлении к своей работе: «Я расскажу о таблицах сложения и умножения в различных системах счисления, о выполнении действий сложения, вычитания, умножения, деления в различных системах счисления, о составлении числовых ребусов в различных системах счисления. Мне нравится составлять таблицы сложения и умножения в различных системах счисления.

Вы спросите меня: «А зачем ты это делаешь?» А для чего люди пишут стихи? Ведь наверняка не для того, чтобы их изучали в школе. Автор любого стихотворения пишет его в первую очередь для себя. В стихотворении он слышит ритм, видит гармонию, красоту, так и я вижу в таблицах ритм, гармонию и закономерности».

Вот несколько таблиц сложения, которые составил Дима в двоичной, четверичной и одиннадцатиричной системах:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

2

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

4

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	10
2	3	4	5	6	7	8	9	A	10	11
3	4	5	6	7	8	9	A	10	11	12
4	5	6	7	8	9	A	10	11	12	13
5	6	7	8	9	A	10	11	12	13	14
6	7	8	9	A	10	11	12	13	14	15
7	8	9	A	10	11	12	13	14	15	16
8	9	A	10	11	12	13	14	15	16	17
9	A	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

11

Буква *А* используется как знак, соответствующий 10 меркам.

Задания, которые Дима составил и выполнил, включают действия с числами из 11-, 13-, 14-ричной систем счисления:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 7\,0\,1\,A\,0_{11} \\ A\,8\,5\,1\,A_{11} \end{array} \\ \hline 1\,6\,8\,7\,0\,A_{11} \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \begin{array}{r} A\,Б\,В\,1_{13} \\ A\,1\,A\,1_{13} \end{array} \\ \hline A\,2\,0_{13} \end{array}$$

А = 10; *Б* = 11; *В* = 12.

Ребус и его решение:

$$\begin{array}{r} Т\,А\,Й\,Д_{11} \\ С\,И\,Ф_{11} \\ \hline Д\,О\,С\,Я_{11} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,3\,4\,6_{11} \\ 8\,4\,1_{11} \\ \hline 6\,0\,8\,7_{11} \end{array}$$

Свою работу Дима заканчивает словами: «Еще меня интересуют признаки делимости в различных системах счисления, но это — тема моей следующей работы».

Пятое обстоятельство, послужившее мотивом для включения рассматриваемой темы в программу, связано с решением одной из задач обучения, ориентированной на развитие личности ребенка, его способности к коммуникативной деятельности.

Изучение описанного содержания требует особой организации детей, их кооперации при измерении величин системой мерок. Число детей в группе определяется количеством мерок, используемых при измерении, а значит, и количеством разрядов в записи числа при восстановлении величины по числу и мерке.

Отметим, что *не учитель* распределяет между детьми обязанности, а *сами* дети решают, как организовать работу над заданием, предлагая к тому же и критерии оценки совместной работы. Однако после выполнения ряда заданий с групповой формой организации необходимо предложить детям обсудить, какие ошибки можно допустить при их выполнении, и зафиксировать их на карточке, а затем выполнить аналогичное задание в паре, когда один из двоих выполняет задание, а другой осуществляет контроль за его выполнением с помощью составленной карточки, в которой предполагаемые ошибки зафиксированы условными значками, придуманными детьми. При парной работе дети должны меняться ролями, после чего оценивать с помощью известных «линеечек» (Г. А. Цукерман) действия как одного, так и второго. И лишь после парной работы ребенок может приступить к самостоятельному выполнению заданий и самопроверке, сначала по ходу работы, как это было при парном выполнении, а затем только после полного завершения индивидуальной работы. Схема такой работы описана в книге «Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс» (М.: Вита-Пресс, 2000).

Итак, выше были перечислены основные аргументы, которые послужили основой для включения понятия позиционного многозначного числа в недесятичных системах счисления в программу обучения.

Рассмотрим систему заданий, которые помогут ребенку сконструировать новый способ измерения величин, требующий использования сначала набора мерок, а затем системы вспомогательных (дополнительных) мерок, когда каждая следующая мерка в одно и то же число раз больше предыдущей. Этот способ измерения величин будет зафиксирован в новой форме числа — форме многозначного позиционного числа.

Задания 182 и 183 рассчитаны на повторение ситуации, при которой для измерения величины понадобится набор мерок.

Выбор подходящей мерки связан, прежде всего, с оценкой разностного отношения между измеряемой величиной и мерками из набора. Самой удобной, т. е. подходящей, меркой будет наибольшая из всех мерок, которые меньше измеряемой величины. Чтобы быть уверенным в том, что подобрана именно такая мерка, нужно следующую из набора мерку (при условии, что мерки в наборе упорядочены в порядке возрастания) сравнить с измеряемой величиной. Если она больше измеряемой величины, то мерка подобрана правильно.

Поиск первой мерки (в ряду возрастающих мерок), которая оказалась большей, чем измеряемая величина, является контрольным действием.

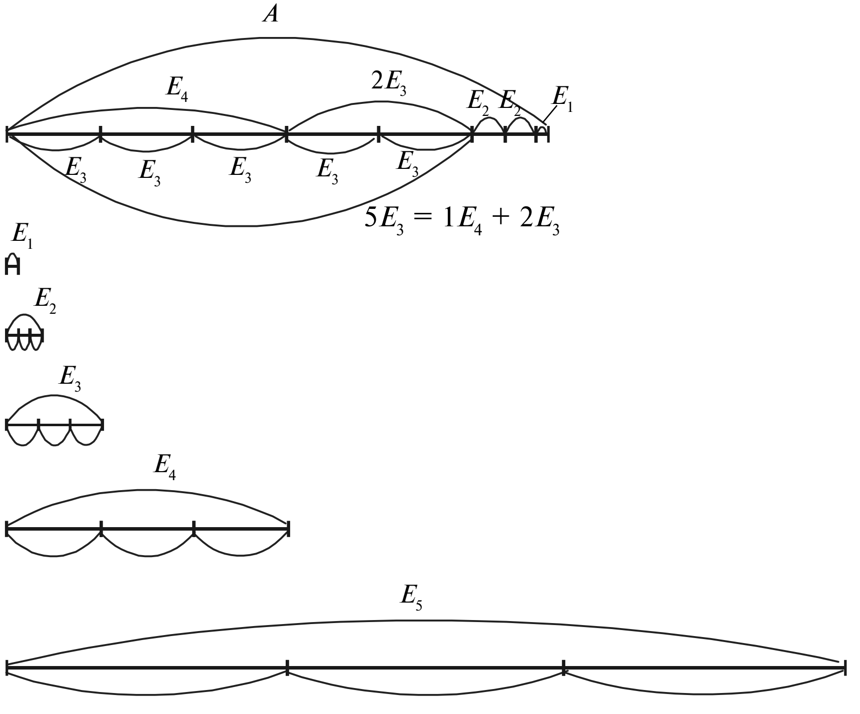
По цифрам в записи многозначного числа при измерении величины системой мерок всегда можно определить, производилось ли при измерении это контрольное действие. Если в записи многозначного числа есть цифра[1] (число в разряде), которая больше или

---

[1] Для краткости будем употреблять термин «цифра» вместо «однозначное число, изображаемое цифрой».

равна основанию системы счисления, то это означает, что, вместо того чтобы измерить часть величины следующей укрупненной меркой, использовали неудобную, «мелкую» мерку.

Другими словами, наличие в позиционной записи числа цифры, большей основания системы счисления, свидетельствует о нерациональном способе измерения. Например, если результатом измерения стало число 521_3, то это значит, что мерка E_3 уместилась 5 раз в части величины, однако в этом случае можно было начать измерение меркой E_4, а затем измерять остаток меркой E_3, и тогда результатом измерения было бы число 1221_3:



$E_5 > A$, значит, в записи числа должно быть 4 цифры, а тогда измерение нужно начинать меркой E_4, затем остаток измерить меркой E_3, и т. д.

Таким образом, для рационального способа измерения необходимо сначала научиться определять, какой меркой из системы мерок удобнее измерить часть величины. Для решения этой задачи (в прямой и обратной форме) предназначены не только ***задания 182, 183***, но и ***задания 184, 185, 186***.

С помощью ***задания 187*** дети начнут конструировать позиционную форму записи многозначного числа. От имени детей Оли, Маши, Саши и Лены в задании прописаны формы записи результата измерения площади A набором мерок. Эти и другие предложения могут стать итогом обсуждения детьми вашего класса способов фиксации результата измерения. Это значит, что читать текст по учебнику не нужно, имена детей вымышленные. В классе вы назовете эти же варианты именами реальных детей. Текст в учебнике позволит детям дома восстановить в памяти суть решения этой задачи.

При обсуждении в классе особое внимание уделите записи, которую сделала Маша: $\frac{A}{E_4} = 1$, $\frac{\text{остаток}}{E_3} = 1$;

$\frac{\text{остаток}}{E_2} = 2$, $\frac{\text{остаток}}{E_1} = 3$.

Эта запись неверная, так как первая формула равносильна формуле $A = 1E_4$, но $A \neq E_4$, $A = 1E_4 + 1E_3 + 2E_2 + 3E_1$, а это значит, что результат измерения может быть записан одним из трех других способов.

Наиболее удобным способом может быть принят Сашин способ записи в виде таблицы. Эта табличная запись готовит ребенка к позиционной записи — многозначному числу.

Здесь еще рано говорить о записи числа в какой-то системе счисления.

Задания 188 и 189 помогут ребенку осознать смысл основных видов записи результата измерения набором дополнительных мерок (реальных или изображенных схемой):

$$A = 1E_4 + 1E_3 + 2E_2 + 3E_1$$

и

E_4	E_3	E_2	E_1
1	1	2	3

Детям нужно будет по записям восстановить фигуру, площадь которой измеряли. Понятно, что при восстановлении фигура может иметь другую форму, но ее площадь должна быть равна площади A (см. ***задание 187***). Организовать выполнение этих заданий можно либо в паре, когда один работает над заданием 188, а другой — 189, либо, если дети слабенькие, можно выполнить каждое задание по группам.

Дети могут договориться, кто с какой меркой будет действовать. Вырезав из бумаги мерки E_1, E_2, E_3 и E_4, каждый по своей мерке и соответствующему ей числу будет изображать свою часть фигуры, а затем все вместе сложат из этих частей целое — новую фигуру, площадь которой должна быть равной площади A, в чем дети могут убедиться путем наложения.

Для выполнения ***задания 190*** дайте возможность детям в группах обсудить способ его выполнения: либо измерять изображенные отрезки, для того чтобы перенести их в свою тетрадь, либо использовать полоски соответствующей длины.

Однако важно сохранить смысл данного задания, в котором, прежде чем промерять длину A, нужно упорядочить мерки в порядке возрастания или убывания.

На рисунке в учебнике две мерки из данных одинаковые. Если пронумеровать все *различные* мерки и сравнить их длины, то обнаружится, что $E_4 > A$, а значит, сначала нужно промерить часть величины A меркой E_3, затем E_2 и E_1. Выполнить это задание лучше сначала на полосках, прикрепляя их на доске, переставляя их, если нужно, а уже затем предложить выполнить самостоятельно это же задание на отрезках, предварительно обсудив, как было сказано выше.

Результат измерения нужно записать в форме таблицы:

E_1	E_2	E_1
1	2	1

Задание 191 можно считать обратным по отношению к предыдущему. Теперь по таблице и данным меркам нужно восстановить измеренную кем-то длину (1) и площадь (2).

Для выполнения данного типа заданий подготовьте столько наборов из трех мерок (длины, площади, объема), сколько групп детей обычно организовано в классе. Размеры мерок и соотношение между ними могут быть произвольны, однако было бы интересно обнаружить *одинаковое* отношение между мерками в разных наборах. В учебнике мерка E_2 входит в мерку E_3 два раза — это относится к меркам длины и площади.

Проанализируйте вместе с детьми следующую ситуацию: у всех, кто изображал величины с помощью одинакового набора мерок и одной и той же таблицы, они оказались одинаковыми (речь идет, конечно же, об однородных величинах). Так, если разные дети использовали данные мерки длины (площади), то построенные ими отрезки (фигуры) тоже окажутся одинаковой длины (площади), в чем легко убедиться.

В ***задании 192*** устанавливается взаимно-однозначное соответствие между мерками, которые использовали для измерения какой-либо величины, и способом записи в форме таблицы результата измерения каждой из этих мерок.

Выполнение данного задания, в котором есть ссылки на вымышленных детей, нужно организовать без опоры на текст учебника. Перед детьми выставить наборы из четырех мерок длины, площади или объема и предложить сделать заготовку для записи результатов измерения. Если среди заготовок, которые составят дети в группах, не окажется хотя бы одной из тех, что даны в учебнике, то предложите их сами для обсуждения. Важно, чтобы результатом оценки разных заготовок стала та, которая в учебнике предложена от имени Насти, так как она отображает и процесс измерения (измерение начинают самой большой меркой E_4), и результат. Точками в заготовках обозначено место для записи результата измерения величины каждой меркой. *Сколько мерок*, *столько* точек — *мест* для записи результата измерения каждой меркой — нужно заготовить. Фактически ребенок готовится к установлению соответствия между количеством цифр в записи многозначного числа и количеством мерок, используемых при измерении.

Итак, для описания процесса и результата измерения будем использовать два языка: язык практического выполнения действия и язык для наименования, записи чисел и действий над ними. Первый назовем условно **языком измерений**, в словаре которого будут слова и словосочетания: мерка, мера (для стандартных единиц измерения), измеряемая величина, построение величины (построить величину — это значит дать ее предметное представление или представить ее в виде отрезка нужной длины или геометрической фигуры с соответствующей площадью, невзирая на то, что реально действие производилось с объемом, массой, величиной угла и т. д.).

Второй язык — **язык чисел** — называют системой счисления. К изучению позиционных систем счисления мы и приступаем. Как известно, в позиционных системах счисления один и тот же знак (цифра) может иметь различные значения в зависимости от места (позиции), которое он занимает в записи числа. *Место* для знака в записи числа мы будем фиксировать *точкой*.

С непозиционными системами счисления дети уже знакомы. Это римская, славянская нумерация и другие. Так, в римской системе счисления используют следующие знаки: единица — I, пять — V, пятьдесят — L, сто — D, тысяча — M, а все остальные числа получаются при помощи двух арифметических операций — сложения и вычитания.

В позиционных системах счисления количество знаков (цифр), используемых для записи числа, равно основанию системы счисления, которое устанавливает отношение последующей единицы (мерки) к предыдущей. Например, в десятичной системе счисления для записи чисел используют 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Единица каждого следующего разряда в 10 раз больше единицы предыдущего. На языке измерений это будет означать, что каждая следующая мерка в десятичной системе мерок будет в 10 раз больше предыдущей. Если же речь пойдет о двоичной системе счисления, то каждая следующая мерка после основной будет в 2 раза больше предыдущей.

Итак, выполняя данное задание и следующее за ним, ребенок готовится к пониманию кратного отношения между мерками и пониманию того, что такое позиционная система счисления.

Для измерения площади фигуры из ***задания 193*** можно выдать детям на группу из четырех человек мерки, вырезав их из бумаги (мерки должны быть разноцветными). Саму фигуру начертите на отдельном клетчатом листе и предложить детям договориться друг с другом о способе измерения и записи результата, а затем совместно измерить ее площадь.

Трое детей по очереди измеряют площадь мерками E_3, E_2 и E_1, а четвертый записывает результаты измерений в таблицу, которую он должен заготовить после выяснения различных точек зрения. При оформлении результата измерения нужно сделать вывод о форме записи. Внимание детей нужно сконцентрировать не на самом процессе измерения, а на форме записи результата. Вопросы, с которыми нужно обратиться к детям, представлены в учебнике. В итоге места для записи нужно назвать разрядами и предложить назвать цифру в первом разряде, во втором, в третьем. Номер разряда будет соответствовать номеру мерки, если мерки упорядочены в порядке возрастания и нумерация начинается с основной (исходной) мерки.

Цель следующих ***заданий 194—197*** — помочь осознать связь между величиной, меркой и записью результата измерения в форме позиционного числа, когда все мерки есть в наличии. Однако в ***задании 197*** вопрос и ответ на него заставят ребенка задуматься над условиями построения величины: построить (восстановить) величину по числу можно лишь в том случае, когда либо даны все мерки, либо известен способ их получения.

Задание 198 описывает способ организации детей при измерении и ставит перед ребенком новую задачу: как описать способ изготовления и изображения мерок, если дана только основная (исходная) мерка.

Это задание, как и предыдущие, читать с детьми не нужно. Необходимо лишь сформулировать задачу, которую предстоит решить: как восстановить величину по табличной записи числа и основной мерке, когда вспомогательных мерок нет.

Пусть дети сами (в группах) придумают способ построения мерок и описания отношений между ними.

Без сомнения, найдутся дети, которые предложат тот же способ, что описан в ***задании 198 и задании 199***.

Формулы, которые даны, описывают способ построения набора из 3—4 мерок. Понятно, что начертить следующую мерку набора нельзя, так как нет формулы, описывающей способ ее построения. Это и есть одно из неудобств использования вспомогательных мерок с разными отношениями между ними.

Дайте возможность детям порассуждать на эту тему. Если бы каждая следующая мерка, начиная с исходной (основной), получалась бы одним и тем же способом, т. е. по одному и тому же правилу, то можно было бы заранее заготовить как угодно большое количество мерок — систему мерок, которые получаются последовательно одна за другой (начиная с исходной). При этом каждая следующая мерка должна быть в одно и то же число раз больше предыдущей.

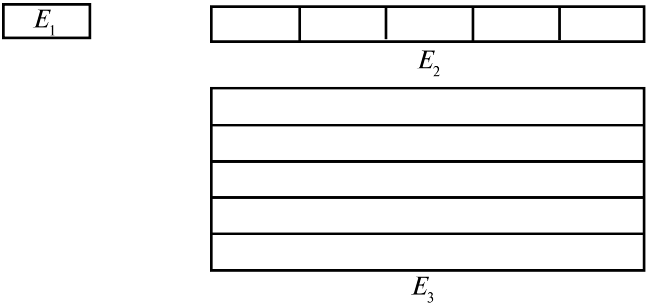
Осознать *удобство* использования *системы* мерок взамен набора (не нужно требовать от детей определения того, что такое набор мерок, а что такое система мерок, просто употребляйте эти названия адекватно ситуации) дети смогут, выполнив построения из ***задания 200***.

Задания 201 и 202 дают возможность от системы заданных мерок (задание 201) переходить к заготовке (знаковой модели) и наоборот, от заготовки переходить к изображению мерок, причем основную (исходную) мерку E_1 дети могут выбрать сами.

Нет необходимости всем детям в классе строить мерки по всем шести заготовкам (задание 202).

Пусть каждый выберет одну из 6 заготовок и с помощью основной мерки (это может быть мерка длины или площади) построит систему мерок. Напишите заготовки на доске, и пусть под каждой из них соберутся те дети, которые пользовались именно этой заготовкой, и сопоставят свои результаты.

Для того чтобы они задумались над тем, почему к выбору основной мерки (а она по условию может быть любой) нужно тоже отнестись, что называется, с умом, предложите на доске изобразить мерки по заготовке № 6, причем мерку E_1 изобразите такого размера (лучше дать в качестве мерки площадь какого-нибудь прямоугольника), чтобы дети испытали проблему уже при изображении третьей мерки (а их нужно четыре, так как в заготовке 4 места для цифр).



Вывод: прежде чем выбрать мерку E_1, нужно посмотреть по заготовке, сколько раз придется укрупнять мерку и возможно ли разместить мерки на месте, отведенном для изображения.

Таким образом, ребенку предлагается, прежде чем строить мерки, сделать **прикидку**, т. е. **мысленно** построить мерки.

В ***задании 203*** речь идет о тождественном преобразовании знаковой модели (заготовки). Вместо стрелок сверху и повторяющегося числа дети должны перейти к более компактной записи. Число, сообщающее о способе получения каждой следующей мерки (т. е. о том, сколько раз предыдущая мерка, начиная с основной, умещается в следующей), будем писать справа внизу и меньшего размера и назовем его *основанием системы счисления*. Однако этот способ записи должен быть «изобретен» детьми, а не предложен сразу в готовом виде. Пусть сначала осознают потребность в изменении формы записи, потом внесут свои предложения на этот счет, а лишь затем можно предложить *общепринятый* способ, о котором договорились «настоящие математики».

Итак, ***с задания 204 по 206*** дети имеют дело с позиционной формой записи числа в разных системах счисления. В тех заданиях, в которых измеряемой величиной является площадь фигуры, их нужно вырезать (понятно, что не из учебника), а лишь затем прорисовывать.

Для изображения величин используйте клетчатую бумагу.

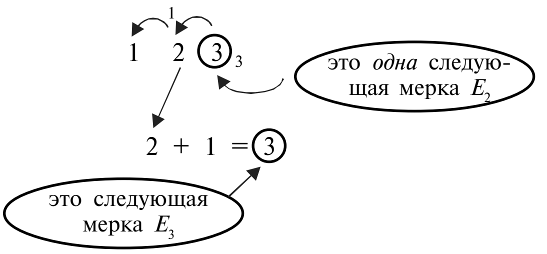
Первую часть ***задания 207*** нужно выполнить по группам, распределив данные мерки между группами. После построения величин по данному числу сравните величины, построенные по одной и той же мерке.

Вторую часть задания выполните как диктант и как проверочную работу, обсудив результаты после окончания работы.

Итогом такого выполнения может быть **составление справочника ошибок**, основой которого будут ошибки, допущенные детьми вашего класса. Не забывайте, что главное при составлении такого справочника — не просто зафиксировать ошибку, а попытаться понять *причину* ее появления и *способ* ее *обнаружения*.

В ***задании 208*** «ловушкой» названа фактическая ошибка в позиционной записи числа. В разряде не может быть записано число, большее основания системы счисления или равное ему.

При «правильном» (рациональном) способе измерения многозначное число должно быть записано с помощью ограниченного набора цифр (каждая цифра — это знак, с помощью которого записывают однозначное число), который зависит от основания системы счисления. В этом смысле числа 8352_7 (число читается так: восемь три пять два в семеричной системе счисления) и 123_3 записаны неверно (это «ловушка»), так как в семеричной системе счисления должны быть использованы цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а в троичной — 0, 1 и 2. Вместо числа 8 в семеричной системе счисления должно быть записано число 11_7, а вместо числа 3 в троичной — 10_3 (один нуль в троичной системе счисления). В этом легко убедиться, построив схему. Значит, вместо числа 8352_7 должно было быть число 11352_7, а вместо числа 123_3 — число 200_3:



На данном этапе можно понять, как исправить ошибки («ловушки») в том случае, если восстановить величину. Поэтому если мысленно дети не смогут выполнить те преобразования, которые необходимы для исправления ошибки (избавления от «ловушки»), то *здесь* можно просто зафиксировать эту *проблему*, а затем вновь к ней вернуться после выполнения следующего ***задания 209.***

Выполняя это задание, проанализируйте ситуацию, при которой в числе могут появиться «лишние» цифры.

В ***задании 210*** нужно подобрать такую величину, о которой можно сообщить числом с нулем в середине (а) и с двумя нулями в конце (б).

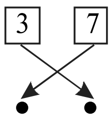
Понятно, что придумать в этой ситуации нужно сначала число в какой-либо системе счисления и по нему восстановить величину. Вот тут-то и обнаружится, насколько дети осознали связь между цифрами в записи числа и основанием системы счисления. Станет понятно и то, насколько ребенок осознает смысл знака (цифры) нуль как знака числа, показывающего отсутствие мерок. Выполнение этого и следующего ***задания 211*** позволит ученикам обсудить смысл и значение числа и цифры 0. При выполнении данного задания уместно предложить детям задуматься (в классе и дома) над тем, в каких случаях употребляют запись числа с нулями впереди. Известно, что, например, показание электросчетчика может быть таким: 0034 и т. п., так же могут быть записаны номера лотерейных билетов, денежных купюр, телефонов (01 — пожарная служба, 03 — скорая помощь и т. д.). Дайте детям возможность поразмышлять над подобным способом записи натуральных чисел.

Задание 212 фактически подводит итог введению понятия числа, записанного в той или иной системе счисления.

Задание 213 и ***задания из раздела «Проверь себя»*** используйте для составления проверочной работы.

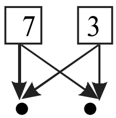
Следующая группа ***заданий с 214 по 226*** позволит перейти к записи чисел в десятичной системе счисления как общепринятой (краткая историческая справка дана под рубрикой «Это интересно!» после указанных заданий).

Нет необходимости давать комментарий к этим заданиям, так как их содержание хорошо знакомо, а способ их выполнения может быть выбран по усмотрению учителя. Важно помнить, что предметом итогового обсуждения должен стать **не сам результат** выполнения задания, а **способ получения такого результата**. Например, при выполнении задания 226 недостаточно удовлетвориться записью чисел 37 и 73 в первом случае и числами 37, 73, 33 и 77 во втором. Пусть дети выберут три любые цифры и запишут трехзначные числа (с повтором цифр и без него), а затем и предложите им обсудить, как научить других людей (детей) записывать двузначные (трехзначные и т. д.) числа с помощью заданных цифр. Обсуждение нужно провести в группах, а его результатом может стать, например, такая модель:



, если цифры не должны повторяться.

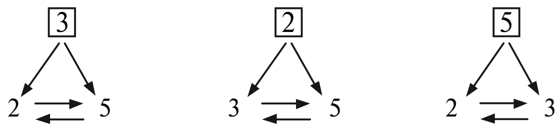
Если же цифры повторяются, то появляется вторая составляющая модели:



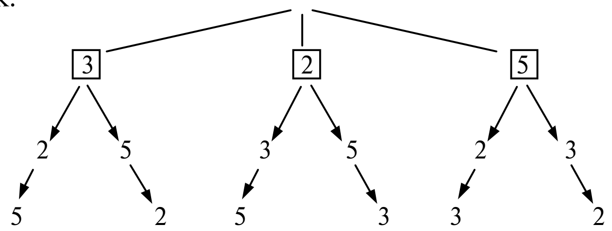
Это лишь один из возможных вариантов моделирования способа. Суть в том, что сначала нужно записать все числа, начинающиеся с одной цифры (а с остальными сделать все возможные *перестановки*), а затем закрепить первое место за другой цифрой и т. д.

Например, если нужно составить все трехзначные числа из цифр 3, 2, 5, при этом цифры повторяться не должны, то сначала можно записать все числа, которые начнутся с цифры 3, затем — с цифры 2, затем — с цифры 5. Записав цифру 3 на первом месте и поменяв местами цифры 2 и 5, получим два числа $\boxed{3}\,2\,5$ и $3\,\boxed{5}\,2$, затем еще два: $\boxed{2}\,3\,5$ и $\boxed{2}\,5\,3$, а затем еще два: $\boxed{5}\,3\,2$ и $\boxed{5}\,2\,3$.

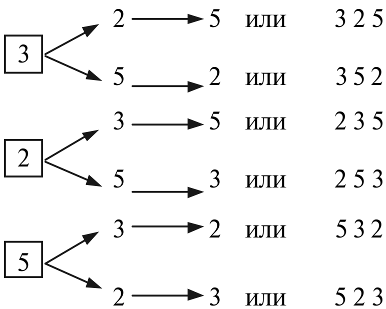
В модельной форме это может выглядеть так:



Или так:



По этой модели число нужно читать вдоль лучика по стрелкам.
Или так:



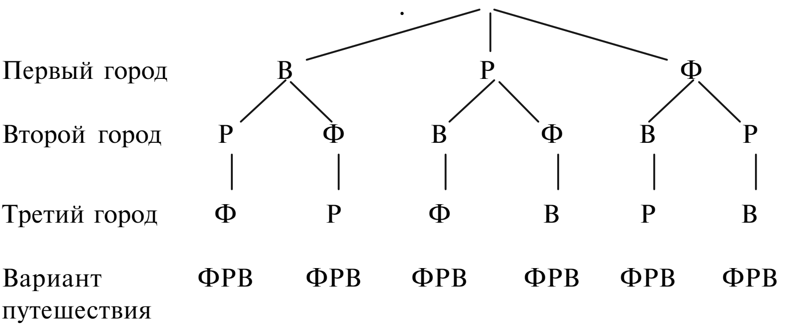
Фактически речь идет о *комбинаторных* задачах, о *комбинаторике*.

Составление различных моделей и осмысление способа их составления могут стать предметом специального исследования, которое может быть либо вынесено на факультатив для желающих, либо предложено для домашних дополнительных занятий в семье (но только для желающих!).

Результатами такого исследования дети могут поделиться со всеми на внеурочных занятиях, которые проведут те ученики, которые увлекались подобными задачами. Комбинаторные задачи очень часто предлагаются на математических олимпиадах, поскольку этот раздел математики не является *обязательным* в рамках школьной программы для начальной школы. Однако их значение в обучении огромно, так как именно для решения этих задач нужны новые типы моделей, которые явно не относятся ни к графическим, ни к знаковым. Решение комбинаторных задач сводится к перебору всех возможных вариантов, и только тогда модель позволит «удержать» их, не теряя ни одного из них. Такой подход к решению этого класса задач позволяет действовать не «методом тыка», а осмысленно. Приведем примеры решения комбинаторных задач, предлагаемых для учеников 6 класса авторским коллективом Г. Ф. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина.

Задача 1. Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трех городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?

Обозначим города их первыми буквами. Такую замену предметов их условными обозначениями называют *кодированием*. Тогда код каждого маршрута будет состоять из трех букв: В, Р и Ф, каждая из которых должна быть использована только один раз, например ВФР или ФРВ.



Путешествие можно начинать в любом из трех городов. Если первой посетить Венецию, то затем можно поехать в Рим или во Флоренцию. Если вторым посетить Рим, то третьей будет Флоренция, если второй будет Флоренция, то третьим будет Рим. Это два первых варианта путешествия.

Дерево возможных вариантов изображено на рисунке.

Таким образом, всего существует 6 вариантов путешествия.

Задача 2. Сколько словарей необходимо переводчику, чтобы он мог переводить непосредственно с любого из четырех языков — русского, английского, немецкого, французского — на любой другой из этих языков?

Каждый из языков обозначим его первой буквой, и тогда каждый словарь будет «словом» из двух букв: например, АН — это англо-немецкий, а НА — немецко-английский словарь.

Выпишем эти «слова» в алфавитном порядке, причем для удобства подсчета вариантов каждую группу «слов», начинающихся с одной и той же буквы, расположим в отдельной строке. В результате получим:

АН	АР	АФ
НА	НР	НФ
РА	РН	РФ
ФА	ФН	ФР

Легко видеть, что переводчику понадобится 12 словарей.

Задача 3. При встрече 8 приятелей обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Дадим каждому из приятелей номер — от 1 до 8. Тогда каждое рукопожатие можно закодировать двузначным числом. Например, 47 — это рукопожатие между приятелями с номерами 4 и 7.

Ясно, что среди кодов рукопожатий у нас не появится, например, 33: это означало бы, что один из друзей пожал руку сам себе. Кроме того, такие коды, как, например, числа 68 и 86, означают одно и то же рукопожатие, а значит, учитывать надо только один из них.

Договоримся, что из чисел, кодирующих одно и то же рукопожатие, мы всегда будем учитывать меньшее. Поэтому из чисел 68 и 86 надо выбрать 68.

Коды рукопожатий естественно выписывать в порядке возрастания. Для подсчета их удобно расположить треугольником.

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,
23, 24, 25, 26, 27, 28,
34, 35, 36, 37, 38,
45, 46, 47, 48,
56, 57, 58,
67, 68,
78.

Число кодов равно:
$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28.$
Таким образом, всего было сделано 28 рукопожатий.

Задача 4. Человек, пришедший в гости, забыл код, открывающий дверь подъезда, но помнил, что он составлен из нулей и единиц и всего имеет четыре цифры. Сколько вариантов кода в самом худшем случае ему придется перебрать, чтобы открыть дверь?

Выпишем сначала все коды, содержащие одну единицу, затем — две единицы, затем — три единицы.

Получим:

0001 0010 0100 1000	— 4 варианта
0011 0101 0110 1001 1010 1100	— 6 вариантов
0111 1011 1101 1110	— 4 варианта

Следовательно, в худшем случае человеку придется сделать 14 попыток.

Выдержку из учебника математики даем для того, чтобы показать роль и место ***задания 226***. Обязательно предложите детям дома или в классе, группой или в одиночку придумать самим *такое же* задание. Придумав, пусть выполнят его так, как они хотели бы, чтобы его выполнили другие. Затем предложите остальным выполнить придуманные задания. Задачи из учебника для 6 класса, о которых шла речь выше, можно предложить желающим в качестве домашней работы.

Описанный принцип образования позиционного многозначного числа дает возможность решить одну из основных исследовательских задач в курсе математики 2 класса — конструирование способа выполнения того или иного арифметического действия (сначала — сложения и вычитания, а в 3 классе — умножения и деления), смысл которого — в поразрядности.

3.2. КАК СРАВНИВАЮТ МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Получив в результате измерения величины системой мер многозначное позиционное число в той или иной системе счисления, в том числе и в десятичной, с которой далее будет развернута основная работа, дети ищут место этих новых чисел на числовой прямой, что позволяет осознать их не как набор отдельных знаков (отдельных цифр), а как форму *одного* числа.

Изображение многозначных чисел на числовой прямой дает возможность **сравнивать числа**, представленные не только в одной системе счисления, но и в разных. Понятно, что сравнивать многозначные числа с опорой на числовую прямую трудоемко и не всегда удобно, и дети ставят перед собой *новую* задачу: *как сравнивать многозначные числа* без опоры на числовую прямую?

Конструирование способа сравнения многозначных чисел опирается на наглядное изображение чисел с помощью графической модели (линейной или плоскостной). Однако при сравнении чисел из одной системы счисления с разным числом знаков в записи этих чисел дети не нуждаются в графической модели, рассуждая следующим образом.

Пусть нужно сравнить 1203_4 и 312_4. Первое число характеризует бóльшую величину, чем второе, так как для ее измерения использовали мерку E_4 (первое число четырехзначное), а для измерения второй величины была использована мерка E_3 (второе число трехзначное), но $E_4 = 4E_3$, поэтому $1203_4 > 312_4$.

Аналогичные рассуждения, сопровождаемые графическими моделями для доказательства собственных версий, при сравнении многозначных чисел дают возможность сравнивать не только числа из одной системы счисления, но и некоторые числа из разных, например числа, записанные одинаковыми цифрами, сравнение которых сводится к сравнению оснований систем счисления.

Итак, правило сравнения чисел, представленных в *одной* системе счисления, состоит из двух частей, последовательно отслеживаемых детьми:

1) сначала нужно сравнить количество цифр в их записи:

пусть одно число a-значное, а второе — b-значное и $a > b$, тогда первое число будет больше второго:

$$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{a\ \text{знаков}}{}_k > \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{b\ \text{знаков}}{}_k$$

$$\Uparrow$$

$$a > b$$

2) если число знаков в сравниваемых числах совпадает, т. е. оба числа пятизначные или восьмизначные, то сравнение чисел сводится к поразрядному сравнению, начиная со старшего разряда:

$\overline{abcd}_k > \overline{menf}_k$

$\Uparrow$

$a > m$

Если $a = m$, то сравним b и e.

Если $b < e$, то $\overline{abcd}_k < \overline{menf}_k$

Напомним, что описанные правила не заучиваются, а формулируются ребенком *после*, а *не до* выполнения конкретно-практического задания. Сначала дети сравнивают числа, сопровождая вывод доказательством с помощью графической модели, а затем размышляют над тем, как научить другого человека сравнивать многозначные числа. Результатом объяснения другому человеку способов сравнения многозначных чисел и станет соответствующее правило, сформулированное своими словами.

Об эффективности предлагаемого способа обучения можно судить не только по результатам проверочных и контрольных работ, но и по участию детей во внешкольных мероприятиях.

Так, на второй международной олимпиаде школ развивающего обучения в финале второго тура, в котором участвовали одно- и разновозрастные дети 2—7 классов, было предложено следующее задание:

«Известно, что качество усвоения школьниками учебной программы существенно зависит от того, насколько удачно подобраны задания, используемые при изучении тех или иных разделов программы.

Представьте себе, что вы — авторы учебника по математике. Какую систему заданий вы бы предложили для изучения раздела «Сравнение многозначных чисел в различных системах счисления»?

В заданиях должны быть отражены следующие случаи:

а) сравниваемые числа записаны в одной и той же системе счисления;

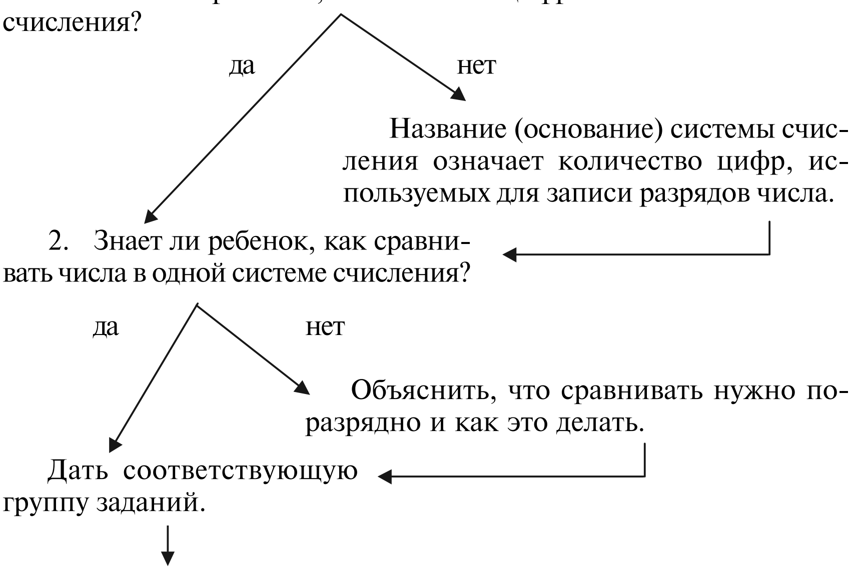
б) сравниваемые числа записаны в разных системах счисления. Опишите принципы, по которым построена предлагаемая вами система заданий; поясните, с какой целью дается каждое задание, чему должны научиться дети, выполняя его.

Выполните сами предложенные вами задания».

Надеемся, что любой читатель понимает, с какой целью в учебник включены олимпиадные задания, а их анализ — в данное методическое пособие. Во-первых, внеклассная работа всегда была и остается в поле зрения учителя; во-вторых, к сожалению, не всякий работающий учитель имеет доступ ко всем материалам, публикуемым на страницах различных журналов и газет, а представлять ориентиры, по которым можно судить о степени подготовленности детей по математике, должен каждый. Думаем, что эти примеры помогут учителю получить общее представление о возможных подходах к составлению олимпиадных заданий. Сами задачи будут рассмотрены ниже.

Подробный анализ итогов проведения олимпиады дан в специальном приложении к научно-методическому журналу «Феникс» (М., 1997). Приведем лишь несколько примеров выполнения описанного выше задания. Команда «Крылатые» (ЭУК «Школа развития», Москва), занявшая 2-е место, разработала следующий алгоритм:

1. Знает ли ребенок, что означает цифра в названии системы счисления?



3. Знает ли ребенок, как сравнивать числа в разных системах счисления?

да

нет

Объяснить, что для сравнения нужно перевести числа в одну систему счисления и как это делать.

Дать соответствующую группу заданий.

Давать задания разных типов, смешивая их и постепенно усложняя.

Интересную систему заданий предложила команда «Виктория» (гг. Салаир, Гурьевск, 6 кл., 1-е место в финале). Наряду с заданиями стандартного типа на сравнение заданных чисел и заданием на расшифровку «сказочных» чисел, по существу повторяющим задачу из заочного тура олимпиады, в работе встречались оригинальные задания. Например: «Найти неизвестное число в сравнении $214_5 < x < 221_5$» или «Придумать задачу по условию $a_4 > c_5$». Для последнего задания авторы предлагают такой сюжет: «Вася и Саша поспорили, может ли быть двузначное число в четверичной системе больше, чем двузначное число в пятеричной системе. Разрешите этот спор».

В работе команды «Умка I» (шк. № 202, г. Новосибирск, 5 кл., 6-е место) подробно рассмотрен вопрос перевода чисел из одной системы счисления в другую и сравнения чисел с помощью построения системы мерок.

В работе финалистов — С. Катаева (3 кл.) и А. Шипачева (2 кл.) из команды «Кедровые орешки» (шк. № 11, г. Мыски, 5-е место) — практически отсутствовали стандартные задания на сравнение конкретных чисел. Вместо этого ребята предлагали задания исследовательского характера, составленные, по существу, в алгебраической форме. Это одна из двух работ, в которых рассматривался случай сравнения чисел в разных системах счисления без приведения их к одной системе: «$АБВ_3 > АВ_2$», где А, Б и В — цифры, обозначенные буквами.

Приведенные примеры показывают, что, несмотря на то, что изучение темы «Сравнение многозначных чисел» относится к программе 2 класса, учащиеся 5—7 классов не забывают не только освоенный ими способ сравнения, но и способы конструирования новых типов заданий, самостоятельно систематизируют полученные знания.

Завершая основную характеристику подхода к изучению понятия позиционного многозначного числа в различных системах счисления, нельзя не сказать о способе чтения и записи многозначных чисел, который в общем случае сводится *к перечислению цифр слева направо,* соответственно последовательности практических действий при измерении величин системой мерок, в записи многозначного числа, дополняя это перечисление **указанием основания системы счисления**. Числа 2314_6 и 517923_{10} в общем случае будут читаться так: 2314_6 — два три один четыре в шестеричной системе счисления; 517923_{10} — пять один семь девять два три в десятеричной системе счисления. Именно такой способ прочтения чисел, заданных в десятичной системе счисления, показывает, что она (система) является частным случаем любой позиционной системы, и раскрывает тем самым перед ребенком неограниченные возможности работы с многозначными числами в десятичной системе счисления. Однако десятичная система счисления, будучи стандартной (общепринятой), имеет свой характерный *только* для этой системы счисления способ чтения многозначных чисел, при котором каждый разряд имеет свое название.

Для чтения чисел в десятичной системе счисления во 2 классе мы предлагаем детям названия первых четырех разрядов: единицы, десятки, сотни и тысячи (см. задание 223, книга 1).

Однако числа, имеющие больше четырех знаков, мы читаем либо путем перечисления цифр с указанием системы счисления (общим способом прочтения во всех системах счисления), либо «как взрослые».

Многие дети умеют читать числа, опираясь на названия классов, но не осознавая способа, т. е. делают это на уровне дошкольного умения. Перевод этого умения в *знание* как основание данного умения произойдет в третьем классе. Многолетняя практика показывает, что к моменту изучения понятия классов практически все дети уже владеют данным умением, что и позволяет им самостоятельно ставить перед собой следующую задачу: что нужно знать, чтобы читать числа с большим числом знаков (4−20-значные и более числа)?

Работа с числами, имеющими в записи более 4 разрядов, позволяет более полно конструировать действия с многозначными числами.

Критерии усвоения данной темы

Результатами овладения детьми новым способом измерения и построения величин при помощи набора мерок и системы мерок должны стать:

1) понимание рационального («правильного») способа измерения:

а) определить, какой меркой необходимо начать измерение, сделать заготовку для записи набора цифр;

б) промерить величину этой самой меркой (самой большой из всех мерок, которые меньше измеряемой величины), а получив остаток, который меньше выбранной мерки, перейти к измерению следующей меркой и т. д. Результаты вписать в заготовку;

2) понимание основных принципов образования разрядных единиц в разных системах счисления;

3) умение записывать и читать многозначные числа в разных системах исчисления;

4) умение сравнивать величины по результатам их измерения;

5) умение находить место многозначного числа на числовой прямой;

6) понимание принципов сравнения многозначных чисел в одинаковых и разных системах счисления, в том числе и десятичной;

7) знание названий первых четырех разрядов десятичной системы исчисления и умение читать четырехзначные числа с опорой на эти названия.

ТЕМА 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Одной из основных задач обучения в курсе математики 2 класса является освоение способа выполнения любого арифметического действия и, как следствие, формирование вычислительных навыков. Принципиальное отличие системы обучения от общепринятых приемов формирования навыков состоит в том, что навык не является прямым следствием многократного выполнения однотипных упражнений.

Схема формирования навыка такова: У $\rightarrow$ З $\rightarrow$ Н, а не З $\rightarrow$ У $\rightarrow$ Н, где У — умение, З — знание и Н — навык. Как видно из схемы, навык опосредован знанием. Это значит, что, владея знанием как основанием собственного умения, дети в совместной деятельности (а совместность предполагает участие учителя как равноправного участника процесса) выделяют операционный состав действий, приводящих к правильному и быстро получаемому результату.

Другими словами, навык характеризуется скоростью в сочетании с правильностью выполнения, а это значит, что эти два параметра и становятся *предметом анализа* при овладении новым способом действия, при котором компоненты действия «предварительно осознаются, осмысленно расчленяются и объединяются в системы, отвечающие обобщенным особенностям объективной ситуации формирования навыка. В таком случае человек в процессе автоматизации и функционирования навыка сохраняет возможность *сознательного контроля за своими действиями* и по мере надобности *может* сравнительно *легко их перестраивать.*

Навыки являются *не только итогом, но и условием творческой деятельности* человека» (Философский словарь/Под редакцией М. М. Розенталя, П. Ф. Юдина. — 2-е изд. — М., 1968. — С. 231)[1]. Согласно этому определению навыка и строится работа над формированием вычислительных навыков, в частности над выполнением арифметических действий с многозначными числами. Первичное расчленение любого из этих действий приводит к необходимости последовательного выполнения двух основных операций: определения количества цифр (разрядов) в искомом результате выполняемого действия и определения цифры в каждом разряде.

Первая операция требует так называемой прикидки, при которой ребенок определяет, какие разряды «переполняются»

[1] Все выделения в приведенной цитате — авторские.

(при сложении и умножении) или «разбиваются» (при вычитании и делении), и ставит соответствующие стрелки:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 82029 \\ \underline{57176} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r} 9381 \\ \underline{4936} \end{array} \end{array}$$

На основании такой прикидки ребенок приходит к выводу о том, что в первом примере сумма будет шестизначной, а разность во втором — четырехзначной, и делает для них заготовку:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 82029 \\ \underline{57176} \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r} 9381 \\ \underline{4936} \\ \bullet\bullet\bullet\bullet \end{array} \end{array}$$

Вторая операция — определение цифры в каждом разряде — требует знания таблиц сложения (вычитания) и позже умножения (деления), в которые включены действия с *однозначными* числами от 0 до 9 (а не от 1 до 10).

Важно, чтобы дети самостоятельно выделили все случаи сложения. Ребята будут называть их беспорядочно, поэтому вслед за этим важно сделать вывод, что их нужно упорядочить. В результате упорядочивания составляется таблица Пифагора для использования ее в качестве справочника, а лишь затем нужно поставить задачу на ее запоминание, причем особо выделив наиболее трудные случаи перехода через десяток, которые можно записать в виде таблиц[1]:

9 + 2 =	8 + 3 =	7 + 4 =	6 + 5 =
9 + 3 =	8 + 4 =	7 + 5 =	6 + 6 =
9 + 4 =	8 + 5 =	7 + 6 =	
9 + 5 =	8 + 6 =	7 + 7 =	
9 + 6 =	8 + 7 =		
9 + 7 =	8 + 8 =		
9 + 8 =			
9 + 9 =			

Используя переместительное свойство сложения, случай 8 + 9 уже не записываем, так как он есть в таблице 9 (9 + 8). По этой же причине исключены из таблицы 7 случаи 7 + 8, 7 + 9, из таблицы 6 — случаи 6 + 7, 6 + 8, 6 + 9 и полностью отсутствует таблица 5.

Таким образом, учитель вместе с детьми выписывает все примеры, в которых сумма больше 10, но меньше 20. Если мы вспомним особенность образования числительных, обозначающих в русском языке числа 11–20 (называться с разряда единиц), то записанные случаи сложения покажутся нам особенно интересны-

[1] Для краткости в речи назовем суммы первого столбика (9 + *a*) **таблицей 9**, второго (8 + *a*) — **таблицей 8** и т. д.

ми. Оказывается, достаточно узнать цифру в разряде единиц, чтобы назвать всю сумму. Например, 9 + 7 — в разряде единиц будет число 6, значит, начиная называть «шесть», далее остается продолжить «...надцать», т. е. вместе — «шестнадцать».

Подводя итоги изложенного выше, можно сказать следующее:

1. До нахождения результатов сложения однозначных чисел с переходом дети должны научиться выполнять прикидку, т. е. относительно любого случая сложения однозначных чисел сказать, какая будет сумма: больше 10, меньше 10 или равна 10 (опираясь, конечно, на ранее полученные знания табличных случаев сумм, меньших или равных 10).

2. Дети должны понять, что если они научатся определять в каждом из записанных случаев сложения однозначных чисел, сумма которых больше 10, цифру в разряде единиц (а в разряде десятков она известна — 1), то они смогут назвать и всю сумму. Именно с этой цифры начинается прочтение всей суммы.

Итак, **задача нахождения суммы** двух однозначных чисел с переходом через десяток может быть **сведена к задаче нахождения цифры в разряде единиц**.

1-й этап. Образование десятка. Теперь мы приступаем к самому важному этапу работы. Поскольку в каждом рассматриваемом случае мы получаем сумму, бо́льшую 10, то, следовательно, нужно одно из слагаемых дополнить до 10, а именно слагаемое 9. Ему до 10 не хватает одной единицы, которую мы можем взять у второго слагаемого. Это можно показать так:

$$\overset{\leftarrow\, -1}{9 + 3} = 1\,.$$

2-й этап. Образование цифры в разряде единиц. Тогда, дополнив девятку до 1 десятка, в разряде единиц мы всегда будем получать число, на 1 единицу меньшее, чем то число, которое прибавляем к 9. Поэтому в случае 9 + 3, забрав у 3 одну единицу, в разряд единиц мы пишем 2:

$$9 + \overset{-1\, \rightarrow}{3 = 12}.$$

Таким образом, способ определения цифры в разряде единиц удобно зафиксировать так[1]:

$$9 + \overset{1,2,3,4,5,6,7,8,9}{a} = \underset{\bullet}{1}\ \underset{\bullet}{a-1},$$

[1] Точки снизу есть заготовки места для цифр числа.

где над числом a записаны все значения, которые оно будет принимать, а в ответе выражение в скобках $(a - 1)$ показывает способ определения цифры в разряде единиц.

У учителя могут возникнуть вопросы: «А зачем так делать? Не сложно ли это? Не легче ли просто выучить (точнее, вызубрить) всю таблицу?» и т. п. Возразим, поставив свои вопросы, ответом на которые служат предлагаемые рекомендации:

1. Что должен делать ребенок, если он забыл нужный результат или называет по памяти неверно? Предлагаемая разработка способа получения результата дает возможность вновь его получить (в любой момент), если он забыт или неверно назван.
2. Что легче ребенку: запомнить 8 результатов (в таблице 9) или один способ получения любой из этих сумм? (Отними от числа, которое ты прибавляешь к 9, одну единицу и назови ответ или назови число, предыдущее тому, которое прибавляешь к 9, и получи ответ.) При таком способе работы над таблицами сложения (в частности, над таблицей сложения 9) нагрузка на память минимальна. Любой, даже самый слабый, ученик без труда отнимет от любого однозначного числа единицу (или назовет предыдущее число), а значит, и найдет результат в таблице сложения 9.

А вот, например, таблицу сложения 6 (состоящую, по нашему представлению, из двух случаев: $6 + 5$ и $6 + 6$) легче просто запомнить, но с опорой на знание того, что $5 + 5 = 10$.

Исходя из этого дети должны быть натренированы в вычитании типа: $a - 1$, $a - 2$ и $a - 3$, где a — натуральное число и $a \geqslant 1$.

Сравнив $5 + 5$ с $6 + 5$, дети заметят, что последний результат на 1 единицу больше, т. е. 11, а $6 + 6$ на 2 единицы больше, чем $5 + 5$, или на 1 единицу больше, чем $6 + 5$.

Работу же над таблицами сложения 8 и 7 легко продолжить по той же методике, что и над таблицей 9.

Однако учитель предлагает перенести способ, обнаруженный при определении цифр в каждом разряде таблицы сложения 9, на нахождение цифр в таблице сложения 8, а затем способ работы с таблицей 8 перенести на таблицу 7. Это позволяет, через осознание несоответствия известного способа изменившимся условиям, поставить перед собой новую задачу определения способа, соответствующего новым условиям.

Ведь в таблице 8 результат может быть найден вычитанием из второго слагаемого (если первым писать 8) уже двух единиц, так как именно двух единиц недостает 8 до 10. Поэтому способ сложения с 8 может быть зафиксирован так:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

$8 + a = 1\ (a - 2)$ или $8 + 3 = 11$; $8 + 4 = 12$ и т. д.

А для таблицы 7 так:

3, 4, 5, 6, 7

$7 + a = 1\ (a - 3)$ или $7 + 4 = 11$; $7 + 5 = 12$ и т. д.

Лучшему пониманию и запоминанию таблиц послужат такие типы заданий:

1) Сравните таблицы 9 и 7.

Учитель: «Есть ли в этих таблицах одинаковые результаты? Назовите их».

Дети:

«Есть. 9 + 3 и 7 + 5;

9 + 2 и 7 + 4;

9 + 5 и 7 + 7» и т. д.

2) В каких таблицах есть результат, равный 16; 12; 15 и т. д.?

3) Какое число надо прибавить к 9 (8, 7 и т. д.), чтобы получилось 15 (и другие)? Или это же задание можно поставить так:

Какое число нужно отнять от 15, чтобы получилось 9?

На сколько 15 > 9 или 9 < 15?

Можно предложить детям самим придумать задания, в которых им каждый раз нужно будет, например, к 7 прибавить 8 или от 13 отнять 7 и т. д.

Описанный способ работы над таблицами сложения позволяет, с одной стороны, более эффективно запомнить результат, опираясь на механизмы непроизвольного запоминания, с другой стороны, построить работу над сложением многозначных чисел нетрадиционным способом. Учитель и дети придумывают разнообразные задания, связанные с алгоритмом сложения.

Например:

а) Не выполняя действия, определи количество цифр в сумме (сначала поставив стрелки, потом — точки):

$$\begin{array}{r} +\,5873 \\ 4919 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} +\,5873 \\ 4919 \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$$

б) Подбери второе (первое) слагаемое (здесь могут быть «ловушки») таким, чтобы можно было выполнить указания:

$$\begin{array}{r} 3\,7\,5\,1 \\ +\;\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

или с «ловушками»:

$$\begin{array}{r} 5\,1\,0\,3 \\ +\;\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\,9\,4\,2 \\ +\;\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

в) Подбери подходящие числа:

$$\begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ +\;\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ +\;\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

г) Вставь пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \bullet\,3\,\bullet\,5 \\ +\;7\,\bullet\,3\,\bullet \\ \hline 1\,3\,8\,2\,6 \end{array}$$

и т. п.

Описанная на примере сложения многозначных чисел работа позволяет определять каждую цифру в сумме не только справа налево, но и в обратном порядке (или вообще произвольно), в вычислениях как письменных, так и устных (в пределах 100, например).

Таким образом, для выполнения любого арифметического действия ребенок должен уметь:

1) сделать прикидку, т. е. определить разряды, которые «переполняются» («разбиваются»), и поставить стрелки;
2) на основании прикидки определить, сколько цифр будет в результате выполнения действия, и поставить точки — заготовить места для цифр;
3) выполнить соответствующее действие над однозначными числами в каждом разряде (при сложении и умножении) или над двузначным и однозначным (при табличном вычитании или делении), начиная практически с *любого* разряда, а не только справа налево, как это принято при выполнении сложения, вычитания и умножения, и слева направо, как это принято при делении.

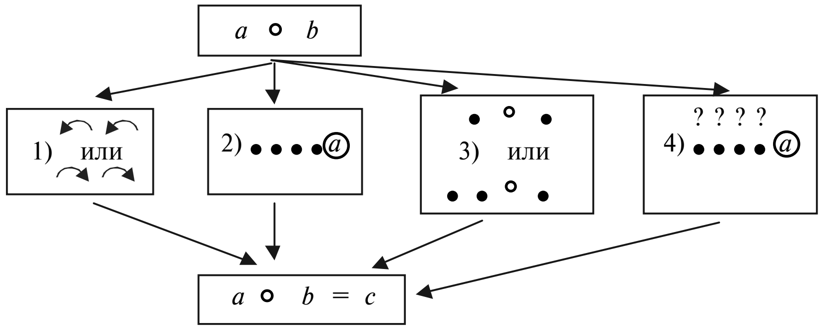
Только *удобство* поиска соответствующей цифры может привести ребенка к мысли о традиционно принятом алгоритме выполнения соответствующего арифметического действия.

Научившись действовать начиная с любого разряда (см. ***задание 64***, книга 2), ребенок сам выбирает удобный *для себя* способ;

4) вписать соответствующую цифру на заготовленное для нее место.

Таким образом, расчленив на эти четыре операции действие сложения, с которого и начинается изучение действий с многозначными числами в разных системах счисления, и отработав каждую из четырех операций, мы вновь соединим их в одно целое и сформируем таким образом осмысленный, осознанный и гибкий навык, который легко переносится на любое другое арифметическое действие. Условием такого переноса и является осознанность навыка.

Способ работы над формированием навыка может быть кратко и символично представлен в виде такой схемы:



Кружок между числами *a* и *b* используется как знак любого арифметического действия, а точка — как место для цифры в записи числа.

Подчеркнем, что обучение строится на основании *разбиения* выполнения действия (самими детьми при участии учителя как организатора действия) на 4 составляющие и их последующей отработки, а затем *свертывания* его до автоматизма.

Научившись выполнять арифметическое действие, ребенок в любой момент может его развернуть, осуществляя при этом действие контроля и, как следствие, действие оценки, завершающее цикл формирования учебной деятельности (УД) и начинающее тем самым следующий «виток» УД.

Поскольку описанный способ содержательно связан со сформированным у детей понятием многозначного позиционного числа в любой системе счисления, вводившимся на основе практического действия измерения, *его усвоение* не только *способствует* овладению *рациональными приемами вычислений* (что само по себе составляет одну из важных задач начального обучения математике), но *и обеспечивает* более глубокое *понимание содержания понятия числа и действий с ним*.

Новый взгляд на нахождение результата действия позволил коренным образом изменить работу над таблицами сложения во втором классе и умножения в третьем, найти нетрадиционный способ письменного умножения многозначных чисел по правилу «ножниц», как его назвали сами учащиеся, открыть оригинальный способ табличного вычитания (случаи перехода через десяток), который, в свою очередь, позволил изменить алгоритм вычитания многозначных чисел.

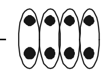
Все это дает возможность создать стройную систему формирования вычислительных навыков, превратить скучнейшую задачу практического овладения операциями над числами в интереснейшую учебно-познавательную задачу.

Думаем, что нет необходимости подробно описывать систему учебных ситуаций и учебных заданий, реализующих данный подход. Эта система четко и последовательно представлена в учебнике (книга 2, ***задания 1—64***), а методика работы над этими заданиями и используемые методические приемы ничем не отличаются от тех, которые описаны в материалах для учителя к учебнику 1 класса в книге «Методика обучения математике в начальной школе» (М.: Вита-Пресс, 2000).

Опишем лишь более подробно методику изучения таблиц сложения, по аналогии с которой будет построена и методика изучения таблиц умножения.

4.1. ТАБЛИЦЫ СЛОЖЕНИЯ ОДНОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим *систему учебных ситуаций*, приводящих к составлению, изучению и запоминанию таблиц сложения.

Итак, при сложении многозначных чисел после определения количества цифр дети переходят к нахождению цифры в каждом разряде, которую можно определить, сложив однозначные числа, записанные цифрами соответствующих разрядов: +  .

Проверьте, понимают ли дети, какие числа называют однозначными. Эту проверку можно организовать в форме игры «топать—хлопать». Такова **первая учебная ситуация**.

Какие же однозначные числа нужно научиться складывать?

Ответом на этот вопрос **второй учебной ситуации** будет беспорядочное перечисление различных сумм: 5 + 2; 6 + 9; 5 + 0; 9 + 3 и т. д. (***задание 65***)[1].

Естественно, что после записи нескольких сумм найдутся дети, которые скажут примерно следующее: «Так записывать неудобно, потому что непонятно, все ли суммы мы записали».

Если после перечислений сумм однозначных чисел такая мысль у детей не появится, то помогите им прийти к ней. Задайте вопрос: «Это все суммы, которые нужно знать, чтобы складывать любые многозначные числа?»

---

[1] Здесь и далее речь идет о заданиях из книги 2 учебника.

Важно, чтобы дети *осознали потребность в упорядочивании* этих сумм и пришли к мысли о составлении специального **справочника**, в который были бы включены *все* суммы.

Кстати, немного позже необходимо познакомить детей с разными математическими справочниками, сравнив их со справочниками, т. е. словарями, используемыми при изучении русского языка.

Таким образом, **третья учебная ситуация** связана с составлением таблицы сложения однозначных чисел, в которой все суммы упорядоченны.

Дети, после обсуждения в группах, могут предложить разные варианты упорядочивания.

Как правило, их два:

1) записать все однозначные числа от 0 до 9, а затем к каждому из них поочередно прибавлять 0, 1, 2, 3 и т. д.:

$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$	$0 + 2 = 2$	
$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 2$	$1 + 2 = 3$	
$2 + 0 = 2$	$2 + 1 = 3$	$2 + 2 = 4$	
$3 + 0 = 3$	$3 + 1 = 4$	$3 + 2 = 5$	и т. д.;

2) брать поочередно числа от 0 до 9 и к каждому прибавлять числа 0, 1, 2, 3, ...:

$0 + 0$	$1 + 0$	$2 + 0$	
$0 + 1$	$1 + 1$	$2 + 1$	
$0 + 2$	$1 + 2$	$2 + 3$	
$0 + 3$	$1 + 3$	$2 + 3$	
$0 + 4$	$1 + 4$	$2 + 4$	
• • •	• • •	• • •	и т. д.

Понятно, что записи симметричны и основаны фактически на переместительном свойстве сложения. Тем не менее на одном из вариантов нужно остановиться, поэтому, проявляя одинаковое отношение к обоим, выберите первый (***задание 66***).

Пару первых столбиков с результатами запишите на доске, но упрощать запись с помощью формулы $a + 0 = a$ пока не нужно. Акцентируйте внимание на неудобстве многократного повторения в записи сначала нуля, затем единицы. Нужно, чтобы дети *осознали* потребность в *преобразовании записи* в форме таблицы сложения, или таблицы Пифагора, как ее часто называют (обратите внимание: она начинается с числа 0, а не с числа 1). Изобретение и конструирование таблицы Пифагора составляет основную цель этой третьей ситуации. Составив таблицу сложения, нужно «поиграть» с ее формой (***задание 67***). Поиск суммы двух однозначных чисел с помощью таблицы равнозначен поиску точки на плоскости по ее координатам (речь идет о прямоугольной декартовой системе координат), особенно при работе с таблицей ***задания 67***.

Использование составленной таблицы сложения в роли справочника и составляет цель следующей, **четвертой учебной ситуации**.

В связи с рассмотрением отношения между компонентами действия и его результатом можно сформулировать *три* задачи на нахождение: суммы (целого) по ее слагаемым (частям), одного из слагаемых (части) по сумме (целому) и другому слагаемому и обоих слагаемых по сумме (состав числа) (***задания 67 и 68***).

Пятая учебная ситуация позволяет исследовать *свойства* этой таблицы (***задание 68***), которые смогут обнаружить дети, отвечая на вопрос: «Что интересного вам удалось заметить?» Важно, чтобы дети обнаружили:

1) по горизонтали и по вертикали числа возрастают на 1. Обсудите, отчего это происходит: увеличение (уменьшение) одного из слагаемых на 1 приводит к увеличению (уменьшению) суммы тоже на 1;

2) суммы повторяются: во-первых, от перемены мест слагаемых сумма не меняется ($4 + 5 = 9$ и $5 + 4 = 9$), а это значит, что таблицу для запоминания можно сократить в 2 раза; во-вторых, при одновременном увеличении одного из слагаемых на 1 и уменьшении другого на 1 сумма не меняется:

$2 + 5 = 7$, $3 + 4 = 7$, $1 + 6 = 7$, $0 + 7 = 7$ и т. д.

Итак, в результате исследований мы обнаруживаем и устанавливаем связь между изменяющимся слагаемым и суммой (и наоборот), повторяем переместительное свойство сложения и состав числа, опираясь на который дети определяют переполнение разряда при сложении чисел в той или иной системе счисления (сложение чисел в троичной системе счисления опирается на знание состава числа 3, в десятичной — 10 и т. д).

Следующая, **шестая учебная ситуация** связана с делением всех различных случаев сложения на две группы. В первую войдут случаи сложения, условно называемые легкими, к которым отнесем сложение *без* перехода через десяток. Во вторую — трудные, с переходом через десяток. Сложением и вычитанием в пределах десятка мы занимались неоднократно: сначала при подборе частей по целому и целого по частям, затем при выполнении примеров с «секретами» (в дочисловом периоде обучения), затем учились складывать и вычитать с помощью двух линеек, линейки и числовой прямой, двух числовых прямых, затем сконструировали сложение путем присчитывания (отсчитывания) по 1, по 2 и т. д., причем каждый раз мы давали детям установку на запоминание.

Составление таблиц сложения также дало возможность не только вычислить, но и восстановить в памяти те суммы, которые ребенок запомнил. Так что к моменту отделения одной группы от другой большинство детей свободно складывают в пределах десятка, тем более что самые легкие из легких сумм лучше предлагать слабым детям (1 + 1, 2 + 2, 3 + 1, 4 + 1 и т. д.), а чуть посложнее — сильным (3 + 4, 5 + 4, 6 + 3). Однако для осознания того, каковы трудные случаи, сделайте все с точностью до наоборот: спросите, чему равно 2 + 2, 3 + 1 и 6 + 1, у сильных, а вот 6 + 9, 8 + 7, 9 + 8, 7 + 6 — у слабых (***задание 69***). Тогда-то и возникнет ситуация, вынуждающая ребенка задуматься, почему эти случаи вызывают трудности. Как только дети обнаружат то, что сумма таких чисел больше 10, предложите им назвать еще пары однозначных чисел, сумма которых больше 10. Дети будут опять называть их *беспорядочно* (***задание 69***), а значит, вновь возникает мысль об *упорядочивании* (***задание 70***). Таким образом мы *повторим те учебные ситуации*, с которых начинаем изучение сумм однозначных чисел.

Система ***заданий с 71 по 97*** поможет детям осознать необходимость запоминания табличных случаев при решении текстовых задач и уравнений, нахождении значений выражений. Нет необходимости комментировать замысел этих заданий, их выполнение и способы организации детей при их решении. Они остаются прежними: задания можно выполнять на выбор; задания, вызывающие трудности, обсуждаются в группах; для осмысления способов выполнения предлагайте детям «научить других» и «придумать такое же задание» (см. схему на с. 15 книги 1 для учителя).

Описанная система заданий, необходимых для овладения сложением многозначных чисел, задает *общий* подход к изучению способов выполнения остальных арифметических действий, в частности действия вычитания. Представленный материал направлен на раскрытие *основного принципа* сложения и вычитания многозначных чисел — *поразрядное выполнение действий* на основе выделения разных мерок с использованием разных систем счисления. Для введения способа вычитания (как и способа сложения) через систему заданий принята форма математического рассказа от имени детей, освоивших действие.

4.2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ «В СТОЛБИК»

Первый рассказ состоит из трех частей, каждая из которых реализует (с помощью специально подобранных заданий) этапы выполнения действия.

Задания в первой части рассказа дают возможность ученику сделать предварительный анализ того, в каких разрядах при сложении чисел произойдет переход через разряд, и показать его с помощью стрелочки.

Во второй части большинство заданий требует определения количества цифр в результате выполнения действия.

Третья часть рассказа посвящена конструированию таблиц сложения, их использованию при нахождении цифры в каждом разряде.

Следует отметить, что учителю в классе *не следует* читать по учебнику ни один из рассказов.

Учебник задает способ общения учителя с ребенком, а тексты, формально предназначенные для ребенка, «озвучиваются» учителем в живой беседе с детьми, которые, без сомнения, и зададут многие из вопросов, прописанных в учебнике.

Уместно напомнить, что *учебник носит рефлексивный характер, позволяя ребенку, при желании, восстановить логику совместных рассуждений детей в классе.*

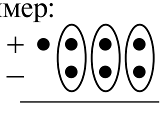
Основная идея постановки задачи и логики изучения сложения многозначных чисел умещена в компактной форме под последним ключом в ***задании 27*** (книга 2). Работая над тремя частями рассказа, важно удержать *назначение* каждой части по отношению к «целому» — способу выполнения арифметического действия.

Работа над **вторым рассказом**, посвященным вычитанию многозначных чисел, строится по аналогии с первым: от реальных практических действий (***задание 98***) до конструирования способа вычисления из тех же трех составляющих (***задания 99 и 100***).

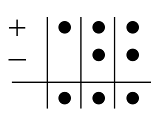
Задания 101–104 дают возможность конкретизировать основной принцип выполнения арифметических действий — принцип поразрядности. Контрольным заданием служит задание 104: чтобы проверить понимание способа записи «в столбик», достаточно предложить для выполнения действия числа с разным количеством цифр в их записи.

Обратитесь к детям с дополнительным вопросом: «Как вы думаете, сколько примеров заданий на сложение и вычитание нужно предложить детям из другого класса, чтобы узнать, понимают они принцип поразрядности выполнения действий или нет?» Отвечая на этот вопрос, дети могут предложить: 1) конкретные числа; 2) числа, у которых цифры обозначены буквами или являются «сказочными» цифрами; 3) модель, отображающую способ записи в столбик, в которой вместо цифр стоят точки, фиксирующие место для цифр.

Например:



или



Следующая группа — ***заданий 105—108*** — относится к первой части «рассказа», несмотря на то, что в этом втором рассказе части не выделены.

Теперь стрелки идут в обратном направлении и показывают разбиение разрядов.

Учитывая то обстоятельство, что дети, у которых не сформировано действие контроля (таких детей, как правило, называют *невнимательными*), часто вместо вычитания выполняют сложение, нужно предложить задания, в которых они должны обнаружить несоответствие между направлением стрелок и характером действия.

Например, в числе остальных заданий должны быть такие:

1) Проверь, правильно ли поставлены стрелки:

$$\begin{array}{r} 3519 \\ -\ \ 836 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6318 \\ +\ \ 909 \\ \hline \end{array}$$

2) Какое действие собирался выполнить ученик, если он расставил стрелки, а знак действия указать забыл?

$$\begin{array}{r} 8047 \\ 928 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3584 \\ 936 \\ \hline \end{array}$$

3) Закончи составление примеров (или подбери подходящие числа).

$$\begin{array}{r} 4571 \\ -\ \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6492 \\ +\ \ \bullet\bullet\bullet \\ \hline \end{array}$$

4) Придумай такое же задание, как ... (указывается один из данных выше типов заданий).

Все типы заданий могут быть оценены детьми как задания с «ловушками», и это правильно. Но тогда нужно предложить сначала задуматься над тем, с какой целью предложены такие задания (один из вариантов ответа: проверить внимание), а затем избавиться от этих «ловушек».

Для этого придется либо изменить направление стрелок, либо поменять знак действия на противоположный («+» на «−» или наоборот), либо дополнить запись недостающим знаком действия, который должен соответствовать направлению стрелок при выполнении действия прикидки.

Задания 109—114 относятся ко второй части рассказа. В них детям придется определять количество цифр при нахождении разности.

Задания 115—118 можно использовать в качестве проверочных, а вот ***задание 119*** вновь возвращает детей к задаче по поиску разности, включая ответ на вопрос: «Какова цифра в каждом разряде?»

Задания, в которых описан диалог между детьми, *читать не нужно*. Дети, которые будут рассуждать так же, как прописано в этом задании, наверняка найдутся у вас в классе. Ваша задача — организовать аналогичные рассуждения. Текст задания поможет дома тем ученикам и их родителям, которые захотят восстановить ход мыслей детей в классе.

Учитель во время урока, как всегда в подобных случаях, может обратиться к детям с вопросом: «Правильно ли я вас поняла?» — и далее воспроизвести описанную логику рассуждений.

Таким образом, станет возможным переход к обсуждению того, над какими конкретно числами нужно научиться выполнять действие вычитания, чтобы находить разность многозначных чисел.

Задания 120—122 помогут детям осознать, что для того, чтобы научиться вычитать из многозначного числа многозначное, необходимо быстро и без ошибок вычитать из однозначного числа однозначное и из некоторых двузначных вычитать однозначные (случаи перехода через разряд). Пусть **каждый** ребенок проверит себя, умеет ли он осуществлять вычитание с такими числами. Выявив свое «слабое» место, каждый сможет потренироваться индивидуально, что даст ему возможность сформировать вычислительный навык.

Способ табличного вычитания с переходом через разряд, о котором идет речь в ***задании 120***, подробно описан в статье для родителей, которая завершает данное пособие.

Задания 123—189, среди которых, кроме тренировочных упражнений, направленных на формирование вычислительных навыков, содержатся текстовые задачи, уравнения, числовые и буквенные выражения, выполняются, как и описанные ранее, с опорой на известные учителю методические приемы и способы организации детей.

Критерии усвоения данной темы:

1) умение складывать и вычитать любые многозначные числа в любой системе счисления;

2) умение решать уравнения и текстовые задачи, находить значение числового выражения, в которых необходимо выполнить действия сложения и вычитания многозначных чисел.

4.3. ПРИЕМЫ УСТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Третий рассказ посвящен конструированию *приемов устных вычислений.*

Однако ***задания 190—199*** предназначены для осмысления способов письменного сложения и вычитания многозначных чисел и связи между этими действиями.

Начиная с ***задания 200*** перед ребенком поставлен вопрос: какие числа удобно складывать и вычитать устно, а какие письменно? Понятно, что многозначные числа 3000 и 2000 можно сложить устно, не прибегая к записи «в столбик», поскольку для нахождения суммы достаточно уметь сложить числа 3 и 2.

Таким образом, от письменных вычислений перейдем к конструированию приемов устных вычислений, которыми может воспользоваться ребенок не только для чисел, вычисления с которыми сводятся к действиям с числами в пределах 100, но и для многих других.

Задания 201—225 помогут ребенку овладеть необходимыми приемами устных вычислений при нахождении значения выражения, при решении уравнений и текстовых задач.

Сами приемы учителю хорошо известны, а вот их обоснование строится *с опорой на графические модели*, которые дают возможность сконструировать, кроме поразрядности выполнения действий, приемы округления и дополнения при сложении и вычитании.

Никакие многочисленные правила прибавления числа к сумме, суммы к числу, вычитания числа из суммы, суммы из числа, когда компонентами действия являются однозначные и двузначные числа (а значительно позже числа с большим числом разрядов), *не рассматриваются* как правила, с помощью которых ребенок должен действовать. Только графическая модель дает возможность обосновать собственный способ действия.

Как известно, упоминаемые правила являются следствием математических законов для действий сложения и умножения, рассматриваемых на множестве действительных чисел. Рассмотрение этих законов на множестве натуральных чисел не дает возможности обосновать упоминаемые правила, используемые как вычислительные приемы. Например, истинность равенства (правила вычитания числа из суммы)

$$(a + b) - c = a + (b - c) = (a - c) + b$$

может быть обоснована сочетательным и переместительным законами алгебраического сложения:

$$(a + b) + (-c) = a + (b + (-c)) = (a + (-c)) + b, \text{ а}$$
$$a + (b + (-c)) = a + (b - c) \text{ и}$$
$$(a + (-c)) + b = (a - c) + b.$$

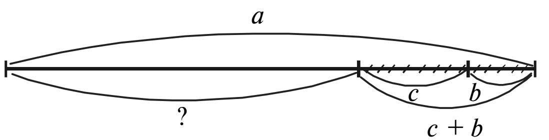
Таким образом,

$$(a + b) - c = a + (b - c) = (a - c) + b,$$

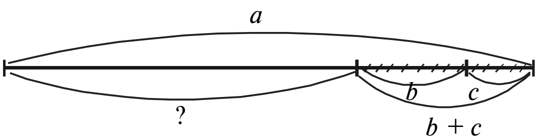
т. е. получаем правило (вычислительный прием): чтобы из суммы вычесть число, его можно вычесть либо из первого слагаемого и прибавить второе, либо из второго слагаемого и прибавить первое (можно давать разные формулировки этого правила, но суть дела, смысл правила не изменится).

Аналогично, можно показать и такое свойство вычитания, при котором $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$, которое может быть сформулировано теми или иными словами в виде правила или приема вычитания суммы из числа. Однако эти же приемы дети легко используют, если опираются на графическую модель (схему):

1)



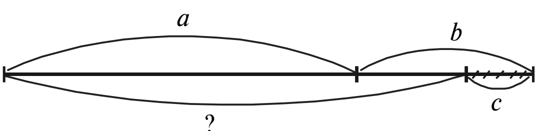
или



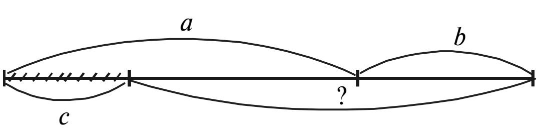
По этим схемам можно записать следующие формулы:

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$$

2)



или



По этим схемам можно записать также формулы:

$$a + b - c = a + (b - c) = (a - c) + b.$$

Причем совершенно очевидно, что выбор одного из трех вариантов способа вычисления — $(a - c) + b$, или $a + (b - c)$, или $(a + b) - c$ — будет зависеть от конкретных значений чисел a, b и c, входящих в выражение.

Если нужно найти значение выражения $28 + 34 - 18$, то легче действовать так:

$(28 - 18) + 34$. Если необходимо вычислить значение выражения $64 + 36 - 79$, то тогда легче так: $(64 + 36) - 79$; если же ищем результат для выражения $81 + 67 - 35$, то удобнее вычислять так: $81 + (67 - 35)$.

Выбор вычислительного приема каждый раз может быть обоснован наглядно с опорой на предметную (для самого слабого ребенка) или графическую модель.

Описывать все приемы устных вычислений нет необходимости, поскольку они известны учителю. Эффективной предметной моделью приемов устного сложения и вычитания могут служить бухгалтерские счеты, которые окажут неоценимую помощь слабому ребенку в ситуации, когда представление способа на графической модели вызывает у него трудности.

Содержащиеся в учебнике задания на отработку приемов устных вычислений можно дополнять заданиями следующего типа: допустим, дети находят сумму чисел 27 и 36, получили 63. Предложите им назвать суммы многозначных чисел, оканчивающихся нулями (их количество в обоих числах одинаково). Например: 270 + 360; 27 000 + 36 000 и т. п. В заданиях «обратного» типа нахождение сумм чисел, оканчивающихся нулями, будет сводиться к счету в пределах 100 или 1000. Таким образом, рассматривая устные вычисления на основе письменных, мы значительно расширяем границы решаемых устно примеров на сложение и вычитание.

Итогом работы над письменным и устным сложением и вычитанием многозначных чисел должно стать умение ребенка, не выполняя действия, оценить, устно или письменно он готов его выполнить быстро и без ошибок, после чего приступить к поиску результата.

Сначала способ, а затем результат — так кратко может быть охарактеризован основной подход к формированию интереса к знанию математики: ребенку должен быть интересным прежде всего *способ* получения результата, а не сам результат. Это и должно стать для учителя **одним из основных критериев** сформированности учебно-познавательного интереса.

Критерием успешности овладения детьми математическим содержанием должна стать способность ребенка *видеть* при выполнении любого арифметического действия, в том числе сложения и вычитания, *ошибкоопасные места.* Приведем описание фрагмента урока, проведенного в соответствии с предлагаемой программой, учителем школы № 816 Москвы Н. Д. Зотовой (см.: Работа по предупреждению ошибок в математических выражениях. — Феникс. — 1997. — № 6).

Учитель пишет: «Одной из узловых задач курса математики в начальной школе является формирование вычислительных навыков. Освоив все арифметические действия, поняв и выучив таблицы сложения и умножения, овладев традиционными способами проверки, дети все же допускают ошибки при решении примеров. Такое положение можно исправить, если после изучения каждого арифметического действия несколько уроков посвятить конструированию «Справочника ошибкоопасных мест». Уроки желательно построить таким образом, чтобы дети не боялись рассуждать, производить самооценку своих действий, показать свое непонимание.

На первом этапе учащимся предлагается подумать, какие ошибки можно допустить при списывании математического выражения с доски, с учебника, с карточки... Учащиеся выделяют следующие виды ошибок:

1) замена арифметических знаков при списывании математического выражения;

2) ошибки в записи чисел:

а) 12 656 вместо 12 566 — перестановка цифр в числе;

б) 1256 вместо 12 566 — пропуск цифры;

в) 125 566 вместо 12 566 — лишняя цифра;

г) 12 556 вместо 12 566 — замена цифры. Каждый ребенок оформляет карточку, перечисляя предполагаемые ошибки. На следующих уроках отрабатывается алгоритм проверки чисел и арифметических знаков в математических выражениях.

На втором этапе учащиеся анализируют примеры на сложение многозначных чисел. Дети отмечают такие ошибки, сопроводив свои рассуждения моделью:

1) $\begin{array}{r} \cdot\cdot\cdot\cdot \\ +\ \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array}$ — ошибка в записи чисел в столбик.

2) $?_{-}\begin{array}{r} \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array}$ — ошибка в постановке знака.

3) $?_{+}\begin{array}{r} \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array}$ — знак поставлен правильно, а ученик выполняет другое действие (вычитание).

Последняя ошибка особенно характерна для случаев

$$\begin{array}{r} 97354 \\ +\,12354 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17861 \\ +\;\;2501 \\ \hline \end{array}$$

4) $\begin{array}{r} ? \\ \bullet\bullet\bullet\bullet \\ +\;\;\bullet\bullet\bullet \\ \hline \end{array}$ — забыто о переполнении, переполнение неправильно учтено.

5) $\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet\bullet \\ +\,\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet + \bullet = \bullet \end{array}$ — неправильно определено количество цифр в сумме.

6) $\bullet + \bullet = \bullet\bullet$ — допущены ошибки непосредственно при сложении чисел в пределах 10 или с переходом через 10.

Во внеурочное время учащиеся оформляют вторую карточку: «Возможные ошибки при выполнении действия сложения». Несколько последующих уроков посвящается отработке алгоритма проверки действия сложения. Детям предлагаются такие задания:

1. Исправь ошибки, если они есть:

970 581 + 382 $\qquad \begin{array}{r} 970581 \\ +\qquad 382 \\ \hline \end{array}$

67 348 + 4978 $\qquad \begin{array}{r} 67348 \\ +\;\;\;4978 \\ \hline \end{array}$

396 401 + 4376 $\qquad \begin{array}{r} 396401 \\ +\;\;\;4376 \\ \hline \end{array}$

61 380 + 2963 $\qquad \begin{array}{r} 61380 \\ -\;2963 \\ \hline \end{array}$

2. Объясни решение:

$$\begin{array}{r} +1 \\ 32941 \\ +\,4259 \\ \underline{37200} \end{array} \quad \begin{array}{r} 78409 \\ +\;\;2409 \\ \underline{76000} \end{array} \quad \begin{array}{r} 9789 \\ +\,2301 \\ \underline{2090} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1894 \\ +\;\;107 \\ \underline{1991} \end{array} \quad \begin{array}{r} 35049 \\ +\,1930 \\ \underline{36989} \end{array} \quad \begin{array}{r} 56723 \\ +\,1869 \\ 978 \\ \hline 58560 \end{array}$$

Эффективность данной работы во многом будет зависеть, во-первых, от того, насколько сам учитель готов последовательно и регулярно включать эти задания в ход урока, комментировать их с точки зрения возможных ошибок; во-вторых, от того, насколько ученики осознанно выполняют эти задания, понимая конечную цель — как можно меньше допускать ошибок при решении математических выражений.

На третьем этапе учитель предлагает детям проанализировать примеры на вычитание многозначных чисел. Используются технические средства, чтобы урок получился увлекательным, динамичным, исключающим усталость детей, мобилизующим их на серьезную исследовательскую работу. Учащиеся работают в группах, соревнуются, чья группа выявит больше возможных ошибок при выполнении действия вычитания. Детям нравится работать в группах, не страшно высказывать свое мнение в более узком кругу, доказывать, стеснительные расслабляются, слабые не боятся рассуждать, сильные с удовольствием объясняют отстающим, подводят итоги работы, выступают с результатами исследований группы перед всем классом.

Учащиеся устанавливают следующие возможные ошибки при выполнении действия вычитания с многозначными числами и фиксируют их в аналогичных моделях.

Оформляется третья карточка: «Возможные ошибки при выполнении действия вычитания». Отрабатывая алгоритм проверки действия вычитания, учащиеся выполняют задания, включающие «ловушки».

1. Вычисли:

$$\begin{array}{r} 3765 \\ -\ 376 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 58903 \\ -\ 490 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6201 \\ -\ 529 \\ \hline \end{array}$$

2. Реши примеры с объяснениями.

$39\,601 - 5309$ $$\begin{array}{r} 39601 \\ +\ 5309 \\ \hline \end{array}$$

$7392 - 564$ $$\begin{array}{r} 7392 \\ -\ 564 \\ \hline \end{array}$$

3. Объясни способ решения:

$$\begin{array}{r} 51394 \\ -\ 1257 \\ \hline 50137 \end{array} \quad \begin{array}{r} 69095 \\ -\ 1315 \\ \hline 70410 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1329 \\ -\ 117 \\ \hline 1112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8463 \\ -\ 192 \\ \hline 8371 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8769 \\ -\ 7669 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4359 \\ -\ 682 \\ \hline 3687 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36001 \\ -\ \ 2007 \\ \hline 33004 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 59820 \\ -\ \ 1382 \\ \hline 58438 \end{array}$$

4. Не вычисляя, определи, сколько цифр будет в разности:

$$\begin{array}{r} 90371 \\ -\ 90281 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7109 \\ -\ 7102 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 567048 \\ -\ \ \ 964 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100000 \\ -\ \ 99981 \\ \hline \end{array}$$

5. Закончи составление примеров:

$$\begin{array}{r} -\,6\,2\,4\,8 \\ \bullet\,\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,5\,6\,2\,9 \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,3\,6\,0\,4\,8 \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,6\,4\,3\,0\,0 \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \end{array}$$

6. Придумай примеры по схемам:

$$\begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ -\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ -\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ -\ \bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ -\ \bullet\,\bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ -\ \bullet \\ \hline \end{array}$$

7. Придумай задания с «ловушками».

Учащимся нравится придумывать задания для класса, для группы, для соседа по парте, находить «ловушки», составлять примеры «по схемам».

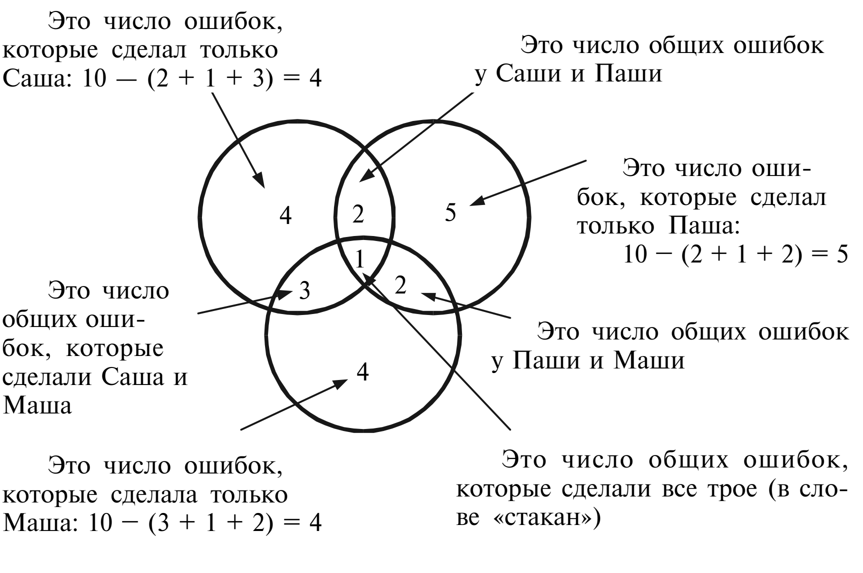
Итак, подводя итоги сказанному, отметим, что после описанной учителем работы над формированием вычислительных навыков необходимо составить контрольную работу по аналогии с итоговой, которая дана в приложении. Кстати говоря, составление промежуточных контрольных работ не составит для учителя труда, но даст возможность при подборе заданий учесть особенности своего класса.

4.4. РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

Особое место в курсе математики начальной школы принадлежит так называемым олимпиадным задачам, задачам на смекалку или повышенной трудности, как их еще называют, которым посвящен **четвертый рассказ**. Назначение этих задач известно, однако специфика их решения в данной программе состоит в том, что при поиске способа действия ребенок может воспользоваться таким мощным средством анализа, как графическая или какая-либо схожая с ней схематическая модель. Способность к конструированию новых типов моделей при решении нестандартных задач, фиксация этапов в логике решения задач являются одними из основных показателей эффективности обучения. А желание попробовать свои силы в решении этих задач большинством детей в классе, включая не самых одаренных, может служить показателем личностного роста ребенка, развития устойчивого познавательного интереса.

Обсуждая выполнение любого из ***заданий 226—282***, старайтесь сделать акцент на логике рассуждений и средствах, используемых детьми для анализа. Другими словами, предметом рефлексии становится ход рассуждения, а вопрос: «Как научить другого решать такую задачу (выполнять такое задание)?» — поможет отрефлексировать логику рассуждения.

Задание 227. Решить задачу ребенок может, рассуждая следующим образом: Саша, кроме 6 ошибок, о которых сказано в задаче (в словах: собака, корова, коза, петух, курица, цыпленок), сделал еще 4 (всего по условию 10 ошибок), которые не сделали другие дети; Паша, кроме 5 ошибок, которые встречаются у других детей, допустил еще 5 ошибок, отличных от других; Маша, соответственно, кроме 6 ошибок, имеющихся у Саши и Паши, сделала еще 4, которых у них нет. Таким образом, у Саши и Маши по 4 ошибки, отличных от остальных, а у Паши — 5, значит, вместе у них 13 различных ошибок, о которых в тексте не упоминается. Кроме них, учительнице надо рассматривать и все 8 ошибок, о которых сообщено.



Значит, на дополнительных занятиях учительнице придется рассмотреть 21 (13 + 8) ошибку, а не 30 на троих, как может показаться. В этом-то и есть смысл «ловушки».

Рассуждения, описанные выше, можно представить на графической модели, которую в математике называют кругами Эйлера, диаграммами Венна или просто схемами Эйлера — Венна.

По схеме видно, что всего сделана 21 ошибка, причем все ошибки разные.

Кстати, в условии лишними данными являются сами слова, в которых допущены ошибки, они не влияют на способ решения, однако показывают, что перечисленные ошибки действительно были разными.

Задание 228. В троичной системе счисления используются только три цифры: 0, 1 и 2, значит, буквами А, Б и Г обозначены эти цифры, причем $Г \neq 0$, так как Г есть в старшем разряде. Очевидно, что $Г \neq 2$, значит, $Г = 1$. Тогда $А = 2$, а $Б = 0$.

Проверим:

$$\begin{array}{r} \text{Г Г А А}_3 \\ +\quad \text{Г Б Г}_3 \\ \hline \text{А Б Б Б}_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\,1\,2\,2_3 \\ +\quad 1\,0\,1_3 \\ \hline 2\,0\,0\,0_3 \end{array}$$

Число 2000_3 нельзя читать как две тысячи (год, с наступлением которого, видимо, хотели поздравить друзей). Это «ловушка», в которую автор задания хотел «поймать» детей. Число 2000_3 следует читать так: два нуль нуль нуль в троичной системе счисления.

Задание 229. Нет необходимости описывать логику рассуждения, она аналогична предыдущей.

1) $\Upsilon = 1$ $\quad \lambda = 2$ $\quad \perp = 0$, т. е. $\quad 112_3 < 120_3$

2) $\oplus = 2$ $\quad \nabla = 1$ $\quad \boxtimes = 0$, если в неравенстве знак «больше».

Значит, $221_3 > 210_3$ или $\oplus = 2$, $\nabla = 0$ и $\boxtimes = 1$, тогда $220_3 > 201_3$.

Если же в неравенстве знак «меньше», то $\oplus = 1$, $\nabla = 2$, $\boxtimes = 0$, значит, $112_3 < 120_3$.

Задание 230. В четверичной системе счисления могут быть использованы 4 цифры: 0, 1, 2, 3.

1) A, D и B не могут быть нулями (с нуля число не записывают), значит, $C = 0$. Впишем нуль, поставим стрелки, показывающие переполнение разряда там, где оно есть без сомнения, и покажем разряды, где точно нет переполнения.

Точно нет переполнения в третьем разряде, так как $A + 0 + 0 = A$.

$$
\begin{array}{r}
D\,A\,0\,B_4 \\
+\;D\,0\,B\,0_4 \\
A\,0\,D\,B_4 \\
\hline
B\,A\,A\,A\,D_4
\end{array}
$$

2) Так как число B в пятом разряде получено в результате переполнения в четвертом разряде, оно может быть равно числу 1 или числу 2, другого быть не может. Это значит, что $B \neq 3$, тогда либо $D = 3$, либо $A = 3$. Но $D \neq 3$, так как в первом разряде складывают два одинаковых числа: $B + 0 + B = D$, значит, $A = 3$.

3) Подставим известные цифры: $C = 0$ и $A = 3$.

$$
\begin{array}{r}
D\,3\,0\,B_4 \\
+\;D\,0\,B\,0_4 \\
3\,0\,D\,B_4 \\
\hline
B\,3\,3\,3\,D_4
\end{array}
$$

4) $B \neq 2$, так как при $B = 2$ в первом разряде D оказалась бы нулем ($2 + 2 = 10_4$), но этого быть не может, значит, $B = 1$, а $D = 2$.

$$
\begin{array}{r}
2\,3\,0\,1_4 \\
+\;2\,0\,1\,0_4 \\
3\,0\,2\,1_4 \\
\hline
1\,3\,3\,3\,2_4
\end{array}
$$

Итак, $A = 3,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 2$.

Задание 231. Для выяснения того, с помощью каких цифр должно быть записано задуманное число, начнем рассуждать с числа 6 7 2. Цифр 6 и 7 в записи задуманного числа быть не может, так как они обе есть в двух других числах, значит, из трех цифр числа 6 7 2 выбираем цифру 2. Рассуждая аналогично, у второго числа выберем цифру 4, а у третьего — цифру 5. Значит, задуманное число могло быть записано только цифрами 2, 4 и 5. Оно могло быть любым из следующих чисел: 2 4 5, 2 5 4, 4 2 5, 4 5 2, 5 2 4, 5 4 2.

Задание 232. Рассуждать можно так же, как в предыдущем задании, при записи всех трехзначных чисел, состоящих из цифр 2, 4 и 5. Здесь же нужно записать все варианты расписания из трех уроков. Обозначим буквами названия уроков и будем действовать с ними так, как если бы это были цифры, т. е. закодируем их. Получим трехзначные коды. Затем из них вычеркнем те, которые не соответствуют условию, т. е. не учитывают пожелания учителей. А эти пожелания можно высказать так: учитель математики не хочет, чтобы его урок был третьим, учитель естествознания не хочет, чтобы его урок был вторым, а урок русского языка не может быть первым.

Итак, сначала запишем все варианты расписания без учета пожеланий: М Е Р (читать: эм, е, эр), М Р Е, Е М Р, Е Р М, Р М Е, Р Е М. Вычеркнем те варианты, в которых математика оказалась третьим уроком, — это варианты Е Р М и Р Е М, затем из оставшихся вычеркнем те, в которых естествознание оказалось вторым уроком, — это вариант М Е Р, и наконец, из оставшихся удалим те, в которых русский язык оказался первым уроком, — это Р М Е. Тогда расписание с учетом всех пожеланий может быть таким: М Р Е или Е М Р.

К этому же выводу можно было прийти, составив таблицу, в которой нужно вычеркнуть те варианты, которые не подходят.

№ урока \ Предметы	М	Р	Е
1		×	
2			×
3	×		

Тогда варианты остаются такими:

№ урока \ Предметы	М	Р	Е
1	⊕	×	
2		⊕	×
3	×		⊕

МРЕ

или

№ урока \ Предметы	М	Р	Е
1	⊕	×	⧆
2	⧆	⊕	×
3	×	⧆	⊕

ЕМР

Задание 233. Речь в задаче идет о разноцветных туфлях и платьях. Про цвет туфель известно, что у Наташи они были черные, значит, у двух других девочек красные и белые, но у Вали туфли не были белыми, значит, они у нее могли быть только красными, тогда у Ани — белыми. Итак, цвета туфель у девочек мы уже знаем:

	Туфли
Аня	белые
Наташа	черные
Валя	красные

У Ани, по условию, цвет платья совпал с цветом туфель, значит, платье у нее было, как и туфли, белое. У Наташи платье красное, так как туфли черные, а у Вали наоборот.

	Туфли	Платье
Аня	белые	белое
Наташа	черные	красное
Валя	красные	черное

Задание 234. Анализируя предложенный способ действия, нетрудно обнаружить «ловушку» — исходное условие неверное, так как невозможно отлить 26 л воды из бочки, в которой 23 л $(20 + 12 - 16 + 7 = 23)$.

При таком исходном условии эта задача не имела решения.

К предложенному решению ученики могли прийти опираясь лишь на то, что значение числового выражения, которое описывало их способ действия, равно значению выражения, описывающего последовательно все производимые действия:

$$\underbrace{(20 + 12 + 7 + 18)}_{\substack{\text{столько всего}\\ \text{налито воды}}} - \underbrace{(16 + 26)}_{\substack{\text{столько}\\ \text{воды}\\ \text{отливали}}} = \underbrace{20}_{\substack{\text{нали-}\\ \text{ли,}}} + \underbrace{12}_{\substack{\text{затем}\\ \text{доли-}\\ \text{ли,}}} - \underbrace{16}_{\substack{\text{затем}\\ \text{отли-}\\ \text{ли,}}} + \underbrace{7}_{\substack{\text{опять}\\ \text{доли-}\\ \text{ли,}}} - \underbrace{26}_{\substack{\text{опять}\\ \text{отли-}\\ \text{ли,}}} + \underbrace{18}_{\substack{\text{еще}\\ \text{доли-}\\ \text{ли}}}$$

Эта ситуация схожа с той, которую мы неоднократно рассматривали. Подбирая к текстовой задаче вместо букв подходящие числа, мы должны всегда следить за тем, чтобы, во-первых, действия с этими числами были выполнимы на данном множестве чисел, а, во-вторых, они должны соответствовать *реальной* ситуации, описанной в сюжете задачи.

В нашем случае задача была решена без учета реальной ситуации. Сама по себе замена числового выражения на тождественное может иметь место на множестве действительных чисел:

$$a + b - c + k - m + n \equiv (a + b + k + n) - (c + m),$$

но она невозможна, когда речь идет о решении конкретной текстовой задачи, заданной на множестве натуральных чисел (могла быть задана на множестве положительных чисел).

Задание 235. Аналогичные задания уже рассматривались, поэтому ответ приводим без рассуждений. Понятно, что первой можно расшифровать букву В, так как появление этой цифры в сумме связано с переполнением старшего разряда:

$$\begin{array}{r} \text{У Д А Р} \\ +\ \text{У Д А Р} \\ \hline \text{Д Р А К А} \end{array}$$

Запишем расшифровку букв в той последовательности, которая вытекает из логики рассуждения:

1) Д = 1; 2) А = 2; 3) Р = 6; 4) К = 5; 5) У = 8 (4-й и 5-й этапы можно поменять местами).

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 8\,1\,2\,6 \\ 8\,1\,2\,6 \end{array} \\ \hline 1\,6\,2\,5\,2 \end{array}$$

Задание 236. Наименьшее число 1 0 2 3 4 5 6 7 8 9, а наибольшее 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0.

Задание 237. В записи этого числа цифра 1 встретится 20 раз: один раз в старшем разряде огромного числа, затем 11 раз при записи чисел второго десятка от 10 до 19 и по одному разу при записи чисел 21, 31, 41, ..., 91.

Итого: 1 + 11 + 8 = 20.

Задание 238. Первый шаг. В 5-литровый сосуд из крана налить воды и перелить в 4-литровый. Тогда в первом сосуде останется 1 л.

Второй шаг. Освободить 4-литровый сосуд, вылив из него воду, и перелить в него 1 л воды, который оставался в 5-литровом сосуде. Теперь 5-литровый сосуд пустой, а в 4-литровом налит 1 л воды.

Третий шаг. Вновь в первый сосуд налить 5 л воды и отлить во второй 3 л, которые в него вместятся. Тогда в 5-литровом сосуде останется ровно 2 л воды.

Задание 239. Налить 3 л не составит труда: налить 8-литровый сосуд и перелить воду в 5-литровый, тогда в первом останется ровно 3 л.

Налить 7 л можно так. Первый шаг. Налить 5-литровый сосуд водой и перелить ее в 8-литровый. Если повторить эту операцию еще раз, в 5-литровом останется ровно 2 л, так как остальные 3 л вместились в 8-литровый, где уже было налито 5 л.

Второй шаг. Освободить 8-литровый сосуд и вылить в него 2 л из 5-литрового сосуда, который опять наполнить и долить в 8-литровый сосуд. Теперь в нем ровно 7 л воды.

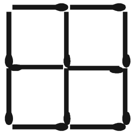
Задание 240. Заготовка для суммы чисел могла быть только такой:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array} \\ \hline 9\,9\,9\,9 \end{array}$$

В младшем разряде переноса при сложении быть не могло, так как в таблице однозначных чисел нет двузначного числа, оканчивающегося цифрой 9, а значит, и в последующих разрядах она не могла быть получена по-другому.

Задание 241. Флажки на концах будут зеленого и голубого цвета. К такому выводу дети смогут прийти на данном этапе только путем изображения. Еще не рассматривались действия умножения и деления, в том числе деление с остатком (60 : 7 = 56 (ост. 4), значит, четвертый флажок зеленый, а следующий — голубой).

Задание 242.

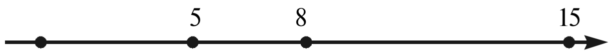


Здесь 5 квадратов: 4 маленьких (части), которые составляют один большой (целое).

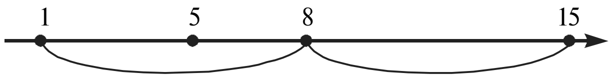
Задание 243. Среди гномов один врун, справа от которого никого нет.

Задание 244.

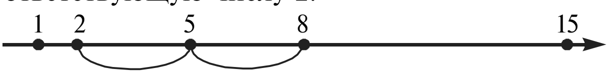
1)



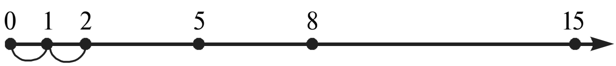
Шаг 1. От числа 8 отложить слева отрезок, равный по длине отрезку между числами 15 и 8, равный по длине 7 единицам. Получим точку, соответствующую числу 1.



Шаг 2. От числа 5 отложить слева отрезок, равный по длине отрезку между числами 5 и 8, который равен 3 единицам, получим точку, соответствующую числу 2.



Шаг 3. Находим точку, соответствующую 0, которая симметрична точке, соответствующей числу 2, относительно точки, соответствующей числу 1.



Есть и много других вариантов. Как распорядиться циркулем, труда не представляет.

2) Доказать, что сложить два натуральных числа и получить число 5555 так, чтобы не было ни одного переноса из одного разряда в другой, невозможно (в отличие от задания 240). Контрпример:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 4282 \\ 1273 \end{array} \\ \hline 5555 \end{array}$$

Задание 245. Нужно взять 5 катушек. Если взять 4 катушки, то все они могут оказаться разного цвета.

Задание 246. Запишем в столбик:

$$\begin{array}{r} _{-}\, a\ b \\ b\ a \\ \hline 7\ 2 \end{array}\text{, где } a \text{ и } b \text{ — цифры.}$$

Очевидно, что $b < a$, тогда:

$$\begin{array}{r} _{-}\, a\ b \\ b\ a \\ \hline 7\ 2 \end{array},$$

значит, $a = 9$, а $b = 1$ (нетрудно догадаться, почему ничего другого быть не может).

$$91 - 19 = 72$$

Задание 247. Если связать в одну ленту 17 ленточек, то получится 16 «узелков» — мест соединения. Первую разноцветную часть ленты можно получить, если первый разрез сделать за местом стыка двух цветов, т. е. на втором куске, а значит, 17 кусков не хватит, чтобы снова разрезать на 17 разноцветных частей.

Задание 248. Рассуждать начнем так:

1) Предположим, что врет Алеша, а все остальные говорят правду. Но этого не может быть, так как если Алеша врет, то он был либо первым, либо последним, но тогда это означает, что врет Ваня. Значит, Алеша сказал правду, а это, в свою очередь, означает, что он мог быть либо вторым, либо третьим.
2) Предположим, что врет Боря, а остальные говорят правду. Тогда первым был Ваня, а Гриша был последним, но если Боря соврал, что он не был последним, значит, он на самом деле последний, но двух последних быть не может, значит, он не врал и занял одно из трех первых мест.
3) Нетрудно, рассуждая дальше, убедиться в том, что врал Ваня, когда говорил, что был первым.

Итак, первым был Боря, второе и третье место могли поделить Алеша и Ваня, а Гриша был последним.

Задание 249. Приводим два решения этой задачи в виде таблиц, которые показывают, сколько кваса остается в каждом бочонке.

Решение 1.

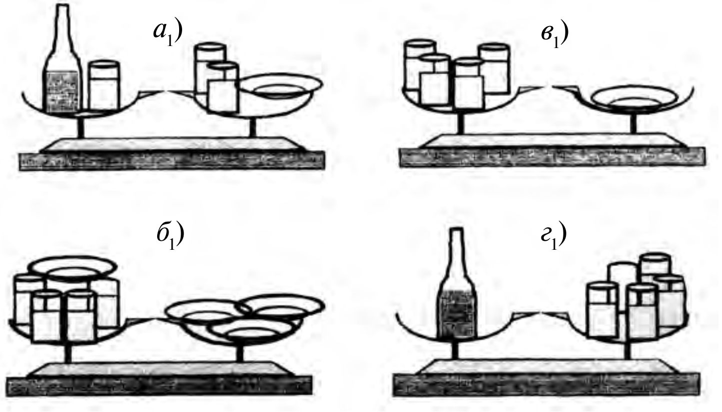
	Бочонки		
	8 ведер	5 ведер	3 ведра
До переливания	8	0	0
После переливания			
1-го	3	5	0
2-го	3	2	3
3-го	6	2	0
4-го	6	0	2
5-го	1	5	2
6-го	1	4	3
7-го	4	4	0

Решение 2.

	Бочонки		
	8 ведер	5 ведер	3 ведра
До переливания	8	0	0
После переливания			
1-го	5	0	3
2-го	5	3	0
3-го	2	3	3
4-го	2	5	1
5-го	7	0	1
6-го	7	1	0
7-го	4	1	3
8-го	4	4	0

Задание 250. Можно выполнить требуемую работу, раскрыв только три звена. Для этого надо освободить звенья одного обрывка и соединить ими концы остальных четырех обрывков.

Задание 251. Вспомним все положения условия задачи (см. рисунки **в учебнике**). Начнем с рисунка ***а***, на котором показано, что бутылка со стаканом уравновешивают кувшин.



На левой чашке весов (рисунок *б*) находится бутылка, а на правой — тарелка со стаканом. Добавив по одному стакану на обе чашки весов, мы не нарушим равновесия. Следовательно, бутылка со стаканом уравновесят тарелку и 2 стакана (рисунок $а_1$). Сравнивая левые чашки весов на рисунке *а* и рисунок $а_1$, мы заключаем, что кувшин весит столько же, сколько тарелка и два стакана. Но так как, с другой стороны, 2 кувшина уравновешивают 3 тарелки (рисунок *в*), то 3 тарелки весят столько же, сколько 2 тарелки с 4 стаканами (рисунок $б_1$).

Снимем теперь по 2 тарелки с каждой чашки весов, изображенных на рисунке $б_1$, тогда окажется, что вес одной тарелки равен весу 4 стаканов (рисунок $б_1$). Вернемся к весам, изображенным на рисунке *б*. Вместо одной тарелки поставим 4 стакана; 5 стаканов уравновесят бутылку (рисунок $г_1$), что и дает ответ задачи: бутылка в 5 раз тяжелее стакана. Попутно выясняется, что кувшин в 6 раз тяжелее стакана.

Задание 252.

$$\begin{array}{r} \text{С И Н И Ц А} \\ 3\ 2\ 1\ 2\ 8\ 6 \\ +\ 3\ 2\ 1\ 2\ 8\ 6 \\ \hline 6\ 4\ 2\ 5\ 7\ 2 \\ \text{П Т И Ч К И} \end{array}$$

Задание 253. Взвесить 2 пары разных мячей. Если при этом тяжелый мяч не обнаружится, то, значит, самый тяжелый мяч не взвешивали (и т. д.).

Задание 254. Знаки действий и знаки равенств тоже выложены из спичек.

а) XII + IX = II: получится XII − IX = III.

б) IV − V = I: получится V − IV = I.

в) X = VII − III: получится X − VII = III.

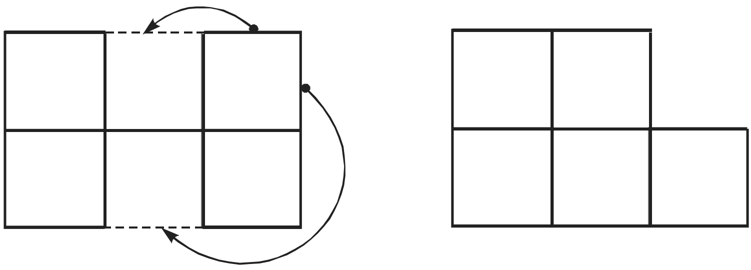
г) X + X = I: получится XI − X = I.

д) VI − VI = XI: получится VI + V = XI.

е) IV − I + V = II: получится IV = I + V − II.

Задание 255. Тяжелее арбуз, если считать, что массы арбузов одинаковые и массы дынь тоже.

Задание 256. Один из вариантов:



Задание 257. Нужно положить на чашечные весы любые две монеты. Если весы будут в равновесии, значит, третья монета — фальшивая. Если же одна из двух монет, которые положили на весы, фальшивая, то весы это покажут (чашка с этой монетой будет выше).

Для определения фальшивой монеты из 9 разделите их на 3 кучки по 3 монеты. Первым взвешиванием обнаружите, в какой кучке из трех находится фальшивая монета. А как найти одну из трех, мы уже рассмотрели. Аналогично решается задача с 27 монетами: разделите их на три кучки по 9 монет, и задача будет сведена к предыдущей.

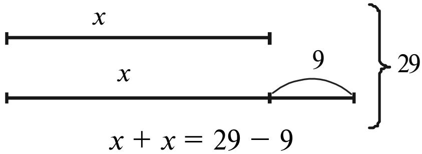
Задание 258. Эта задача легко решается, если уметь умножать и делить, но ее можно решить и без этих знаний.

Если от первого этажа до третьего лифт поднимается за 6 секунд, значит, чтобы подняться лифтом на один этаж, нужно 3 секунды, а значит, чтобы подняться на пятый, нужно 12 секунд.

Можно рассуждать проще: если с первого на третий этаж лифт поднимается за 6 секунд, то чтобы подняться с третьего этажа на пятый, нужно столько же времени, т. е. еще 6 секунд, значит, всего 12 секунд.

Задание 259. Для решения задач составить схему:

а)



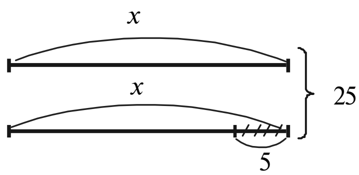
$$x + x = 29 - 9$$

$$x + x = 20$$

$$x = 10$$

Ответ: у одного 10, а у другого 19.

б)



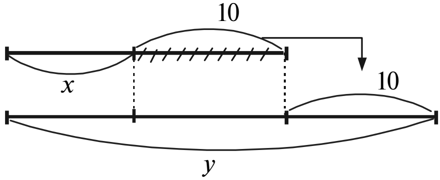
$$x + x - 5 = 25$$
$$x + x = 30$$
$$x = 15$$

Ответ: у одного 15, у другого 10.

Задание 260. Ответ в учебнике.

Задание 261. Ответы, которые даем, легко проверить при помощи схемы:

а)

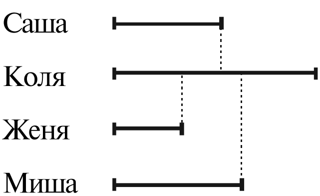


$$y > x \text{ на } 20$$

Рассуждения: если с одной полки снять 10 книг, то на ней сразу станет на 10 книг меньше, чем на второй. Если же эти 10 книг теперь поставить на вторую полку, то их станет на 20 больше.

б) 10; в) 10.

Задание 262. Можно начертить схему:



Первым идет Женя, за ним Саша, потом Миша, и последним Коля.

Задание 263.

а)
$$\begin{array}{r} a\ a \\ +\,a\ 2 \\ \hline b\ a\ b \end{array}, \qquad b = 1, \text{ а значит,}$$

$$\begin{array}{r} a\ a \\ +\,a\ 2 \\ \hline 1\ a\ 1 \end{array}, \qquad \text{тогда } a = 9. \qquad \begin{array}{r} 9\ 9 \\ +\,9\ 2 \\ \hline 1\ 9\ 1 \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} a\,3\,a\,a \\ +\;3\,a\,3\,b \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

$a = 6,\ b = 4$

$$\begin{array}{r} 6\,3\,6\,6 \\ +\;3\,6\,3\,4 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{r} a\,b\,6\,0 \\ -\;\;6\,b\,a \\ \hline 2\,9\,0\,7 \end{array}$$

$a = 3,\ b = 5$

$$\begin{array}{r} 3\,5\,6\,0 \\ -\;\;6\,5\,3 \\ \hline 2\,9\,0\,7 \end{array}$$

г)

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ +\;c\,b\,a \\ \hline 8\,8\,8 \end{array}$$

$b = 4$ и $a + c = 8$, т. е. если $a = 1$, то $c = 7$; если $a = 2$, то $c = 6$ и т. д.

Задание 264.

а) 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...

б) 16, 13, 10, 7, 4, 1, ...

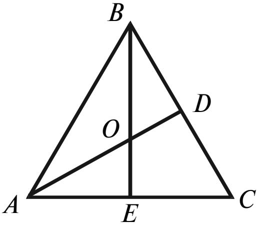
в) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Каждое следующее число (начиная с третьего в ряду) равно сумме двух предыдущих.

Задание 265 придумывают дети.

Задание 266. Больше молока выпил сын, так как у него в стакане молока осталось меньше.

Задание 267. Всего получается 9 отрезков:

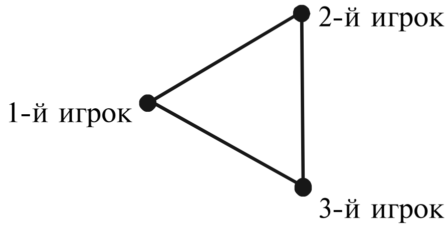


$AB,\ BC,\ AC$
$AD,\ AO,\ OD$
$BE,\ BO,\ OE$

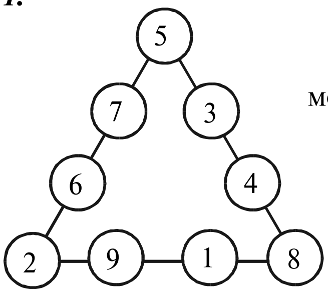
Задание 268. Ответ — всего 7 детей: 6 братьев и 1 сестра.

Задание 269. Завтракали трое: отец, сын и дедушка.

Задание 270. Каждый сыграл по 2 партии, хотя всего сыграли 3. Покажем схемой:

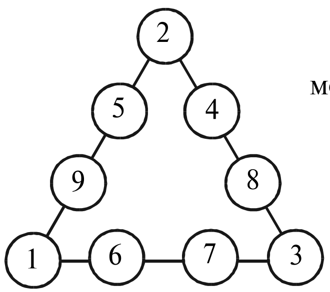


Задание 271.



Средние цифры в ряду можно переставлять.

Задание 272.



Средние цифры в ряду можно переставлять.

Задание 273. Для решения задачи воспользуемся таблицей 3 × 3, отмечая по горизонтали фамилии, а по вертикали — цвета волос беседующих.

Фамилия	Цвет волос		
	Рыжие	Черные	Русые
Белокуров			
Чернов			
Рыжов			

По условию задачи Белокуров — не блондин, Чернов — не брюнет, а Рыжов — не рыжий. Это позволяет поставить знак – в клетках L_{13}, L_{22} и L_{31}. Кроме того, по условию Белокуров не брюнет, и, значит, в клетке L_{21} также следует поставить знак $-$.

Фамилия	Цвет волос		
	Рыжие	Черные	Русые
Белокуров		$-$	$-$
Чернов		$-$	
Рыжов	$-$		

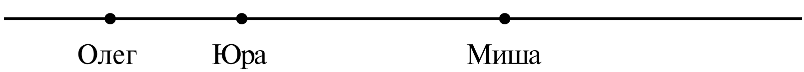
Так как между множеством фамилий участников беседы и множеством цветов их волос должно быть взаимно-однозначное соответствие, то, очевидно, в клетках L_{11} и L_{23} следует поставить знак $+$. Но тогда в клетках L_{12} и L_{33} следует поставить знак $-$, а в оставшейся клетке L_{32} — знак $+$.

И таблица принимает следующий вид:

Фамилия	Цвет волос		
	Рыжие	Черные	Русые
Белокуров	$+$	$-$	$-$
Чернов	$-$	$-$	$+$
Рыжов	$-$	$+$	$-$

Отсюда следует, что у Белокурова волосы рыжие, у Чернова — русые, а у Рыжова — черные.

Задание 274. По условию задачи в очереди за билетами три мальчика стоят в порядке: Олег, Юра и Миша.



Поэтому нужно установить места в очереди для Саши и Володи.

Но Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Это возможно лишь в случае, когда Саша стоит за Мишей, а остальные мальчики стоят перед Мишей.

Теперь нужно установить место Володи в очереди. По условию задачи Володя не стоит рядом ни с Олегом, ни с Сашей. Значит, Володя стоит между Юрой и Мишей.

Таким образом, мальчики стоят в очереди в следующем порядке: Олег, Юра, Володя, Миша и Саша.

Задание 275. Обозначим цифры двузначного числа буквами А и Б, тогда

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} \text{Б А} \\ \text{А Б} \end{array} \\ \hline 1\;8 \end{array},$$

значит, Б > А и Б = А + 2, тогда: если Б = 9, то А = 7,
если Б = 8, то А = 6,
если Б = 7, то А = 5,
если Б = 6, то А = 4 и т. д.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 97 \\ 79 \end{array} \\ \hline 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r} 86 \\ 68 \end{array} \\ \hline 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r} 75 \\ 57 \end{array} \\ \hline 18 \end{array}$$ и т. д.

Задание 276. Цифры в записи двузначного числа одинаковые (11, 22 и т. д.).

Задание 277. Каждый играл 4 часа.

Задание 278. Если в коробке поровну кубиков разного цвета, то нужно взять на 1 кубик больше, чем кубиков одного цвета. Если кубиков одного цвета больше, то нужно брать на 1 больше, чем их число.

Задание 279. Ответ очевиден: груша.

Задание 280. Запишем условно неравенства и равенства: Т > К (1), П + В = К + Т (2) и П + Т < В + К (3).

На основании (2) либо П < К (а значит, В > Т), либо П = К (тогда В = Т), либо П > К (тогда В < Т).

Если П = К, то неравенства (3) не могло быть, значит, П < К, тогда В > Т, а Т > К по условию. Тогда на первом месте будет Вася (он поймал рыбы больше всех), на втором — Толя, на третьем — Коля и на четвертом — Петя.

Задание 281. Кошка от мышки находится на расстоянии 50 мышиных шагов (5 прыжков по 10 шагов). С помощью сложения (умножения дети еще не знают) можно это число узнать. С каждым прыжком кошки расстояние между кошкой и мышкой будет сокращаться на 7 шагов (10 − 3 = 7), значит, после первого прыжка между ними окажется 43 шага, после второго — 36 (43 − 7), после третьего — 29 (36 − 7), после четвертого — 22 (29 − 7), после пятого — 15 (22 − 7). Значит, кошка мышку не догонит.

Задание 282.

а) 7; б) 313 и 331; в)

3 2 3 1,	2 1 3 3,	1 2 3 3,
3 1 2 3,	2 3 1 3,	1 3 2 3,
3 1 3 2,	2 3 3 1,	1 3 3 2.
3 3 2 1,		
3 3 1 2,		

КАК НАУЧИТЬ ДЕТЕЙ СЧИТАТЬ (материал для родителей)

Этот материал написан для родителей детей, обучающихся как в классах РО, так и в массовой школе.

Он будет полезен родителям отличников и двоечников, тех, кто интересуется математикой, и тех, кто не очень.

Он не только поможет справиться с этим предметом, но и снимет ряд проблем в отношениях с детьми. Даже старшие школьники и их родители найдут в нем для себя немало интересного.

КАК УЧИТЬ ДЕТЕЙ СКЛАДЫВАТЬ

Итак, ребенку, младшему школьнику, трудно дается математика: ребенок много болеет или просто плохо запоминает, например, таблицы сложения и умножения; часто ошибается при вычитании в пределах двадцати; забывает при сложении или умножении в столбик переносить единицы в следующий разряд; при вычитании не учитывает то, что он «занимал» число в предыдущих разрядах, а уж с делением в столбик и совсем плохо идут дела — медленно, с ошибками подбирает нужную цифру в частном. Вы махнули на него рукой — неспособный к математике, учиться не хочет, скучно...

Но это не так! Не огорчайтесь и не опускайте руки. Помогите ему сами! Вы мне возразите: «Как я могу помочь ребенку, если он не хочет даже слушать мои объяснения? Начинает плакать, нервничать, говорить, что я все делаю не так, что им в классе объясняли по-другому».

Ребенок сопротивляется контакту с вами, а разобраться самостоятельно не может. Вы, конечно, пытаетесь насильно заставить ребенка слушать ваши объяснения, что зачастую приводит к ссорам, с одной стороны, и потере интереса к учебе — с другой. Бывает и так, что мама — сама учитель начальных классов, а ребенок все равно ей не доверяет и при каждой попытке вмешательства доказывает, что мама не так объясняет, как в классе.

А как быть тем родителям, бабушкам и дедушкам, кто совсем не знает материала, который в данный момент изучает ребенок? Как тем не менее помочь ему?

На этот и другие вопросы мы постараемся вам ответить.

Конечно, ваше объяснение, как правило, не может быть «таким же», как у учителя в классе. Значит, необходимо выбрать другой, не объяснительно-демонстрационный (вы объясняете ребенку материал и показываете, как им пользоваться), способ обучения ребенка. С помощью ролевой игры превратите ребенка в вашего учителя и вместе с ним займите позицию исследователя. Какую же роль должен играть взрослый, чтобы ребенок почувствовал себя сильным, способным самостоятельно решать встающие перед ним задачи?

Все очень просто. Предложите ребенку выполнить устно или письменно на черновике (как он захочет) несколько однотипных заданий из предыдущего материала, который предназначен для понимания следующей темы учебника. Он будет выполнять, а вы при этом все время хвалите его: «Как здорово! Вот молодец!» И наконец, задайте ему главный ролевой вопрос: «Как ты это делаешь? Как это у тебя получается? Какой секрет ты знаешь? Научи меня!»

Если ребенок возражает, ссылаясь на то, что вы сами это знаете, то скажите, что знали, умели, а теперь забыли, или придумайте другие аргументы. Этим вопросом вы побуждаете ребенка осознать собственный способ действия, да и сами можете вместе с ним включиться в процесс осознания: почему делаем именно так? Можно ли делать иначе? Почему? Как бы ты сам научил этому того, кто совсем не умеет это делать? Здесь ваша роль состоит в том, что вы становитесь соучастником того, что происходит, вы становитесь таким же непонимающим, каким часто бывает ребенок. Вы можете тогда задавать ему вопросы, спорить с ним «на равных», делая вид, что искренне не понимаете того, что он вам объясняет и показывает.

Остановитесь! Чувствуете? Вы поменялись с ним ролями: теперь он вам объясняет и показывает, но в отличие от того, что пытались делать вы, он объясняет и показывает то, что он сам уже умеет делать, осознавая при этом то, чего мог не понимать сам, заглядывая в сущность вещей, выделяя при этом для себя способ, которым он пользовался.

Часто бывает, что даже взрослый действительно этого не понимал и, только обсуждая это с собственным ребенком, он может и для себя сделать открытие. Помните известную шутку про учителя, который десять раз объяснял детям теорему, а потом закричал: «Что за бестолковые дети! Я уже и сам понял, а они все не поймут!»

Другими словами, нет лучшего способа понять и запомнить то, что задано тебе самому, чем объяснять и показывать другому.

Скажем теперь еще точнее: показывать и объяснять (а не наоборот) должен начать сам ребенок, демонстрируя то, что он уже умеет.

Теперь, когда ребенок растолковал вам, плохо понимающему, медленно соображающему, чуть-чуть бестолковому взрослому (сыграйте как можно лучше эту роль), можете делать следующий шаг, перейти к новому, не понятому в школе материалу, но не прямо, не «в лоб», а как бы проявляя интерес к продолжению. Нужно применить способ, обнаруженный вами вместе с ребенком для предыдущего случая, к новому и порассуждать, получается или нет. Соответствует ли способ, который позволял вам выполнить предыдущее задание, новым условиям, в которые вы поставлены? Если да, то вам нечему учиться, а если нет, то начинайте опять вместе рассуждать: почему «там» получалось, а «здесь» нет, что «здесь» не так, что изменилось?

Нужно дать возможность ребенку осознать необходимость поиска другого способа действия. Он должен это прочувствовать, прожить, а тогда следующий шаг — сам поиск, придумывание своего способа (при этом ребенок может придумать свой рисунок, схему, значок для обозначения). Это и есть принятие исследовательской позиции. Надо, чтобы ребенок попробовал применить свой способ, и только после этого можно «открыть» для него секрет: показать и объяснить, как это же делают взрослые люди, словно только теперь вы вспомнили то, что умели раньше делать сами.

Представьте себе теперь радость ребенка, который смог «сам» (так ему будет казаться) открыть способ, которым пользуются взрослые. Но если даже ваш ребенок не смог сделать это открытие «самостоятельно» (т. е. с вашей помощью), не огорчайтесь, вы уже подготовили его к пониманию того, что вы хотели ему объяснить: ему стало интересно, вы играли роль непонимающего (и он иногда бывает таким же), а значит, вы с ним общались на равных.

Попробуйте поиграть с ним в игру, принцип которой здесь описан в общих чертах. Втянуть в нее маленького ребенка, который не хочет делать уроки, легко. Достаточно сказать ему: «Бог с ними, с этими уроками, я видел, как ты быстро (хорошо, красиво, правильно и т. д.) решал эти примеры (задачи, упражнения и т. п.)» или так: «Мне показалось, что ты уже научился делать... и у тебя это уже здорово получается. Мог бы ты мне показать и рассказать, как ты это делаешь?»

Вряд ли найдется ребенок, который не захочет похвастаться своими достижениями, пусть еще небольшими, пусть еще несовершенными. Он может отказаться, чтобы «покуражиться», — не верьте этому, ему в душе очень хочется продемонстрировать то, чему он уже научился, и не жалейте слов, чтобы похвалить его, даже в том случае, когда и хвалить-то особенно не за что. Найдите в его старых записях что-нибудь достойное похвалы и с этого начните. Конечно, все это требует от вас много времени, но поверьте: потратив его на такую игру, вы очень быстро увидите огромные перемены в себе и в вашем ребенке. Никакой другой вид помощи не приносит такого результата. Ведь вы не только тем самым учите своего ребенка способам самостоятельной работы над материалом, не только даете ему возможность думать, рассуждать, мыслить, тем самым стимулируя развитие его мышления, памяти, внимания, не только пробуждаете у него интерес к добыванию знаний, к поиску других, нестандартных способов решения встающих перед ним задач, но вы ближе узнаете своего ребенка, у вас появятся новые темы для общения с ним, вы увидите в нем мыслящего, интересного человека, он повернется к вам такими гранями, которые вы никогда не откроете при бытовом общении. Он же почувствует себя способным человеком, у вас сложатся благодаря совместной деятельности доверительные отношения. Ведь вы прекрасно знаете из своего жизненного опыта: случается, что человек, которого вы знали много лет, порой оказывается совсем другим, стоит вам вместе начать работать или вести хозяйство. Только в совместной деятельности человек раскрывается. Однако, обнаружив в нем какие-либо качества личности, вам несимпатичные, и понимая, что изменить их у взрослого человека практически невозможно, вы либо избавитесь от общения с ним, и тогда вашей многолетней дружбе придет конец, либо будете строить свои отношения так, чтобы эти недостатки в его личности были менее всего задействованы.

Но перед вами ваш ребенок. Можете ли вы исключить его из вашей жизни? Какой он? Отличник или двоечник, послушный или нет, веселый или грустный, упрямый или не очень — это все внешнее. Мы часто их совсем не знаем, наших детей.

Почему в благополучной семье вдруг вырастает преступник? Что упустили, когда? Хотите лучше узнать своего ребенка, повлиять на него, участвовать в его делах? Хотите, чтобы он доверял вам, советовался с вами, стал вашим другом? Тогда не пожалейте времени уже сейчас, с первых дней его учебы в школе, но не давайте бесконечные указания, как надо сидеть, писать, читать, играть, смотреть, дышать и т. д., а «спуститесь» к нему и начните эту игру.

Пусть на первых порах, придя в школу, ваш ребенок расскажет в классе такую историю, какую рассказал мой сын. Он объявил в классе, что его мама (т. е. я) совсем не знает русского языка, а бабуля, бывший учитель русского языка и литературы, совсем не знает математики, поэтому он теперь нас учит, дает контрольные работы, в которых мы специально делаем ошибки, которые мог бы сделать он сам, и проверяет их, а затем несет в класс своему учителю и уточняет, правильно ли он исправил наши ошибки. Он ставит отметки, причем придирается к мелочам. Он ежедневно стал рассказывать все, чему научился сам, и выяснять, умеем ли мы делать это же. Мы же бесконечно удивляемся, восхищаемся и при этом сами многое «не знаем и не умеем». Он хоть не всегда верит этому, задавая вопрос: «А ты правда этого не знаешь? Ну скажи, ты честно не знаешь?», тем не менее ему очень-очень хочется, чтобы это было действительно так. А ведь зачастую родители могут и не знать нынешнего содержания учебных программ, особенно если дети занимаются по методике развивающего обучения (РО) или другим авторским программам.

Автор этой методики часто дает открытые уроки математики по системе РО в классах, обучающихся по традиционной программе. Однажды во время такого урока в первом классе одной из школ Екатеринбурга девочка, больше всех тянувшая руку, встала и говорит с чувством, очень эмоционально: «Да какая же вы учительница? Вы же сами ничего не знаете! Учительница должна все знать и нам рассказывать, а вы все время у нас спрашиваете». Учителя-зрители смеялись до конца урока, а я, конечно, призналась, что действительно не учительница. Дети этого класса впервые были втянуты в такую игру и приняли за чистую монету отсутствие понимания материала со стороны учителя. Детский вопрос: «Вы правда не понимаете или притворяетесь? Моя мама говорит, что вы притворяетесь!», как и рассказ одной девочки дома: «Мама! Нам прислали такую молодую учительницу, которая сама ну ничего не знает, мы ее на всех уроках учили», — скоро перестает занимать мысли ребенка, так как он очень быстро начинает понимать, что это своеобразная игра. Метод развивающего обучения — по сути педагогика сотрудничества, о которой много пишут и говорят.

Другое дело, что содержание традиционных курсов математики, языка и др. не позволяет учителю строить свои отношения с детьми подобным образом и поэтому в повседневной практике существуют лишь отдельные уроки, на которых он может создать так называемую проблемную ситуацию. Эти занятия, как правило, очень нравятся и ученикам, и педагогу.

Но, к сожалению, именно из-за содержания материала, а не из-за его собственной бездарности такое нечасто удается учителю.

Только программы РО, которые своей теоретической основой, логикой развертывания материала коренным образом отличаются от традиционных, позволяют учителю в качестве основного метода работы использовать принципы, описанные выше. Проверьте их на своем ребенке, и вы увидите глаза маленького человека, впервые совершившего для себя открытие, станете свидетелем удивительного процесса, когда у ребенка начнет развиваться способность сначала учить вас и своих товарищей, а затем и самого себя.

Как мало радостей сейчас дарит нам окружающая жизнь: плохо с едой, плохо с одеждой, плохо с жильем и еще со многими вещами — плохо, плохо, плохо... Так давайте же доставим радость друг другу: радость общения, радость открытия, радость взаимопонимания! Пусть мы и наши дети будем счастливы хотя бы в этом!

Чтобы мои рассуждения не показались вам пустыми и никчемными, расскажу на конкретном примере, на конкретном материале, как помочь своему ребенку.

Возьмем изучение таблиц сложения в программе по математике 1 или 2 класса. Случай перехода через десяток — один из самых важных и трудных в этом курсе. Будем опираться на основные принципы, описанные выше.

Необходимо, чтобы ребенок сам осознал, какие случаи табличного сложения для него легче, а какие — труднее. Как правило, легче усваивается сложение без перехода через десяток, т. е. когда сумма однозначных чисел не превосходит 10 (3 + 2, 2 + 2, 3 + 4, 5 + 5, 5 + 4 и т. д.), а труднее случаи перехода через десяток (9 + 6, 7 + 8, 5 + 7, 6 + 8 и т. д.).

Выявить эти две группы несложно. Возьмите, к примеру, мяч, станьте так, чтобы ребенок мог легко поймать его, и, бросая его ребенку, называйте по одному сначала самые легкие примеры, на которые ребенок относительно быстро сможет дать ответ (2 + 2, 3 + 1, 4 + 4, 3 + 2, 5 + 1, 3 + 3), а затем — самые трудные (9 + 7, 8 + 7, 9 + 6, 7 + 6). Задайте ему вопрос:

«Почему в одних случаях ты отвечаешь быстрее, а в других — медленнее или совсем не отвечаешь?»

Пусть ребенок вам назовет, а вы сами запишете в один столбик легкие, с его точки зрения, примеры, а в другой — трудные. Для того чтобы ему было легче это сделать (он может затрудняться придумывать их сам, а те, которые называли ему вы, забыть), называйте ему теперь уже вперемежку легкие и трудные примеры, а он пусть сам диктует, куда какой записать.

Например, вы произносите:

«3 + 4».

Ребенок отвечает:

«Легкий». — (Вы записываете его в первый столбик.)

«7 + 6».

«Трудный». — (Вы записываете во второй столбик.)

Так у вас образуется два столбика, они могут быть очень длинными, но не обязательно их делать полными. Достаточно записать по 5−6 примеров в каждый. Вы сами должны почувствовать, когда можно задать ребенку вопрос-просьбу: «А как ты узнаешь, какие примеры легкие, а какие трудные? Научи меня».

Вывод, к которому вы должны прийти ценой совместных обсуждений: «легкие» — это те примеры, у которых сумма меньше 10, а «трудные» — у которых сумма больше 10 (случай равенства 10 можно отнести к любой группе или выделить отдельно).

Итак, вы обнаружили, что ваш ребенок плохо считает в пределах 10. Тогда нужна специальная совместная работа, опирающаяся на описанные ранее принципы. В результате ребенок должен не только научиться считать лучше, но и приобрести первые навыки коллективного исследования. Однако, как показывает практика, большинство детей достаточно хорошо осваивают счет в пределах 10 (за исключением детей с задержкой психического развития, о них нужно говорить отдельно). Значит, область ваших совместных исследований сужается до случаев перехода через 10.

Теперь предложите ребенку самому дополнить столбик с трудными примерами. До того примеры называли вы, а он лишь фиксировал их вслух. Теперь спросите у своего школьника: все ли трудные случаи он назвал? Конечно, не все. Как же так сделать, чтобы не пропустить ни одного и не повторить один и тот же дважды (например, 5 + 7 и 7 + 5), помня о переместительном законе (свойстве) сложения? И опять, совместно обсуждая вставшую перед вами задачу, вы должны подтолкнуть ребенка к упорядоченной записи трудных примеров.

Логичнее начинать складывать с самым большим однозначным числом (9) все однозначные числа, чтобы сумма была равна или больше 10 (ответы при этом писать не надо).

9 + 1	8 + 2	7 + 3	6 + 4	5 + 5
9 + 2	8 + 3	7 + 4	6 + 5	
9 + 3	8 + 4	7 + 5	6 + 6	
9 + 4	8 + 5	7 + 6		
9 + 5	8 + 6	7 + 7		
9 + 6	8 + 7			
9 + 7	8 + 8			
9 + 8				
9 + 9				

Итак, мы записали все трудные случаи, не пропустив ни одного и не повторив один и тот же пример дважды.

Не забывайте при этом делать вид, что вы что-то опять не помните или не понимаете: «А почему таблица сложения 8 (7, 6) короче? Почему ты не записал 8 + 9, 7 + 8, 7 + 9?» и т. п.

Удобнее случаи 9 + 1, 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4, 5 + 5 исключить (стереть, вычеркнуть) из этих столбиков, мотивируя это тем, что их он знает давно (проверьте предварительно, так ли это, и тогда исключайте). Теперь можно приступить к третьему этапу работы.

Спросите: «Что общего у всех чисел, которые будут получаться в ответах? (Обратите внимание: еще нет никаких вычислений!) Какие это будут числа в сравнении с числом 10? Больше или меньше? Числа в ответе будут тоже однозначные?»

В результате вы вместе с ребенком придете к выводу, что в легких примерах сумма однозначных чисел была меньше 10 и, следовательно, тоже является числом однозначным, а в трудных примерах сумма больше (или равна) 10, а значит, является двузначным числом.

Помните! Слова для объяснения дети подбирают свои! Никаких требований к формулировке вывода быть не должно!

Мы сами составили таблицу таким образом, что включили в нее все случаи, где ответ (сумма) будет двузначным числом. Пусть ребенок сделает заготовку для ответов (заготовит место для каждой из двух цифр):

9 + 2 = ..	8 + 3 = ..	7 + 4 = ..	6 + 5 = ..
9 + 3 = ..	8 + 4 = ..	7 + 5 = ..	6 + 6 = ..
9 + 4 = ..	8 + 5 = ..	7 + 6 = ..	
...	...		
9 + 9 = ..	8 + 8 = ..	7 + 7 = ..	

Теперь спросите: как он думает, нельзя ли, ничего не вычисляя (даже если ребенок знает всю таблицу наизусть, такая работа очень полезна, так как носит исследовательский характер), определить и записать хотя бы одну цифру в каждом из этих примеров? Какую? Почему?

Ребенок без труда проставит в разряде десятков цифру 1:

9 + 2 = 1 .	8 + 3 = 1 .	7 + 4 = 1 .	6 + 5 = 1 .
9 + 3 = 1 .	8 + 4 = 1 .	7 + 5 = 1 .	6 + 6 = 1 .
9 + 4 = 1 .	8 + 5 = 1 .	7 + 6 = 1 .	
9 + 5 = 1 .	8 + 6 = 1 .	7 + 7 = 1 .	
9 + 6 = 1 .	8 + 7 = 1 .		
9 + 7 = 1 .	8 + 8 = 1 .		
9 + 8 = 1 .			
9 + 9 = 1 .			

Не забывайте хвалить его за сообразительность, говорите, что вы и сами такого никогда не делали, не замечали, не задумывались и т. п.

Пусть ему будет радостно, пусть ему кажется, что он это придумал сам, ведь вы же ему ничего не объясняли, не подсказывали, вы только задавали ему вопросы. Пусть у ребенка сложится полная иллюзия самостоятельного постижения истины.

И опять задайте вопрос:

«А какие цифры стоят в разряде единиц?»

Сосредоточьтесь снова на первом столбике — на таблице сложения с числом 9. Итак, вы прибавляете к 9 число 2, а в разряде единиц над точкой появляется цифра 1 (9 + 2 = 9 + 1 + + 1 = 10 + 1 = 11), вы прибавляете к 9 число 3, а над точкой — 2, вы прибавляете 4, над точкой — 3 и т. д.

$$\begin{array}{c} -1 \\ 9 + 7 = 16 \end{array}$$

«Что ты заметил? Что тут можно заметить? Я ничего не вижу интересного. А ты? Ты увидел, что в ответе число получается на одну единицу меньше того, которое ты прибавляешь? Здорово! Как я сам это не увидел!»

Ребенок вписывает все числа над точками.

Итак, вы совершили открытие! Если к 9 прибавляешь 7, то в единицах будет 6, а значит, ответ — шестнадцать.

$$\begin{array}{c} -1 \\ 9 + 5 = 14 \end{array}$$

Пять минус один — это четыре, значит, в ответе четырнадцать. Может прозвучать и такое объяснение, но еще лучше, если ребенок скажет, что 4 — это число, предыдущее 5 (число, на 1 меньшее данного, называют предыдущим), значит, чтобы назвать ответ в примере 9 + 8 = 17, надо назвать, число, предыдущее числу 8 (т. е. число 7), и дополнить: ...надцать — семнадцать. А теперь тренируйтесь вволю, играйте с мячиком и без: девять плюс шесть — пятнадцать и т. д.

Убедились, что ваш ребенок способен запомнить таблицу сложения с числом 9? А ведь начиная с вами играть, он этого не мог сделать.

Пробуйте запутать его, называя в другом порядке слагаемые: 7 + 9, 4 + 9, 8 + 9. Не поймался ли он? Поймался?! Разберитесь вместе, что он не учел. Не бойтесь путать его, проверьте осознанность его действий.

Вы думаете, игра закончена? Нет! Она только началась. Вспомните, ведь теперь ребенок должен научить вас. Пусть еще и еще он вам растолкует, как находить ответ в таблице сложения 9, после чего вы непременно должны себя проверить, вернее, он вас. Вы демонстрируете свою не очень высокую сообразительность в этом деле и медленно проговариваете способ, которому он вас научил. Бурно выражаете свою радость по поводу того, что и вы наконец поняли, как находить ответ в таблице 9, а затем...

Внимание!

Не давая ребенку опомниться, опираясь на этот способ, обнаруженный для таблицы 9, «вычисляете», т. е. пишете «залпом», ответы в таблице 8. Вот что у вас должно появиться в дополнение к тем записям, которые есть:

8 + 3 = 12	8 + 6 = 15
8 + 4 = 13	8 + 7 = 16
8 + 5 = 14	8 + 8 = 17

Изобразите радость, удовлетворение своей сообразительностью. Как здорово и быстро вы все поняли и смогли найти все суммы в таблице 8!

Стоп! Давайте разберемся, что произошло. Какая реакция у ребенка? Почему надо все проделать быстро?

Вернитесь к нашим общим рассуждениям. Вспомните: для того, чтобы ребенок осознал открытый им способ действия, необходимо перенести его на изменившиеся условия, и тогда несоответствие открытого для других исходных условий способа дает возможность, с одной стороны, осознать его, а с другой — проанализировать, почему же он сейчас не сработал. Как изменение условий влечет за собой изменение способа действия, сохраняя при этом исходный принцип?

Итак, вы написали быстренько все ответы, ребенок ошеломлен вашей скоростью, а вы просите, чтобы он оценил вас и вашу работу. И тут выясняется, что все ответы неверные. «Как, почему, ведь я так хорошо все понял?» — возмущаетесь вы.

Теперь-то ребенок начинает искать причину. Он обнаружит, что цифра в разряде единиц уже на 2 меньше, чем то число, которое мы прибавляем к 8, т. е.

$$8 + \overset{-2}{3 = 1}1 \qquad 8 + \overset{-2}{4 = 1}2 \qquad 8 + \overset{-2}{5 = 1}3$$

Почему в таблице 9 цифра в разряде единиц меньше на 1, а в таблице 8 — уже на 2? На сколько же цифра в разряде единиц меньше слагаемого в таблице 7? Ребенок говорит, что на 3. Почему? Пусть докажет, как он узнал, где на 1, где на 2, где на 3. Далее вы должны вместе с ребенком прийти к такому объяснению: числу 9 недостает до 10 всего одной единицы, поэтому если мы складываем 9 + 6, то число 6 отдает 9 одну единицу, поэтому в ответе 15, если мы складываем 8 + 6, то 8 уже недостает двух единиц до 10, а значит, 6 отдает 8 уже 2 единицы, значит, остается 4, т. е. в ответе 14. Складываем 7 + 6, не хватает 3 единиц до 10, поэтому 6 отдает 3 единицы. В таблице 6 отдавать уже надо 4, но тут легче не отдавать 4, а опираться на то, что 5 + 5=10, значит, 6 + 5 = 10 + 1 = 11 (добавить 1) и 6 + 6 = 10 + 2 или 11 + 1.

Таким образом, чтобы ребенок овладел знаниями таблицы сложения в случаях перехода через десяток, ему достаточно уметь:

1) называть число, предыдущее данному (поиграйте с ним, когда идете куда-нибудь вместе: один из вас называет любое число, а другой — предыдущее);

2) от любого однозначного числа, большего 2 и 3, вычитать соответственно 2 или 3 единицы (числа 2 и 3). Этим умением тоже можно овладеть играя, мимоходом. «Я умею, — говорите вы, — угадывать число, которое ты задумаешь». Нет такого ребенка, который бы не захотел, чтобы вы продемонстрировали ему свое умение. Тогда вы говорите: «Задумай любое однозначное число больше 2 (или 3). Задумал? Отними от него число 2 (или 3, если вы предлагали задумать число больше 3). Отнял? Говори, сколько у тебя получилось?» Он отвечает, например, 6. «Значит, ты задумал....» Тут сделайте паузу, словно отгадываете, и предупредите его, что сможете отгадать только в том случае, если он не ошибся: «...число 8».

Реакция на это у детей может быть разная: некоторые сразу сообразят, как вы это сделали. Тогда предложите ребенку самому угадывать ваши числа, но тогда можно к задуманному числу прибавлять 2 и сообщать ему ответ, а ему, чтобы угадать, надо будет соответственно отнимать 2.

Другие дети просто восхитятся, и тогда играйте с ними до тех пор (и не только с однозначными числами), пока они не попробуют разгадать ваш секрет. Разберитесь в этом вместе. Такие игры могут быть на все действия с числами.

Таким образом, вы совершили вместе с ребенком увлекательное путешествие и наверняка доставили радость не только ребенку, но и себе. Нельзя, любя своего ребенка, радовать его лишь материальными подарками, покупая что-нибудь вкусненькое, красивенькое. Нельзя лишать ребенка самой дорогой и в то же время самой дешевой радости — радости общения друг с другом.

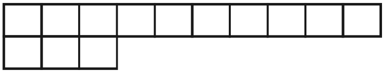
КАК УЧИТЬ ДЕТЕЙ ВЫЧИТАТЬ

Итак, на смену привычному способу обучения детей, когда учитель в классе или родители дома стараются объяснить и помочь заучить ребенку тот или иной материал, приходит совершенно иной способ, о существовании которого не все знают. Его суть заключается в том, чтобы изменить отношения взрослого и ребенка, ничего не навязывая ему, вместе с ним «открывать» то новое, чему он должен научиться. Для этого и ребенок, и взрослый должны стать «исследователями».

В предыдущей статье было описано, как с помощью изучения таблицы сложения (в пределах 20) можно реализовать те идеи, о которых здесь говорилось. Сейчас же мы поможем вам преодолеть трудности в изучении случаев вычитания с переходом через десяток в пределах 20, т. е. рассмотрим наиболее трудные случаи вычитания ($11 - 7$, $12 - 8$, $12 - 7$, $13 - 9$ и т. п.).

В методике обучения математике описаны три основных способа нахождения разности. Рассмотрим их на примере случая $13 - 6$. Первый способ должен опираться на знание ребенком состава числа 13: это 6 и 7, значит, $13 - 6 = 7$ (или $13 - 7 = 6$). Конечно, хорошо было бы, если бы ребенок запомнил состав числа 13 как 6 и 7, 5 и 8, 4 и 9, 3 и 10 и т. д., но ведь, кроме числа 13, надо помнить и состав каждого из чисел от 2 до 20, чтобы безошибочно сказать, что $12 - 8 = 4$, $12 - 7 = 5$, $12 - 9 = 3$ и т. д. Реально ли это? Легко ли это каждому ребенку? Быстро ли запомнит все эти случаи ребенок и нужно ли этого добиваться?

Вот тут-то на помощь приходят два других способа вычитания. Это способы, опирающиеся тоже на состав числа 13, но теперь ребенку нужен только один из вариантов: $13 = 10 + 3$. Для ребенка он легче, ведь это и есть способ образования числа 13 (1 десяток и 3 единицы). Теперь, если изобразить число 13 в таком виде:

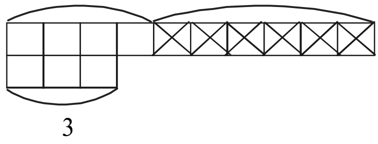


— 1 десяток;
— 3 единицы,

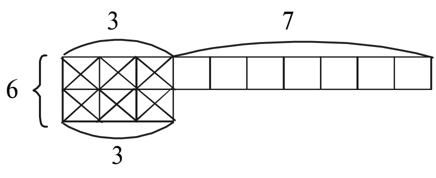
где клеточка — единица счета (мерка), то тогда из 13 вычесть 6 можно двумя способами.

1) Можно эти 6 единиц вычесть (на чертеже — зачеркнуть) из десятка, а оставшиеся 4 сложить с 3, которые вместе с десятком составляли число 13.

$10 - 6 = 4 \qquad 4 + 3 = 7$



2) Можно рассуждать и по-другому: вычитать 6 по частям — сначала 3 единицы (те, которые вместе с 10 образовывали число 13), а затем еще 3, оставшиеся от 6, отнять от 10:



$$13 - \underset{3\quad 3}{\underbrace{6}} = 13 - \underbrace{3 - 3}_{10} = 7$$

Рассмотрим оба способа подробнее, остановимся на достоинствах и недостатках каждого. Начнем с первого.

В записи он будет выглядеть так:

$$13 - 6 = (10 + 3) - 6 = (10 - 6) + 3 = 4 + 3 = 7$$

Но именно выполнение двух разных последовательных действий (сначала вычитания, а потом сложения) дает «сбой» в применении этого способа вычитания в целом. Дети либо путают последовательность действий, либо выполняют последовательно два одинаковых действия: дважды вычитание или дважды сложение. Вычитание из 10 числа 6 предполагает либо знание ребенком состава числа 10, либо умение из 10 вычесть 6 тоже по частям, на которые он сам разбивает число 6, отсчитывая по 1, или по 2, или по 3 единицы. Вот он опять и «увяз», да и вы вместе с ним, пытаясь ему объяснить и помочь. Можно, конечно, каждый раз изображать число, но ведь тем самым ребенок «привязан» к рисунку, а ему нужна опора в самой записи примера 13 − 6.

Теперь рассмотрим другой способ, где 13 − 6 в записи выглядит так:

$$13 - 6 = (13 - 3) - 3 = 10 - 3 = 7$$

Здесь необходимо выполнить две одинаковые операции вычитания, а для этого ребенок должен знать состав числа 6 (все варианты), которое отнимаем, и состав числа 10, чтобы отнимать по частям.

Наблюдается следующая особенность: пока дети пишут «лучики»:

13 − 6 — или — 11 − 7 — и т. д.,
3 3 — 1 6

они меньше делают ошибок, ведь после такой записи достаточно от 10 отнять однозначное число (10 − 3 или 10 − 6), и если ребенок этому научился, то он получит ответ безошибочно. Однако как только следует прекратить записывать промежуточное действие и перевести его в план умственных действий, начинаются ошибки. Ведь ребенок должен при выполнении «в уме» проговорить следующее: «11 − 7, 7 — это 1 и 6, от 11 отниму 1, получу 10, от 10 отниму 6, получу 4». Так вот, пока он от 11 отнимает 1, чтобы получить 10, он забывает второе число 6, которое надо отнять от 10. Кроме того, если для него вычитание из 10 представляет трудность, верный ответ получить еще проблемнее.

Как же быть? Как помочь ребенку? Как превратить изучение этой темы в радость? Как помочь ему стать способным к овладению таким трудным для него действием, не злясь на его «тупость» и неспособность запомнить? На эти вопросы мы и постараемся ответить.

Прежде всего предложите ребенку объяснить, как он собирается от 11 отнимать 7. Он запишет: 11 − 7.
1 6

Тогда предложите от 12 отнять 7. Он покажет: 12 − 7.
2 5

Затем: $14 - 7$ и $15 - 7$.

$4 \quad 3 \qquad\qquad 5 \quad 2$

Теперь задайте ему главный вопрос: «Как ты узнаёшь, где и что писать? Ведь ты каждый раз должен вычитать 7, а пишешь каждый раз по-разному: то 1 и 6, то 2 и 5, то 4 и 3, то 5 и 2. Как это ты узнаёшь? Куда смотришь?» Ребенок должен объяснить вам примерно так: «Если я отнимаю от 11 семь, то 7 — это 1 и 6, так как сначала надо отнимать 1, а если от 12 отнимать 7, то 7 — это 2 и 5».

«Куда же ты смотришь? Обведи в кружок ту цифру в числах 11, 12, 14, 15, на которую ты смотришь». — Вот что у него должно получиться:

$11 - 7 \qquad 12 - 7 \qquad 14 - 7 \qquad 15 - 7$

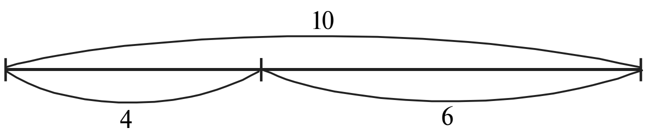
$1 \quad 6 \qquad\quad 2 \quad 5 \qquad\quad 4 \quad 3 \qquad\quad 5 \quad 2$

«Тогда объясни: что в такой записи будет лишнее? Что записано дважды? Вычеркни лишнюю запись».

$11 - 7 \qquad 12 - 7 \qquad 14 - 7 \qquad 15 - 7$

$\cancel{1} \quad 6 \qquad\quad \cancel{2} \quad 5 \qquad\quad \cancel{4} \quad 3 \qquad\quad \cancel{5} \quad 2$

Действительно, в уменьшаемом есть указание на то число, которое является частью числа 7, значит, если от 11 нужно отнять 7, то от 11 отнимем 1 (это записано), а затем от 10 отнимем 6, а $6 = 7 - 1$. Но ведь результат, если отнять от 10 шесть, будет таким же, как если дополнить 6 до 10, т. е. $6 + 4 = 10$, значит, $10 - 6 = 4$:



Тогда последовательность нахождения разности $11 - 7$ будет такова:

1) $7 - 1 = 6$, а это есть в записи, если читать справа налево:

$$11 - 7;$$

$$6$$

2) дополним 6 до 10, получим 4:

$$11 - 7 = 4.$$

6

В «свернутом» виде алгоритм будет проговариваться так: 7 минус 1 — это 6, значит, в ответе 4.

$14 - 9 = 5$ 9 минус 4 — это 5, значит, в ответе 5,

5

$13 - 7 = 6$ 7 минус 3 — это 4, значит, в ответе 6.

4

Здесь практически ничего не надо держать в уме, так как есть опора в самой записи примера и ребенку не нужно в уме проговаривать способ вычитания.

Таким образом, для успешного овладения приемом вычитания в трудных случаях — с переходом через десяток — достаточно уметь выполнять вычитание однозначных чисел и дополнять любое однозначное число до 10. Тогда, надеемся, у вашего ребенка не будет проблем.

Желаем успеха!

Приложение 2

ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Эффективность тщательной работы над формированием у детей действия контроля не только при работе над сложением и вычитанием многозначных чисел, но и при изучении других тем курса математики может быть оценена в конце **второго года** обучения по результатам итоговой контрольной работы.

Контрольная работа № 1

Контрольная работа № 1 предназначена для проверки уровня сформированности действий контроля и оценки у учащихся.

Умение видеть ошибкоопасные места предопределяет формирование навыка и является одним из показателей сформированности указанных действий (контроля и оценки).

Задание 1. Проверь, правильно ли выполнены действия:

1) $\begin{array}{r} 87802 \\ +\ 62527 \\ \hline 150329 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 51982 \\ +\ 78213 \\ \hline 129195 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 385 \\ +\ 178 \\ \hline 562 \end{array}$

4) $\begin{array}{r} 3925 \\ +\ 146 \\ \hline 5385 \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 4291 \\ +\ 1218 \\ \hline 5509 \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 7302 \\ +\ 352 \\ \hline 7050 \end{array}$

7) $\begin{array}{r} 89349 \\ -\ 16473 \\ \hline 72876 \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 1527 \\ -\ 713 \\ \hline 912 \end{array}$ 9) $\begin{array}{r} 2003 \\ -\ 176 \\ \hline 1937 \end{array}$

Покажи (красным цветом), где допущены ошибки, и исправь их.

Запиши, что не знают или не умеют ученики, которые сделали такие ошибки.

Задание 2. Проверь, правильно ли ученики решали уравнения. Вычисли результат там, где можешь:

$x + 3 = 5$ $z - 175 = 624$
$x = 5 - 3$ $z = 624 - 275$

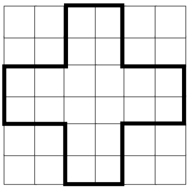
$1251 - y = 629$ $2 + x = 1$
$y = 1251 - 629$ $x = 2 - 1$

$2x - 3 = x + 5 \qquad a - x = b + c$

$x = 3 + 5 \qquad x = a - b - c$

Что ты посоветуешь тому, кто хочет научиться проверять, нет ли ошибок при решении этих и других уравнений?

Задание 3. Построй одну или несколько фигур такой же площади, но другой формы.



Докажи, что у фигуры, которую ты построил, такая же площадь, как и у данной.

Задание 4. Дети решали такие задачи:

Задача 1. «Семья из трех человек отправилась на машине путешествовать. В первый день они проехали a км, во второй — на b км меньше.

Сколько километров они проехали во второй день?»

Задача 2. «Семья из трех человек отправилась на машине путешествовать. В первый день они проехали a км, во второй — на b км меньше.

Сколько километров они проехали за два дня?»

После того как дети записали решение этой задачи, они вместо букв a и b подбирали подходящие числа.

Как ты думаешь, какие из данных пар чисел они могли выбрать?

1) $a = 5$; $b = 2$;
2) $a = 30\,000$; $b = 3000$;
3) $a = 200$; $b = 220$;
4) $a = 426$; $b = 123$;
5) $a = 300$; $b = 100$;
6) $a = 280$; $b = 279$.

Если можешь, реши любую задачу (или обе) устно или письменно и запиши ответ на вопрос задачи.

Инструкция к проведению контрольной работы № 1

Контрольная работа должна быть напечатана на листах так, чтобы ребенок имел возможность не только пометить и исправить найденные им ошибки, но и записать правильное или другое решение.

Задание 1 не только позволит учителю оценить сформированность у ребенка действий контроля и оценки, но и покажет в неявном виде степень овладения знаниями и умениями по теме «Сложение и вычитание многозначных чисел».

Если ученик способен выявить допущенные ошибки, да еще может каким-либо еще способом зафиксировать причины, которые привели к такой ошибке, то это необходимое (хотя и недостаточное) условие того, что при самостоятельном выполнении аналогичных заданий он, прежде чем их выполнять, задумается над тем, какие ошибки возможны, и, мысленно составив план действий, не допустит их у себя. Следующая контрольная работа даст возможность учителю соотнести уровень сформированности действия контроля с уровнем самостоятельного выполнения аналогичных заданий.

Задание 2 предназначено для того, чтобы оценить уровень сформированности понятия отношения частей и целого. Оно дает возможность проверить, на что ориентируется ребенок при решении уравнения.

Для этого детям предлагается 4 уравнения, в которых известные части и целое представлены конкретными числовыми значениями, включая многозначные числа.

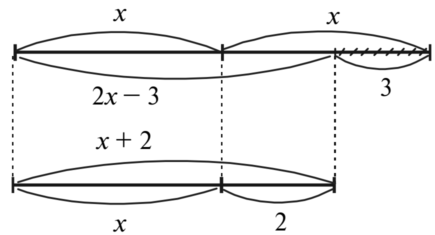
При выборе способа нахождения корня уравнения ребенок может опираться как на связь между частями и целым, так и на конкретные числовые значения.

Для этого предлагается 3 типа уравнений.

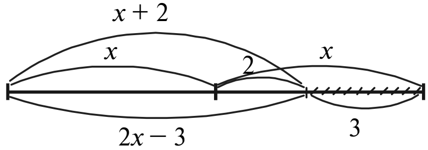
а) Первые четыре уравнения, в отличие от остальных, содержат целое, состоящее только из 2 частей, причем неизвестное — либо часть, либо целое.

Однако, задавая в готовом виде способ нахождения неизвестной величины, можно определить, на что ориентируется ребенок: на конкретные числа, действия с которыми он умеет выполнять, или, не обращая внимания на числа, на отношение между величинами.

б) Уравнение $2x - 3 = x + 5$ является для ребенка совершенно незнакомым. Ему еще ни разу не приходилось иметь дело с подобными уравнениями, в которых неизвестная величина содержится в обеих частях уравнения. Значит, ребенок либо должен отказаться от его оценки, поставив рядом знак «?», а это значит, он фиксирует границу между собственным знанием и незнанием, либо предпринимает попытку нарисовать схему, с помощью которой можно соотнести ее с выбранным им способом действия. Например:



или



$x = 2 + 3$ или $x = 3 + 2$

Но такое решение возможно лишь в том случае, если дети могут самостоятельно соотнести запись $2x$ как $x + x$. Этому их еще не учили.

Возможен, но наименее вероятен вариант, при котором, узнав, что $x = 5$, дети вместо x подставят число 5, получат верное равенство и сделают вывод о том, что уравнение решено верно, но это маловероятно прежде всего потому, что, во-первых, запись $2x$, как уже говорилось, может быть еще не осмыслена как $x + x$, а значит, вычислить, чему равно $2x$, если $x = 5$, ребенок не сможет.

Во-вторых, дети должны ориентироваться на *способ* решения таких уравнений, а не на готовый результат, даже если он известен.

в) Уравнение $a - x = b + c$ предназначено для того, чтобы оценить уровень овладения понятием отношения частей и целого в чистом виде, когда числовые значения не оказывают на ребенка давление от смещения акцентов. Сравнив решение этого уравнения с предыдущими, учитель сможет обнаружить, понимает ребенок способ решения уравнений на основе понятия отношения частей и целого или демонстрирует лишь натренированность на решении конкретных типов уравнений.

Такую ситуацию можно будет зафиксировать в том случае, если решение уравнения $2 + x = 1$ ребенок оценивает как верное наряду с уравнениями $x + 3 = 5$ и $a - x = b + c$.

Отвечая на вопрос в конце задания, ребенок может нарисовать схему и описать отношение между частями и целым в знаковой форме: $\Delta + \Delta = \text{O}$, $\Delta = \text{O} - \Delta$.

Задание 3 выявляет:

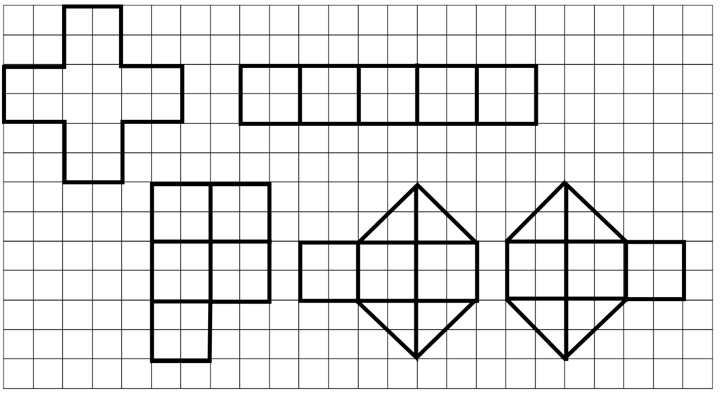
1) наличие у ребенка мыслительной операции сохранения;

2) умение построить величину, равную данной, в ситуации, когда для решения данной задачи необходимо:

а) выбрать удобную мерку, измерить ею данную площадь, а затем по мерке и числу построить фигуру той же площади, но другой формы;

б) разбить данную фигуру на части (равные или неравные, мысленно или натурально) и, изменив положение частей на плоскости, построить равносоставленную фигуру другой формы.

Например:



Высоким уровнем выполнения задания можно считать построение фигуры, состоящей не только из частей-квадратов, но и, например, частей-треугольников.

Задание 4 позволит учителю не только обнаружить умение ребенка решать задачи, но и увидеть, связывает ли ученик выбор числовых значений величин с реальной ситуацией и возможностью выполнения действий, необходимых для ответа на вопрос задачи. Другими словами, речь идет об области допустимых значений букв по отношению к сюжету задачи и к выполнимости арифметических действий, в частности действия вычитания.

Можно предложить детям вычеркнуть те пары чисел a и b, которые подобраны неверно.

Ясно, что останется только две пары чисел $a = 300$, $b = 100$ и $a = 426$ и $b = 123$. Остальные пары не подходят либо из-за нереальности ($a = 5$, $b = 2$, $a = 30000$, $b = 3000$, $a = 280$, $b = 279$), либо из-за невозможности выполнения действия вычитания ($a = 200$, $b = 220$).

Теперь дети сделают свой выбор и вычислят либо при $a = 300$, $b = 100$, либо при $a = 426$, $b = 123$.

Оценивать уровень выполнения как высокий можно будет в том случае, если ребенок выбрал вторую задачу и указанные пары чисел.

Контрольная работа № 2

Контрольная работа № 2 предназначена для проверки уровня усвоения изученного материала и сформированности оценочной самостоятельности. Очевидно, что на данном этапе дети еще не могут достичь полной оценочной самостоятельности, оценки границ своих знаний и умений, но проверить состояние умения оценивать свои достижения необходимо. Для этого в каждый набор заданий включены так называемые задания с «ловушками». К ним на данном этапе обучения относятся как задания с недостающими данными (например, см. набор 2, задачи 2 и 3), так и задания, способы работы над которыми не рассматривались (например, набор 1, уравнения 5 и 7. Эти задания носят олимпиадный характер), но которые могут быть выполнены детьми, имеющими незаурядные математические способности.

1) Выбери из каждого **набора заданий** только те, которые сможешь решить. Реши их.

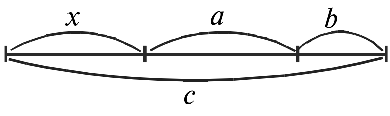
2) Из оставшихся заданий выбери и отметь буквой «Т» те задания, которые кажутся тебе трудными, а буквой «Н» — те, которые, по-твоему, вообще невозможно выполнить.

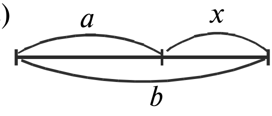
Набор 1

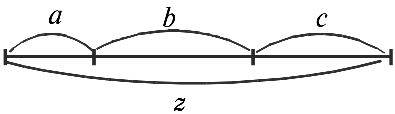
Задание 1. Реши уравнения:

1) $x + 7 = 10$	6) $a - x = b$
2) $x - 275 = 326$	7) $1 - x = 6$
3) $5236 - x = 1972$	8) $y + 124 = 500$
4) $92367 + z = 260891$	9) $3864 = x - 4651$
5) $2x - 5 = x$	10) $x - \square = \nabla$

Задание 2. По схеме составь уравнения:

1) 

2) 

3) 

Набор 2

Реши задачи, а затем вместо букв подбери подходящие числа и ответь на вопрос задачи.

Задача 1. В классе было *a* девочек, а мальчиков — на *b* больше. Сколько детей училось в классе?

Вместо *a* и *b* подбери подходящие числа и ответь на вопрос задачи.

Задача 2. В двух вазах стояли цветы. В первой вазе было на 3 цветка больше, чем во второй. Сколько цветов стояло во второй вазе?

Задача 3. На трех полках стояли книги. На первой полке стояло *a* книг, на второй — на *b* книг меньше, чем на первой. Сколько всего книг стояло на полках?

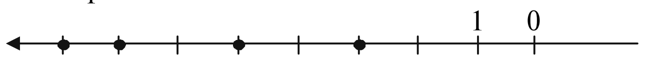
Задача 4. На двух полках стояло книг поровну. С первой полки на вторую переставили 10 книг. На какой полке теперь книг больше и на сколько?

Набор 3

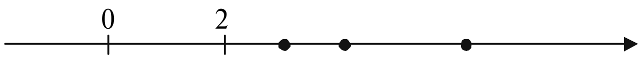
Задание 1. Начерти числовую прямую и отметь на ней числа 2, 4, 5.

Задание 2. Определи, какие числа «живут» в указанных точках на числовых прямых.

а)



б)



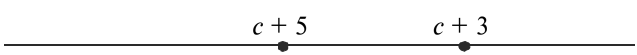
Задание 3. Определи направление числовой прямой и поставь стрелку, если известно следующее:

а)

б)

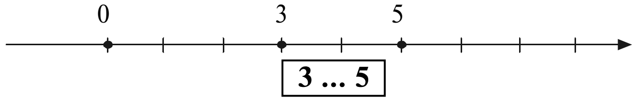
в)

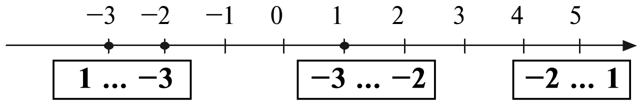
г)

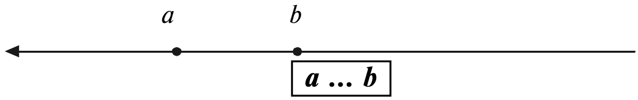


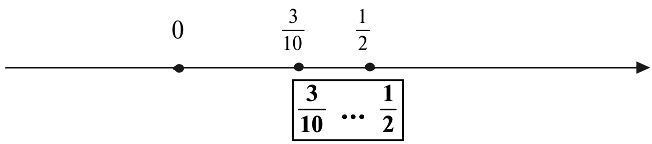
Задание 4. Ученикам 6 класса нужно было сравнить данные числа с помощью числовой прямой, на которой было показано их место.

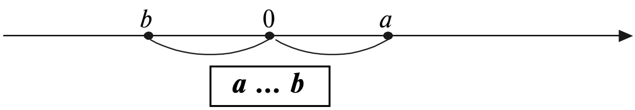
Если можешь, поставь между ними знаки «>», «<» или «=».

а)


б)


в)


г)


д)


Набор 4

Задание 1. Сравни числа:

983 и 1001 — 19990 и 19090

352_6 и 400_6 — 1000_3 и 222_3

11_9 и 11_6 — 21_4 и 100_3

371 и 137 — 114_3 и 121_3

Задание 2. Выполни действия.

1) $3725_8 + 6103_8$

2) $21101_3 + 10012_3$

3) $10287 - 9169$

4) $1010_2 - 101_2$

5) $50421_6 - 10235_6$

6) $80275 + 93863$

7) $8325 + 693$

8) $2102_4 - 104_5$

9) $2000 - 1372$

Задание 3. Реши задачи.

1) Даша за день съела 100_2 яблок, а маленький Саша — на 10_2 меньше.

Сколько всего яблок съели дети за день?

Запиши ответ в двоичной системе счисления и, если сможешь, в десятичной.

2) У Оли было 111_2 видеокассет с мультиками и 11_2 видеокассет с детскими кинофильмами.

Сколько всего видеокассет было у Оли?

Запиши ответ в двоичной системе счисления и, если сможешь, в десятичной.

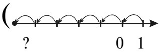
Инструкция к проведению контрольной работы № 2

Выполнять контрольную работу № 2 необходимо в два или три приема (в зависимости от темпа детей), а значит, наборы заданий и задания в них должны быть напечатаны на листах так, чтобы ими было удобно пользоваться.

Дадим краткую характеристику каждого набора заданий.

Набор 1. В этот набор включены простые уравнения (задание 1), компонентами которых являются как числа, так и буквы.

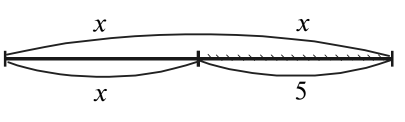
Среди данных уравнений особо обратите внимание на уравнения $1 - x = 6$ и $2x - 5 = x$, которые могут быть оценены детьми как задания с «ловушками».

Так, решение первого уравнения $x = 1 - 6$ требует вычитания из меньшего числа большего, чего дети делать не умеют. Тут интересно посмотреть, в каком виде будет записано решение: $x = 1 - 6$ — или показано место этого числа на числовой прямой (

) без обозначения этого числа.

Любой из приведенных ответов может быть оценен как верное решение.

Второе уравнение ($2x - 5 = x$) также может быть решено при условии, что за записью $2x$, которой дети на данном этапе не владеют, ребенок увидит $x + x$ и построит схему:



Опираясь на схему, ученик может записать $x = 5$. Однако оценка данного уравнения как уравнения с «ловушкой» вполне удовлетворительна.

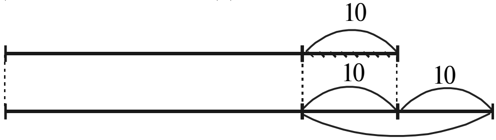
Для положительного оценивания знаний, умений и навыков ребенка достаточно решенных одного-двух уравнений и одной задачи из первого набора (задание 2).

Набор 2 включает в себя задания с «ловушками» иного типа, чем в наборе 1.

Задачи 2 и 3 — задачи с недостающими данными. Значение таких задач в контрольной работе многократно описывалось, остается лишь заметить, что если в классе найдутся дети, которые самостоятельно доопределят задачу или позовут учителя и попросят его уточнить условие, то это следует оценить как высокий уровень выполнения данного задания.

Задача 4 внешне похожа на задачи с недостающими данными, однако может быть решена при условии построения схемы. Важно посмотреть, будет ли ребенок опираться на графическую модель при решении такой задачи. Форма записи ответа значения не имеет.

Схема к задаче может выглядеть так:



Для положительной оценки (низкий уровень) достаточно одной решенной задачи.

Набор 3. В данном наборе мы имеем дело как с заданиями разного уровня сложности, так и с недоопределенными заданиями, с заданиями, которые не имеют однозначного решения (задание 3 (в), задание 4 (г)).

Особое место в этом наборе занимает **задание 4**, в котором детям предлагается с помощью числовой прямой сравнить числа, с которыми ребенок не знаком.

Перед выполнением этого задания необходимо сказать детям о том, что в старших классах они будут изучать числа, с которыми пока не знакомы, но о которых, наверное, слышали: отрицательные числа и дробные, а затем предложить сравнить данные числа.

Рассмотрим варианты правильного выполнения этого задания. Возможны два варианта: отказ от сравнения с пометкой «ловушка» и сравнение этих чисел с опорой на известный способ сравнения: из двух чисел на числовой прямой больше то, которое расположено дальше по направлению.

Положительными результатами можно считать выполнение одного (a) или двух (a и b) сравнений.

Набор 4. В данном наборе в **задании 1** встречаются пары чисел, сравнение которых может вызвать отказ: 11_3 и 11_6; 21_4 и 100_3; 114_3 и 121_3. Для сравнения первой пары ребенок мысленно или графически должен представить сравниваемые величины, а для сравнения другой пары величины нужно построить. Сравнение этих пар чисел не является предметом изучения в основном курсе математики, и поэтому интересно проверить, как будет вести себя ребенок по отношению к таким заданиям.

Сравнить третью пару чисел — 114_3 и 121_3 — невозможно, так в троичной системе счисления не существует числа 114_3 (один один четыре в троичной системе счисления). Возможно, найдутся дети, которые напишут, как могло быть записано число, соответствующее той величине, которую измеряли дети и характеризовали числом 114_3. Тот, кто написал такое число, либо забыл, либо не знал, что в троичной системе счисления для записи многозначного числа может быть использованы только цифры 0, 1 и 2, а значит, цифры 4 быть не может. Это задание ребенок также вправе рассматривать как задание с «ловушкой».

Для положительной оценки выполнения данного задания достаточно сравнить числа, данные в десятичной системе счисления.

В **задание 2** включены: 1) примеры на сложение и вычитание чисел в десятичной системе счисления, выполнения которых достаточно для положительного оценивания; 2) примеры на сложение и вычитание в недесятичных системах счисления, выполнение которых даст возможность определить уровень осмысления основного принципа сложения и вычитания многозначных чисел; 3) пример, в котором предлагается сложить два числа, записанные в разных системах счисления. Его дети могут оценить как задание с «ловушкой». Однако если найдутся ученики, которые сделают попытку выполнить действие с числами путем выполнения действия с соответствующими величинами и результат такого действия будет описан числом как результатом измерения этой новой величины с помощью системы мерок, то это можно считать очень высоким уровнем выполнения задания.

В ***задании 3*** нет никаких подвохов с точки зрения способа решения, однако обе задачи содержат: 1) непривычные для ребенка числовые данные, записанные в двоичной системе счисления; 2) предложение записать ответ в десятичной системе счисления, что тоже не входило в программу обучения. Если ребенок сможет, решив задачу, перевести полученное число из двоичной системы счисления в десятичную на основе перемеривания величины-результата, то это нужно рассматривать как высокий уровень выполнения задания.

Для положительного оценивания работы достаточно решения одной задачи, причем основой при оценивании должен быть способ решения, а не вычисления.

НАВИГАТОР ПО ЗАДАНИЯМ УЧЕБНИКА ДЛЯ 2 КЛАССА

Информация для учителя

Все задания, содержащиеся в учебнике, обеспечивают достижение учащимися образовательных результатов, предусмотренных ФГОС НОО. Конкретизировать использование заданий помогут приведенные далее сводные таблицы.

При работе с навигатором надо иметь в виду, что достижение образовательных результатов не ограничивается выполнением отдельных заданий учебника. Такие результаты можно получить только на основе системной работы со всеми учебными и методическими пособиями данного УМК в комплексе.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА «МАТЕМАТИКА» ВО 2 КЛАССЕ

Наиболее значимые задания на обеспечение личностных, метапредметных и предметных образовательных результатов

Задания на обеспечение личностных результатов	Задания на обеспечение метапредметных результатов	Задания на обеспечение предметных результатов
Книга 1: стр. 49–51, 81–82, 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №№: 24, 26–28, 32–37, 41–45, 47, 60–65, 75–81, 92, 98, 114–116, 117, 119–123, 125, 127–131, 134–139, 141–142, 149, 153–158, 164, 177, 182–186, 198, 201, 205–209, 214–218. Рубрика «Это интересно»: стр. 125–127. *Книга 2*: стр. 74 (постановка учебно-практической задачи); №№: 3–7, 19–23, 24–59, 62, 64–88, 97, 98–100, 102–105, 107–108, 111–112, 114–117, 119–135, 138, 146–	*Книга 1*: №№: 1–6, 10–11, 27–35, 43–49, 60–74, 77–82, 92, 94, 96, 98, 100, 114–117, 119–130, 135–137, 139, 141–144, 153–158, 211, 214–218, 220, 222, 226. Рубрика «Проверь себя»: стр. 114, 157–159. *Книга 2:* №№: 1–7, 12, 19–20, 23–54, 55–59, 62–88, 93–94, 98–108, 11–128, 129–131, 133–135, 138, 144–148, 151–155, 157–159, 163, 167–170, 173–175, 180, 182, 187–189, 190–197, 199–216, 218, 223, 225. Рубрика «Проверь себя»: стр. 149–155.	*Книга 1*: №№: 1–27, 32–35, 38, 44–49, 50–55, 58–63, 65–79, 80–89, 91, 92, 94–109, 1–14 (стр. 74—79), 114–133, 135–138, 141–146, 149, 151, 153–157, 160, 165, 170, 175, 178–181, 182–188, 190–197, 200–207, 210–213, 214–225, 229–232. Рубрика «Это интересно»: стр. 125–127. *Книга 2:* №№: 1–11, 14–17, 1–7 (стр. 15–17), 24, 54–57, 63–79, 84, 88–101, 103, 109, 119–127, 140, 143, 145, 151–155, 157, 160–163, 165–179, 184, 190–200, 203–216, 219, 224, 1–8

148, 151–155, 157, 162–164, 166–168, 170, 180, 182, 187, 189, 195–196, 200–210, 217–218, 223–225.		(стр. 132–134), 229, 230, 234–235, 244, 252, 263–265, 267, 279, 280, 282.

1. Задания на достижение личностных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Развитие самостоятельности и личной ответственности: • умение понимать и принимать точку зрения другого человека и аргументировать собственную; • способность слушать и слышать собеседника, готовность прийти на помощь в совместной деятельности. • адекватно оценивать свои возможности при решении поставленных учебно-практических задач; • умение в коммуникации осуществлять постановку новых целей и задач (в пределах своих возможностей); • умение принимать на себя ответственность за организацию совместной деятельности; • развитие навыков сотрудничества со взрослыми и сверстниками.	*Книга 1*: стр. 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №:1–6, 7–9, 11, 13, 15–16, 19–23, 27, 30–36, 40, 41, 43–49, 60–66, 72–93, 96, 98, 100, 105, 107, 109, 111, 2 (стр. 74), 5 (стр. 75), 116, 117, 119, 121–123, 125–127, 129–137, 141–146, 149, 153–158, 160, 166, 177, 179, 180–181, 5 (стр. 130), 182–187, 190–199, 201–203, 206–207, 209–212, 214–218, 226, 229–230. *Книга 2:* №№: 1–7, 9, 12–16, 18–20, 22, 1–3 (стр. 15), 24–79, 82–89, 92–94, 97–131, 133–135, 138, 146–156, 158–160, 162–163, 166–168, 170, 171, 174–176, 180, 182, 186–189, 190–218, 220–225. Рубрика «Проверь себя»: стр. 149–155.

Принятие и освоение социальной роли ученика: • формирование мотивации к обучению и познанию; • готовность учиться на базовом и высоком уровне на основе учебно-познавательных мотивов (в пределах своих возможностей); • готовность активно осваивать новое содержание, открывать новые способы решения учебно-практических задач (в пределах своих возможностей); • готовность к саморефлексии причин успешности / неуспешности в своей учебной деятельности.	*Книга 1:* стр. 49–51, 81–82, 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–6, 7–9, 11–16, 18–21, 27, 28, 30–36, 38–48, 64–75, 77–85, 100–106, 109, 111, 7 (стр. 76), 9 (стр. 77), 114–117, 119–139, 141–146, 151, 153–159, 160, 162, 166, 168, 175–177, 5 (стр. 130), 182–195, 198–204, 218–219. Рубрика «Проверь себя»: стр. 114. Рубрика «Это интересно»: стр. 125–127, 170–175. *Книга 2:* №№: 1–20, 23, 1–2 (стр. 15), 24–87, 92, 7–9 (стр. 66–68), 14–16 (стр. 69–70), 4 (стр. 71), 98–131, 133, 134, 138, 141, 144, 146–156, 158–159, 165–168, 170, 173– 174, 180, 186–282. Рубрика «Проверь себя»: стр. 149–155.
Формирование эстетических потребностей, ценностей и чувств: • готовность к самореализации (выражения себя) в различных видах творческой и проектной деятельности.	*Книга 1*: стр. 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №№: 10, 13, 14, 17, 18, 24, 26, 30, 42, 44–48, 60–65, 67–72, 74, 78–79, 81, 84, 109, 111, 7 (стр. 76), 120, 122–126, 130–132, 136, 139, 141–144, 153–159, 160, 162, 176–177, 179–181, 5 (стр. 130), 182–207, 210–213, 1–6 (стр. 157–159), 214, 215, 218, 226–227.

	Книга2: №№:3–10, 12–14, 19–23, 24–88, 92–94, 97–131, 133, 138, 146–156, 167–168, 170, 175, 180, 187–189, 190–196, 198–200, 210–221, 223–225, 226–282. Рубрика «Проверь себя»: стр. 149–155.

2. Задания на достижение метапредметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Основные группы познавательных результатов	
Учебно-логические универсальные действия: • овладение логическими действиями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, классификации по родовидовым признакам, установления аналогий и причинно–следственных связей, построения рассуждений, отнесения к известным понятиям; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности проводить сравнение и классификацию способов решения задач по самостоятельно выбранным основаниям и критериям; • формирование компетентности решения учебно-практических	*Книга 1:* стр. 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–6, 7–23, 27–54, 66–74, 75–112, 114–166, 173–175, 178–180, 182–232. *Книга 2:* №№:1–9, 12–22, 1–4 (стр. 15), 5 (стр. 16), 1–4 (стр. 65), 6 (стр. 65), 24–225.

задач на основе способности схематизации и моделирования; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности выделять в процессе анализа задачи требование и условие; • овладение базовыми предметными и межпредметными понятиями, отражающими существенные связи и отношения между объектами и процессами.	
Учебно-информационные универсальные действия: • способность к кодированию и декодированию информации; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности записывать, фиксировать полученную из разных источников существенную и несущественную информацию, в том числе с помощью инструментов ИКТ.	*Книга 1*: №№:1–20, 22–23, 28–29, 31–49, 55–65, 71–73, 75–81, 83, 90, 92–112, 114–116, 119, 132–138, 141–142, 146, 154, 181, 192, 207, 210–212, 1–6 (стр. 157–159), 214–216, 218–219, 223, 229–232. Рубрика «Это интересно»: стр. 47–48. *Книга 2:* №№:1 (стр. 15), 5 (стр. 16), 7 (стр. 17), 90, 92, 94, 96, 9 (стр. 67), 15 (стр. 69), 133–134, 145–146, 157, 160, 162, 169 (2), 189 (2), 215, 228, 230, 235, 241, 252, 254, 263, 271.
Универсальные учебные действия решения задач: • формирование умения переводить проблему в задачу и находить	*Книга 1:* стр. 81–82, 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–12, 15,

наиболее эффективные способы ее решения; • формирование умения определять и формулировать проблему в своей учебной деятельности при решении учебно-практической задачи и построении нового способа решения задачи; • формирование умения произвольно и осознанно владеть общими способами решения учебно-практических задач; • формирование умения решать учебно-практические задачи по освоенному способу; • формирование умения выбирать наиболее эффективные способы решения учебно-практических задач; • формирование умения понимать причины успеха/неуспеха учебной деятельности и способности конструктивно действовать даже в ситуациях неуспеха; • формирование умения понимать, что причина неудач при решении учебно-практических задач может находиться в неправильно осуществленных учебных действиях.	17–18, 21–23, 27–29, 31–38, 43–45, 49–61, 74–75, 80–89, 91–92, 94, 96–97, 101–105, 107, 109, 111, 114, 116, 117, 119–124, 130–132, 134–139, 141–142, 151, 154–157, 160–162, 165–166, 169, 173, 175, 177, 178–181, 182–232. *Книга 2:* №№: 24–97, 98–225. Рубрика «Проверь себя»: стр. 71, 149.
Основные группы коммуникативных результатов	
Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на передачу информации другим людям: • формирование умения слушать собеседника, задавать простые вопросы в процессе диалога;	*Книга 1:* стр. 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–6, 7, 11, 13, 15, 16, 19–23, 27, 30–36–45, 47–54, 59–61, 64–65, 68–69, 74–77,

• формирование умения задавать вопросы в процессе диалога, необходимые для организации совместной деятельности и сотрудничества с партнерами при решении учебно-практических задач; • овладение навыками смыслового чтения текстов задач; • формирование умения строить понятное для партнера по диалогу простое монологическое высказывание. Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на учет позиции собеседника, партнера по деятельности: • формирование умения допускать возможность различных точек зрения, в том числе не совпадающих с его собственной, и ориентироваться на позицию партнера в общении и взаимодействии; • формирование умения формулировать собственное мнение и позицию; • формирование умения понимать относительность мнений и подходов к решению проблемы, договариваться и приходить к общему решению в совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов при решении учебно-практических задач. Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на кооперацию и сотрудничество: • умение определять общую цель и путь ее достижения; умение договариваться о распределении	80–85, 90–97, 101, 104, 106–107, 109, 111, 114, 117, 119, 121–127, 131–132, 134–137, 139, 141–142, 146, 149, 153–160, 162, 164, 166, 168, 175, 176 (3, 4), 179, 180–181, 5 (стр. 130), 182, 213, 215–222, 224, 226, 229–232. *Книга 2:* №№:1–10, 12–16, 18–21, 23–32, 35–39, 40–53, 55–58, 61–88, 92–97, 7–9(стр. 66–68), 98–141, 143–144, 146–158, 162–168, 170–171, 174–178, 180–182, 186–189, 190–218, 220–223, 225–282.

функций и ролей в совместной деятельности; • формирование умения осуществлять взаимный контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь; • формирование умения различать цель, способ и результат действия и передавать эти различения в диалоге с партнерами при решении учебно-практических задач; • формирование умения кооперировать деятельность других людей, т.е. согласовывать усилия по достижению общей цели при решении учебно-практических задач.	
Основные группы регулятивных результатов	
Регулятивные универсальные учебные действия целеполагания: • формирование умения принимать цель учебно-практической задачи и сохранять ее при выполнении учебных действий.	*Книга 1:* стр. 49–51, 81–82, 132–133 (постановка учебно-практической задачи); №№:1–6, 10–11, 14, 15, 17–21, 23–26, 27–28, 30–35, 44–48, 59–65, 67–71, 75, 77, 85, 91–92, 94, 98, 100, 114, 116–127, 129, 131–132, 136, 139, 141–142, 158–160, 182–184, 186–194, 198–204, 207, 209–213, 218, 219. *Книга 2:* стр. 19–20, 74–75 (постановка учебно-практической задачи); №№:1–4, 14, 24–30, 49–73, 82, 98–100, 117,

	119–123, 133–134, 138, 143–146, 148, 150, 156, 158, 164, 167, 172, 176, 178, 180, 187, 189, 190–203, 206–211, 214–218, 220, 225, 1–8 (стр. 132–133).
Регулятивные универсальные учебные действия планирования: • формирование умения планировать собственные действия при решении учебно-практической задачи; • формирование умения следовать установленному плану нахождения способа решения задачи.	*Книга 1*: №№: 1–6, 9–11, 15–22, 25–26, 32–33, 39, 41, 44–48, 60–64, 77, 83, 84, 86–91, 100, 102, 116, 119, 122, 124, 126, 129, 134, 135, 142, 153–156, 158, 160, 175, 180, 182–187, 189–192, 193–205, 3–3 (стр. 155), 214, 215, 220, 223. *Книга 2:* №№: 1–4, 23, 32–35, 49, 50, 53, 62–66, 68–71, 75, 77, 80–83, 86–88, 98–100, 104, 108, 109–111, 115, 123–126, 132, 136, 138, 143, 148, 149, 151–154, 157–158, 164–168, 170, 172, 176, 178, 180, 187–189, 190–203, 205–215, 218, 221, 225.
Регулятивные универсальные учебные действия контроля и коррекции: • формирование умения осуществлять пошаговый и итоговый контроль по результату решения задачи, самостоятельно обнаруживать	*Книга 1:* №№:1–6, 12, 14, 15, 17–22, 24, 32, 34, 42–47, 55–58, 60–65, 67, 73, 80, 82, 83, 86–89, 91–92, 96, 101, 106–112, 121–122, 125, 127, 130, 132, 134–137,

ошибки и вносить коррективы при решении учебно-практической задачи; • формирование умения следовать установленным правилам контроля и успешно использовать их в процессе решения задач, не допуская ошибок.	146, 151, 157, 181, 1–5 (стр. 128–130), 185,187, 189, 190, 192, 193–194, 197, 198, 200, 202–203, 206, 208, 216, 217. *Книга 2:* №№: 5—7, 9, 19–20, 30–48, 50–52, 55–61, 67, 70–79, 84, 101–103, 105–107, 109–118, 127–131, 133–135, 141, 149, 151, 153–155, 157–162, 166, 170, 173, 174, 182, 189–193, 205–214.
Регулятивные универсальные учебные действия оценки: • формирование умения, используя результаты контроля и оценки, вносить необходимые коррективы в решение учебно-практической задачи; • формирование умения адекватно воспринимать предложения и оценку учителей, товарищей, родителей и других людей.	*Книга 1:* №№: 1–6, 7–8, 12, 16, 19–24, 32–34, 43–46, 48, 60–61, 64–74, 77, 80, 82, 83, 86–89, 91–92, 96, 101, 106–112, 119, 121–122, 125, 127, 129–132, 134–137, 139, 141–144, 146, 1–5 (стр. 128–130), 183–187, 189, 192–193, 197–198, 206, 208, 216–217, 226. Рубрика «Проверь себя»: стр. 114. *Книга 2:* №№: 4, 6–7, 9, 30–48, 50–52, 55, 57–61, 63, 65, 69, 71–74, 76–79, 84, 101–103, 105–107, 109, 111–118, 127–131, 133–135, 138, 151, 153, 155, 157–163, 166–167, 170–171, 173–174,

	182, 186, 189–193, 204–214, 215–217, 221, 223, 224, Рубрика «Проверь се-бя»: стр. 149–155.

3. Задания на достижение предметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Понятие числа: • уметь пользоваться понятием числа как универсальным средством сравнения величин при переходе от непосредственного сравнения к опосредованному; • уметь решать задачи на измерение, отмеривание и нахождение удобной мерки; • уметь чертить с помощью линейки отрезок данной длины и измерять длину отрезка; • уметь читать диаграммы, анализировать их и использовать при решении задач.	*Книга 1:* №№: 17, 18, 19–30, 36–39, 43–65, 74–85–113, 114 (стр. 74–79), 224–230. *Книга 2:* №№: 7–9 (стр. 67–68), 15–16 (стр. 69–70).
Сложение и вычитание чисел с опорой на числовую прямую и без нее: • владеть принципом образования последующего и предыдущего чисел на числовой прямой; • уметь строить графические модели (схемы, диаграммы) отношений между величинами при решении текстовых задач с буквенными и	*Книга 1:* №№: 1–6, 98–107, 114–163, 165–174, 177–181, 1–9 (стр. 123–124), 1–4 (стр. 125–127), 1–5 (128–130), 1–3 (стр. 131), 227–230. *Книга 2:* №№: 6–7 (стр. 16–17), 85–97, 1–21 (стр. 65–70), 1–9 (стр. 71–73), 134–137,

числовыми данными с опорой на понятия «целого и части» и «разностное сравнение величин»; • уметь исследовать зависимость решения задачи от ее условия, зафиксированного в схеме; • уметь сравнивать разные способы вычислений и выбирать рациональные способы действий с опорой на графическую модель (схему); • уметь находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению.	142–143, 145–148, 155–158, 160–189, 194–225, 1–8 (стр. 132–134).
Многозначные числа: • уметь записывать результат измерения системой мерок; называть первые четыре разряда в десятичной системе счисления;	*Книга 1:* №№: 183–226. *Книга 2:* №№: 1–4, 10, 13, 17, 23–26, 98.
• уметь сравнивать числа, группировать их по заданному или самостоятельно установленному правилу; • уметь складывать и вычитать многозначные числа в различных системах счисления, в том числе в десятичной, опираясь на таблицу сложения однозначных чисел и соответствующие ему табличные случаи вычитания; • уметь прогнозировать результат вычисления, пошагово контролируя правильность и полноту выполнения действий с опорой на составленный совместно с другими детьми справочник ошибок;	*Книга 2:* №№: 1–23, 1–7 (стр. 15–17), 24–87, 98–133, 138–139, 141, 144, 149, 151–154, 158–159, 172–175, 177, 178, 180, 182–184, 186–189, 1 (стр. 113), 193–214, 216–223, 1–8 (стр. 132–134), 228–231, 235–237, 244–246, 252, 263–265, 271–272.

• уметь делать оценку и прикидку будущего результата; • уметь пользоваться калькулятором для проверки в том случае, если ученик сомневается в правильности вычислений;	
• владеть принципом образования многозначных чисел в любой системе счисления;	*Книга 1:* №№: 201–225 *Книга 2:* №№: 1–7, 10–13, 17, 23–26, 28, 29, 98, 119, 121, 123–126.
• владеть общим принципом выполнения любого арифметического действия на примере сложения и вычитания любых многозначных чисел в десятичной системе счисления.	*Книга 2:* №№: 27, 71, 82–84, 86, 98–119, 121–129

Приложение 4

ПРОГРАММА

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В основу новых Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) положен культурно-исторический системно-деятельностный подход (Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов и их ученики и последователи), согласно которому содержание образования проектирует определенный тип мышления. Ориентация на развитие теоретического типа мышления предполагает построение учебных предметов как систему научных понятий, усвоение которых напрямую зависит от формирования учебной деятельности и организации учебных действий ребенка.

В концепции образовательных стандартов подчеркивается, что обучение осуществляет свою ведущую роль в умственном развитии прежде всего через содержание, которое в свою очередь определяет методы, формы организации и общения детей, характер дидактических материалов и другие стороны учебного процесса.

Данная программа по математике и соответствующий ей УМК изначально были ориентированы на деятельностный подход в обучении (теоретические положения этой научной школы легли в основу ФГОС нового поколения). Это означает, что они позволят реализовать цели и задачи ФГОС, поскольку ориентированы как на достижение предметных, личностных и метапредметных результатов, так и (как следствие) на формирование разных компетенций младших школьников, опираясь при этом на исторический подход при изучении основного математического понятия — понятия числа.

Содержание курса математики представлено целостной системой специальных (ключевых) учебно-практических задач, с которых и начинается всякая новая тема, а не набором заданий развивающего характера. Итогом решения учебных задач являются прежде всего обобщенные способы действий, позволяющие формировать у ребенка универсальные учебные действия (УУД), а новые знания, задаваемые как основания детского умения, становятся качественно иными (формирование навыков при таком подходе становится не целью, а одним из средств для овладения УУД). Условия решения таких задач либо воссоздают ситуации, в которых зарождалось исторически то или иное понятие (к примеру, понятие числа), либо задают реальные жизненные ситуации (к примеру, введение смысла умножения). Такой подход, по замыслу разработчиков ФГОС, даст возможность получить метапредметные результаты. Более того, решение подобных задач с неизбежностью требует организации коллективно-распределенных форм деятельности, что создает оптимальные условия для получения предметных, метапредметных и, конечно, личностных результатов, а математическое содержание приобретает личностно значимый характер. Именно содержание учебного предмета должно создавать благоприятные условия для развертывания учебной деятельности детей и способствовать интенсивному развитию мышления и мыслительных операций, связанных с ними: анализа, рефлексии и планирования.

Однако конструирование учебной программы не только предполагает отбор содержания, но и требует осознания связи содержания усваиваемых знаний и умений с психическим развитием ребенка.

Ориентация на развитие ребенка предполагает опору на активные методы обучения, формирующие у школьника универсальные учебные действия. Это означает, что знания не должны даваться ему в готовом виде. Они должны быть получены в совместной деятельности с другими детьми и учителем как организатором и соучастником процесса обучения.

Основным математическим понятием, определяющим главное содержание данной программы и всего курса школьной математики в целом, является «действительное число», представленное в начальной школе в виде целого неотрицательного числа.

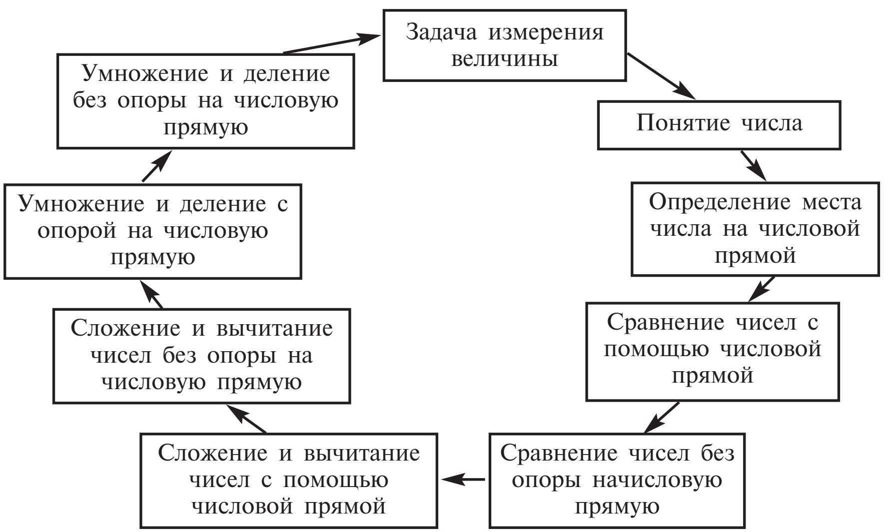
Существуют разные точки зрения относительно изучения этого базового математического понятия в начальной школе. Однако речь идет о построении начального курса математики как части целостного учебного предмета, представленного системой понятий, которые рассматриваются через систему учебных задач. Поэтому становится ясно, что преемственность в обучении требует уже в начальной школе рассматривать основное математическое понятие — понятие числа через понятие величины как системообразующего понятия курса математики. Измерение величин, в отличие от счета предметов, требует организации практических действий, и не в одиночку, а совместно с другими детьми, т. е. в коллективно-распределенной, групповой форме деятельности, вынуждает ребенка общаться, действовать руками, что является основой для развития моторики, коммуникативных умений, расширения познавательных интересов, установления межпредметных связей.

Операцией, специфической для способа измерения величин, является «откладывание» единицы измерения (мерки) на измеряемой величине и счет таких «откладываний». Число в этом случае является характеристикой величины и зависит не только от измеряемой величины, но и от выбранной мерки. Меняя условия, при которых с помощью практических действий решается задача измерения и обратная ей задача построения (воспроизведения) величины посредством «откладывания» мерок (единиц измерения), учащиеся будут «выращивать» различные виды чисел, знакомясь с общепринятыми способами их обозначения. Ориентация на обобщенные способы действий является одной из новых задач ФГОС.

Основным средством, фиксирующим результаты сравнения величин, их сумму и разность, служат различные графические модели: схема, числовая прямая, числовой луч, а начиная со 2 класса вводятся диаграммы, использование которых впервые рекомендовано в начальной школе. Опора на графическую модель, так же как и на знаковую (формулу), позволяет изучить отношения равенства-неравенства, частей и целого, которые служат основой при обучении решению текстовых задач и уравнений. Предлагая уже с первого класса задачи с буквенными данными, мы ставим ученика в ситуацию поиска необходимых сведений (информации), анализа сюжета задачи для подбора «подходящих» чисел, а к 4 классу ученик столкнется с задачами-ловушками, к которым отнесем задачи с лишними данными, с недостающими данными и др. Именно они дают возможность ученику оценить потребность в дополнительной информации, определить ее возможные источники , проанализировать ее. Работа с информацией как раз и отличает новые подходы в обучении не только математике, но и другим предметам, что в итоге дает возможность формировать информационную, а значит, и компьютерную грамотность.

Все понятия, как уже было сказано выше, в том числе и базовые понятия величины и числа, вводятся через учебно-практические задачи. Так, в 1 классе это задачи, в которых необходимо подобрать предмет, обладающий изучаемым свойством, а затем, когда речь пойдет о величине, нужно непосредственно измерить ее соответствующей меркой. Результатом измерения всякий раз будет являться число. Процесс измерения и его результат описываются с помощью графических моделей (схем), в частности числового луча и числовой прямой.

Сравнение, сложение и вычитание величин и чисел, которые их характеризуют, с опорой на числовую прямую служат **общим основанием** к конструированию арифметических действий с любыми числами. Схематично логика изучения понятия числа и действий с ним может быть представлена так:



Изучение каждого вида чисел (а в начальной школе рассматриваются не только однозначные и многозначные числа, принадлежащие множеству целых неотрицательных чисел, но и десятичные дроби, позволяющие ученику осознать общий принцип образования позиционного числа и общий принцип выполнения арифметических действий с ними — принцип поразрядности) в строго определенной логике позволит ученику на более поздних этапах освоения математики самостоятельно проектировать свое продвижение в предмете при условии осознания этой ***общей*** для всех видов чисел логики, существенно повышая мотивацию и интерес ребенка. Представляется, что именно в этом и есть смысл ***преемственности*** содержания и целостности школьного курса математики.

Использование числовой прямой (а не числового луча) в качестве основной графической модели дает возможность заложить общие подходы для изучения арифметических действий по отношению не только к целым неотрицательным числам, хотя именно они являются носителями этих общих способов действий с числами, но и к другим видам чисел.

Так, например, способы сравнения, сложения и вычитания чисел с помощью числовой прямой (точнее, двух числовых прямых) позволяют без проблем ввести аналогичные операции над положительными и отрицательными числами в основной школе (что было опробовано на протяжении ряда лет).

Для знакомства с десятичным принципом образования многозначных чисел дети, как и ранее, обращаются к задаче измерения: сначала они измеряют длину, теперь будут измерять площадь. Измерение и построение величин по частям с помощью системы мерок (длины, площади) дает возможность перейти к табличной форме записи чисел, позволяя сравнивать их между собой без построения самих величин. Замена системы мерок для измерения длины (площади) с произвольной основной (исходной) меркой и постоянным отношением между ними, в том числе с отношением кратным 10, позволяет «оторвать» число от числового значения величины (именованного числа) и рассмотреть многозначные числа как результат измерения величины любой системой мер (и десятичной в частности). Осознав основной принцип образования многозначного числа (в пределах 4 и более разрядов), можно перейти к изучению сложения и вычитания многозначных чисел «столбиком».

Методика обучения действиям с многозначными числами опирается на использование предметных моделей (плоских геометрических фигур) для обнаружения основного принципа выполнения любого арифметического действия — принципа поразрядности. Анализируя этот принцип, нетрудно прийти к выводу: при поразрядном сложении сумма однозначных чисел (табличные случаи) может быть меньше десяти, равна десяти или больше десяти. Оценив сумму, ученик может определить, какие разряды при сложении двух (и более) многозначных чисел «переполняются», а какие нет, может (ничего не вычисляя) узнать, сколько цифр (знаков) получится в сумме, и в завершение может вычислить цифру[37] в каждом разряде. Другими словами, прежде чем выполнить то или другое арифметическое действие, ему необходимо будет сделать оценку и прикидку, чему, как известно, в новых стандартах придается особое значение как важным учебным навыкам. Этому в полной мере отвечает, с нашей точки зрения, методика обучения выполнению арифметических действий.

Таким образом, определять количество цифр в результате действия дети будут не только при делении, как это принято традиционно, но и при вы-

---

[37] Для краткости будем употреблять термин *цифра* вместо *однозначное число, записанное с помощью цифры.*

полнении всех арифметических действий. Общий подход к выполнению любого арифметического действия позволит значительно облегчить формирование прочных вычислительных навыков, поскольку не требует от ребенка постоянной перестройки и запоминания способов, отличающих одни вычисления от других. Подчеркнем, что навыки выполнения письменных вычислений и на их основе приемов устного счета (а не наоборот!) формируются путем анализа операционной структуры каждого арифметического действия, анализа различных способов его выполнения, содержательного анализа ошибкоопасных мест (составление «справочника ошибок»), что делает формирование навыков вычислений не самоцелью, а средством для развития анализа, рефлексии и планирования (в том числе мысленного) как характеристик теоретического типа мышления. Формирование у учащихся нового типа мышления — одна из приоритетных задач, поставленных перед школой ФГОС.

В соответствии с описанным выше подходом к формированию обобщенных способов действий особое внимание уделено месту и последовательности изучения таблиц сложения всех однозначных чисел от 0 до 9 (а не от 1 до 9!), работе над приемами их составления и запоминания. Формирование навыков табличного сложения и вычитания (а потом и табличного умножения и деления) происходит на основе непроизвольного запоминания, которое является результатом (следствием) исследования зависимости между изменяющимся слагаемым и цифрой в разряде единиц у двузначной суммы, которая получается при «переполнении» разряда:

$$9 + \overset{-1}{4} = 13; \quad 8 + \overset{-2}{7} = 15 \quad \text{и т. п.}$$

Конструирование приемов устных вычислений и их обоснование опираются на свойства действия с использованием не только графических моделей, но и предметных.

Для того чтобы смысл одного из важнейших математических понятий — умножения не был подвергнут «ревизии» в основной школе, мы рассматриваем его как особое действие, связанное с переходом в процессе измерения величин к новым меркам (В.В. Давыдов). Становится очевидным, что при таком предметном смысле действия умножения произведение может быть найдено (вычислено) разными способами в зависимости от того, какие числа получились в результате измерений.

Как и при изучении сложения и вычитания, изучение умножения и деления (как обратного действия) строится с опорой на графическую модель (схему) и предметную (используются конструкторы «Лего»). Умение изображать отношения между компонентами действия с помощью схемы позволит ученику описать одно и то же отношение с помощью нескольких формул: $a \cdot b = c$, $c : a = b$, $c : b = a$.

Таким образом, при введении понятия умножения мы движемся не от суммы к произведению (произведение дробных чисел, которое рассматривается в 5—6 классах, в отличие от натуральных не может представлено суммой одинаковых слагаемых, как этому учат в начальной школе, что только усугубляет проблему преемственности с основной школой), а от произведения к сумме, что позволит задать ***общий*** (для всех видов чисел) ***смысл*** действия умножения.

Одной из важнейших учебных задач в данном варианте обучения математике является «конструирование» способа умножения многозначного числа на многозначное, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это традиционно принято.

Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддержания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что снимает необходимость в специальном предварительном заучивании таблиц, а в процессе формирования приемов будут закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Завершается изучение арифметических действий с многозначными числами «конструированием» деления многозначного числа на многозначное, которое требует предварительного освоения новых типов заданий, а затем уже последовательного выполнения следующих операций:

а) нахождения первого неполного делимого по известному делителю (и, наоборот, нахождения возможных делителей при неизвестном неполном делимом), что, как правило, требует «разбиения» разрядов;

б) определения количества цифр в частном по уже известному неполному делимому (и, наоборот, нахождения первого неполного делимого по известному количеству цифр в частном);

в) определения «подсказок»[38];

г) подбора цифр в частном с помощью умножения и опоры на «подсказки» (и, наоборот, восстановления «подсказок» по известной цифре частного), а не на округление делимого и делителя, как это принято. Такой подбор дети выполняют не делением, а умножением, что значительно облегчает задачу определения цифры в частном.

Овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для классификации устных и письменных вычислений.

Для проверки вычислений в тех случаях, когда ученик сомневается, ему предлагается в ряде заданий использовать калькулятор.

Итак, описанный подход к изучению умножения и деления, аналогич-

---

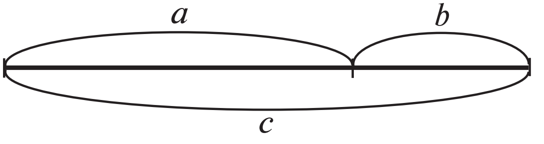
[38] Понятие «подсказка» введено в связи с принципиально новым подходом к обучению обобщенному способу деления любого многозначного числа на любое многозначное число (а не «дозами»: сначала на однозначное, затем на двузначное, трехзначное и т. д.), значительно облегчая подбор цифры и сокращая время такого подбора.

ный подходу к изучению сложения и вычитания, дает возможность значительно упростить методы обучения решению текстовых задач, задавая обобщенный способ работы над задачей (не от действий к выражению, а от выражения к действиям).

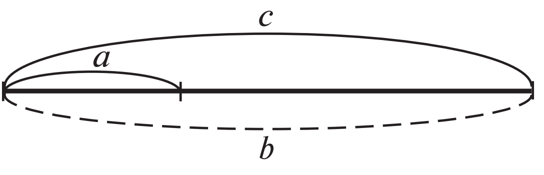
Достаточно научиться изображать отношение «целого и его частей» с помощью схемы в двух ситуациях:

1) если части, из которых составлено целое, неравные, то отношение между ними может быть описано тремя основными формулами: $a + b = c$, $c - a = b$ и $c - b = a$, где a и b — части, а c — целое.

Схема отношения выглядит так:



2) если же все части равные, то отношение между частями и целым может быть описано дополнительными формулами: $a + b = c$; $c : a = b$ и $c : b = a$, где a — часть, b — количество таких частей, c — целое, а схема такого отношения выглядит так:



При решении текстовых задач, уравнений и при нахождении значения выражения учащиеся опираются на изображение отношений с помощью этих двух схем, умения работать с которыми вполне достаточно для поиска неизвестной величины или числа.

Решение текстовых задач сопровождает изучение всех тем, однако углубление представления о задаче, принципов построения текста, способов ее моделирования не только с помощью схемы (или диаграммы), но и краткой записи (в том числе в табличной форме) происходит на заключительном этапе обучения в 4 классе.

Анализ способов моделирования текстовой задачи, преобразования краткой записи (одной из форм которой является таблица) и схемы создает необходимые предпосылки для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения задач путем составления и решения уравнений.

Новый раздел «Работа с информацией» изучается, как и рекомендовано, на основе содержания всех других разделов курса математики, однако наиболее ярко он представлен при обучении решению текстовых задач с буквенными данными, о чем было сказано выше. Это работа и с диаграммами, и с различными таблицами, что позволит использовать учебники не только для изучающих базовый вариант, но и для тех, кто выбрал другие два варианта, в том числе с расширенным разделом, посвященным работе с информацией, поскольку в учебнике представлены задания на построение простейших линейных связок, высказываний.

Возврат в 4 классе к понятиям периметра (длины), площади и объема и способам их вычисления обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию готовых результатов измерения. Такой подход позволяет осмыслить основные принципы, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые. Именно в начальной школе создаются предпосылки для систематического изучения геометрии в средних классах как конкретизация тех основных понятий и принципов, с которыми дети уже работали, изучая свойства объектов трехмерного пространства, что и составляет предмет элементарной геометрии. Таким образом, геометрический материал в рассматриваемой программе не является инородным, он органически включен в общую логику построения курса начиная с 1 класса, что делает его более осмысленным и содержательным и дает возможность учителю использовать учебники при выборе любого из трех вариантов, представленных во ФГОС.

Итак, геометрическая линия рассматривается без отрыва от числовой, являясь основой символического описания **отношений между величинами** и **отношений между числами** как характеристиками величин. Это значит, что различные геометрические фигуры (отрезок, прямоугольник, круг и т. д.) нужно использовать в качестве графических моделей, что дает возможность осознать геометрические формы не только как ***образы предметов*** окружающего мира, но и как ***математические модели***. Происходит перенос свойств одного образа на другой, что является основой для понимания математики, основой метода познания реальной действительности, основой формирования универсальных учебных действий (в том числе формирования ***общего*** умения решать задачи). Именно такие цели сформулированы в концепции ФГОС нового поколения.

Предлагаемое математическое содержание позволяет организовать обучение в форме ***учебно-поисковой деятельности***, которая по своей сути является коллективно-распределенной. Наряду с общей грамотностью она дает возможность ученику приобрести умение разрабатывать и проверять гипотезы (как свои, так и чужие), работать в проектном режиме, проявлять инициативу в принятии решений, выстраивать отношения с одноклассниками, брать на себя те или иные функции и т. п. Это и становится одним из значимых ожидаемых результатов образования и предметом стандартизации, поскольку у детей появляется способность самостоятельно решать встающие перед ними новые задачи, усиливается познавательная активность, создавая предпосылки познавательного развития, формируется умение учиться как компетенция, обеспечивающая овладение новыми компетенциями. Необходимым условием такой деятельности является развертывание учебного диалога, который неизбежно приводит к интенсивному развитию речи, оказывая значимое влияние не только на коммуникативное и личностное развитие ребенка, но и на не менее важное социальное развитие. Решение одной и той же задачи разными группами детей (особенно в первый год обучения) позволяет сопоставить и критически оценить особенности их подходов, что в свою очередь рождает у детей взаимный интерес к работе друг друга.

Общение детей между собой на материале математики обогащает каждого из них, дает возможность самому учителю четко представлять, какие дети в первую очередь нуждаются в коррекции, учит детей работать в едином коллективном ритме, принимать позицию равноправного партнера. Другими словами, необходимо организовать обучение, ориентированное на такое психическое развитие ребенка, которое способствует его психологической готовности к школьному обучению (совершенно очевидно, что среди детей, принятых в первый класс, не все будут психологически готовыми к школьному обучению) и развитие у него универсальных учебных действий.

С первых дней изучения математики от детей требуется работа руками. Так, говоря о длине или ширине полоски, важно, чтобы дети прошлись по ней пальчиком, все действия с предметами должны осуществляться каждым ребенком, а не только выходящим к доске или, что еще хуже, самим учителем. Вся учебно-поисковая деятельность на первом году обучения (как и на последнем) связана с овладением способами сравнения по разным признакам различных предметов, окружающих ребенка, и с измерением величин. Это требует прикладывания одного предмета к другому, перекраивания фигур, переливания, пересыпания, ощупывания, т. е. опоры на все органы чувств. Для этого ребенок использует бумагу, ножницы, пластилин, конструкторы (а затем геометрические инструменты, технические приборы) и т. д., что позволяет интенсивно развивать сенсомоторную координацию, что особенно важно для 6—7- летних учеников.

Материал в учебниках структурирован так, чтобы было удобно и учителю, и родителям тех детей, которые по ряду причин могут пропустить уроки. Каждая тема завершается разделом «Проверь себя», но не менее значимыми являются и разделы «Это интересно» и «Задания на смекалку». Характер заданий, включенных в учебник, их построение и подбор основаны на принципе составления обратной задачи по отношению к данной. Среди этих заданий есть и те, которые дадут возможность учителю диагностировать сформированность у учащихся метапредметных и предметных компетенций. Прежде всего это так называемые задания с ловушками, задания на доопределение условий, на поиск общего в различном, на выбор способов действий и др. Использование различных типов заданий позволяет не только учить ребенка думать, развивать интуицию, воображение, но и включать эмоции, ставить новые исследовательские задачи и создавать атмосферу сотворчества и соразмышления.

Представленный курс математики по своему содержанию построен так, чтобы научить ребенка строить рассуждения, выбирать аргументацию, различать обоснованные и необоснованные суждения, вести поиск информации, уметь решать учебные и практические задачи средствами математики. Все это и составляет умение учиться (учить самого себя). ФГОС определяют умение учиться как основу развития личности, познающей мир через его освоение и преобразование в конструктивном сотрудничестве с другими.

Факторами, определяющими эффективность предлагаемого подхода к обучению математики для реализации целей ФГОС, являются:

1) особенности математического содержания (введение понятия числа как результат практического действия измерения), заданного в контексте решения значимых жизненных задач);

2) логика курса математики, заданная системой учебно-практических задач, выстроенная в соответствии со структурой учебной деятельности и основанная на мотивации, на понимании учеником (а не только учителем!), что и зачем ему нужно знать и уметь, способствует созданию индивидуальной образовательной траектории;

3) подбор специальных новых типов заданий, адекватных новому подходу и представленных в виде целостной системы, которая позволяет ученику освоить универсальные учебные действия, обеспечивающие ему в дальнейшем способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса;

4) использование квазиисследовательского метода в обучении дает возможность не задавать понятия в готовом виде, а создавать условия для самостоятельных открытий, что существенно повышает мотивацию и интерес к учению, имеет неоценимое значение для познавательного развития ученика;

5) организация коллективно-распределенных форм деятельности, являясь основой коммуникативного развития ребенка, придает результатам образования социальную и личностную значимость;

6) система отношений детей между собой и с взрослыми: учителями и родителями, которая не только обеспечивает социализацию ребенка, но и формирует образ мира.

Система учебно-практических (ключевых) задач в курсе математики

1 КЛАСС

1. **Задача на восстановление объекта, обладающего различными свойствами (признаками).**

Решение этой задачи методом подбора объекта позволяет:

а) выделить те признаки, по которым его можно сравнивать с другими объектами;

б) найти различные способы сравнения предметов. Например, при сравнении по длине дети сначала опираются на зрительное восприятие, т. е. сравнивают «на глаз», а затем, когда этот способ не срабатывает, находят другие способы сравнения (наложение или приложение).

Научившись сравнивать различные предметы и геометрические фигуры по длине (ширине и высоте), ребенок попадает в ситуацию, когда этого умения становится недостаточно для сравнения. Например, необходимо подобрать точно такой же круг или многоугольник, у которых ребенок не может обнаружить ставшие привычными длину и ширину. У него возникает необходимость сравнения по другому признаку — ***площади***.

Такой общий подход к появлению новых признаков сравнения предметов позволяет ребенку уже на первых этапах обучения использовать его при решении целого класса частных задач на сравнение, что, в свою очередь, значительно расширяет набор признаков, по которым можно сравнивать предметы. Например, не только по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, форме, цвету, материалу, количеству, но и по углам, расположению на плоскости и в пространстве, по составу частей и даже «по красоте». Сравнение «по красоте» является ключом к формированию каллиграфического навыка. Так, сравнивая уже написанные кем-то цифры, буквы, дети самостоятельно выделяют их основные элементы, анализируют способы их написания и тем самым конструируют образец, что принципиально меняет методику обучения — не от образца к написанию, а от написания к образцу, а от него к написанию.

Действуя с реальными предметами, их признаками (свойствами) и результатами сравнения по заданному признаку, дети выделяют существенные связи и отношения между компонентами действия, выполняя три основных типа заданий:

а) есть предметы, известен признак — необходимо установить результат сравнения;

б) есть предметы, известен результат сравнения — нужно установить, какой признак был выбран;

в) известны признак и результат сравнения — необходимо подобрать соответствующие предметы.

Вариативность этих заданий очевидна, что позволяет учителю в полном объеме контролировать свои действия и по мере необходимости их перестраивать.

2. **Задача на восстановление величины в ситуации, когда подбор величины, равной данной, невозможен и для ее восстановления необходимо изготовить новую величину** (речь, конечно, идет о предмете как носителе величины).

3. **Задача на моделирование отношений равенства-неравенства**, которая решается сначала с помощью предметов, затем копирующего рисунка предметных моделей (полосок), а лишь потом трансформируется в графическое (сначала отрезками, а затем, начиная со 2 класса, линейными, столбчатыми и круговыми диаграммами) и знаковое моделирование (буквенными формулами).

4. **Задача на введение буквенно-знаковых символов.** Введение знаков и букв представляет собой одну из важнейших задач в «дочисловом» периоде. В букве, обозначающей то или иное свойство, но не предмет, обобщаются выделенные отношения равенства-неравенства.

При обозначении величин используются буквы латинского алфавита. Сначала вводятся те буквы, которые совпадают с русскими по написанию и произношению (*A, K, E* и др.), затем те, которые совпадают по написанию, но не совпадают по произношению (*B, P, C* и др.), и лишь затем буквы *R, Q* и др. Буквы *X, У, Z* вводятся для обозначения неизвестной величины.

5. **Задача на введение операций сложения и вычитания величин.** Решение задачи уравнивания величин и изучение способов перехода от неравенства к равенству приводят к необходимости *введения операций сложения и вычитания* величин и изучения их свойств сначала на предметном уровне, затем с опорой на графическую и знаковую модели.

Раннее введение операций сложения и вычитания величин существенно расширяет возможности применения дошкольного опыта ребенка и позволяет на уровне сформированных ранее умений оперировать с числами, подбирая «подходящие» числа вместо букв в формулах, описывающих результаты сравнения и уравнивания величин.

Подбор «подходящих» чисел к формулам, а затем к текстам задач имеет особое значение. Во-первых, дает возможность всем без исключения детям использовать свой дошкольный запас независимо от его объема и сделать тем самым выполнимыми любые предлагаемые учителем задания. Во-вторых, закладывает основы для таких важнейших математических понятий, как область допустимых значений, решение уравнений или выражений с параметрами. В-третьих, помогает детям устанавливать связь, а следовательно, делать «прикидку» того, подходят ли выбранные учениками числа к сюжету задачи и соответствует ли полученный результат тексту решаемой задачи и реальным фактам. Подбор так называемых подходящих чисел к текстовым задачам с буквенными данными относится, как уже было сказано, к разделу «Работа с данными» (из Примерной программы по математике, рекомендуемой Федеральным государственным образовательным стандартом), который в настоящей программе не выделен в отдельную тему, а органично встроен в различные другие разделы, в том числе и в обучение решению текстовых задач. Чтобы заменить буквы числовыми данными, дети должны будут определить возможные источники информации и осуществить поиск соответствующих числовых данных, проанализировать полученные сведения, соотнеся их сначала с сюжетом задачи, а затем с выполнимостью арифметических действий.

Насколько важно сформировать у ребенка умение подставлять в любые буквенные математические выражения числа, настолько необходимо умение выполнять обратные переходы, решая задачу восстановления буквенных выражений по числовым. Это оказывается решающим фактором изучения математики в старших классах, при работе с взаимообратными функциями, со способом нахождения интеграла как задачей по восстановлению первообразной функции по ее производной и т. д.

Уравнивая величины, дети устанавливают разностное отношение между ними, фиксируемое с помощью выражений «больше на», «меньше на», что позволяет приступить к раннему решению текстовых задач, включающих эти отношения.

Схема к задаче появляется «синхронно» с чтением текста: текст читает учитель, структурируя его в соответствии с возможностью изображения заданных величин и отношений между ними. Решение записывается с помощью буквенного ***выражения, равенства*** или ***уравнения***. Числовые значения придумывают дети в соответствии с сюжетом задачи и выполнимостью арифметических действий на основе пока еще дошкольного опыта. Если же текст задачи содержит числовые данные, то дети сначала должны оценить правомерность таких данных, т. е. проверить, подходят ли они по смыслу задачи, затем «восстановить» ее с буквенными данными и составить математическое выражение (а затем уравнение) для ее решения, а потом подставить вместо букв те числовые значения, которые были даны автором.

В дальнейшем способ «синхронного» составления схемы к задаче перестанет срабатывать, что приведет к необходимости искать другие способы моделирования, в том числе в форме краткой записи.

6. **Задача на введение понятия части и целого.** Введение понятия части и целого при решении задачи на воспроизведение величины по ее известным частям позволяет освоить способы построения и решения уравнений и существенно расширить класс решаемых задач. Подбор же «подходящих» к данному отношению чисел даст возможность рассмотреть состав числа (преимущественно однозначного), опираясь опять-таки на дошкольные умения.

Выполняя задания с «ловушками», где часть может оказаться больше, чем целое, или целое составлено без учета частей, дети устанавливают отношения между данными понятиями. Установление связи между сложением и вычитанием величин на основе понятий части и целого позволяет соотнести целое с суммой и уменьшаемым, а части — со слагаемым или вычитаемым и разностью и увидеть, что разные действия: $A + B = C$, $C - A = B$ или $C - B = A$ — характеризуют одно и то же отношение между величинами. Нахождение неизвестного при решении уравнений опирается не на правила, а на отношение между частями и целым, которое представлено в виде графической модели (схемы).

Понятие части и целого позволяет ввести переместительное и сочетательное свойства сложения величин. Порядок выполнения действий над величинами определяется не с помощью правил, а с опорой на схему, что создает предпосылки для установления свойств сложения чисел и порядка выполнения действий при сложении и вычитании чисел.

Таким образом, к концу дочислового периода у учащихся складывается содержательное расчлененное представление о величинах, их свойствах, операциях над ними (сравнение, сложение, вычитание), свойствах этих операций, равенств, неравенств. Формируются умения решать уравнения и задачи в буквенно-знаковой форме, складываются благоприятные предпосылки для формирования у учащихся понятия об области допустимых значений переменных, входящих в математическое выражение, уравнение или текстовую задачу.

Ключевая учебная задача появляется в ситуации, когда освоенные способы непосредственного сравнения предметов по заданному свойству не подходят, что приводит к необходимости **опосредованного сравнения величин**, где в качестве посредника первоначально выступает мерка, равная одной из сравниваемых величин (отчасти этот способ сравнения уже применялся детьми раньше), а затем и число, которое вместе с меркой (сначала меньшей, чем заданная величина) служит средством для воспроизведения такой же величины в другом месте или в другое время.

Задача измерения-отмеривания ставит перед детьми новые вопросы: какие предметы можно использовать в качестве той или иной мерки, а какие нельзя или неудобно, какое из свойств предмета может участвовать при использовании его для измерения. Так, например, ребро кубика можно использовать как мерку длины, а грань — как мерку площади и т. д.

Эта исследовательская задача приводит к ***оценке соотношения между величиной и меркой***, когда мерка либо намного меньше измеряемой величины, что делает ее неудобной — появляются составные мерки, либо больше, а иногда мерка вообще непригодна для измерения (например, для измерения длины окружности мерка, изготовленная из твердого материала, не подходит, так как не может изменять свою форму). Необходимо заметить, что, как правило, для измерения длины используются линейки, изготовленные из дерева, пластмассы или металла, что не дает возможности, например, при введении понятия «радиана» в старших классах «положить» радиус окружности на ее дугу, чтобы получить центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу окружности.

2 КЛАСС

Исследование вопроса о том, ***какие бывают мерки***, завершает изучение понятия величины в 1 классе и приводит к исследованию во 2 классе вопроса о том, ***какие бывают числа***, т. е. как в разное время разные люди записывали и называли числа, которые появились в процессе измерения и служат для построения нужной величины. Таким образом, ***программа 2 класса*** начинается **с измерения-отмеривания** и позволяет рассмотреть ***исторический аспект числа***: от его меточной формы до арабских цифр. Рассматривается устная и письменная нумерация разных народов. Это позволяет развести в сознании ребенка смысл числа как отношения величин и цифры как знака для его обозначения (проводится аналогия между звуком и буквой в русском языке).

Измеряя, отмеривая различные величины, дети приходят к необходимости «изобретения» измерительных приборов со шкалами, а следовательно, и к «изобретению» числовой прямой, числового луча и других числовых линий, которые характеризуются началом отсчета, направлением и единичной (исходной, основной) меркой.

Учащиеся решают **учебно-практические задачи**:

1. **Конструирование числовой прямой.** Процесс построения числовой прямой дает представление об упорядоченном бесконечном ряде чисел, в котором каждое число имеет собственное место, и, таким образом, дает возможность ***использовать порядковый аспект числа*** с опорой на его основные свойства.

2. **Количественный аспект числа** выражается результатом измерения величины меркой того же рода. Исследуется зависимость между величиной, меркой и числом. Теперь число отвечает на вопрос «Сколько мерок E содержится в величине A?», т. е. является характеристикой величины A. Так у учащихся формируется понятие числа. Теперь можно сравнивать величины по их числовым характеристикам без построения самих величин. Это приводит к необходимости выполнения операции сравнения чисел.

3. При **сравнении чисел** с помощью числовой прямой (чем дальше число по направлению, тем оно больше) возникает новая учебная ситуация, при которой ответить на вопрос, какое из двух чисел больше или меньше, легко, а вот на сколько больше (меньше) — путем пересчитывания количества шагов (мерок) между ними — оказывается трудно. На помощь приходит «измерительный» прибор — вторая числовая прямая (линейка).

4. Конструирование **способа сложения и вычитания чисел** (как правило,

в пределах десятка) сначала с помощью двух линеек (принцип логарифмической линейки), затем с помощью двух числовых прямых и, наконец, с помощью одной числовой прямой.

Выбор двух одинаковых линеек для выполнения действий позволяет сформулировать ряд условий:

а) шаги (мерки) на линейках одинаковы;

б) значки (цифры) для обозначения чисел одинаковы;

в) последовательность этих значков одинакова.

Таким образом, при сложении (вычитании) двух чисел, заданных в любой нумерации, ребенок использует две одинаковые линейки с соответствующими цифрами; «манипулируя» ими, он находит (считывает) нужный результат.

5. Увеличение числа слагаемых или отсутствие линеек создает предпосылки **для «открытия» нового способа сложения (вычитания) путем присчитывания (отсчитывания) по единице**. Теперь ребенку понятно, почему, например, при сложении отсчет второго слагаемого начинается не от начала числовой прямой, а от точки, соответствующей первому слагаемому.

В дальнейшем этот способ тоже окажется неудобным, когда вместо суммы 3784 + 2 надо будет находить сумму 3784 + 2561. ***Это, в свою очередь, потребует поиска «нового» способа поразрядного сложения взамен «старого» способа — присчитывания.***

6. В следующей учебной задаче рассматривается ситуация, когда **величина оказывается намного больше мерки**, что приводит к необходимости использования для измерения набора мерок, который упорядочивается от большей (из мерок, меньших измеряемой величины, что легко проверить непосредственным сравнением) к исходной (основной).

В таком случае результат измерения выражается не одним числом, а некоторым набором чисел, где каждое соответствует определенной мерке. Появляется табличная форма записи числа, которая приобретает со временем форму «заготовки», т.е. места для каждой цифры.

7. Следующая учебная ситуация, приводящая к решению учебно-практической задачи, требует **определения отношений между мерками для их изготовления** в другом месте или в другое время. Появляется новая числовая характеристика отношения между последующей и предыдущей мерками. Это отношение фиксируется стрелочкой и числом над прообразом разряда. Отношения между соседними мерками оказываются двух видов, одно из них постоянно. Тогда мы уже имеем дело не с набором мерок, где отношения между соседними мерками различны, а с системой мерок с постоянным отношением между соседними мерками (основание системы), при этом система остается открытой, т. е. всегда (по необходимости) может быть построена следующая мерка.

Это позволяет заранее изготовить различные системы мерок для измерения разных величин, распределив между группами спланированный объем работы. ***Десятичная система счисления*** рассматривается как частный случай. Чтобы измерить величину с помощью системы изготовленных в заданном отношении мерок, сначала нужно выбрать мерку, с которой удобно начинать измерение, — самую большую из тех мерок, которые меньше измеряемой величины. Свой выбор необходимо доказать, сравнив непосредственно следующую за выбранной мерку с измеряемой величиной, которая должна оказаться уже больше этой величины.

Из сказанного следует: если основание системы (а это и есть основание системы счисления) равно, например, 6, то цифры 6 и последующих в записи многозначного числа быть не может, так как дети уже сравнивали величину со следующей меркой, в которой было 6 предыдущих. Другими словами, вводится естественное и осмысленное (благодаря наличию контрольного действия) ограничение на каждую цифру в записи позиционного многозначного числа в заданной системе счисления.

Таким образом, представление о позиционном многозначном числе формируется в рамках ***задачи измерения величины системой мерок с заданным или выбранным отношением***, где сначала определяется количество необходимых для измерения мерок (это значит, становится известным, сколько цифр будет в записи числа), а лишь затем производится сама операция измерения (это значит, определяется цифра каждого разряда), что позволяет впоследствии задать операционный состав способа выполнения любого арифметического действия как последовательного выполнения двух основных операций: определение количества цифр (разрядов) в искомом результате выполняемого действия и нахождение цифры, соответствующей каждому из этих разрядов.

Всеобщность этого способа, его применимость для нахождения результатов всех четырех арифметических действий очевидны, в то время как традиционная программа предусматривает лишь частичное использование этого способа в одном случае — при делении многозначных чисел.

8. Появление **новой формы натуральных чисел** требует вновь способов их сравнения, сложения и вычитания взамен ранее известных: сравнения с помощью числовой прямой, сложения и вычитания соответственно с помощью присчитывания и отсчитывания. Таким новым способом становится **поразрядное выполнение** всех указанных действий, что позволяет ребенку выполнить ***следующую задачу:*** вначале научиться определять, сколько цифр будет в результате выполнения действия, для чего придется определять те разряды, которые будут «переполняться» (при сложении и умножении) или разбиваться (при вычитании и делении), а затем знать табличные случаи (для всех действий), что предполагает конструирование таблицы сложения (вычитания), а затем и умножения (деления). Из сказанного понятно, что нет необходимости рассматривать по отдельности во времени случаи сложения (вычитания) без перехода через разряд и с переходом. Речь идет как раз о числах, при сложении (вычитании) которых в одних разрядах должен быть переход, а в других нет.

Решение этой задачи, безусловно, приходится на 2 класс, тогда как традиционно дети, к примеру, в 1 классе учат таблицу сложения (вычитания), а лишь затем, условно говоря, «узнают», зачем она нужна (для действий с многозначными числами).

Характеризуя программу 2 класса, необходимо подчеркнуть, что она рассчитана прежде всего на углубление и конкретизацию ранее усвоенных теоретических знаний о величине и числе. Значительную роль в этом отношении призвана сыграть работа, направленная на овладение общими способами и опирающимися на них приемами выполнения любых арифметических действий на примере сложения и вычитания, которым во 2 классе отводится значительное время.

9. Опираясь на понятие позиционного числа, дети должны **выявить основной принцип сложения и вычитания многозначных чисел** — поразрядное выполнение соответствующих действий. Им предстоит, во-первых, проанализировать операционный состав соответствующего способа выполнения арифметических действий, во-вторых, осознать всеобщность этого способа, его применимость для нахождения и проверки результатов всех четырех арифметических действий. Кроме того, наряду с анализом ошибкоопасных мест и составлением так называемых справочников ошибок (о чем упоминалось выше), которые можно допустить при выполнении того или иного арифметического действия, рекомендовано для проверки использовать калькулятор, но только в тех случаях, когда ученик сомневается в правильности вычислений. Выявление допущенной ошибки и служит основой для развертывания совместных с другими детьми действий по рефлексии, анализу и предвосхищению возможных ошибок, устанавливая при этом не только причины их появления и способы обнаружения, но и поиск заданий, позволяющих избавиться от каждой из них.

Поскольку этот способ содержательно связан со сформированным у детей понятием числа, вводившимся на основе измерения величин, его усвоение должно не только способствовать овладению рациональными приемами вычислений (что само по себе составляет одну из важных задач начального обучения математике), но и обеспечивать более глубокое понимание содержания понятия числа и действий с числами.

Первая из указанных выше задач (анализ операционной структуры общего способа вычисления результата арифметического действия) может и должна быть решена в процессе изучения материала, связанного с действиями сложения и вычитания. Детям уже известна связь между количеством разных мерок, которые использовались для измерения (построения) величины, и количеством разрядов в числе, фиксирующем результаты измерения. Опираясь на эти знания, они могут установить обусловленность разрядной структуры результата сложения (вычитания) структурой известных его компонентов (слагаемых, уменьшаемого и вычитаемого). Анализ этой зависимости позволяет установить рациональные приемы **конструирования таблиц сложения и вычитания**, способствующие их эффективному непроизвольному запоминанию, что имеет немаловажное значение для формирования вычислительных навыков.

10. Овладев приемами **письменных вычислений**, дети конструируют и **приемы устных вычислений** внетабличных случаев, причем не только в пределах 100, но и во всех случаях, которые сводятся к действиям в пределах 100, что значительно ***расширяет круг устных вычислений***. Продолжение этой работы предусматривается в процессе изучения действий умножения и деления.

3 КЛАСС

Умножение является центральной темой **программы 3 класса и одной из основных учебных задач.** В отличие от традиционной программы оно рассматривается как особое действие, связанное **с переходом в процессе измерения величин к новым меркам** (В.В. Давыдов). Фактически с этим действием дети сталкивались уже во 2 классе при изучении позиционных чисел. Однако там оно не было зафиксировано как особое действие и не получило развития. Поэтому **первой и основной *учебной задачей*** становится воспроизведение величины в ситуации, когда измеряемая величина много больше заданной мерки, в связи с чем возникает необходимость использования вспомогательной, промежуточной мерки. Одно из чисел, описывающее эту ситуацию, фиксирует отношение вспомогательной мерки к исходной (или к стандартной мерке, являющейся основанием принятой системы счисления), второе — количество вспомогательных мерок в измеряемой величине («по... взять... раз»), третье — отношение измеряемой величины к исходной мерке. Логическим завершением анализа этой ситуации является **введение деления** как действия, направленного на определение промежуточной мерки («деление на части») или числа таких мерок («деление по содержанию»). Тем самым появляется возможность установить содержательные связи между умножением и делением, а также содержательно интерпретировать отношения «больше (меньше) в... раз», «больше (меньше) на...».

Как и при изучении действий сложения и вычитания, изучение умножения и деления предусматривается начать с рассмотрения этих действий в общей (абстрактной) форме с помощью моделей. Имеется в виду, что при изучении умножения в качестве средств моделирования должны быть использованы не только линейные, но и плоскостные схемы, а также обеспечен переход от графических к символическим (буквенным) моделям (формулам). Овладение умением строить графические модели умножения и деления, осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно является одной из **важнейших задач этого этапа обучения**.

Особое внимание в процессе этой работы предусматривается уделить изучению **свойств умножения** — переместительного, сочетательного и распределительного (относительно сложения и вычитания). Исследование этих свойств опирается прежде всего на предметные действия ребенка, фиксирующиеся с помощью графических и знаковых моделей. В связи с этим рассматриваются порядок действий, определяемый только с опорой на графическую модель, а не на правила, предполагающие деление действий над числами на действия двух ступеней (действия первой ступени — читание, второй — умножение и деление), и его изменение. В итоге ученики должны овладеть умением определять значения выражений типа $375 \cdot 294 - 375 \cdot 293$ или $3984 \cdot 975 - 974 \cdot 3984$ и т. д.

Второй *учебной задачей* является ***конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное***, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это принято. Другими словами, любая таблица умножения начинается с умножения на нуль, например: $9 \cdot 0$, $9 \cdot 1$, $9 \cdot 2$, $9 \cdot 3$ и т. д.

Понимание предметного содержания умножения и его свойств позволяет существенно перестроить **работу с таблицами умножения (деления)**. В основу этой работы положена задача **на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата**. В связи с этим изменяется «естественный» порядок изучения таблиц. Целесообразно начать их конструирование с тех, в которых указанная выше связь обнаруживается в наиболее явном виде (таблицы умножения 9, 2, 5 и 6). Таблицы умножения 4, 8, 3 и 7 следует сконструировать, опираясь на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддерживания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что **снимает необходимость в специальном заучивании таблиц**.

Уяснение содержания умножения создает предпосылки для того, чтобы построить **сетку классов чисел** и на этой основе осмыслить многозначное число как число многоразрядное. Освоение многоразрядного числа обеспечивается выполнением действий сложения и вычитания (включая сложные случаи, когда один из разрядов в уменьшаемом равен нулю), а также конструированием способа умножения многоразрядного числа на многозначное, которое сводится к умению умножать многозначное число на однозначное.

Особого внимания требует отработка приемов умножения многозначного числа на многозначное. Их уяснение предполагает предельное развертывание упоминавшегося выше принципа разрядности действий. Дети должны хорошо понимать не только обусловленность количества цифр (разрядов) в произведении множителями, но и способ получения каждой из этих цифр (с этой целью возможна постановка вспомогательных задач, требующих определения значения одного из разрядов произведения независимо от других разрядов). В результате этой работы обычный прием умножения «в столбик» должен приобрести для детей совершенно иное психологическое содержание.

Значительное место в программе 3 класса, как и в предыдущие 2 года, **отводится решению текстовых задач**, работа над которыми должна осуществляться в процессе изучения всех тем. ***Освоение общих способов анализа задачи является одной из сквозных учебных целей курса математики.*** Основное внимание должно быть сосредоточено на формировании основных приемов работы над текстом задачи, на способах моделирования отношений, представленных в условии задачи, в виде различных схем (и диаграмм в том числе), отыскивании на схеме равных величин, что имеет особое значение, так как, с одной стороны, придает всей предшествующей работе вполне определенный смысл, а с другой — позволяет детям выбрать наиболее рациональный способ решения задачи — алгебраический (посредством уравнения) или арифметический (посредством составления математического выражения).

В контексте работы над задачами осуществляется **обучение решению уравнений**. Как и в 1 классе, их решение осуществляется с опорой на схему, при этом никакие «правила» не заучиваются. Дети должны решать уравнения, объясняя и обосновывая каждое свое действие, а не реализовывать готовый алгоритм.

Таким образом, предлагаемая программа 3 класса, будучи по формальной структуре программой ***формирования арифметических действий*** с многозначными числами, по существу предполагает усвоение ***принципов построения этих действий***. Такое содержание программы является предпосылкой для организации деятельности детей, направленной на решение двух типов учебных задач. С одной стороны, это задачи, связанные с выявлением, анализом и содержательным обобщением свойств величин, чисел и математических действий. С другой — это задачи, направленные на поиск и обоснование рациональных приемов выполнения того или иного действия. А в процессе этой деятельности и должны быть реализованы цели развивающего обучения на данном этапе.

Заключительная тема программы 3 класса предусматривает прежде всего, формирование приемов деления многозначного числа на многозначное. Конструирование деления любого многозначного числа на любое многозначное число требует последовательного выполнения четырех операций, о которых сказано ранее.

Как уже говорилось выше, овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для ***классификации устных и письменных вычислений***. Рассматриваются приемы устного счета, в том числе умножения на 11, на 25 и др.

В процессе формирования этих приемов должны быть закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Выполняя устные и письменные вычисления, учащиеся не только осмысливают известные и новые приемы, но и придумывают аналогичные задания друг для друга. Так, подбирая многозначное делимое и однозначный делитель, кратный делимому, они ищут среди прочих такой способ, который позволил бы, не выполняя деления, узнать, будет ли делимое кратно делителю. Это и приводит к ***постановке следующей учебной задачи на конструирование*** признаков делимости, которые рассматриваются следующими группами: делимость на 2, 5 и 10, на 4, 25 и 100, на 8, 125 и 1000, на 9 и 3.

Три первые группы обосновываются делимостью 10 на 2 и 5, 100 на 4 и 25, 1000 на 8 и 25. Делимость же на 9 и 3 устанавливается с опорой на соответствующие таблицы умножения. Работая над признаками делимости, учащиеся тем самым отрабатывают умножение и деление многозначных чисел. Рассматриваются «составные» признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 20 и т. д.

4 КЛАСС

В 4 классе продолжается знакомство с числами, а именно **с десятичными дробями** как частным случаем позиционных систематических дробей в различных системах счисления. Таким образом, ***первая учебная задача*** связана с измерением и восстановлением величины, значительно меньшей исходной (основной) мерки.

Введение **позиционных систематических дробей** обусловлено прежде всего тем, что, завершая изучение понятия многозначного числа и действий с числами, заданными изначально в различных системах счисления, учащиеся вновь возвращаются к задаче измерения и воспроизведения величины в ситуации, когда для измерения (а затем и для воспроизведения) данной величины потребовалась не только система мер, полученных путем укрупнения с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), но и система мер, полученная путем уменьшения исходной меры в одно и то же число раз, равное коэффициенту укрупнения.

Другими словами, для измерения величин, много больших исходной меры, используют систему укрупненных мер с постоянным отношением, а для измерения величин, много меньших той же исходной меры, — систему уменьшенных (дробленых) мер с тем же отношением. Таким образом, учащиеся получают новый вид чисел — дробные, имеющие целую и дробную (после запятой) части. Числа рассматриваются в различных системах счисления, в том числе десятичной. Строится разрядная сетка, и даются соответствующие названия разрядам, полученным в результате уменьшения исходной мерки в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Полученные новые виды чисел получают свое место на числовой прямой, с помощью которой они могут сравниваться друг с другом и с известными видами чисел: с нулем и с ближайшими натуральными числами.

Измерения с помощью системы уменьшенных мер могут быть конечными и бесконечными, что приводит к появлению не только конечных, но и бесконечных дробей, в том числе периодических, которые будут рассматриваться позже (в 6 классе).

Однако предметом исследования становятся конечные десятичные дроби. Вводится операция округления дробей.

Конструирование способов выполнения действий с позиционными систематическими дробями, в том числе и с десятичными, позволит фактически отрабатывать все действия с многозначными числами, не тратя на это дополнительное время перед введением дробей, что и придает осмысленный характер умениям и навыкам счета в связи с использованием его в качестве средства для выполнения более сложных действий.

Такая логика построения материала, когда после действий с многозначными числами появляются подобные им по способу их получения и способу действий с ними позиционные систематические дроби, позволяет гораздо глубже понять ***обобщенный принцип образования позиционных чисел***.

Появление новых видов чисел, в которые входят десятичные дроби, а также способ нахождения дроби от числа и числа по его дроби дают возможность ввести ***понятие процента*** (эти тема вынесена в рабочую тетрадь).

Вычисления с десятичными дробями и процентами включены в решение реальных задач. Ведь в условиях рыночной экономики человеку необходимы принципиально новые умения, неизбежно связанные с математикой: перевод денежных единиц, сравнение цен на товары и многое другое. Именно такие задачи и требуют действий с десятичными дробями, округления дробей, введения понятия процента и др.

Особое место в программе 4 класса, о чем мы уже писали ранее, принадлежит уже известным детям с 1 класса понятиям **периметра, площади, объема** и способам их нахождения. Возврат к этим понятиям обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию ***готовых результатов измерения***. Такой подход позволяет осмыслить ***основные принципы***, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые.

Курс математики 4 класса заканчивается возвратом на новом уровне к **решению текстовых задач**. Создается такая учебная ситуация, при которой ребенок, уже умея решать задачи, задает себе вопросы: «А что же такое задача? Как она устроена? Из чего состоит? По каким признакам можно задачи сравнивать? Что необходимо записать, о чем сообщить другому человеку, чтобы он смог в точности восстановить текст задачи?», т.е. происходит углубление представления о задаче, принципах построения текста, способах ее моделирования с помощью не только схемы, но и краткой записи, преобразованиях, которые создают условия для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения уравнений, а значит, и задач, решаемых с их помощью.

Как правило, детей учат решать задачи по действиям, с опорой на которые и составляется математическое выражение. Однако потребности в его составлении для ребенка нет, ведь задача уже решена. Такой способ обучения решению задач (как и другим, не менее значимым темам программы) есть не что иное, как обучение от частного к общему, в то время как обучение в рамках системы Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова должно строиться с точностью до наоборот: от общего к частному. Это значит, двигаться нужно не от действий к составлению выражения (или уравнения), значение которого и может быть найдено последовательным выполнением арифметических действий. Поэтому сначала дети учатся составлять различные математические выражения (или уравнения) с опорой на схему, которая строится по ходу осмысления задачи, а лишь затем для нахождения значения выражения выполняют действия.

Итак, основное содержание курса математики — формирование понятия рационального числа — представлено как последовательность стратегических (ключевых) учебных задач: формирование понятия величины, т. е. введение в область отношения величин, раскрытие отношения величин как всеобщей формы числа, последовательное введение различных частных видов чисел как конкретизация общего отношения величин в определенных условиях, построение обобщенных способов действий с числами.

Реализация описанного математического содержания возможна лишь при условии готовности учителя организовать сотрудничество детей, требует от него особой организации учебной деятельности школьников в форме постановки и решения ими учебных задач посредством универсальных учебных действий (В.В. Давыдов). В ходе такого обучения и происходят открытие и усвоение понятий, когда дети при участии учителя должны ***сначала осознать потребность*** именно в самом понятии, способе действия, а затем ***сконструировать*** его, вступая в содержательный ***учебный диалог*** как со сверстниками, так и с учителем, что требует от последнего новой педагогической позиции, позволяющей реализовать цели и задачи, поставленные в Федеральном государственном образовательном стандарте.

ПРОГРАММА

1 КЛАСС (4 ч × 33 нед. = 132 ч)

Тема 1. Выделение свойств предметов. Величины отношения между ними. Отношение равенства-неравенства при сравнении предметов по выбранному признаку (68 ч)

1. **Непосредственное сравнение предметов по разным признакам:** форме, цвету, материалу, длине (ширине, высоте), площади, объему, количеству (комплектности по составу частей), массе, расположению на плоскости и в пространстве. Сравнение предметов по этим признакам.

Периметр как длина «границы» любой плоской геометрической фигуры.

Понятие о равновеликости и равносоставленности фигур. Существенные различия межу прямой, лучом, отрезком. Представление о ломаной, угле. Сравнение углов. Подбор предметов или геометрических фигур по заданному признаку.

2. **Моделирование отношений равенства и неравенства между величинами:**

предметное: с помощью полосок;

графическое:

а) с помощью копирующего рисунка;

б) с помощью отрезков;

знаковое:

а) с помощью знаков «=», «≠»;

б) с помощью букв и знаков «=», «>», «<» (формулы $A = B$, $A > B$, $A < B$ и т. д.).

Класс величин. Сравнение величин с помощью посредника, равного одной из них. Транзитивность отношений «равно» (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$), «больше-меньше» (если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$; если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$).

Переход от действий с предметами к схеме и формуле. Восстановление схемы по формуле и наоборот. Преобразования схем и формул. Связь между ними.

Сравнение «по красоте» способов написания цифры 1. Классификация всех цифр на основании сравнения их по составу элементов и форме на три группы:

а) цифры 1, 4, 7;

б) цифры 3, 5, 2;

в) цифры 6, 9, 8 и 0 и их последующее написание.

Тема 2. Сложение и вычитание величин (52 ч)

1. **Сложение и вычитание величин как способ перехода от неравенства к равенству и наоборот.** Три способа уравнивания величин. Введение знаков «плюс» и «минус». Выбор способа уравнивания в зависимости от условий его выполнения. Описание операции уравнивания с помощью схем и формул. Связь между схемой и формулой. Изменение схемы при изменении формулы и наоборот. Тождественные преобразования формул.

Решение текстовых задач (с буквенными данными), связанных с увеличением или уменьшением величин (отношения «больше на...», «меньше на...»). Составление текстовых задач по схеме (формуле). Подбор «подходящих» чисел для решения задачи с точки зрения:

а) сюжета задачи;

б) выполнимости действия;

в) выполнения действия конкретным ребенком (опора на дошкольную подготовку).

2. **Сложение и вычитание величин как способ решения задачи на восстановление целого или части.** Понятие части и целого. Моделирование отношений между частями и целым в виде схемы, формулы и записи с помощью «лучиков» (знакографической записи).

Взаимопереходы от одних средств фиксации отношений к другим.

Введение специальных обозначений для части и целого: $A + A =$ ©

Названия компонентов при сложении и вычитании и их связь с понятием части и целого.

Относительность понятия части и целого. Подбор «подходящих» чисел к формулам. Состав однозначных чисел. Разбиение на части и составление из частей величин, геометрических фигур на плоскости и геометрических тел в пространстве.

Увеличение и уменьшение величины. Понятие нулевой величины.

Скобки как знак, показывающий другую последовательность выполнения операций над величинами: $A - B - C = A - (B + C)$.

Свойства операции сложения величин: переместительное и сочетательное. Составление и решение текстовых задач с буквенными данными на нахождение части и целого. Связь задач на уравнивание величин с задачами на нахождение части и целого.

3. **Понятие уравнения.** Определение значения одного из компонентов с опорой на понятия «часть» — «целое». Подбор «подходящих» чисел к формулам (опора на дошкольную подготовку) и наоборот. Описание числовых выражений с помощью буквенных формул как задача на их восстановление. Решение примеров «с секретами»: сложение и вычитание в пределах десятка с опорой на дошкольную подготовку. «Круговые» примеры, «магические» треугольники и квадраты. Составление детьми примеров «с секретами». Сравнение выражений с числовыми и буквенными данными. Решение задач с помощью уравнений. Подбор вместо букв подходящих чисел к текстовым задачам, выражениям, уравнениям.

Тема 3. Введение понятия числа (12 ч)

Переход от непосредственного сравнения величин к опосредованному.

Сравнение:

а) с помощью посредника, равного одной из сравниваемых величин (на основе транзитивности отношений);

б) с помощью мерки для измерения сравниваемых величин, благодаря которой обнаруживается кратность отношений: A/E и B/E, где A и B — сравниваемые величины, а E — третья величина того же рода, т. е. мерка.

Подбор мерок, удобных для измерения данной величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой. Простые и составные мерки.

Подбор подходящих предметов, используемых в качестве мерки.

Инструменты: циркуль, линейка, угольник. Ознакомление со стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

Знакомство с другими видами величин: время, скорость, стоимость.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу первого класса дети научатся:

- выделять разные свойства в одном предмете и непосредственно сравнивать предметы по разным признакам: по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, количеству, форме, цвету, материалу, углам и др.;
- моделировать отношения равенства и неравенства величин с помощью отрезков (графическое моделирование) и с помощью буквенной формулы (знаковое моделирование);
- производить сложение и вычитание величин при переходе от неравенства к равенству и обратно; исследовать ситуации, требующие сравнения величин и чисел, им соответствующих;
- описывать явления и события с помощью величин;
- прогнозировать результат сравнения величин путем их оценки и прикидки будущего результата;
- строить графические модели отношений (схемы) при решении несложных текстовых задач (с буквенными или числовыми данными), связанных с уменьшением или с увеличением величин; составлять текстовые задачи по схеме и формуле; придумывать вместо букв «подходящие» числа и заменять числовые данные буквенными;
- владеть понятием части и целого, уметь описывать отношения между частями и целым с помощью схем и формул;
- разбивать фигуры на части и составлять целое из частей плоских и объемных фигур;
- решать уравнения типа $a + x = в$, $a - x = в$, $x - a = в$ с опорой на схему;
- выполнять сложение и вычитание в пределах 10;
- представлять состав чисел первого десятка с опорой на дошкольную подготовку на основе понятия части и целого;
- изготавливать и конструировать модели геометрических фигур, предложенные в рабочей тетради, перекраивать их при сравнении площадей.

2 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 136 ч)

Тема 1. Введение понятия числа (продолжение) (35 ч)

1. **Задача непосредственного и опосредованного сравнения величин:**

а) подбор мерки, равной данной величине (повторение);

б) подбор мерок, удобных для измерения величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой.

Простые и составные мерки. Подбор предметов, удобных для их использования в качестве мерки. Знакомство с приборами и инструментами, используемыми для сравнения и воспроизведения величины стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

2. **Действие измерения.** Число как результат измерения величины и как средство для ее восстановления. Компоненты действия измерения: величина (A), мерка (E), число (n) и связь между ними. Запись числа как результата измерения и счета с помощью меток, считалок и с помощью цифр в различных нумерациях (арабская, римская, славянская и др.).

Построение величины по мерке и числу; подбор и изготовление мерки по заданной величине и числу. Зависимость одного из трех компонентов ($A/E = n$) от изменения другого при постоянном третьем (фактически речь идет о функциональной зависимости).

3. **Числовая прямая.** Сравнение величин с помощью числовых значений. Построение числовой прямой. Изображение чисел на числовой прямой (отрезком и точкой). Понятие шкалы. Знакомство с приборами и предметами, имеющими шкалы: линейкой, весами, часами, мерными емкостями, динамометром, спидометром, термометром, транспортиром и др.

Условия существования числовой прямой, числового луча, числового круга: наличие начала отсчета, направления, единичной мерки (шага). Число 0 как результат измерения нулевой величины единичной меркой и как начало отсчета на числовой прямой.

Сравнение чисел на числовой прямой. Последующее и предыдущее числа. Бесконечность числового ряда. Линейка как модель числовой прямой.

Решение текстовых задач. Использование диаграмм.

Тема 2. Сложение и вычитание чисел (24 ч)

1. **Разностное сравнение чисел и сложение и вычитание чисел с помощью:**

а) двух линеек (стандартных и изготовленных) как моделей двух числовых прямых;

б) двух числовых прямых;

в) одной числовой прямой.

2. **Присчитывание и отсчитывание как новый способ нахождения суммы и разности** в условиях отсутствия необходимого числа линеек при трех и более слагаемых.

Решение и составление математических выражений, уравнений и задач с заменой буквенных данных на числовые данные (в пределах десятка). Нахождение значения числовых выражений со скобками. Определение и изменение порядка действий с опорой на схему. Решение различных задач на сложение и вычитание с подбором:

а) «подходящих» чисел к заданному сюжету;

б) сюжетов к схемам с заданными числами.

Тема 3. Многозначные числа (35 ч)

1. **Набор и система мерок.** Задачи на измерение-отмеривание с помощью набора мерок. Упорядочивание и обозначение мерок в наборе. Выбор из данных мерок первой «подходящей» мерки. Запись результата измерения величины набором упорядоченных мер (от большей к меньшей) в форме таблицы. Связь «номера» выбранной мерки с количеством цифр в записи числа. Понятие разряда. Задача на необходимость установления отношения между мерками. Отношение «в... раз больше», «в... раз меньше». Решение задач с заданным отношением. Замена таблицы для записи результатов измерения «заготовками».

Переход от ***набора мерок***, в котором отношение между мерками произвольное, к системе мерок с постоянным отношением между ними (основание системы счисления).

2. **Позиционные системы счисления.** Понятие многозначного позиционного числа как результата измерения величины системой мерок с заданным отношением (основание системы). Чтение и запись чисел в различных системах счисления. Место нуля в записи многозначных чисел. Понятие значащего нуля в записи многозначного числа (когда нуль в середине и на конце) и незначащего (перед старшим разрядом). Сравнение многозначных чисел с помощью числовой прямой и поразрядное сравнение чисел, взятых в одной системе счисления. Представление числа в виде суммы разрядных слагаемых, замена суммы разрядных слагаемых числом.

3. **Десятичная система счисления как частный случай позиционной системы счисления.** Чтение и запись любых многозначных чисел. Названия первых четырех разрядов. Сравнение многозначных чисел.

Решение текстовых задач.

Тема 4. Сложение и вычитание многозначных чисел в разных системах счисления (42 ч)

1. **Постановка задачи** на сложение и вычитание многозначных чисел как переход от способа присчитывания и отсчитывания к конструированию способа выполнения действий «в столбик».

2. **Конструирование способа сложения и вычитания многозначных чисел.** Поразрядность сложения и вычитания как основной принцип построения этих действий. Запись примеров «в столбик», в которых имеются числа с одинаковым и разным количеством разрядов.

Определение разрядов, которые «переполняются» при сложении, путем сравнения суммы однозначных чисел в разряде с основанием системы счисления. Опора на состав числа — основание системы счисления. «Разбиение» разрядов при вычитании. Определение сильных и слабых позиций чисел в разряде. Определение количества цифр (разрядов) в сумме и разности.

Задача на нахождение значения каждой разрядной единицы (цифры каждого разряда) искомой суммы или разности. Постановка задачи на нахождение суммы однозначных чисел (табличные случаи сложения) и обратной задачи на вычитание.

Составление и подбор подходящих математических выражений с многозначными числами для решения текстовых задач, в том числе задач на построение диаграмм.

3. **Табличное сложение и вычитание.** Построение таблиц сложения однозначных чисел на множестве целых неотрицательных чисел. Таблица Пифагора.

Исследование таблицы сложения. Использование таблицы Пифагора как справочника.

Постановка задачи запоминания табличных случаев и выделение «трудных» случаев сложения с переходом через десяток. Исследование зависимости цифры в разряде единиц суммы от изменяющегося слагаемого как основы непроизвольного запоминания суммы.

Нахождение суммы многозначных чисел. Решение текстовых задач, в которых буквенные данные могут быть заменены многозначными числами. Составление и решение уравнений, математических выражений с многозначными числами по схеме.

Выделение табличных случаев вычитания. Конструирование способа вычитания с переходом через десяток. Письменное сложение и вычитание многозначных чисел, заданных в задачах, уравнениях и выражениях. Использование калькулятора при проверке.

Конструирование приемов устного сложения и вычитания многозначных чисел, которые сводятся к внетабличным случаям в пределах 100.

Решение текстовых задач.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу второго класса дети научатся:

- пользоваться понятием натурального числа как универсальным средством сравнения величин при переходе от непосредственного сравнения к опосредованному;
- решать задачи на измерение, отмеривание и нахождение удобной мерки;
- чертить с помощью линейки отрезок данной длины и измерять длину отрезка;
- читать диаграммы, анализировать их и использовать при решении задач;
- записывать результат измерения системой мерок; называть первые четыре разряда в десятичной системе счисления;
- сравнивать числа, группировать их по заданному или самостоятельно установленному правилу;
- складывать и вычитать многозначные числа в различных системах счисления, в том числе в десятичной, опираясь на таблицу сложения однозначных чисел и соответствующие ему табличные случаи вычитания;
- прогнозировать результат вычисления, пошагово контролируя правильность и полноту выполнения с опорой на составленный совместно с другими детьми справочник ошибок;
- делать оценку и прикидку будущего результата;

• пользоваться калькулятором для проверки в том случае, если ученик сомневается в правильности вычислений;

• строить графические модели (схемы, диаграммы) отношений между величинами при решении текстовых задач с буквенными и числовыми данными с опорой на понятие целого и части и разностное сравнение величин;

• исследовать зависимость решения задачи от ее условия, зафиксированного в схеме;

• сравнивать разные способы вычислений и выбирать рациональные способы действий с опорой на графическую модель (схему);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению;

• использовать известные ученику математические термины и обозначения.

Понимать и применять:

• принцип образования последующего и предыдущего чисел на числовой прямой;

• принцип образования многозначных чисел в любой системе счисления;

• общий способ чтения любого многозначного числа в любой системе счисления с неограниченным числом разрядов;

• общий принцип выполнения любого арифметического действия на примере сложения и вычитания любых многозначных чисел в десятичной системе счисления.

3 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 136 ч)

Тема 1. Понятие умножения и деления (24 ч)

1. **Умножение как способ измерения величин**, связанный с переходом в процессе измерения к новым меркам.

Постановка и решение задач, приводящих к изменению единиц измерения. Графическое изображение умножения. Оценка различных отношений между величинами и исходной меркой:

а) когда измерение удобно производить исходной меркой;

б) когда для измерения нужна дополнительная (промежуточная) мерка.

Конструирование формулы вида «по a взять $в$ раз»:

$A/E = a \cdot в$.

Введение термина «умножение». Переход от словесной формы к графической, знаковой и обратно. Конструирование способа замены любого произведения двух чисел одним числом в позиционной форме в десятичной системе счисления как универсального способа сравнения величин, описанных в виде произведения:

а) с помощью числовых прямых или двух линеек;

б) с опорой на отношение частей и целого, т. е. на связь умножения со сложением (в формуле $a \cdot в = c$, где a — часть, $в$ — количество частей, c — целое).

Решение текстовых задач, включающих отношение «больше в... раз», «меньше в... раз», как новый способ уравнивания величин. Кратное сравнение величин. Использование диаграмм при решении задач.

2. **Деление как действие по определению:**

а) промежуточной мерки — деление «на части»;

б) числа промежуточных мерок — деление «по содержанию».

Трехчленность операции умножения. Исследование зависимости между величиной, промежуточной меркой и их количеством. Связь деления с вычитанием. Введение названий компонентов при умножении и делении и их связь с понятием целого и части. Графическое моделирование деления. Зависимость результатов умножения и деления от изменения компонентов и наоборот. Решение и составление по схемам текстовых задач, уравнений, математических выражений.

Тема 2. Свойства умножения (12 ч)

Переместительное свойство умножения. Вычисления с опорой на переместительное свойство.

Сочетательное свойство и вычисления с опорой на него. Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Порядок выполнения действий, изменение порядка выполнения действий с опорой на схему. Приемы устных вычислений с опорой на свойства сложения и умножения. Рациональные способы вычислений.

Решение текстовых задач.

Тема 3. Умножение и деление многозначных чисел (55 ч)

1. **Постановка задачи нахождения произведения многозначных чисел.**

2. **Конструирование** способа умножения многозначного числа на однозначное как основы для умножения многозначного числа на многозначное. Выделение принципа поразрядности выполнения действия. Конструирование способа нахождения результата как последовательное нахождение:

а) разрядов, которые «переполняются»;

б) количества цифр в результате;

в) цифры каждого разряда.

3. **Постановка задачи составления таблицы** умножения однозначных чисел (таблицы Пифагора), включая случаи умножения на 0 и 1. Умножение на 10, 100, 1000 и т. д. Способы работы с таблицей как со справочником.

4. **Постановка задачи запоминания** таблицы умножения и рассмотрение каждой таблицы в отдельности.

Таблица умножения на 9 и соответствующая таблица деления; умножение любых многозначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1, 9, на любое однозначное число с опорой на переместительное свойство умножения; умножение «в столбик» на числа, оканчивающиеся нулями: 90, 900, 9000 и т. д.

Таблица умножения на 2 и таблица деления; умножение многозначных чисел, включающее умножение на 9 и 2. Умножение на 20, 200, 2000 и т. д.

5. **Деление с остатком** и его графическое представление. Деление с остатком в случае, когда делимое меньше делителя. Необходимые и достаточные условия нахождения результата деления с остатком.

Решение текстовых задач.

6. **Таблицы умножения и деления** на 5 и 6, 4 и на 8, 3 и 7. Умножение многозначных чисел на однозначные числа и разрядные единицы. Приемы устных и письменных вычислений при решении уравнений и текстовых за-

дач, в которых буквенные данные могут быть заменены такими числами, с которыми учащиеся могут выполнять действия. Умножение многозначных чисел на разрядные единицы.

Решение текстовых задач.

7. **Классы чисел. Сетка классов.** Чтение и запись многозначных чисел. Определение количества десятков, сотен, тысяч и т. д.

Определение количества цифр в записи многозначного числа по старшему разряду. Действия с многозначными числами. Текстовые задачи.

8. **Умножение многозначного числа на многозначное.** Конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное и запись его в виде модели. Определение числа цифр в произведении. Решение и составление уравнений, математических выражений, текстовых задач по заданным схемам и наоборот.

9. **Деление многозначных чисел.** Конструирование способа деления многозначного числа на однозначное: принципы поразрядности при делении. Постановка задачи деления любого многозначного числа на любое многозначное:

а) определение первого неполного делимого (разбиение);

б) нахождение количества цифр в частном;

в) нахождение «подсказок» при делении многозначных чисел, с опорой на которые происходит подбор цифры в частном. Умножением, а не делением подбирается цифра в частном.

10. **Нахождение значения числового выражения**, содержащего деление многозначного числа на многозначное. Порядок действий в математических выражениях, составленных из многозначных чисел и включающих все арифметические действия. Использование калькулятора для проверки.

Решение задач и уравнений на все действия с многозначными числами. Отображение информации, содержащейся в текстовых задачах, в виде диаграммы.

Тема 4. Действия с многозначными числами (45 ч)

1. **Поразрядность выполнения всех действий с многозначными числами** как основной принцип построения этих действий. (Рефлексия.)

Запись и выполнение сложения, вычитания, умножения и деления «в столбик».

2. **Классификация устных и письменных вычислений.** Анализ известных детям способов устных и письменных вычислений, содержащих:

а) сложение и вычитание;

б) умножение и деление.

3. **Приемы устных вычислений:** умножение на 11, на 101, умножение и деление на 25 и другие числа.

4. **Признаки делимости:** на 2, 5 и 10; на 4, 25, 100; на 8, 125, 1000; на 9 и 3. Признаки делимости на 6, 15, 36 и другие как одновременная опора на известные признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 и т.д.

5. **Решение текстовых задач**, включающих необходимость использования признаков делимости.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу третьего класса дети научатся:

• находить способ измерения величин в ситуации, когда предложенная учителем величина значительно больше исходной мерки; создавать и оценивать ситуации, требующие перехода от одних мер измерения к другим;

• использовать схему умножения (она же и деления) при решении текстовых задач, составляя выражение или уравнение; по схеме придумывать или подбирать текстовые задачи; применять калькулятор при проверке вычислений;

• анализировать зависимости между величинами, с которыми ученик имеет дело при решении задач;

• строить графические модели арифметических действий и осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно; читать и строить диаграммы;

• решать уравнения типа $a \cdot x = в,\ x \cdot a = в,\ a : x = в,\ x : в = a;$

• умножать и делить многозначное число на многозначное с опорой на таблицу умножения (и только умножения!) однозначных чисел от 0 до 9;

• основным приемам устных вычислений при выполнении любого арифметического действия;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами.

понимать:

• смысл умножения как особого действия, связанного с переходом к новой мерке в процессе измерения величин;

• смысл деления как действия, направленного на определение промежуточной мерки или числа этих мерок;

• как устроена сетка классов чисел, включая класс миллиардов.

4 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 736 ч)

Тема 1. Многозначные числа и десятичные дроби как частный случай позиционных систематических дробей (64 ч)

1. **Действия с многозначными числами. Повторение** (11 ч)

2. **Измерение величин:**

а) анализ условий, при которых получается: однозначное число; многозначное число в различных системах счисления;

б) постановка ***задачи воспроизведения величины*** меньшей, чем заданная исходная мерка;

в) набор и система мерок меньших, чем исходная. Построение ***систе-***

мы мер с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), в том числе и с отношением 10;

г) запись результата измерения величины с помощью системы укрупненных мерок и системы уменьшенных мерок. Табличная форма записи, введение запятой. Позиционные систематические дроби в разных системах счисления. Знакомство с записью результата измерения в форме обыкновенной дроби. (Например: 0,13 = 1/3 или 0,25 = 2/5.)

3. **Запись и чтение десятичных дробей.** Место десятичных дробей на числовой прямой. Сравнение десятичных дробей с помощью числовой прямой. Принцип поразрядности при сравнении систематических позиционных дробей. Построение величины по заданной позиционной или обыкновенной дроби и исходной мерке. Округление десятичных дробей с избытком и с недостатком.

4. **Действия с многозначными числами и десятичными дробями.** Сложение и вычитание десятичных дробей. Умножение и деление десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. Сохранение числа при последовательном умножении и делении его на 10, 100, 1000 и т. д.

Конструирование способа умножения десятичных дробей и деления, когда делитель — число натуральное. Сведение случая деления на десятичную дробь к делению на натуральное число.

Микрокалькулятор. Проверка действий с различными видами чисел с помощью микрокалькулятора.

Решение и составление текстовых задач, уравнений и математических выражений с десятичными дробями. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби.

5. **Стандартные системы мер.** Действия с числовыми значениями величин. Десятичные дроби и стандартные системы мер. Перевод одних мер в другие. Меры длины, площади, массы, объема.

Действия с числовыми значениями величин. Решение и составление текстовых задач, требующих подбора «подходящих» к данным числам сюжетов и «подходящих» к данному сюжету чисел.

Деньги как мера стоимости. Валюты в России, Америке, странах СНГ. Курс одних валют по отношению к другим. Стандартные меры измерения времени: век, год, месяц, неделя, сутки, час, минута, секунда. Стандартные меры измерения углов: градус, минута, секунда, радиан.

Число как результат кратного отношения длины окружности к диаметру, т. е. как число радиан в полуокружности.

Тема 2. Периметр, площадь, объем (34 ч)

1. **Периметры различных плоских фигур и способы их вычисления.** Сравнение периметров различных фигур с помощью посредника (например, проволоки и т. п.). Формулы периметра прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других геометрических фигур, включая правильные многоугольники. Вычисление периметров геометрических фигур и фигур произвольной формы (границы фигур — кривые линии). Использование гибких мерок.

2. **Площади геометрических фигур.** Непосредственное и опосредованное

сравнение площадей геометрических фигур. Измерение площади прямоугольника путем непосредственного наложения мерки, в том числе квадратного сантиметра, замена этого способа измерением длин сторон.

Формула площади прямоугольника: $S = a \cdot b$.

Измерение площади прямоугольного треугольника как нахождение половины площади соответствующего прямоугольника. Формула площади прямоугольного треугольника: $S = (a \cdot b) : 2$, где a и b — длины сторон прямоугольника, составленного из двух одинаковых треугольников.

Поиск двух из трех сторон прямоугольного треугольника, измерение которых позволяет вычислить его площадь. Выбор прямоугольных треугольников среди прочих.

Виды треугольников. Постановка и решение задачи нахождения площадей непрямоугольных треугольников путем разбиения их на прямоугольные. Формула площади произвольного треугольника: $S = (a \cdot h) : 2$, где h — высота треугольника.

Нахождение площадей геометрических фигур путем разбиения или перекраивания их различными способами на треугольники или прямоугольники. Поиск рациональных способов разбиения фигуры для вычисления ее площади. Площадь правильного n-угольника. Вычисление площадей различных геометрических фигур.

Палетка как прибор для измерения площадей фигур произвольной формы. Алгоритм измерения площади с помощью палетки. Решение текстовых задач, включающих понятия площади и периметра.

3. **Объемы геометрических тел.** Измерение объема прямоугольного параллелепипеда путем заполнения его кубическими мерками и замена способа непосредственного вложения и пересчета мерок вычислением произведения трех измерений: длины, ширины, высоты — и нахождением с их помощью объема $(V = a \cdot в \cdot c)$ или произведения площади основания на высоту $(V = S \cdot H)$.

Общий подход к вычислению объема любых «призмоподобных» и «пирамидоподобных» геометрических тел.

Тема 3. Анализ решения текстовых задач (38 ч)

1. **Строение задачи. Краткая запись задачи. Схемы. Уравнения.** Краткая запись условия задачи как новое средство моделирования, когда текст задан в косвенной форме или содержит большое количество данных.

Восстановление текста задачи по краткой записи и наоборот. Матричная форма краткой записи (таблица) для задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами.

Преобразование краткой записи к виду, удобному для графического моделирования (составление схемы).

Составление схемы по краткой записи и наоборот. Выделение равных величин и составление уравнений по схеме. Составление разных уравнений по одной и той же схеме на основе выбора обозначения неизвестной величины и выражение остальных неизвестных величин через первую.

Составление к задачам уравнений, удобных для решения. Преобразование уравнений на основе преобразования схем. Зависимость изменения уравнения от изменения схемы и наоборот.

2. **Задачи на «процессы».** Время и его измерение. Понятие о скорости. Общий подход к решению текстовых задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами:

а) на движение (выделение характеристик движения: времени, скорости, расстояния — и связи между ними);

б) на куплю-продажу;

в) на работу (производительность труда, время, объем работ);

г) на изготовление товара (расход ткани на одну вещь, количество вещей, общий расход) и т. п.

Составление краткой записи задачи в виде таблицы:

а) на встречное движение;

б) на движение в противоположных направлениях и в одном направлении.

Понятие скорости удаления и скорости сближения.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу четвертого класса дети научатся:

- читать и записывать многозначные числа и конечные десятичные дроби, сравнивать их и выполнять действия с ними; исследовать связь между десятичными дробями и натуральными числами;
- выполнять любые арифметические действия с многозначными числами (без ограничения числа разрядов); сравнивать разные способы вычислений; выбирать рациональный (удобный) способ действия;
- моделировать с помощью схемы отношения между компонентами арифметических действий в математических выражениях, определяя порядок действий на основе анализа этих отношений;
- прогнозировать результат вычислений, используя калькулятор при проверке;
- составлять формулы периметра и площади любого многоугольника (и прямоугольника в том числе) и использовать их при решении задач;
- вычислять периметры различных плоских фигур, описывать их свойства;
- использовать различные способы вычисления площади фигуры: прямоугольника, треугольника и других многоугольников;
- применять общий способ нахождения периметра, площади и объема любых геометрических фигур;
- изготавливать модели геометрических тел; использовать различные инструменты и технические средства (линейка, угольник, транспортир, циркуль, калькулятор и др.);
- конструировать геометрическую фигуру (отрезок, ломаную, многоугольник, в том числе прямоугольник) с заданной величиной (длиной, в том числе периметром, площадью);
- упорядочивать величины; моделировать и разрешать реальные ситуации, требующие умения находить геометрические величины (планировка, наклейка обоев и т. п.);
- анализировать строение задачи и схему как основание для классифи-

кации;

- выявлять связь между пропорциональными величинами: скоростью, временем, расстоянием; ценой, количеством, стоимостью и др. и использовать известную схему умножения (деления) для решения текстовых задач;
- использовать новое средство моделирования условия задачи — краткую запись; составлять текст задачи по краткой записи; преобразовывать краткую запись и соответствующий ей текст (и наоборот);
- находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами и наоборот;
- представлять информацию в таблице и на диаграмме;
- искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;
- выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания (и задачи) с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

иметь представление:

- о признаках делимости;
- о многоугольниках и геометрических телах;
- о видах углов и треугольников.

Предлагаемая программа построена так, что позволяет реализовать каждый из трех вариантов программ, которые в настоящее время представлены в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования второго поколения на новом качественном уровне в форме теоретического знания.

Однако, учитывая то обстоятельство, что уровни развития детей, индивидуальные особенности учителей и региональные условия могут значительно различаться, можно предложить еще **три варианта** дифференциации данной программы обучения.

Все они предполагают введение факультативов, но один из вариантов связан с переносом части предложенной программы на факультативное изучение, другой — с дополнением данной программы факультативом, а третий — с усилением самой программы и дополнительным факультативом.

Рассмотрим каждый из этих вариантов.

При **первом варианте** (условно говоря, облегченном) можно предложить на выбор **вынести на факультатив** из программы 3 класса:

1) признаки делимости;

2) некоторые из предложенных приемов устных вычислений, которые традиционно рассматриваются на факультативах (умножение на 11, 101, умножение и деление на 25, умножение одинаковых чисел, оканчивающихся на 5, т. е. $25 \cdot 25$, $35 \cdot 35$ и т. п.).

Из программы 4 класса:

1) понятие процента и решение соответствующих текстовых задач, работу с рекламными материалами;

2) знакомство с валютами разных стран и курсами валют по отношению

друг к другу;

3) нахождение объемов геометрических тел;

4) кроме выноса части материала на факультатив можно сократить время (но не отказываться совсем!) на решение текстовых задач, приводящих к составлению сложных уравнений.

Особо хотим отметить, что самовольный отказ от изучения других тем программы, например от десятичных дробей и действий с ними, не только нарушит логику построения курса, что недопустимо, но и лишит учащихся возможности, во-первых, переосмыслить на новом уровне принципы устройства многозначных чисел в разных системах счисления, а во-вторых, завершить формирование навыков письменных и устных вычислений с многозначными натуральными числами, которые включены в действия с десятичными дробями в качестве средства. Другими словами, при выполнении действий с десятичными дробями дети фактически отрабатывают действия с натуральными многозначными числами (и это лишь один из примеров).

Второй вариант предусматривает выполнение основной программы и может быть дополнен **факультативом**, ориентированным на углубление изучаемого материала:

1) при изучении во 2 классе позиционных систем счисления можно предложить исследовать способы перевода чисел из одной системы счисления в другую, если величины, с которыми действует ребенок, измерялись разными системами мер, и составить сборник соответствующих заданий на их сравнение, сложение и вычитание. Причем перевод числа из одной системы счисления в другую осуществляется с помощью действия восстановления величины;

2) в развитие предыдущей темы после изучения всех действий с многозначными числами в десятичной системе счисления можно предложить конструирование умножения и деления в недесятичных системах счисления (3—4 класс).

Вообще хотелось бы отметить, что учителя иногда недооценивают ту роль, которая отведена в обязательной программе работе с числами, представленными в недесятичных системах счисления, особенно на первом этапе. Значение этой темы огромно как для осмысления принципа устройства десятичной системы счисления и организации совместной деятельности детей, так и для формирования качественных вычислительных навыков. Так, складывая или вычитая, например, числа в пятеричной системе счисления, дети осмысленно усваивают соответственно состав числа 5 и счет в пределах 5, поэтому, работая с натуральными числами, а затем и дробными в разных системах счисления, учитель предоставляет возможность слабым детям вновь и вновь возвращаться к тому материалу, которой ранее по каким-либо причинам был плохо усвоен ребенком, причем понятно, что это не просто повторение изученного, а возвращение на качественно новом уровне, причем возвращение, обеспечивающее продвижение ребенка вперед.

Третий вариант программы можно использовать в классах, где, во-первых, математику с 1 класса ведут либо учителя математики, либо учителя начальных классов, проявляющие особый интерес к преподаванию математики (и те и другие должны непременно пройти обучение в центре переподготовки работников образования), а во-вторых, большинство поступивших детей оказались с высокой психологической готовностью к школе, хорошей дошкольной подготовкой и ярко выраженными интересом и способностями к изучению математики.

Эта **углубленная** программа обучения математике включает материал, рекомендованный в предыдущем варианте для факультативных занятий.

В качестве дополнительного материала, который учитель может использовать после уроков, можно предложить следующие тематические занятия:

1) задачи на разрезание и перекраивание фигур (1 класс);

2) задачи с переливаниями, дележами, переправами при затруднительных обстоятельствах (1—2 классы);

3) ознакомление учащихся с одним из аналитических методов решения задач, решаемых «от конца к началу» (2—3 классы);

4) задачи на проценты (включены в р/т № 1 для 4 класса);

5) различные занятия по истории математики (1—4 классы);

6) занятия, связанные с изучением вероятности случайных событий (4 класс).

Кроме тематических занятий можно предложить сконструировать способ умножения многозначных чисел (в отличие от умножения «в столбик»), основанный на правиле «ножниц» (автор Э.И. Александрова), позволяющий фактически устно, без записи промежуточных результатов получать произведение. Этот новый способ действия дает возможность значительно улучшить устный счет, делая его более мотивированным (подробно описан в методическом пособии для учителя, 3 класс).

Совершенно очевидно, что предлагаемые темы факультативных занятий могут быть продолжены. Учитель вправе самостоятельно выбрать темы из предложенных или внести собственные, а также использовать данные рекомендации при любом из трех вариантов программы. Однако при подборе собственных вариантов факультативов рекомендуем руководствоваться следующими соображениями: факультатив должен либо углубить понятия, изучаемые в обязательной программе, либо расширить представления детей о математике путем рассмотрения элементов математической логики, теории вероятности, теории графов, истории математики, аналитических методов и нестандартных приемов решения задач. Факультативные занятия не должны включать темы, которые будут предметом исследования в более поздние сроки обучения в школе.

* * *

Программа обеспечена учебно-методическими комплектами для каждого года обучения:

1) учебники для каждого года обучения:
2) методические пособия «Обучение математике» (для каждого класса);
3) рабочие тетради (для каждого класса);
4) контрольные работы (для каждого класса).

СОДЕРЖАНИЕ