МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Э.И. Александрова

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ *в начальной школе*

3 класс

Пособие для учителя

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

Александрова, Э.И.

Методика обучения математике в начальной школе. 3 класс: Пособие для учителя. — электрон. текст. дан. (39 Мб) — 1 опт. компакт. диск (CD-ROM).

Пособие содержит описание методов, форм организации и общения детей, новые методические приемы, которые помогут учителю при реализации идей развивающего обучения на материале обучения математике в 3 классе.

Пособие написано в соответствии с программой обучения математике Э.И. Александровой в начальной школе.

Минимальные системные требования:
Pentium III 1 ГГц (или аналог от AMD), 256 Мб ОЗУ, видеокарта с 32 Мб памяти, 64 Мб свободного места на HDD, 32x CD-ROM, клавиатура, мышь.
Windows 2000sp4/XPsp3/Windows Vista/Windows 7, Windows 8,
Adobe Acrobat Reader версии 7.0 и выше.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
Тел.: (495) 181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

ОТ АВТОРА

Уважаемые коллеги!

Данное методическое пособие является частью учебно-методического комплекта по математике, включающего учебник для 3 класса (в двух книгах) и две рабочие тетради, содержащие дополнительные тренировочные задания, проверочные (тестовые) работы, задания для факультативных занятий.

Это третья книга для учителя, раскрывающая методику обучения математике по системе Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова.

Методические приемы, используемые в обучении, принципы конструирования и подбора учебных заданий, а также особенности формирования умственных действий при решении учебно-практических и учебных задач были подробно рассмотрены в первой книге. Поэтому в этой книге эти вопросы опущены.

Из класса в класс сохраняется общий принцип обучения — от предметно-преобразующих действий через графические и знаковые (буквенно-знаковые) модели, в которых зафиксировано общее отношение, составляющее смысл учебной задачи, к формированию умственных действий.

В данном методическом пособии подробно описаны системы учебных ситуаций, приводящих к постановке и решению учебной или учебно-практической задачи. Задания из учебника — а они не читаются в классе — помогут ребенку воспроизвести после урока то, о чем говорилось в классе, дадут возможность подвести итог изученному на уроке материалу.

Учебник для 3 класса включает в себя материал, предназначенный для рефлексии и более глубокого осмысления содержания курса математики, усвоение которого составляло одну из задач обучения в предыдущие годы. Именно во 2 классе, изучая сложение и вычитание многозначных чисел, учащиеся выявили основной принцип выполнения любого арифметического действия — *поразрядность* — и проанализировали операционный состав способа выполнения арифметических действий: определение количества цифр (разрядов) в искомом результате действия и нахождение цифры, соответствующей каждому из этих разрядов. Теперь в 3 классе детям предстоит открыть для себя смысл нового арифметического действия — умножения — и обратного ему действия деления, осознать всеобщность способа выполнения любого арифметического действия путем его конкретизации при нахождении произведения и частного двух любых многозначных чисел. Этому посвящена первая часть учебника для 3 класса.

Во второй части учебника рассматривается конструирование алгоритмов умножения и деления двух любых многозначных чисел.

Обучая детей решению частных задач, основанных на *общем способе действия*, не забывайте о том, чтобы ребенок не терял связь между частями и целым. Нужно стремиться к тому, чтобы ребенок понимал не только *как* выполнять те или иные задания, но и *зачем* они необходимы, *чему* он учится, выполняя эти задания, *как* научить других решать такие же задачи.

Для каждого ребенка ответить на вопросы, *зачем*, *чему* и *как,* — значит обратиться к самому себе, к обоснованию собственных действий. Такой подход к изучению понятий создает необходимые предпосылки как для более глубокого понимания самой математики, логики ее построения, так и для формирования основ теоретического мышления: рефлексии, анализа, планирования, для развития памяти, воображения и других познавательных процессов.

Организуя на уроке совместную деятельность детей, важно представлять, какие вопросы могут возникнуть в процессе обсуждения, какие варианты решений могут предложить дети, что может стать предметом дискуссии.

С этой целью в учебник включены задания, в которых описаны точки зрения вымышленных детей. Нет смысла напоминать, что читать объемные тексты в этих заданиях не нужно. Их назначение уже описано в методических пособиях для 1 и 2 классов, а принцип подбора заданий к уроку тот же. Для индивидуальной работы дети могут выбирать те задания, которые им нравятся. Выполнив задание, они должны обосновать свой выбор.

Если заданий по данному разделу много, то их можно распределить по группам. Внутри группы дети сами организуют свои действия: либо сначала обсуждают способы выполнения, а затем каждый самостоятельно попробует выполнить эти задания, либо сначала каждый попробует выполнить то или иное задание, а потом сравнивает свой способ решения со способами других детей.

Если вам покажется, что заданий недостаточно, то их число всегда можно увеличить. Однако следует помнить, что не количество заданий, а *качество*, т. е. *глубина осмысления* способов их выполнения, составляет основную *цель обучения.*

Новый учебник для 3 класса и две рабочие тетради к нему могут быть использованы учителями, работающими по различным программам, но особенно эффективными они будут для тех, кто прошел переподготовку в ИУУ по программам развивающего обучения.

Пользуясь случаем, хочу поблагодарить всех учителей, с которыми имела возможность общаться во время курсов, семинаров, конференций, за тот неоценимый вклад в становление этой системы обучения и данной программы в частности. Хочу сказать спасибо своим маленьким ученикам за те свежие идеи, которыми они щедро делились со мной. Отдельная благодарность Желтухиной Варваре Игоревне и ее ученикам за бескорыстное участие в подготовке и апробации этого учебно-методического комплекта, за душевность и готовность помочь. Особая благодарность моему мужу Мовчану Николаю Петровичу, который оказывал мне огромную помощь при создании всех написанных мною книг. Спасибо!

ВВЕДЕНИЕ

Овладевая в 1—2 классах приемами *письменных вычислений,* дети конструировали и *приемы устных вычислений* внетабличными способами во всех случаях, которые *сводятся* к действиям в пределах 100. Продолжение этой работы предусматривается в процессе изучения действий умножения и деления.

Умножение — центральная тема программы 3 класса. В отличие от точки зрения традиционной программы, оно рассматривается как особое действие, связанное **с переходом в процессе измерения величин к новым меркам** (В. В. Давыдов). Фактически с этим действием дети сталкивались уже во 2 классе при изучении позиционных чисел. Однако там оно не было зафиксировано как особое действие и не получило развития. Поэтому первая учебная задача — это **задача воспроизведения величины** в ситуации, когда измеряемая величина много больше заданной мерки, в связи с чем возникает необходимость использования вспомогательной, промежуточной мерки. Одно из чисел, описывающих эту ситуацию, фиксирует отношение вспомогательной мерки к исходной (или к стандартной мерке, являющейся основанием принятой системы счисления), второе — количество вспомогательных мерок в измеряемой величине («по ... взять ... раз»), третье — отношение измеряемой величины к исходной мерке. Логическим завершением анализа этой ситуации является **введение деления** как действия, направленного на определение промежуточной мерки («деление на части») или числа таких мерок («деление по содержанию»). Тем самым появляется возможность установить содержательные связи между умножением и делением, а также содержательно интерпретировать отношения «больше (меньше) в ... раз», «больше (меньше) на ...».

Как и при изучении действий сложения и вычитания, изучение умножения и деления предусматривается начать с рассмотрения этих действий в общей (абстрактной) форме с помощью моделей. Овладение умением строить графические модели умножения и деления, осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно является одной из **важнейших задач этого этапа обучения.**

Особое внимание в процессе этой работы предусматривается уделить изучению **свойств умножения** — переместительного, сочетательного и распределительного (относительно сложения и вычитания). Исследование этих свойств опирается прежде всего на предметные действия ребенка, фиксирующиеся с помощью графических и знаковых моделей. В связи с этим рассматривается **порядок действий** и его изменение, определяемые только с опорой на графическую модель, а не на правила, предполагающие деление действий над числами на действия двух ступеней (действия первой ступени — сложение и вычитание, второй — умножение и деление).

Второй учебной задачей является задача **конструирования способа умножения многозначного числа на многозначное**, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это принято.

Понимание предметного содержания умножения и его свойств позволяет существенно перестроить (по сравнению с традиционной программой) работу с таблицами умножения (деления). В основу этой работы положена задача **на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата**. В связи с этим изменяется «естественный» порядок изучения таблиц. Целесообразно начать их конструирование с тех, в которых указанная выше связь обнаруживается в наиболее явном виде (таблицы умножения 9, 2, 5 и 6). Таблицы умножения 4, 8, 3 и 7 следует сконструировать, опираясь на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддержания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что снимает необходимость в специальном заучивании таблиц.

Уяснение содержания умножения создает предпосылки для того, чтобы построить **сетку классов чисел** и на этой основе осмыслить многозначное число как число многоразрядное. Освоение многоразрядного числа обеспечивается выполнением действий сложения и вычитания (включая сложные случаи, когда один из разрядов в уменьшаемом равен нулю), а также конструированием способа умножения многоразрядного числа на многозначное, которое сводится к умению умножать многозначное на однозначное.

Особого внимания требует отработка приемов умножения многозначного числа на многозначное. Их уяснение предполагает предельное развертывание упоминавшегося выше принципа разрядности действий. Дети должны хорошо понимать не только обусловленность количества цифр (разрядов) в произведении множителями, но и способ получения каждой из этих цифр (с этой целью возможна постановка вспомогательных задач, требующих определения значения одного из разрядов произведения независимо от других разрядов). В результате этой работы обычный прием умножения «в столбик» должен приобрести для детей совершенно иное психологическое содержание.

Значительное место в программе 3 класса отводится **решению текстовых задач,** работа над которыми должна осуществляться в процессе изучения всех тем. Основное внимание должно быть сосредоточено на формировании основных приемов работы над текстом задачи, способах моделирования отношений, представленных в условиях задачи, в виде различных схем, отыскивании на схеме равных величин, что имеет особое значение, так как, с одной стороны, придает всей предшествующей работе вполне определенный смысл, а с другой — позволяет детям выбрать наиболее рациональный способ решения задачи — алгебраический (посредством уравнения) или арифметический (посредством составления математического выражения).

В контексте работы над задачами осуществляется **обучение решению уравнений.** Как и в 1 классе, их решение осуществляется с опорой на схему, при этом никакие «правила» не заучиваются. Дети должны решать уравнения, объясняя и обосновывая каждое свое действие, а не реализовывать готовый алгоритм.

Таким образом, предлагаемая программа 3 класса, будучи по формальной структуре программой *формирования арифметических действий* с многозначными числами, по существу предполагает усвоение *принципов построения этих действий*. Такое содержание программы является предпосылкой для организации деятельности детей, направленной на решение двух типов учебных задач. С одной стороны, это задачи, связанные с выявлением, анализом и содержательным обобщением свойств величин, чисел и математических действий. С другой стороны, это задачи, направленные на поиск и обоснование рациональных приемов выполнения того или иного действия. А в процессе этой деятельности и должны быть реализованы цели развивающего обучения на данном этапе.

Заключительная тема программы 3 класса предусматривает, прежде всего, формирование приемов деления многозначного числа на многозначное, в том числе и на однозначное. Конструирование деления любого многозначного числа на любое многозначное число требует последовательного выполнения следующих операций:

а) нахождение первого неполного делимого по известному делителю (и наоборот, нахождение возможных делителей при известном неполном делимом), что, как правило, требует «разбиения» разрядов;

б) определение количества цифр в частном по уже известному неполному делимому (и наоборот, нахождение первого неполного делимого по известному количеству цифр в частном);

в) определение «подсказок»[1];

г) подбор цифр в частном с опорой на «подсказки» (и наоборот, восстановление «подсказок» по известной цифре частного), а не на округление делимого и делителя, как это принято.

Овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для *классификации устных и письменных вычислений.*

В процессе формирования этих приемов должны быть закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Выполняя устные и письменные вычисления, учащиеся не только осмысливают известные и новые приемы, но и придумывают аналогичные задания друг для друга. Так, подбирая многозначное делимое и однозначный делитель, кратный делимому, они ищут среди прочих такой способ, который позволил бы, не выполняя деления, узнать, будет ли делимое кратно делителю, что и приводит к *постановке новой учебной задачи на конструирование признаков делимости.*

Работая над признаками делимости, учащиеся тем самым отрабатывают умножение и деление многозначных чисел.

* * *

К концу 3-го года обучения учащиеся должны овладеть следующими знаниями, умениями и навыками:

— понимать смысл умножения как особого действия, связанного с переходом к новой мерке в процессе измерения величин;
— понимать смысл деления как действия, направленного на определение промежуточной мерки или числа этих мерок;

---

[1] Понятие «подсказки» введено в связи с принципиально новым подходом к обучению обобщенному способу деления любого многозначного числа на любое многозначное число (а не «дозами»: сначала на однозначное, затем на двузначное, трехзначное и т. д.). Таким образом, значительно облегчается подбор цифры в частном и сокращается время такого подбора.

— уметь строить графические модели действия умножения, деления и осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно;
— уметь составлять с помощью схемы умножения (она же и деления) текстовые задачи и решать их, составляя выражение или уравнение;
— уметь решать уравнения типа $a \cdot x = в$, $x \cdot a = в$, $a : x = в$, $x : в = a$;
— знать таблицу умножения однозначных чисел;
— уметь умножать и делить многозначное число на многозначное;
— знать сетку классов чисел, включая класс миллиардов;
— владеть основными приемами устного счета при выполнении любого арифметического действия.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ В 3 КЛАССЕ

4 ч × 34 = 136 ч

I полугодие (64 ч)

ТЕМА 1. ПОНЯТИЯ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ (24 ч) (Учебник, кн. 1)

1. Проверочная (стартовая) работа (***задания 1—9***). Анализ работы: составление справочника ошибок (***задания 10—11***) .... 3 ч

2. Решение задач, уравнений, включающих действия сложения и вычитания многозначных чисел (***задания 12—25***) .... 3 ч

3. Постановка и решение задач, приводящих к изменению единиц измерения. Графическое изображение умножения. Оценка различных отношений между величинами и исходной меркой:
а) когда измерение удобно производить исходной меркой;
б) когда для измерения нужна дополнительная (промежуточная) мерка.
Конструирование формулы вида «по *a* взять *b* раз»:
$$\frac{A}{E} = \triangle\!\!\!\!\!\!\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\;a \cdot \boxed{b}\,.$$
Введение термина «умножение» (***задания 29—34***) .... 2 ч

4. Решение задач с использованием нового способа действия. Связь понятия частей и целого с формулой умножения. Названия компонентов при умножении. Переход от словесной формулы к графической, знаковой и обратно (***задания 35—41***) .... 2 ч

5. Конструирование способа замены любого произведения двух чисел одним числом в позиционной форме в десятичной системе счисления как универсального способа сравнения величин, описанных в виде произведения:
а) с помощью числовых прямых или двух линеек;
б) с опорой на отношение частей и целого, т. е. на связь умножения со сложением (в формуле

$a \cdot b = c$, где a — часть, b — количество частей, c — целое). Умножение на 0 и на 1 (***задания 42—54***) .... 2 ч

6. Нахождение значений выражений, решение задач и уравнений, требующих умножения. Связь умножения со сложением (***задания 55—62***). Проверочная работа (***задания 63, 64***) .... 3 ч

7. Деление как действие, обратное умножению: деление «на части» и «по содержанию». Название компонентов при делении. Связь деления с вычитанием (***задания 65—69***) .... 2 ч

8. Решение и составление по схемам задач и уравнений (***задания 70—104***) .... 5 ч

9. Контрольная работа на измерение и построение величин с помощью промежуточной мерки (***задания, аналогичные 78, 53(1), 54***) .... 2 ч

ТЕМА 2. СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ (12 ч) (Учебник, кн. 1)

10. Постановка задачи на поиск рациональных способов умножения. Переместительное свойство (***задания 105—108***) .... 1 ч

11. Умножение и деление на 10, 100, 1000. Проверочная работа (***задания 109—122***) .... 3 ч

12. Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Изменение порядка выполнения действий с опорой на схему (***задания 123—129***) .... 3 ч

13. Сочетательное свойство умножения. Приемы устных вычислений. Рациональные способы вычислений. Проверочная работа (***задания 130—140***) .... 3 ч

14. Контрольная работа (***задания, аналогичные 83, 91, 103***) .... 2 ч

ТЕМА 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ (55 ч) (Учебник, кн. 1 и 2)

15. Постановка задачи нахождения произведения многозначных чисел и конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное (***задания 141—142***) .... 2 ч

16. Конструирование способа умножения многозначного числа на однозначное (***задания 143—151***) .... 2 ч

17. Постановка задачи составления таблиц умножения (***задания 152, 153***) .... 2 ч

18. Таблица умножения 9. Умножение многозначных чисел на 9, 90. Проверочная работа (***задания 154—179***) .... 4 ч

19. Таблица умножения 2. Умножение многозначных чисел на 2 и на 9. Проверочная работа (***задания 180—207***) .... 3 ч

20. Деление с остатком. Проверочная работа. Составление справочника ошибок (***задания 208—219***) .... 3 ч

21. Таблица умножения 5. Умножение многозначных чисел на 5, 9, 2. Выделение чисел-«подсказок» (***задания 220—232***) .... 4 ч

22. Контрольная работа и ее анализ. Составление справочника ошибок (***задания, аналогичные 165, 168, 178, 184***) .... 2 ч

23. Таблица умножения 6 (***книга 2, задания 233—248***) .... 2 ч

24. Таблицы умножения 4 и 8 (***задания 249 — 266***) .... 4 ч

II полугодие (72 ч)

25. Таблицы умножения 3 и 7. Использование таблиц умножения при подборе компонентов при решении задач. Проверочная работа (***задания 267—293***) .... 4 ч

26. Умножение многозначного числа на многозначное. Проверочная работа. Составление справочника ошибок (***задания 294—319***) .... 3 ч

27. Умножение круглых чисел (***задания 320—329***) .... 2 ч

28. Классы чисел. Сетка классов (***задания 330—341***) .... 3 ч

29. Деление многозначных чисел. Конструирование способа. Деление многозначного числа на многозначное (***задания 342—344***) .... 2 ч

30. Нахождение первого неполного делимого (***задания 345—349***) .... 2 ч

31. Определение количества цифр в частном (***задания 349—361***) .... 3 ч

32. Определение «подсказок» (***задания 362—369***) .... 3 ч

33. Решение задач, уравнений и нахождение результатов деления и значений выражений (***задания 370—393***) .... 3 ч

34. Контрольная работа на умножение многозначных чисел и ее анализ. Составление справочника ошибок (***раздел «Проверь себя!»***) .... 2 ч

ТЕМА 4. ДЕЙСТВИЕ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ЧИСЛАМИ (45 ч) (Учебник, кн. 2)

35. Выполнение всех действий с многозначными числами (***рабочая тетрадь № 2***) .... 5 ч

36. Классификация устных и письменных вычислений. Приемы устных вычислений (***задания 394—425***) .... 4 ч

37. Умножение на 11, 101 и др. Приемы устных вычислений (***задания 426—443***) .... 4 ч

38. Проверочная работа (***«Проверь себя!»***) .... 2 ч

39. Признаки делимости на 2, 5 и 10 (***задания 444—452***) ..... 4 ч

40. Признаки делимости на 4, 25 и 100; на 8, 125 и 1000 (***задания 453—468***) .... 4 ч

41. Признак делимости на 9 (***задания 469—482***) .... 4 ч

42. Признак делимости на 3. Решение задач с использованием признаков делимости (***задания 483—494***) .... 4 ч

43. Контрольная работа и ее анализ. Составление справочника ошибок .... 2 ч

44. Решение задач, уравнений с опорой на справочник ошибок .... 5 ч

45. Итоговые контрольные работы и их анализ .... 4 ч

46. Решение задач на смекалку (по выбору) (***задания 495—514***) .... 3 ч

ТЕМА I. ПОНЯТИЯ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

1.1. ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА 2 КЛАССА: СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Одной из основных задач обучения во 2 классе было конструирование и освоение детьми общего способа выполнения любого арифметического действия (на примере сложения и вычитания), суть которого сводилась к последовательному выполнению двух операций: определению количества цифр (разрядов) в искомом результате действия и определению цифры в каждом разряде.

Первая операция требовала предварительной прикидки, при которой ученик определял, какие разряды «переполняются» (при сложении) или «разбиваются» (при вычитании), а вторая операция требовала знания таблиц сложения (вычитания).

Характерная особенность такого подхода заключается в том, что при введении письменного сложения и вычитания многозначных чисел случаи сложения (вычитания) без перехода через разряд и с переходом не разнесены во времени.

Определить переполнение в каком-либо разряде при сложении чисел, записанных в десятичной системе счисления, значит найти разряд, в котором сумма двух однозначных чисел больше или равна 10. Таким образом, при письменном сложении двух (и более) многозначных чисел наряду с разрядами, не имеющими переполнения, встречаются разряды, в которых сумма двух однозначных чисел больше основания системы счисления.

Другая характерная особенность формирования способов письменного выполнения арифметических действий, в частности сложения и вычитания, состоит в том, что складывать и вычитать («в столбик») можно начиная с любого разряда, в том числе слева направо (со старшего разряда) и справа налево (с младшего разряда), причем принуждать детей пользоваться общепринятым способом не рекомендуется, поскольку в этом случае конструирование способа умножения и особенно деления многозначных чисел потребует от ученика свободного владения поразрядным выполнением действия.

И наконец, *еще одна особенность* подхода к обучению действиям с многозначными числами состоит в том, что сначала конструируется *письменное действие, в частности* сложение и вычитание, а затем *устное*.

Как только ребенок овладел письменными вычислениями, а именно основным принципом, лежащим в основе выполнения любого арифметического действия — поразрядностью, ему предлагается в качестве компонентов действия два многозначных круглых числа, сложение или вычитание над которыми сводится к действию с числами в пределах 100 или к доступным для устных вычислений случаям в пределах 1000. Очевидная простота нахождения суммы или разности данных чисел без их записи столбиком дает возможность ребенку поставить перед собой вопрос о том, может ли он в аналогичных случаях складывать (или вычитать) *устно*. Это потребует от него осмысления приемов устных вычислений, которые он знает, и конструирования новых. Все перечисленные особенности методики обучения сложению и вычитанию многозначных чисел *характерны для обучения умножению и делению* многозначных чисел. Становится очевидным тот факт, что первые дни учебы в 3 классе направлены на выяснение степени усвоения способов *сложения и вычитания многозначных чисел*.

Содержание первых ***девяти заданий (1—9)*** дублирует контрольную работу, которую предлагали детям в качестве итоговой по темам 2 класса, что позволит каждому ученику сравнить свои результаты, полученные в конце учебного года и в начале без какого-либо специального повторения. Сравнительный анализ результатов, организованный в виде групповой работы, позволит каждому наметить индивидуальный план ликвидации ошибок при условии, что итогом совместного обсуждения станут справочники ошибок, которые составят ученики, выполняя ***задания 10 и 11.***

Напомним, что составление справочника ошибок не самоцель. Составив его, учащиеся при выполнении заданий должны научиться им пользоваться.

Пример составления справочника ошибок был приведен в предыдущей книге для учителя[1], а описание поэтапного обучения детей работе над ошибками дано в первой книге[2].

---

[1] Александрова Э. И. Методика обучения математике. 2 класс. — М.: Вита-Пресс, 2001. — С. 113—114.

[2] Александрова Э. И. Методика обучения математике. 1 класс. — М.: Вита-Пресс, 1999. — С. 202—212.

Добавим, что от групповых форм работы необходимо сначала перейти к работе в паре, организуя парный контроль, при котором один ученик по справочнику ищет ошибки, а другой проверяет его, потом они меняются ролями, а лишь затем перейти к самопроверке. Научившись проверять самого себя, ребенок на заключительном этапе освоения *пытается*, прежде чем начать выполнять то или иное задание, «закрыть глаза» и *представить*, какие ошибки можно допустить при выполнении данного задания. Другими словами, теперь ребенок учится *мысленно составлять план* собственных действий раньше, чем он приступит к их выполнению, а также производить действие оценки.

Таким образом, чем выше уровень сформированности у ребенка действия контроля, тем больше уверенности в том, что и действие оценки превратится в психологический механизм индивидуальной учебной деятельности.

Оценивая возможность безошибочного выполнения того или иного задания, ребенок тем самым оценивает самого себя, свое продвижение в учебном материале. Оценка результатов индивидуальной деятельности должна выступить перед учащимися как *особая задача*, предпосылки для постановки которой и создаются, по словам В. В. Репкина, в процессе перехода к индивидуальным формам учебной деятельности[1].

Успешность такого перехода в конечном итоге зависит от того, насколько учителю удастся обеспечить формирование у учащихся механизмов *самоконтроля и самооценки*.

Подробное описание методики формирования этих важнейших учебных действий на примере сложения и вычитания (книга 2[2]) и решения текстовых задач (книга 1[3]) дает возможность реализовать эту методику на другом конкретном материале, в частности при обучении умножению и делению многозначных чисел, что составляет основное содержание программы 3 класса.

Однако прежде чем приступить к характеристике программы 3 класса, важно выполнить систему заданий, позволяющих понять степень освоения предыдущего содержания.

---

[1] Репкин В. В., Репкина Н. В. Развивающее обучение: теория и практика. — Томск: Пеленг, 1997. — С. 66—68.

[2] Александрова Э. И. Методика обучения математике. 2 класс. — М.: Вита-Пресс, 2001.

[3] Александрова Э. И. Методика обучения математике. 1 класс. — М.: Вита-Пресс, 1999.

Знания, которые ученик приобрел в процессе предметной деятельности в форме теоретических понятий, были зафиксированы в виде моделей: предметных, графических или буквенно-знаковых, а значит, важно проверить, насколько ученик может переходить от одной модели к другой, конкретизируя их в новых условиях решения задачи.

Задания 12—28 предоставляют такую возможность.

Так, в ***задании 12*** ученику предлагается по схеме составить математические выражения, а затем подставить вместо букв такие числа, с помощью которых можно было бы проверить (фактически самого себя) умение выполнять действия с многозначными числами.

Понятно, что нет необходимости каждому ученику работать над каждой из 4 схем. Нужно, как и прежде, предоставить ему возможность выбора «своей» схемы, тем более что к одной и той же схеме (схемы № 1, № 3, № 4) можно составить не одно выражение, а два и более.

Так, по схеме № 1 можно составить два выражения с точностью до перестановок:

$a - b - c$ или $a - c - b$ и $a - (b + c)$ или $a - (c + b)$,

а по схеме № 4 возможны следующие варианты:

$$(a + b + c) - k; \quad a + b + (c - k).$$

Если же продолжить поиск способов получения результата математического выражения, обозначенного на четвертой схеме знаком вопроса, то он может быть найден по формулам:

$$a + (b - k) + c \text{ и } (a - k) + b + c.$$

Выбор одной из 4 формул схемы № 4 для нахождения неизвестной величины будет зависеть от конкретных числовых значений. Так, формулой $(a + b + c) - k$ удобно воспользоваться, если, например $a = 10$; $b = 12$; $c = 25$; $k = 17$:

$$(10 + 12 + 25) - 17 = 47 - 17 = 30;$$

формулой $a + b + (c - k)$ — если $a = 11$; $b = 17$; $c = 29$; $k = 19$:

$$11 + 17 + (29 - 19) = 11 + 17 + 10 = 38 \text{ и т. д.}$$

Составив самостоятельно ту или иную формулу (математическое выражение) для нахождения значения неизвестной величины, дети собираются в группы для сопоставления результатов своей работы. Понятно, что в одну группу собираются дети, выбравшие одну и ту же схему для составления выражения. Поскольку разным детям нужно разное время на выполнение задания, то группы формируются постепенно. Как только набралось 4—5 человек, составивших выражение к одной и той же схеме, можно образовывать новые группы либо, не входя в группу, сопоставить свой результат с тем, который уже получен другими детьми. Ясно, что каждая образовавшаяся группа после сопоставления результатов выносит их на доску.

Обсуждать полученные выражения должны не те дети, которые их составляли, а те, которые работали над другой схемой; достаточно обратиться к детям с вопросом: «Как мог рассуждать тот, кто составил такое (показываете) выражение по данной схеме?»

Использование этого методического приема учит одних детей понимать других, учитывать форму записи результата (часто дети так небрежно и бессистемно пишут на доске и в тетради, что трудно понять смысл написанного), лаконично излагать свою точку зрения, оценивать свою работу, глядя на нее «со стороны».

Задания 14, 15, 17 помогут учителю проверить, насколько дети соотносят графическую модель со знаковой моделью (выражение) и с текстом задачи, который в конечном счете описывает предметное действие:

Предметное действие (текстовая задача)

$\updownarrow$

Графическая модель (схема)

$\updownarrow$

Буквенно-знаковая модель (формула)

Работа с графической моделью (схемой), ее преобразование для изучения общих свойств изучаемых понятий (в частности, мы имеем дело с понятием отношения), составляет одну из главных задач обучения.

Задания 18—21 носят явно выраженный рефлексивный характер. Они позволяют не только восстановить общий способ выполнения любого арифметического действия — от прикидки до определения цифры в каждом разряде, но и подобрать индивидуальные задания на сложение и вычитание многозначных чисел тренировочного характера[1], которые помогут ребенку избавиться от ошибок. Эти четыре задания можно выполнить одновременно, разбившись на группы, а затем обсудить их целостность.

Придумывая задания для других, ребенок не испытывает потребности в их выполнении, а значит, с него как бы снята ответственность за то, выполнимо ли придуманное им задание. Поэтому, предлагая ему выполнить (оформить) свое задание так, как он хотел бы, чтобы его выполнили другие, т. е. задать образец, мы тем самым вынуждаем его задуматься над назначением и выполнимостью задуманного им.

Практика не раз показывала, что многие дети, еще не умея адекватно оценивать свои возможности, считают, что придумать свое задание легче, чем выполнить данные. Все дети любят придумывать задания *для других*, но порой оказывается, что придуманное ребенком не только далеко от ожидаемого, но его просто невозможно выполнить, на самом же деле предложение *придумать задание* для других *необходимо* не тому, для кого он придумывал, а *для него самого*. По тому, какое задание придумывает ребенок, становится ясна степень осмысления им заданий, которые он до этого выполнял.

Так, в ***задании 23*** ученикам предлагается придумать такие же задачи, какие они должны решить с помощью схемы в ***задании 22***.

Предлагая ребенку придумать такую же задачу, мы сможем определить, какой смысл вкладывает ученик в слова «такую же», «такие же»: выделяет существенные признаки понятия или несущественные. Если ребенок ориентируется на отношения величин, зафиксированные в схеме, то придуманная им задача может отличаться от данной всем, кроме отношений между величинами. В ней может быть другой сюжет, может идти речь о других величинах, могут быть использованы другие буквенные или числовые данные, но отношения между величинами должны быть те же.

Уместно напомнить, что основой классификации (типологии) текстовых задач является не количество действий, которые нужно выполнить для ответа на вопрос задачи, а графическая, а значит, и знаковая модели, в которых зафиксировано выделенное отношение. Поэтому класс решаемых задач разбивается не на простые и составные, а на

[1] Дополнительные задания тренировочного характера включены в рабочие тетради, которые прилагаются к учебнику.

задачи, в которых описать отношение между известными и неизвестными величинами можно с опорой на различные графические модели: одни — с помощью отрезков, другие — с помощью многоугольников (в частности, прямоугольников или фигур, из них составленных), с помощью диаграмм, включая диаграммы Венна (круги Эйлера), с помощью графиков, графов и т. д. Задача считается решенной, если ребенок смог описать, опираясь на графическую схему, отношения между всеми величинами, о которых идет речь в задаче, с помощью формулы (уравнения или выражения). А вот ответить на вопрос задачи он сможет только в том случае, если будет уметь решать уравнения и находить значение выражения. В этом случае ребенок, наткнувшийся на задачу, для решения которой он составил незнакомое ему уравнение, подвергает более тщательному анализу ее условие, осваивая при этом такие учебные действия, как контроль и оценка. Ребенок по ходу чтения текстовой задачи составляет графическую схему (изображает величины отрезками) и, если необходимо, преобразует ее, после чего составляет выражение или уравнение типа $x =$ выражение. Это означает, что в обучении мы движемся не от отдельных действий к составлению выражения, а наоборот, т. е. от общего к частному.

Таким образом, успешность обучения решению текстовых задач будет зависеть от того, умеет ли ребенок перейти от текста к схеме и, что очень важно, от схемы к различным текстам. Одна и та же схема может описывать отношения между разными (однородными) величинами в задачах с разными сюжетами и объектами, характеризующимися данными величинами. Умение перейти от схемы к формуле (и наоборот) является ключом к освоению способов решения любой задачи.

Задания 24, 25, 26 и 27 помогут расставить необходимые акценты при усвоении детьми основного способа решения текстовых задач, суть которого, как известно, состоит в умении представить решение задачи в форме модели.

Выполнение ***задания 28*** покажет и учителю, и ребенку уровень усвоения способов решения задач. В качестве доказательства правильности решения задачи используют все те же схемы. Это значит, что одна часть детей сначала чертит схему, а затем ищет способ решения, а другая — сначала решает задачу «в уме», а затем обосновывает решение с помощью схемы.

При анализе способов решения задач не забывайте об ошибках, которые могут быть допущены при устном решении задачи («свернутым» способом).

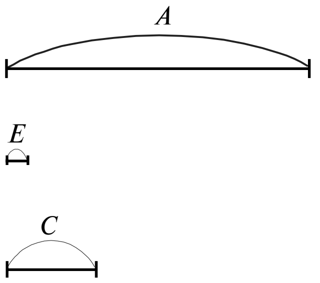
Отметим, что задачи подобраны таким образом, чтобы спровоцировать ребенка на те типичные ошибки, которые учителю хорошо известны. Например, слово «улетело» во второй задаче, как правило, «привязывается» детьми к действию вычитания, а выполнив сложение чисел 13 и 2 в четвертой задаче, некоторые дети считают, что задача уже решена, так как для ответа на вопрос, содержащий слова «сколько всего», нужно выполнить сложение, которое уже и сделано, а значит, задача решена, думает ребенок.

Таким образом, средством для обоснования собственной точки зрения и будет служить схема.

1.2. УМНОЖЕНИЕ КАК СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫЙ С ПЕРЕХОДОМ В ПРОЦЕССЕ ИЗМЕРЕНИЯ К НОВЫМ МЕРКАМ

Умножение, как уже говорилось, в курсе 3 класса рассматривается как особое действие, связанное **с переходом к новым меркам в процессе измерения величин**. При изучении позиционных чисел во 2 классе дети сталкивались с умножением, но не фиксировали его как арифметическое действие. Поэтому первая учебная задача здесь — это задача **воспроизведения величины** в ситуации, когда измеряемая **величина A много больше заданной мерки ($A >> E$)**, в связи с чем возникает необходимость использования вспомогательной, **промежуточной мерки**. *Одно* из чисел, описывающих эту ситуацию, фиксирует *отношение* вспомогательной мерки к исходной (или к стандартной) мерке, именно оно является основанием принятой системы счисления. *Второе* число — это количество вспомогательных мерок в измеряемой величине («по ... взять ... раз»), *третье* — отношение измеряемой величины к исходной мерке.

Другими словами, для воспроизведения величины с помощью исходной (основной, стандартной) мерки необходимо иметь не одно число, как это было раньше ($\frac{A}{E} = 5$, или $A = 5E$), а два: $\frac{A}{E} = m \cdot n$, одно из которых (m) описывает способ построения (измерения) вспомогательной (промежуточной, большой) мерки с помощью исходной (основной, единичной, маленькой) мерки, а второе (n) описывает способ построения (измерения) самой величины с помощью вспомогательной мерки (мерки-«помощницы»):

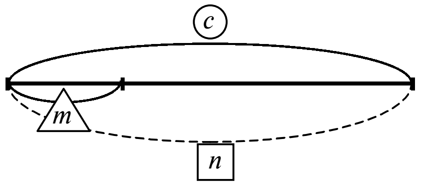


$$\frac{A}{E} = m \cdot n, \text{ где } m = \frac{C}{E};\ n = \frac{A}{C}$$

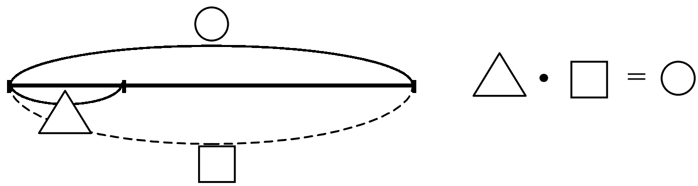
Таким образом, в описании нового способа действия участвуют два числа, которых достаточно для воспроизведения и построения исходной величины. Научившись выполнять арифметическое действие умножения, можно будет определять третье число, характеризующее это же действие измерения «прямым» способом, от которого дети отказались первоначально из-за неудобства.

Итак, исходя из предметного смысла нового действия — действия умножения, формула вида $\boldsymbol{m \cdot n}$ должна быть прочитана так: «по m взять n раз» или «n раз взять по m», где число m является количественной характеристикой новой мерки C, измеренной меркой E (E — основная единица измерения), а число n — количественной характеристикой величины A, измеренной меркой C.

Отношения между E и C, так же как и отношения между C и A, — это отношения частей и целого, поэтому и компоненты действия умножения могут быть оценены, опираясь на выделенное отношение: m — это часть, которая ранее обозначалась нами знаком треугольника $\triangle m$, n — это количество равных частей. Для обозначения этого компонента у нас еще нет специального значка, а значит, нужно предложить детям придумать недостающий знак, а лишь затем ввести тот, который используется в учебнике: $\boxed{n}$. Для обозначения целого воспользуемся известным знаком ◯. Целое также можно охарактеризовать числом, полученным либо в результате перемеривания исходной величины десятичной системой мер (стандартный способ описания величины), либо как результат арифметического действия умножения чисел *m* и *n*: $m \cdot \boxed{n} = c$. Схема, описывающая эти отношения, будет выглядеть так:



или



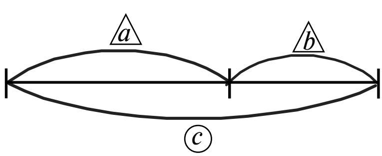
Понятно, что когда мы рассмотрели деление как предметное действие, направленное на определение промежуточной мерки («деление на части») или числа таких мерок («деление по содержанию»), появляется возможность установить содержательные связи между умножением и делением: теперь, кроме формулы

$$m \cdot \boxed{n} = c$$

появляются, по крайней мере, еще две:

$$c : m = \boxed{n} \text{ и } c : \boxed{n} = m.$$

Эти ***три*** основные ***формулы***, составленные по ***одной*** ***схеме***, позволят решать все простые уравнения и соответствующие им текстовые задачи. Полная аналогия с тем, как это было для сложения и вычитания, когда по одной схеме



дети составляли *три* основные формулы: $a + b = c$, $c - a = b$, $c - b = a$.

Кроме основных формул, как правило, по упомянутым схемам могут быть составлены и другие формулы:

$c - a - b = 0$, $c - (a + b) = 0$,

а $\cdot\, b - c = 0$, $c - a \cdot b = 0$, $c : a : b = 1$ и т. д.

Овладение умением строить графические модели умножения и деления, осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно является одной из важнейших задач данного этапа обучения.

Итак, прежде чем поставить учебную задачу, приводящую к изменению единиц измерения, рассмотрим учебные ситуации, требующие измерения и построения исходной величины удобной меркой. Другими словами, необходима учебная ситуация, требующая оценки своего умения измерять величину с помощью данной мерки и восстанавливать ее по числу и мерке.

Задания 19—31 помогут ребенку оценить свои действия. Скорее всего, на уроке возникнет ситуация успеха для большинства детей. Нет сомнения в том, что на третьем году обучения действия измерения и построения величин отработаны настолько, что вряд ли у кого-либо вызовут затруднения. Это значит, что выполнить эти задания можно, используя фронтальную или индивидуальную форму работы.

Думаем, что нет надобности здесь и далее напоминать о том, что такие ***задания***, как ***30, 31*** и ***32,*** выполняются путем организации *практических действий* детей, а не по картинкам или текстам в учебнике. Схемы, приведенные в заданиях 30 и 31, чертятся на доске с соблюдением пропорций и реальных отношений, причем каждый раз мерка должна умещаться в величине целое число раз.

Для введения понятия умножения, о предметном смысле которого говорилось выше, детям может быть предложена практическая задача. Решение этой задачи приводит детей к необходимости измерения величины (в частности, объема — ***задание 32***) в ситуации, когда использование исходной (основной) мерки для измерения данной величины крайне неудобно, так как предложенная мерка значительно меньше измеряемой величины ($E << A$).

Сюжет задачи, требующей установления таких отношений между данной величиной и меркой, может быть придуман учителем и «проигран» в классе. Итогом такой «игры» и станет конструирование нового способа действия, требующего использования новой, большей мерки взамен старой, маленькой. Итак, если величина A оказалась намного больше мерки E ($A >> E$), то нужно выбрать вспомогательную (новую, большую, промежуточную — эти слова использовать как синонимы) мерку-помощницу C, которая больше исходной (основной, старой, маленькой,...), и измерить величину A.

Покажем это на схеме и запишем новый способ формулой (см. ключ к заданию 32 и ***заданию 33***).

Оба эти задания сначала выполняются в классе (без опоры на учебник). Дома, выполняя эти же задания, ребенок может сделать попытку придумать новую практическую задачу, в которой для ответа на вопрос нужно было бы измерить большой объем воды A маленькой меркой E (задание 32), и описать ее решение с помощью схемы и формулы (задание 33).

Таким образом, ребенок дважды «проживает» эту ситуацию. Рисунки в учебнике и ключи к этим заданиям помогут ученику восстановить в памяти все, что происходило в классе, пропустив весь этот материал в буквальном смысле через свои руки.

Проигрывание в классе описанной выше учебной ситуации, приводящей к необходимости изменения единицы измерения исходной величины, можно организовать по крайней мере по двум «сценариям». Главное, чтобы ответ на вопрос задачи допускал использование выражения: «по a взять b раз» или $a \cdot b$, описывая тем самым способ измерения.

В этом случае результат умножения чисел a и b ребенку не нужен: чисел a и b достаточно, чтобы в другом месте или в другое время можно было воспроизвести (построить) исходную величину.

В зависимости от того, насколько большинство детей готовы мысленно представлять условия решения задачи на измерение с последующим воспроизведением (или подбором равной) величины, можно предложить следующие учебно-игровые ситуации.

Учитель ставит перед детьми большую емкость, например ведро с водой, и предлагает каждому дома налить в какую-нибудь посуду столько же воды.

Возникает вопрос о том, как это можно сделать. Обсудив ситуацию в группах, дети, без сомнения, предложат измерить данное количество воды. Теперь нужно задать вопросы тому, кто озвучит эту точку зрения. Естественно предположить, что первый вопрос: «Чем ты предлагаешь измерить, то есть какой меркой?», а второй: «Что дальше делать с этим результатом?»

Итогом обсуждения первого вопроса должна стать мысль о необходимости выбора единой мерки для измерения в классе и отмеривания дома. Такую мерку нужно заготовить для каждого. Например, маленькие одноразовые стаканчики (чашечки) или колпачки от бутылочек.

Если дети сразу предложат выбрать крупные мерки, например литровые банки или пластиковые бутылки, то нужно непременно зафиксировать способ действия, который детям хорошо известен, и предложить решить эту задачу в других условиях. Как можно поступить, если каждому домой дали маленький сосуд (чашка, стаканчик, колпачок), объем которого будет служить основной и единой для всех меркой для измерения объема большого ведра?

Вторая учебно-практическая (учебно-игровая) ситуация по своей сути не отличается от первой, с той только разницей, что может быть проиграна в классе, когда так называемое домашнее задание выполняется в классе, но в другом месте, пространственно отдаленном от места измерения. Эта пространственная удаленность может быть либо чисто условной, либо натурализованной: на одном столе дети измеряют величину, на другом, используемом символично, они отмеривают (строят, восстанавливают) величину, равную измеренной, при условии, что с одного стола нельзя ничего передавать на другой стол, кроме сообщения. Это сообщение может быть передано в том же виде, в каком дети могут «унести» его домой или сообщить по телефону тому, кто непосредственно не принимал участия в измерении. Это значит, что сообщение может быть представлено в форме модели: графической (схемой), буквенно-знаковой (формулы) и словесной («по ... взять ... раз» или «... раз взять по ...»).

Еще раз напомним, что ни в коем случае на данном этапе обучения не следует читать формулу умножения $a \cdot b$ иначе как «по a взять b раз», поскольку чтение этой формулы в привычных для взрослого человека формах «a умножим на b» или «произведение чисел a и b» скрывает от ребенка предметный смысл действия.

Поэтому не случайно в учебник включены ***задания 38, 39 и 40***, в которых детям предлагается заменить словесное описание действия формулой (задание 38) и наоборот (задания 39 и 40). Использование значков ◯, △ и □ для обозначения целого, частей и количества равных частей облегчает для ребенка поставленные задачи, тем более что ***задания 34—37*** помогут ученикам не только воспользоваться новым способом измерения (***задание 35***), но и представить его на графических моделях двух видов: с помощью отрезков (***задание 36***) и с помощью числовых прямых (***задания 34 и 37***).

Для того чтобы оценить то, как дети Маша, Оля и Коля из ***задания 41*** изобразили фигуры с площадью *S*, необходимо прежде всего уяснить вместе с учениками условия: для построения фигуры определенной площади им должна быть известна мерка и число как результат измерения, которое может быть задано в виде формулы умножения. Поэтому прежде чем предложить детям задание 41, можно записать на доске формулу умножения, например: «по 8 взять 2 раза» ($\triangle 8 \cdot \boxed{2}$), и раздать в группы фигуры, площади которых будут служить основной меркой. Эти фигуры должны быть разными по форме, с одинаковыми и разными площадями.

Сообщать о том, что разные группы детей получили разные мерки, не нужно. А вот обсудить вопрос о том, почему среди фигур, которые построят дети, будут фигуры одинаковой площади и разной, необходимо. Методика проведения этого урока аналогична методике проведения урока, описанного по отношению к ***заданию 44*** в книге для учителя «Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс» на с. 26—29.

После обсуждения способа построения величины по данной единичной мерке и формуле умножения можно перейти к выполнению задания 41.

Его можно предложить как для индивидуальной, так и для парной работы с последующим обсуждением у доски. Все 3 фигуры, изображенные в задании, следует перенести на доску или начертить на отдельных листах для использования в последующие годы. Можно использовать и кодоскоп, если он есть в активе у учителя.

Работу над ***заданием 42*** нельзя отрывать от предыдущей. Формулы, которые записаны от имени детей, могут быть получены учениками вашего класса, если предложить им записать результат измерения в форме многозначного числа в какой-либо системе счисления. Если какой-либо (из данных в задании 42) числовой формулы у ваших детей не окажется, то тогда их можно предложить от имени вымышленных детей (Маша, Оля, Коля), возможно и появление других форм записи числа как результата измерения величины системой мер с отношениями, отличными от заданных.

Задание 43 позволит увидеть, каким способом считают дети: кто-то будет пользоваться только одной меркой-клеточкой, а кто-то будет использовать вспомогательную мерку (мерку-помощницу), которой может быть горизонтальный или вертикальный ряд клеточек. В упражнениях ***2, 3, 7,***

8, 9 можно преобразовать форму фигур так, чтобы образовались равные по числу клеток ряды и стало удобно составлять формулу умножения. Например, в упражнении ***9*** достаточно двумя клетками, выступающими слева, дополнить левый верхний угол, чтобы записать формулу $\triangle 4 \cdot \boxed{4}$, которая фиксирует способ, которым легче всего подсчитать число клеточек в данной фигуре.

На данном этапе обучения нет необходимости вычислять произведение через сумму одинаковых слагаемых, главное — овладеть новым способом измерения и счета.

Задания 44 и 45 предполагают использование конструктора. Надо отметить, что пластинки с бугорками, из которых можно составлять различные фигуры, особенно важны для детей. Работа ребенка собственными руками позволит усвоить последовательность операций умножения как целостного действия:

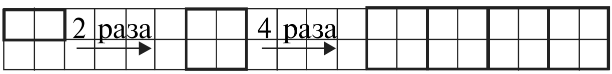
1) выявление нецелесообразности (или невозможности) прямого измерения (или счета) исходной меркой (единицей измерения или счета);
2) замена этой мерки большей и определение отношения большой (новой, вспомогательной, промежуточной — здесь это слова-синонимы) мерки к маленькой (исходной, основной, старой);
3) составление формулы умножения;
4) определение результата с помощью известных арифметических действий, в частности путем сложения одинаковых слагаемых или с помощью калькулятора. Тот или иной способ действия есть опосредствованное решение исходной задачи (В. В. Давыдов).
5) В заданиях, о которых идет речь ниже, вплоть до ***задания 59***, эту четвертую операцию пока выполнять не нужно. Главное — научиться составлять формулу и показывать, какой ее компонент сообщает о части, а какой — о количестве частей.
6) ***Задания 46, 47 и 48*** позволят увидеть, насколько ученик может установить связь между выражением «по... взять ... раз» и изображением его с помощью площади фигуры, насколько он понимает смысл каждого числа в формуле умножения.

Так, в задании 46 в качестве одной мерки предлагается взять площадь двух клеток. Важно проверить, какое число ребенок получит, когда будет измерять большую мерку-помощницу, 2 или 4.

Если он назовет число 4, это будет означать, что в качестве *единичной* мерки он воспринимает одну клетку вместо двух. Для того чтобы помочь ребенку увидеть единичную мерку (*смотреть на 2* клетки, а *видеть 1* мерку), необходимо изобразить в масштабе (крупнее) эти мерки и измеряемую величину *А* (здесь площадь прямоугольника) и предложить сначала раскрасить мерки и *А* в разные цвета, а затем вырезать их.

Учтите: мерки вырезать должен ученик сам, нельзя, чтобы их заготовил учитель или кто-либо из взрослых.

После измерения у ребенка должна получиться запись «по 2 взять 4 раза» и схема:



Задания 49 и 50 можно использовать для проверочной работы.

При выполнении задания 49 интересно посмотреть, смогут ли дети *самостоятельно*, без специального обсуждения показать на числовой прямой произведения, а в задании 50 ввести недостающие данные (без них дети могут сказать, что это задачи с «ловушками») и описать с помощью формулы способ нахождения неизвестного результата, предварительно изобразив все компоненты действия с помощью линейной (отрезками) или плоскостной (площадью фигуры) схемой. Кстати, предложите детям вне урока поинтересоваться в магазине, сколько батонов может умещаться на одном лотке и сколько лотков может войти в машину (с учетом разных размеров лотков и машин). Аналогичное задание можно предложить и относительно перевозки машин. Первая задача может оказаться по душе девочкам, а вторая — мальчикам.

Задание 51 даст возможность использовать числовые прямые для нахождения произведения и впоследствии перейти к способам нахождения произведения: 1) с помощью сложения одинаковых слагаемых; 2) с опорой на непосредственно следующее за данным произведением или предыдущее данному.

Отображение результата и процесса измерения данной величины способом введения вспомогательной (промежуточной, новой) мерки с помощью двух числовых прямых (или одной) — это еще один вид графической модели по отношению к графическому изображению смысла действия умножения с помощью отрезков.

Задание 52 является обратным по отношению к задаче на введение новой мерки и может быть выполнено с опорой на построение промежуточной мерки C. В первом случае A — это длина отрезка, а во втором — площадь прямоугольника. Если известно, что $\frac{C}{E} = 3$, значит, $C = 3E$. Тогда в первом случае $\frac{A}{C} = 2$, а во втором $\frac{A}{C} = 6$.

В ***задании 53*** предлагается изобразить величину A (это может быть длина или площадь), а значит, по исходным данным нужно будет построить мерки.

Пусть дети в парах или индивидуально (кто как захочет) без предварительного обсуждения всем классом выполнят построения. После этого поинтересуйтесь, какую единичную (исходную) мерку E выбрали дети. Теоретически ограничений на выбор исходной мерки нет, а фактически она может быть выбрана с учетом наличия места для изображения величины, которое отведено в тетради.

Если ребенок, прежде чем изображать величину A, представил, каких размеров получится ее изображение при выбранной им исходной мерке, то никаких «сюрпризов» он не получит. Если же он, не задумываясь над тем, как будет выглядеть графическая модель величины A, выбирает мерку E произвольно, то вряд ли удастся избежать проблем, если «не вмешается случай».

В этой ситуации можно будет проверить способ действия с опорой на предметное действие: предложите налить воды в банку (объем которой должен быть явно меньше, чем это необходимо) так, как сообщено данными формулами: $\frac{C}{E} = 5$ и $\frac{A}{C} = 3$. В качестве исходной мерки возьмите банку такого объема, чтобы, подобрав промежуточную, более крупную мерку C, в которую должно войти 5 мерок E, отлить в данную (заведомо неподходящую емкость) три мерки C было невозможно. В этом случае ученики, анализируя причину того, почему они не смогли выполнить задание, несмотря на то, что все практические действия выполнялись в точном соответствии формулам, придут к мысли о выборе исходной мерки. После практических действий и графического изображения величины A предложите записать способ построения (воспроизведения) величины A формулой. Запись должна быть такой: $\frac{A}{E} = \triangle 5 \cdot \boxed{3}$, независимо от того, какого рода была величина A — длиной, площадью или объемом.

Вторую часть задания 53 предложите детям выполнить самостоятельно. Сопоставив результаты работы разных детей, нетрудно будет убедиться в том, что, какую бы мерку E ни выбрали, $C = A$. Можно дополнительно задать исходное отношение $\frac{C}{E}$ другими числами и опять убедиться в том, что $C = A$, так как $\frac{A}{C} = 1$.

Таким образом, если $\frac{C}{E} = a$, а $\frac{A}{C} = 1$, то $\frac{A}{E} = \triangle a \cdot \boxed{1} = a$.

Итак, при умножении любого числа на единицу получается то число, которое умножаем.

После этого вывода предложите проверить равенство (третья часть задания 53):

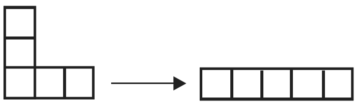
$\triangle 1 \cdot \boxed{a} = a$

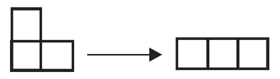
Важно, чтобы дети заметили, что в этом случае новая мерка равна старой: $C = E$, значит, $\frac{A}{C} = \frac{A}{E} = a$ ($a = 5$). Равенство верное.

Четвертая часть задания 53 позволяет рассмотреть умножение на 0: при умножении любого числа на нуль получается нуль. Понятно, что, какими бы ни были мерки E и C, результатом измерения нулевой величины A всегда будет число 0, т. е. $a \cdot 0 = 0$.

Задания 54—58, так же как и предыдущие, направлены на усвоение смысла умножения, на понимание связи между схемой и формулой, на умение переходить от одного способа записи (графической модели) к другой (знаковая модель) и обратно. В каждом из этих заданий предложено по несколько вариантов формул, мерок, фигур.

Нет необходимости каждому ученику последовательно выполнять все эти упражнения. Достаточно предложить выбрать только те задания, которые, как считает ребенок, он может и хочет выполнить. Выполнив тот или иной вариант каждого задания, дети могут объединиться в группы (по 4—5 человек) для соотнесения результатов работы с последующим представлением своих результатов для остальных. Это не значит, что дети, представляющие от группы свой вариант, должны проговаривать для остальных свой способ действий. Нет, пусть лучше те, кто не выполнял данный вариант, зададут вопросы на понимание, предложат свои способы действия, если у них они появятся в ходе анализа чужой работы. Так, например, в ***задании 55*** в четвертом и пятом вариантах форму данных мерок *E* можно изменить, что позволит упростить построение прямоугольников:

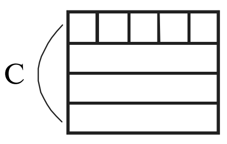
4) 

5) 

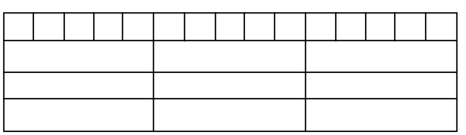
Ошибкоопасным местом в этом случае может быть пересчет клеточек: некоторые дети могут насчитать в первом случае 6 клеточек, посчитав, сколько их по вертикали (3) и сколько по горизонтали (3).

Именно это и нужно обсудить, предложив такой способ пересчета от имени других детей.

Построение прямоугольника по формуле $\triangle\!\!\!\!\!\!\;4 \cdot \boxed{3}$ требует сначала изображения промежуточной мерки. Например, в четвертом варианте промежуточная мерка будет состоять из 4 данных, т. е. выглядеть так:



Тогда прямоугольник, в котором «по 4 взять 3 раза» мерок *E*, должен быть таким:

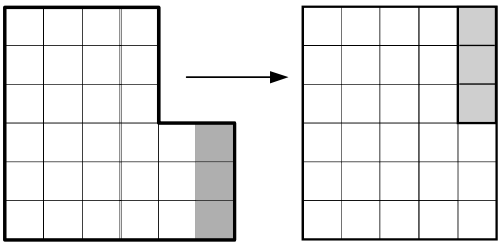


Построение промежуточной мерки и прямоугольника по формуле тоже является ошибкоопасным местом. Это важно обсудить после (а не *до*) выполнения задания.

Если какой-либо из 3 вариантов задания 55 не будет выбран детьми для выполнения, то нужно сначала выяснить мотивы, по которым никто не стал его выполнять. Если отказ был связан с какими-либо проблемами, то их важно обсудить. Если же дети отказались выполнять задание в связи с очевидной простотой (например, вариант 1), то рисовать прямоугольник не обязательно, достаточно объяснить словами, каким он будет.

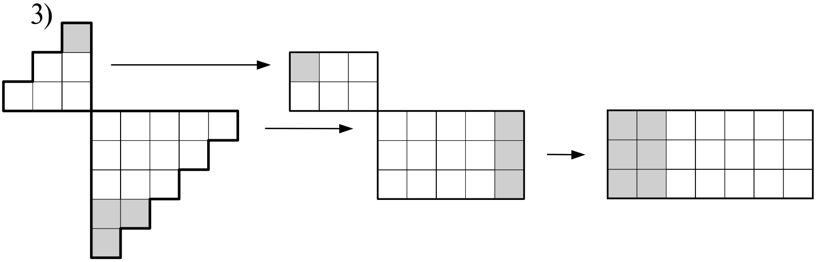
Аналогично можно поступить и с остальными заданиями. Во втором и третьем вариантах ***задания 56*** у фигур лучше изменить форму, сохраняя площадь, а затем записать формулы. Обе эти фигуры преобразовать либо в полный прямоугольник, либо в неполный.

2)



$\triangle 5 \cdot \boxed{6}$ или $\triangle 6 \cdot \boxed{5}$

3)



$\triangle 7 \cdot \boxed{3}$ или $\triangle 3 \cdot \boxed{7}$

Задание 57 предлагает придумывание задач и изображение их с помощью схемы. Понятно, что такое задание, как и другие задания на придумывание, лучше предложить для групповой работы. Желающие, как и раньше, могут работать в паре или индивидуально (кто как считает нужным), выбрав *одну* из данных формул.

Если вы обнаружите, что у детей это задание вызывает затруднение, то поступите следующим образом: запишите на доске формулу $\triangle a \cdot b$ (или используйте кодоскоп) и несколько (3—4) текстовых задач с буквенными данными *a* и *b*, среди которых должны быть 1—2 задачи на предметный смысл умножения.

Например: в одной упаковке *a* яиц. Сколько яиц в *b* упаковках?

Из данных текстовых задач предложите выбрать ту, которая подходит к одной из данных формул из задания 57. По смыслу эта задача подходит к каждой из них, а вот с учетом реальной ситуации она подходит к формуле $\triangle 12 : \boxed{5}$, поскольку действительно есть упаковки, в которые входит 12 яиц.

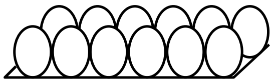
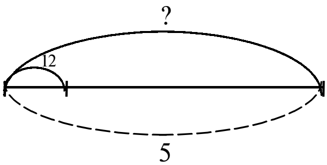
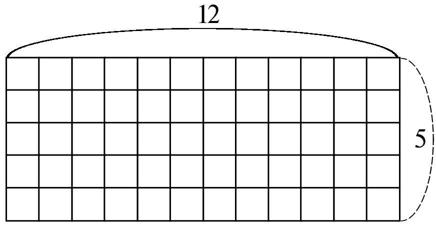


Схема к этой задаче может выглядеть так:





После соотнесения конкретных текстовых задач с данными формулами можно вновь предложить детям перейти к самостоятельному придумыванию задач по выбранной формуле.

Главное — и в первом случае, и во втором, подбирая или составляя задачу, обсудить, что выступает как исходная (маленькая) мерка, а что как промежуточная (большая).

В статье В. В. Давыдова «Психологический анализ действия умножения» подчеркивается, что на этой стадии обучения определенное значение имеют задания следующего типа: «Имеются три бочки. Указать самую маленькую и самую большую из них, если их вместимость выражена формулами 25 · 20; 25 · 30; 25 · 15, где первое число говорит о емкости ведра в литрах, а второе о количестве ведер, вмещаемых бочкой»[1] (эти формулы нужно дополнить значками $\triangle$ и $\square$).

Далее можно вводить задания, выполнение которых связано с пониманием строения самой формулы умножения. К ним относятся ***задания 59—61***, в которых произведение может быть найдено различными способами: в зада-

[1] Давыдов В. В. Психологический анализ действия умножения// Психологические возможности младших школьников в усвоении математики. — М., 1969. — С. 44.

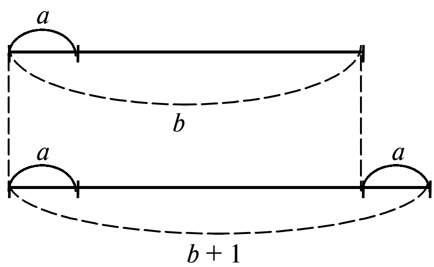
нии 59 — через сумму одинаковых слагаемых, а в заданиях 60 и 61 — с опорой на последующее или предыдущее произведение.

Выполняя задания 60 и 61, ученик находит искомые произведения либо с помощью сложения, либо с помощью вычитания:

$384 \cdot \boxed{5} = 384 \cdot \boxed{4} + 384$, а $384 \cdot \boxed{4} = 1536$ по условию.

Значит, $384 \cdot \boxed{5} = 1536 + 384$, а $384 \cdot \boxed{3} = 1536 - 384$.

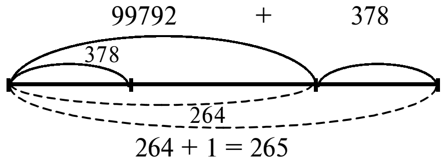
Как видно из записи, произведения могут быть найдены, опираясь на умение складывать и вычитать многозначные числа. Для выполнения таких заданий на первых этапах обучения необходимо чертить схему, которая показывает, что разница множителей в единицу (в 1 большую мерку) в произведении составляет число, рассказывающее о том, сколько раз маленькая мерка умещается в большой:



$a \cdot \boxed{b} + a = a \cdot \boxed{(b + 1)}$

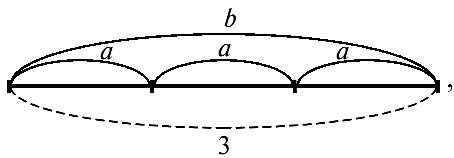
$a \cdot \boxed{b} - a = a \cdot \boxed{(b - 1)}$

Например, известно, что 378 · 264 = 99792, нужно найти 378 · 263; 378 · 265; 377 · 264; 379 · 264. Выполнение заданий данного типа сначала сопровождается опорой на схему, а лишь затем они выполняются в знаковой форме. Сравнивая данное произведение с произведением, у которого один из множителей отличается на единицу, учитель «подсовывает» ребенку «ловушку», предлагая к числу 99792 либо прибавить 1, либо отнять (в зависимости от множителя), т. е. записать: 378 · 265 = 99792 + 1 = 99793, что неверно. С помощью схемы ребенок должен доказать, что величина увеличилась на 1 большую мерку, в которой 378 маленьких, а значит, 378 · 265 = 99792 + 378.

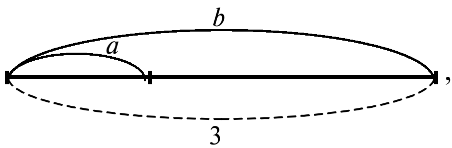


Эти задания позволяют включить отработку навыков сложения и вычитания многозначных чисел при одновременном рассмотрении смысла умножения.

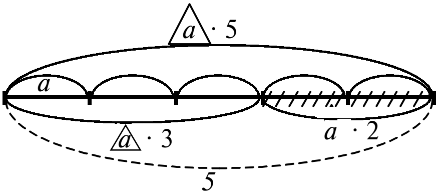
Однако следует помнить, что пунктирная линия на схеме, которая сообщает о том, сколько мерок вошло в величину, и о том, что все мерки при этом были одинаковы, не должна заменять изображение самих мерок, если их количество колеблется примерно от 2 до 6. Это значит, что схема к формуле $\triangle a \cdot \boxed{3} = b$ должна выглядеть так:



а не так:



хотя ошибки в этом нет. А вот рисовать 127 одинаковых мерок по формуле $a \cdot 127 = b$ нет необходимости, а изобразить 2, 3, 4 мерки не составляет труда, а значит, лучше показать каждую из них. При изображении схемой выражения $\triangle a \cdot 5 - \triangle a \cdot 2$ две мерки могут быть вычеркнуты, и значение выражения можно и показать, и записать: $\triangle a \cdot 5 - \triangle a \cdot 2 = \triangle a \cdot 3$.



Этот способ нахождения значения выражения еще не раз будет использован в дальнейшем.

Задание 62 продолжает линию обучения решению текстовых задач, раскрывающих смысл действия умножения. Однако две из трех задач содержат «ловушки»: одна из них является задачей с лишними данными (2), а другая — с недостающими (3). Интересно, как будут рассуждать дети, смогут ли самостоятельно доопределить одну задачу и избавиться от лишнего данного в другой. Как бы то ни было, при анализе всех трех задач, к которому можно приступить только после построения схемы, нужно уточнить, какое из данных рассказывает о маленьких (исходных) мерках, а какое — о больших (промежуточных). От этого будет зависеть выбор наименования у числа в произведении.

Задание 63 дано для диктанта, который может быть выполнен и проверен в классе с последующим обсуждением того, какие ошибки можно допустить при выполнении этих заданий и как можно избавиться от таких ошибок.

Итак, принципиальное отличие подхода В. В. Давыдова к введению понятия умножения состоит в том, что умножение появляется, во-первых, на основе предметного действия по изменению единицы измерения, а во-вторых, формула умножения может быть составлена *до и без* (выделено В. В. Давыдовым[1]) выявления слагаемых. Усвоение смысла умножения как сложения одинаковых слагаемых разведено и по сути, и по времени (первый множитель в произведении есть число, сообщающее об отношении между новой меркой и старой, а не слагаемое, как это традиционно принято).

1.3. ДЕЛЕНИЕ КАК ДЕЙСТВИЕ, ОБРАТНОЕ УМНОЖЕНИЮ

Введение действия деления является логическим завершением анализа ситуации измерения, когда измеряемая величина оказалась значительно больше основной мерки, что привело к необходимости использования промежуточной мерки.

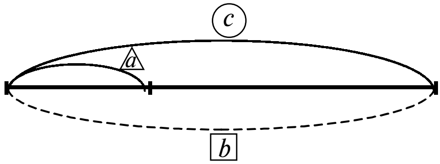
В описании нового способа действия измерения используются два числа ***a*** и ***b***, с помощью которых дети могут

[1] См.: Психологические возможности младших школьников в усвоении математики. — М.: Просвещение, 1969.

найти третье: $c = a \cdot b$, где число a сообщает об отношении промежуточной мерки к основной, число b — об отношении самой измеряемой величины к промежуточной мерке, а число c — об отношении измеряемой величины к основной мерке, причем этот результат получается опосредствованно.

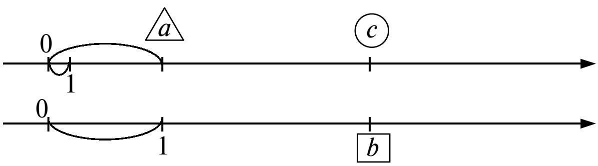
Этот способ измерения фиксируется с помощью графических моделей (схем) трех видов:

1) с помощью длин отрезков:



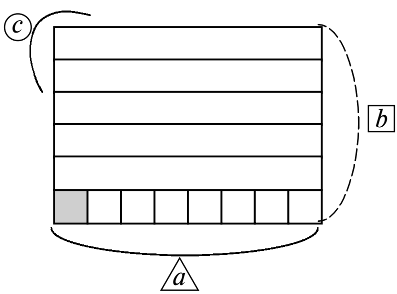
$a \cdot \boxed{b} = c$

2) с помощью двух числовых прямых: на первой шаг (единичный отрезок) равен исходной мерке E; на второй — промежуточной мерке C:



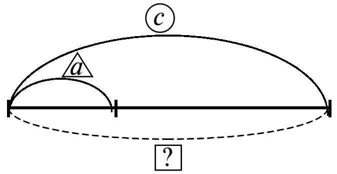
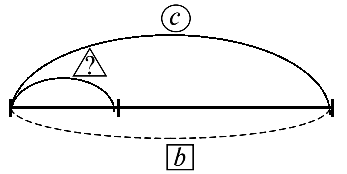
$a \cdot \boxed{b} = c$

3) с помощью площадей плоских фигур, в частности прямоугольника:



$a \cdot \boxed{b} = c$

Ясно, что если в задаче измерения будет неизвестно либо число a, либо число b, то задача поиска неизвестного числа, описывающего отношение между величинами, приводит к необходимости отразить это в графической (схеме) и знаковой (уравнение) моделях:

 или 

$\triangle x \cdot \boxed{b} = \bigcirc c$ $\qquad\qquad$ $\triangle a \cdot \boxed{x} = \bigcirc c$

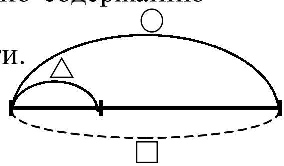
В первом случае неизвестно отношение измеряемой величины *A* к новой мерке (деление «по содержанию»), а во втором — отношение новой мерки *C* к старой мерке *E* (деление на равные части).

И в том и в другом случае неизвестное число может быть определено либо путем выполнения предметного действия (построения и перемеривания величины), либо путем вычислений, т. е. выполнением арифметического действия, которое и назовем *делением.*

Итак, если

$\triangle \cdot \square = \bigcirc$, то $\bigcirc : \triangle = \square$ — деление по содержанию

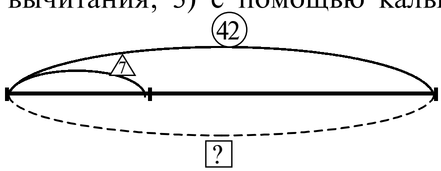
и $\bigcirc : \square = \triangle$ — деление на равные части.



Это значит, что схема умножения является и схемой деления.

В качестве основного смысла деления удобнее (в предметном плане) выбрать деление по содержанию, когда нужно искать отношение измеряемой величины к промежуточной мерке. Вычисления, связанные с поиском неизвестного, могут быть выполнены разными способами: 1) подбором неизвестного множителя (через сумму одинаковых слагаемых); 2) с помощью вычитания; 3) с помощью калькулятора.

Например:



$$\bigcirc 42 : \triangle 7 = \boxed{6}$$

$$\underbrace{7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}_{6 \text{ раз}} = 42$$

или

$$\bigcirc 42 - \underbrace{\triangle 7 - \triangle 7 - \triangle 7 - \triangle 7 - \triangle 7 - \triangle 7}_{6 \text{ раз}} = 0$$

Введение переместительного свойства умножения позволит свести поиск результата деления на равные части к описанным выше приемам.

Как и при изучении действий сложения и вычитания, изучение умножения и деления опирается прежде всего на графические модели (схемы).

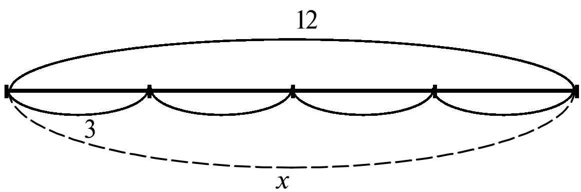
Задания 64, 65 и 66 предназначены для перехода к рассмотрению описанной выше учебной ситуации, приводящей к действию деления.

Так, в первой части задания 64 для составления уравнения с неизвестным множителем необходимо предварительно выполнить практическое действие: начертить отрезок 12 см и измерить его меркой в 3 см, которая является промежуточной по отношению к исходной мерке в 1 см.

Число 4 покажет, сколько раз отложили мерку 3 см в отрезке длиной 12 см.

Таким образом, неизвестным числом было отношение измеряемой длины к новой мерке.

Отрезок в 12 см оказался разделен на 4 одинаковые части по 3 см каждая:



Уравнение по тексту должно быть записано так:

$$3 \cdot \boxed{x} = 12$$

Ответ на вопрос задачи выглядит следующим образом:

$$x = 12 : 3$$

$x = \boxed{4}$

Знак деления можно показать только после обсуждения в группах вопроса о том, как описать с помощью формулы действие, которое позволяет узнать, сколько раз одна величина укладывается в другой, если известны их числовые значения.

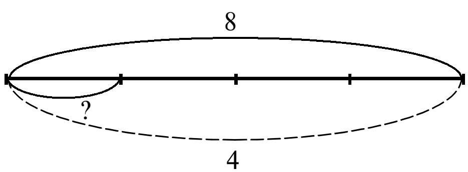
Возможно, дети предложат свой знак. Это действие и есть действие деления, для записи которого используют специальный знак «:».

Во второй части задания неизвестным множителем является сама мерка, т. е. отношения $\frac{A}{E}$ и $\frac{A}{C}$ известны, нужно найти $\frac{C}{E}$ — определить промежуточную мерку.

Эта задача — фактически обратная данной, с той лишь разницей, что измеряемая величина равна не 12 см, а 8 см.

Задание выполняется практически. Вырежьте полоску (нитку, проволоку, ленточку) длиной 8 см, и путем перегибания пополам дважды вы получите мерку, которая умещается в данной длине 4 раза. Она окажется равной 2 см.

Напомним, что способ перегибания мы уже использовали во 2 классе при изучении зависимости между величиной, меркой и числом. Не учитель показывает детям способ осуществления практического действия, а дети *сами* обсуждают и выполняют его.



$x \cdot \boxed{4} = 8$

$x = 8 : \boxed{4}$

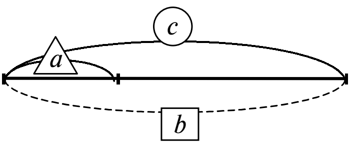
Анализировать другие способы нахождения результата деления, кроме практического в данном конкретном случае, пока не нужно, позже можно будет показать, что способ нахождения результата при делении на равные части фактически сводится к делению по содержанию. Например, если известно, что отрезок длиной 8 см разделили на 4 равные части, т. е. промежуточная мерка уместилась 4 раза и нужно узнать длину этой мерки, то это значит, что нужно узнать отношение новой мерки к старой в 1 см. Допустим, что новая мерка оказалась равна старой, это значит, что каждая из 4 равных частей равна 1 см, а все 4 части составят 4 см. Значит, 4 см — это по 1 см взять 4 раза: 1 см $\cdot\ \boxed{4} =$ 4 см, значит, каждые 4 см добавляют по 1 см к каждой из 4 равных частей. Поэтому для определения длины новой мерки, равной каждой из 4 равных частей, нужно 8 см : 4 $= \boxed{2}$ см.

Число 2 и будет сообщать о новой мерке.

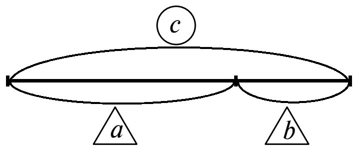
Введение переместительного свойства умножения позволит «на законном основании» пользоваться теми же способами нахождения результата деления по содержанию и деления на равные части, какими мы пользуемся при нахождении результата.

Самое главное, что должны усвоить ученики, — это взаимосвязь умножения и деления (по аналогии со взаимосвязью сложения и вычитания), которая рассматривается через общее отношение между частями, целым и количеством частей.

Графическая модель (схема) умножения—деления едина, как едина и схема сложения—вычитания:



или



Основных формул, описывающих отношения частей и целого, также три:

$a \cdot \boxed{b} = c$ $\qquad$ $a + b = c$

$c : a = \boxed{b}$ $\qquad$ $c - a = b$

$c : \boxed{b} = a$ $\qquad$ $c - b = a$

Формулы $c - a \cdot b = 0;$ $\qquad$ $c : (a \cdot b) = 1,$

$a \cdot b - c = 0;$ $\qquad$ $(a \cdot b) : c = 1$

и другие можно рассматривать как следствие из основных.

Комбинации этих двух схем, приведенных выше, и формул, описывающих отношения между всеми составляющими величинами, позволяют решать целый класс уравнений, текстовых задач, находить значения выражений.

Это значит, что основной акцент на данном этапе обучения необходимо сделать на составление схем и формул к ним.

Именно этим целям и подчинены ***задания 67—77***. Содержание этих заданий вряд ли вызовет затруднения. Напомним лишь о том, что ребенок сам выбирает схему, задачу или уравнение, с которым он хотел бы поработать. В одних случаях можно предложить выбирать и выполнять ту часть задания, которую он может осилить без ошибок. В других — предложите ему задуматься лишь над теми, которые он считает либо наиболее интересными, либо наиболее трудными.

Кстати, очень часто ребенок считает интересным для себя заданием именно то, которое ему кажется трудным. Это замечательно, поэтому старайтесь выяснить, почему то или иное задание он считает для себя интересным, на что он при этом ориентируется: на новизну способа действия или отношения между величинами либо на внешние элементы занимательности. Подробнее о формировании учебно-познавательных интересов и методиках его изучения читайте в работах А. К. Дусавицкого: «Воспитывая интерес» (М.: Знание, 1984); «$2 \times 2 = x$» (М.: Инфолайн, 1995); «Развитие личности в учебной деятельности» (М., Дом педагогики, 1996) и др.

Дадим лишь краткий комментарий к некоторым из перечисленных заданий. Так, в задании 67 под номером 5 предложена схема, с помощью которой могут быть решены так называемые задачи на куплю-продажу, на бассейны, на скорость, на производительность труда и многие другие, поэтому составление формул, описывающих отношение между величинами, имеет огромное значение. Чем больше формул будет составлено, тем шире круг решаемых задач и уравнений.

Запишем основные формулы, которые должны быть составлены по пятой схеме (остальные четыре схемы в этом задании фактически являются ее элементами, заданными в прямой или косвенной форме):

$$a \cdot c + b \cdot k = m$$
$$m - a \cdot c = b \cdot k$$
$$m - b \cdot k = a \cdot c$$
$$(m - a \cdot c) : k = b$$
$$(m - a \cdot c) : b = k$$
$$(m - b \cdot k) : a = c$$
$$(m - b \cdot k) : c = a$$

Кроме этих формул, дети могут предложить и такие: $\mathrm{m} - (a \cdot c + b \cdot k) = 0$; $a \cdot c - (m - b \cdot k) = 0$; $(\mathrm{m} - a \cdot c) : k : b = 1$; $(m - b \cdot k) : a : c = 1$ и т. п.

Специально учить детей составлению подобных формул *не нужно*. Для решения уравнений и текстовых задач достаточно основных, причем левую и правую части каждой из записанных формул можно поменять местами (свойство симметричности отношения равенства: при любых значениях a и b из множества M если $a = b$, то $b = a$). Другими словами, формулы $a = b$ и $b = a$ можно считать одинаковыми.

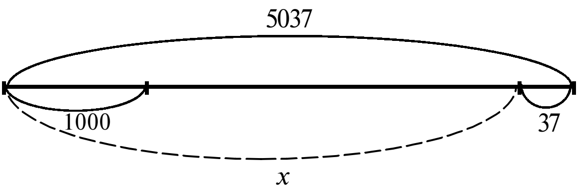
Проставлять значки $\triangle$, $\square$ и $\bigcirc$ во всех формулах не нужно. Достаточно их расставить в схеме, помня о том, что понятия частей и целого — это относительные понятия.

Например, величина $\overset{\triangle}{a} \cdot \boxed{b}$ одновременно является целым по отношению к $\overset{\triangle}{a}$ и частью по отношению к m (см. схему).

Запись каждой формулы должна сопровождаться *показом* на схеме соответствующего элемента.

Один ученик пошагово составляет формулу, другой *синхронно* показывает соответствующий элемент схемы (и наоборот). Для выделения соответствующих элементов схемы можно ввести цветовую гамму. Особенно важен цвет для труднообучаемых детей.

В ***задании 75*** по каждой схеме можно составить несколько уравнений. Например, по первой схеме:



$$1000 \cdot x + 37 = 5037$$
$$5037 - 37 = 1000 \cdot x$$
$$5037 - 1000 \cdot x = 37$$
$$(5037 - 37) : x = 1000$$
$$(5037 - 37) : 1000 = x$$

Последнее уравнение дает возможность вычислить значение x. Именно это уравнение является решением (корнем) четырех предыдущих, поэтому, как правило, дети именно его и составляют, если в задании требуется вычислить, чему равен x.

Они сразу пишут:

$$x = (5037 - 37) : 1000$$

Деление дети могут выполнить, как всегда опираясь на схему, представляя результат измерения величины (записанной числом 5000) меркой (1000) в виде:

$$5000 : 1000 = 5$$

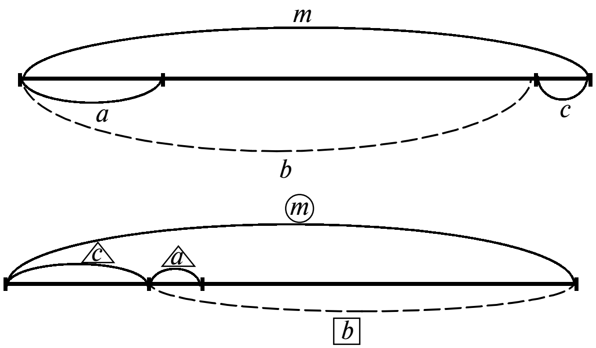
Вычисления производят только те дети, которые смогут, при этом они сопровождают их объяснением собственного способа действия, что наверняка вызовет интерес у остальной части детей.

Составлять схемы к ***заданию 76*** необходимо только в том случае, если способ нахождения результата вызывает затруднения или выбран неудачно.

Обсудите, изменится ли значение первых двух выражений, если поменять местами слагаемые в выражениях:

$$259 + 1576 \cdot \boxed{3} \text{ и } 1317 + 212 : \boxed{3}$$

Проиллюстрируйте это с помощью схемы (она для обоих выражений одна и та же). Тем самым мы начинаем пока еще в неявном виде изучать порядок выполнения действий.



$$a \cdot \boxed{b} + c = c + a \cdot \boxed{b} = m$$

В заданиях второго столбика дети должны научиться «расшифровывать» смысл компонентов в выражениях. Число в треугольнике рассказывает о промежуточной мерке, а число в квадратике сообщает о количестве этих мерок: выражения могут описывать предметные действия над величинами в ситуации, когда в результате должна остаться одна большая (промежуточная) мерка:

$$27 \cdot \boxed{23} - 27 \cdot \boxed{22} = 27 \cdot 1 = 27$$

$23 - 22 = 1$

одна большая мерка,
в которую входит 27 маленьких

После выполнения этих заданий обязательно предложите детям обсудить, какие ошибки можно допустить при выполнении каждого задания.

Ошибкоопасные места в заданиях из первого столбика — вычисление суммы или разности. Пока нет смысла говорить о порядке действий, поскольку на данном этапе и в данных выражениях такие ошибки маловероятны.

В заданиях второго столбика ответ может быть записан в виде разности между изменяющимися множителями, т. е. равным единице. Если никто из детей не допустит такой ошибки, пусть ее сделает учитель, обосновав ответ.

Пусть дети с помощью схемы докажут вам, что речь идет об *одной* большой мерке, в которой содержится указанное в треугольнике число маленьких мерок, а именно их мы и считаем, когда измеряем величину.

***В задании** 77* можно во 2-м и 4-м уравнениях сначала найти значение выражения, упростив тем самым уравнение, а затем искать неизвестную величину, но лучше не навязывать детям такой подход. Значительно лучше, если ученики будут действовать с выражением (числовое значение которого всегда можно найти) как с известным компонентом.

Это значит, что сначала они должны записать способ нахождения неизвестной величины, а лишь затем произвести необходимые вычисления там, где это возможно.

Этот подход к решению уравнений, содержащих числовые выражения, значение которых не нужно находить заранее, характерен при решении задач в физике, когда неизвестную величину сначала выражают через известные (в буквенном виде), а лишь затем подставляют их числовые значения. В математике эффективность такого подхода при решении уравнений так же очевидна. При определенных числовых значениях может оказаться, что вычисления могут оказаться преждевременными, поскольку после записи конечного выражения может быть выбран такой удобный (рациональный) способ вычислений, который отличается от первоначального. Например, дано уравнение:

$$x + 3785 \cdot 264 = 265 \cdot 3785$$

Если действовать в соответствии с первым подходом, то нужно сначала выполнить умножение, вычислив оба произведения, а затем из одного числа вычесть другое, чтобы узнать, чему равен x. В соответствии со вторым, ничего не вычисляя, запишем:

$$x = 265 \cdot 3785 - 3785 \cdot 264$$

Очевидно, что, опираясь на переместительное свойство, число 3785 можно рассматривать как характеристику большей мерки, тогда значение искомой величины x может быть вычислено устно:

$$x = 3785 \cdot 265 - 3785 \cdot 264$$

$$x = 3785$$

В задании 77 детям предлагается порассуждать, почему знак «квадрат» (□) можно не ставить, если сто́ит знак △.

Ясно, что если один из двух множителей помечен знаком △, то это уже означает, что другому множителю может соответствовать только другой знак □ и, значит, одного знака △ вполне достаточно.

Более того, если договориться записывать число со знаком △ первым в формуле умножения, то и он будет не нужен. Однако спешить с отменой знака △ не нужно, поскольку он помогает ученику удержать смысл действия. Его можно и нужно снять после изучения переместительного свойства умножения, которое фактически позволит ставить этот знак на том множителе, на котором удобно для последующих вычислений.

Для подготовки к освоению свойств умножения предназначены ***задания с 78 по 104***, многие из них фактически опираются на эти свойства и могут быть выполнены, опираясь на предметные действия или графические модели задолго до специального изучения свойств и их знаковых и словесных описаний.

Так, особенностью ***задания 78*** является то, что изображена только часть объекта измерения (количество клеточек в прямоугольниках).

Выполнение этого задания лучше предложить для индивидуальной (или парной) работы. Оно фактически является диагностическим: если ребенок усвоил смысл умножения, то он запишет формулы для вычисления, причем по отношению к каждому объекту их может быть две. Например, к первому объекту счета:

$$\overset{\triangle}{7} \cdot 10 \text{ или } \overset{\triangle}{10} \cdot 7$$

Не обсуждая их достоинства или недостатки, предложите вычислить с их помощью, сколько всего клеточек в прямоугольнике (фактически дети находят его площадь, исходной единицей измерения которой является площадь одной клетки). Если окажется, что часть детей воспользовалась одним выражением, а другая часть другим, то пусть представители от разных групп детей обсудят между собой, каким способом действовать удобнее и почему.

После таких обсуждений предложите (без предварительного анализа) записать удобную формулу (выражение) для подсчета результата в ***задании 79***.

Работа над ***заданиями 80—104*** может быть организована по усмотрению учителя. Многие из этих заданий содержат большое число однотипных упражнений, а значит, нет необходимости все эти упражнения выполнять каждому ученику. Как и раньше, разные дети могут выбрать разные упражнения, а взаимопроверка и проверка разных заданий у доски дадут возможность каждому ученику «прикоснуться» к каждому из них, оценивая, анализируя и сопоставляя способы их выполнения.

Стимулируйте детей к постановке вопросов, предлагайте им самим составить (придумать) такие задания, с помощью которых можно было бы проверить, понимает ли ученик, как действовать в том или ином случае, какие ошибки могут быть допущены при выполнении того или иного задания. Дайте больше простора детям при выборе заданий и способа организации работы над ними. Организуйте дискуссии между ними по спорным вопросам. Меньше говорите сами, больше слушайте, что говорят дети. Вступайте в диалог только в том случае, если у вас есть аргументы в защиту вашей точки зрения.

Сделаем несколько замечаний к отдельным заданиям.

В ***задании 84*** ученикам предлагается выделить в равенствах части и целое, однако одна и та же величина может быть одновременно и частью, и целым (в этом-то и «ловушка»!). Это значит, что в выражениях $a \cdot b + c = k$, $b : c - m = k$ для обозначения частей и целого нужно будет ввести цвет, чтобы показать, частью какого целого является тот или иной компонент. Например:

$$a \cdot b + e = k$$

a — часть по отношению к произведению $a \cdot b$, а само произведение является частью $a \cdot b$ по отношению к сумме k.

Значки △, ○ и соответствующий знак действия нужно выделить одним цветом.

В ***заданиях 85 и 86*** подбор чисел связан с выполнимостью арифметического действия. Поскольку ученики знакомы лишь с целыми неотрицательными числами, то операции вычитания и деления не всегда выполнимы. Обсуждая вопрос о «подходящих» числах, дети фактически выясняют в неявном виде, какова ***область допустимых значений*** букв.

Понятно, что построить полную картину пока не удастся, да и не нужно, но зафиксировать некоторые моменты такого исследования уже можно. Например, подбирая подходящие числа к выражению $k - c$ (***задание 85***), дети должны прийти к выводу о том, что k должно быть больше или равно c ($k \geq c$), а если ко всему числа k, b и c включены в качестве данных в текстовую задачу, придуманную ребенком, то нужно еще учесть, какие конкретные числовые значения можно подставлять вместо букв. В этом случае иногда можно указать и интервал, предварительно обсудив наибольшее и наименьшее числовое значение буквы.

Подбор чисел для деления, с последующим обсуждением способа подбора, покажет, насколько дети осознают взаимосвязь между умножением и делением, понимают ли они то, что, подобрав 2 множителя и вычислив их произведение, они тем самым подбирают числа для деления.

Умение подбирать числа пригодится (в первую очередь) при решении текстовых задач с буквенными данными. Обучение решению таких задач и составляет одну из важнейших целей обучения.

Выполнению действий с числами также необходимо придать серьезное значение. Так, в ***задании 90*** детям предлагается после произведенных вычислений обсудить вопрос об ошибкоопасных местах. Поскольку произведение дети находят с помощью действия сложения, то вычислительные ошибки, которые могут быть допущены при нахождении числового значения каждого из данных выражений, могут быть при выполнении сложения и вычитания. Однако если каждое данное выражение содержит несколько действий, то неизбежно возникает вопрос о *порядке действий*. Так вот, на данном этапе обучения никаких правил определения порядка выполнения действий не требуется. Опорой в определении порядка действий является схема. Если дети затрудняются ее составить по выражению, то необходимо предложить на выбор несколько готовых схем (3—4), среди которых должна быть подходящая. Первичным является переход от схемы к формуле. Когда дети научатся выполнять арифметические действия в установленном порядке, гибко подходить к изменению порядка действий, не меняя при этом отношений между компонентами, только тогда можно предложить им самим сформулировать в словесном виде правило.

Итак, если ребенок научится выполнять действия в определенном порядке, то сформулировать правило (научить другого) не составит для него особого труда Причем если за каждым его словом будет стоять практическое действие, которое он *мысленно* представляет, то проблемы, связанные с освоением порядка выполнения действий, постепенно исчезнут у большинства детей.

К вопросу о порядке действий мы еще вернемся, а пока перейдем к рассмотрению свойств умножения, ведь именно свойства арифметических действий сложения (алгебраического) и умножения (к нему на множестве действительных чисел сводится деление: $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$, если $b \neq 0$) лежат в основе тождественных алгебраических преобразований (выражений), позволяющих менять порядок действий. Например:

$$a - b + c = a + (c - b)$$

Выбор удобного порядка выполнения действий обусловлен конкретными числовыми значениями букв.

Обосновать тождественность трех выражений можно лишь заменив вычитание сложением: $a - b + c = a + (-b) + c$ и опорой на переместительное и сочетательное свойства сложения: $a + (-b) + c = a + c + (-b) = a + c - b$ или $a + (-b) + c = a + (c + (-b)) = a + (c - b)$.

Понятно, что в начальной школе обосновать тождественность таких преобразований с опорой на свойства операций невозможно, поэтому принято формулировать различные правила таких преобразований: правило вычитания числа из суммы, суммы из числа и др.

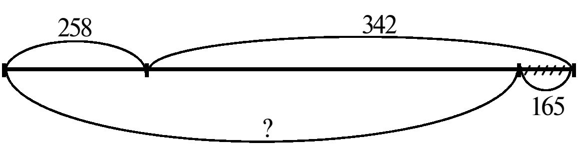
Мы же предлагаем опираться на схему в выборе порядка действий, поскольку опереться на свойство также не можем.

По схеме очевидно, что $a - b + c = a + c - b$.

Если сначала сложить a и c, то b можно вычесть как из a, так и из c, при условии, что $b < c$.

Выбор порядка действий будет определен конкретными числовыми значениями.

Например, чтобы найти значение данного выражения: 342 — 165 + 258, удобнее сначала 342 сложить с 258 и, получив круглое число 600, отнять от него 165.



Если же выражение таково: 342 — 165 + 565, то удобнее поступить так: 342 + (565 — 165) = 342 + 400 = 742 — и так далее.

Понятно, что чем раньше дети заучат известные правила определения порядка действий в выражении (со скобками и без), тем меньше гибкости они проявят в поиске рационального способа действий.

Таким образом, иллюстрацией всех тождественных преобразований арифметических и алгебраических выражений становится схема, а теоретической основой являются свойства сложения и умножения (переместительное, сочетательное, распределительное), которые не могут быть применены в полной мере на множестве натуральных чисел. Именно эта ограниченность их применения традиционно приводит к необходимости формулировать набор правил, опираясь на которые ученик может осуществлять тождественные преобразования арифметических (числовых) выражений: правило сложения числа с суммой, суммы с числом, вычитания числа из суммы и суммы из числа, выполнения порядка действий в выражениях без скобок, со скобками и т. д.

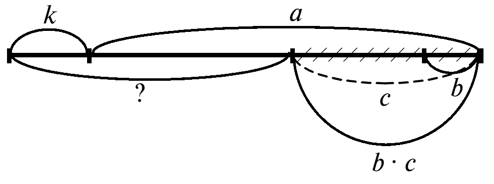
Отказаться от зазубривания перечисленных правил возможно лишь в том случае, если ученик может восстановить по знаковой модели (формуле, выражению) графическую модель, которая отражала бы некие предметные действия, выполненные с реальными предметами *в определенном порядке.*

Адекватное описание предметных действий с помощью графической, а затем знаковой модели является основой для определения порядка действий в конечном виде «коротким» способом с помощью знаковой модели: например, устанавливается, что умножение и деление нужно делать раньше, чем сложение и вычитание. Однако работа со схемами позволяет ребенку действовать несколькими способами, в то время как жестко заданное правило, устанавливающее порядок выполнения действий, приводит к единственному способу (что было проверено на учителях, обучающих детей).

Пример. Для нахождения значения выражения вида $a - b \cdot c + k$ нужно выполнять действия в таком порядке: 1) $b \cdot c = m$; 2) $a - m = d$; 3) $d + k = t$. С точки зрения детей и учителей, этот порядок действий рассматривается как единственно правильный. Однако дети часто действуют так: 1) $b \cdot c = m$; 2) $m + k = e$; 3) $a - e = t$, следуя формулировке правила, суть которого сводится к тому, что сначала слева направо нужно выполнить умножение и деление (в выражениях без скобок, в которых есть действия двух степеней), а затем слева направо *сложение* и вычитание[1] (выделено нами — Э. А.).

Поскольку слово «сложение» называется раньше, чем «вычитание», то это и становится причиной ошибки, которую допускают дети. После умножения выполняют сложение, а затем вычитание.

Опора на схему, на основании которой было записано данное выражение, позволяет ребенку изменять порядок действий, выбирая его в зависимости от конкретных числовых значений:



Вопросом обозначено искомое значение выражения.

По схеме видно, что можно искать значение выражения следующим образом:

I вариант	II вариант			III вариант
1) $b \cdot c = m$	1) $b \cdot c = m$		1) $a + k = e$	1) $b \cdot c = m$
2) $a - m = d$	2) $a + k = e$	или	2) $b \cdot c = m$	2) $k - m = t$, если $k > b \cdot c$
3) $d + k = p$	3) $e - m = p$		3) $e - m = p$	3) $t + a = p$

Конкретные числовые значения букв *a*, *b*, *c* и *k* дают возможность выбрать рациональный способ вычисления (к рациональному способу относятся способы, которые не только короче по составу действий, но и содержат меньше ошибкоопасных мест).

Таким образом, изучаемые свойства арифметических действий не только имеют предметное содержание, но и могут быть наглядно представлены с помощью графических моделей (схем).

[1] См.: Никольский С. М., Потапов М. К. и др. Арифметика. 5 класс. — М.: Изд-во УНЦ ДР МГУ, 1996.

Итак, ***задания 105—140*** направлены на изучение и использование свойств умножения. Исследование свойств опирается на предметные действия ребенка, фиксирующиеся с помощью графических и знаковых моделей. В ***задании 105*** обсуждается **переместительный закон** (свойство) умножения, в **задании 124 — распределительный** закон умножения (относительно сложения и вычитания), а в ***задании 130 —*** **сочетательный**.

ТЕМА 2. СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ

Общим подходом к изучению свойств умножения является поиск разных способов вычисления произведения, основанного на поиске удобных способов измерения величин. Исследование вновь опирается на графическое моделирование.

2.1. ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН УМНОЖЕНИЯ

В ***задании 105*** под ключом подробно прописаны постановка учебно-практической задачи и способ ее решения, позволяющий выявить переместительный закон умножения.

Открывать учебники для постановки и решения задачи на вычисление не нужно. Задание выполняется на уроке, все записи производятся на доске после соответствующего обсуждения в группах тех гипотез, которые появятся у детей, в связи с необходимостью найти способ для вычисления произведения $\triangle 2 \cdot 3756$.

Выслушайте предложения детей. Особенно важно в исследовании уйти от конкретного произведения, начертив *общую* (для любых числовых выражений) схему в форме прямоугольника. Она приведена в учебнике под ключом к заданию 105.

Этот переход нетрудно осуществить, задав детям вопросы: «Способ вычисления, который вы будете искать, подойдет только к данным числам 2 и 3756? Как показать, что вместо чисел 2 и 3756 могут быть любые другие числа? В чем суть способа, которым вы предлагаете воспользоваться? Какое равенство вы собираетесь проверить?» И т. д.

В результате обсуждения может появиться такая запись:

$$\triangle a \cdot \boxed{b} \overset{?}{=} \triangle b \cdot \boxed{a}$$

Записи $\triangle b \cdot \boxed{a}$ *и* $\boxed{a} \cdot \triangle b$ по смыслу совпадают, поскольку в обеих характеристикой мерки является число b (оно в треугольнике), а о количестве таких мерок рассказывает число a, которое может быть заключено в квадратик.

Опираясь на переместительное свойство, можно вывести правило умножения любого натурального числа на разрядные единицы, т. е. на 10, 100, 1000 и т. д.

Умножение разрядной единицы на натуральное число непосредственно связано с формой записи многозначного числа, переместительное свойство умножения позволяет свести умножение на 10, 100, 1000 и т. д. к понятной детям записи результата такого произведения: при умножении какого-либо числа на 10 достаточно приписать к этому числу 0 справа, при умножении на 100 — два нуля и т. д.

Другими словами, при умножении на 10 каждая мерка в системе мер увеличивается в 10 раз, а это значит, что цифры в произведении те же, что и в множителе, отличном от 10, только они сдвинуты на один разряд влево, а в разряде единиц будет записан 0.

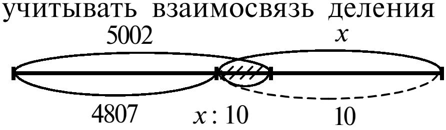
Понятно, что, получив правило умножения какого-либо числа на 10, 100, 1000, т. е. на степень числа 10, можно получить и обратное правило деления круглого числа на степень числа 10, что и предлагается в ***задании 114***.

Далее следуют упражнения, требующие использования этих правил.

Особое внимание следует обратить на решение уравнений в ***задании 118***, а точнее, на построение схем к некоторым из них, в частности

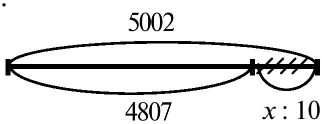
$$5002 - x : 10 = 4807$$

Как правило, начертить схему к такому уравнению трудно, если не учитывать взаимосвязь деления и умножения.

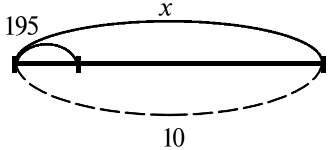


Отсюда $x = (5002 - 4807) \cdot 10$.

К этому же уравнению можно составить схему, состоящую из двух схем, следовательно, и решение уравнения получим в два этапа:



$x : 10 = 5002 - 4807$



$x = (\overset{195}{5002 - 4807}) \cdot 10$

2.2. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН УМНОЖЕНИЯ

Задание 123 фактически готовит учеников к обсуждению распределительного свойства умножения (относительно сложения), которым они, опираясь на модель, уже пользовались при вычислении произведений, у которых множитель отличается от данного на 1—2 единицы (мерки). Кстати, целесообразно напомнить, что если дети, работая с числами, используют терминологию, связанную с измерением величин, т. е. говорят о мерках больших и маленьких, об измеряемой величине, то это может означать, что они «видят» предметные действия, которые описаны с помощью числовых или буквенных формул, что очень хорошо. Действуя с числами, ребенок продолжает тем не менее удерживать предметный смысл этих действий.

В ***задании 124*** сказано о том, что некие ученики решали задачи и нарисовали схемы. На уроке же следует сначала предложить последовательно три задачи, соответствующие данным схемам. Например, такого типа:

Две группы детей сажали деревья. Одна посадила 5 рядов по 8 деревьев в каждом, а другая 3 таких же ряда. Сколько всего деревьев посадили дети?

Решение этой задачи может быть записано так:

$\triangle 8 \cdot 5 + \triangle 8 \cdot 3$ — или так:

$\triangle 8 \cdot (5 + 3)$, а поскольку оба выражения сообщают о том, сколько всего деревьев было посажено, то между ними может быть поставлен знак равенства:

$$\triangle 8 \cdot 5 + \triangle 8 \cdot 3 = \triangle 8 \cdot (5 + 3)$$

Остается лишь выяснить, какой способ вычисления удобнее, а затем записать полученное числовое равенство с помощью букв, подчеркнув тем самым, что использование обоих способов вычислений *не зависит* от конкретных числовых значений, а вот выбор одного из двух способов при вычислениях как раз и будет зависеть от данных чисел.

Значение выражения $\triangle 1834 \cdot 263 + \triangle 1834 \cdot 737$ удобнее найти, применив свойство:

$\triangle 1834 \cdot \overbrace{(263 + 737)}^{1000} = 1834000$, а вот произведение $124 \cdot 12$ лучше вычислить так: $124 \cdot 10 + 124 \cdot 2$.

Напомним, что умножение на 2 (на 3, на 4) пока выполняется с опорой на сложение: $124 \cdot 2 = 124 + 124$, выполняемое устно или письменно (столбиком).

2.3. СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН УМНОЖЕНИЯ

Задание 130 позволяет ввести сочетательный закон умножения, позволяющий, как и предыдущий, в сочетании с переместительным законом изменять порядок действий так, как удобно: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b$

Для изучения этого свойства, кстати, как и предыдущих, удобно использовать в качестве пособия для выполнения предметных действий конструкторы «Лего». Отличным пособием для изучения сочетательного свойства может стать кубик Рубика, с помощью которого легко показать способы вычисления (количество самих кубиков в этом случае значения не имеет, поскольку объектом исследования является способ действия, *способ* получения результата, а не сам результат). ***Задания 131—140*** позволят ученикам использовать изученные свойства при решении частных задач.

ТЕМА 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Начнем изучение данной темы со схематического представления последовательности (логики) изучения умножения многозначных чисел.

Фактически логика изучения умножения (а затем и деления) многозначных чисел почти полностью совпадает с логикой изучения сложения и вычитания многозначных чисел.

Постановка задачи на умножение многозначных чисел, ее расчленение на составляющие задачи и возврат к исходной на новом уровне позволяют дать возможность ребенку не только увидеть целое раньше составляющих его частей, но и осознать необходимость в изучении таблиц умножения. Ребенок понимает, зачем их нужно знать.

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Последовательность этапов изучения этой темы представлена системой заданий, позволяющих поставить и решить задачу на конструирование письменного умножения многозначных чисел («столбиком»).

Как и прежде, вводные задания (в частности, ***задание 141***) выполняются без обращения к учебнику. Он понадобится ученикам дома для того, чтобы можно было восстановить в памяти логику рассуждений, приводящих к конструированию способа умножения многозначных чисел.

В предыдущих заданиях дети вычисляли произведения с опорой на сложение одинаковых слагаемых, поэтому находить произведения чисел 6142 и 3 они будут так:

$$\begin{array}{r} 6142 \\ +\,6142 \\ +\,6142 \\ \hline 18426 \end{array}$$

Похвалите детей, создайте для них ситуацию успеха. Если кто-либо из детей допустит ошибку в вычислениях, то на данном уроке не нужно тратить время на обсуждение характера, причин ошибок и способов избавления от них. Нужно только зафиксировать каждую ошибку, чтобы обсудить ее в другой раз, а пока достаточно подтвердить правильность результата, полученного частью детей, и предложить тем, кто ошибся, внести исправления.

Вообще следует заметить, что одна из методических ошибок, которые часто допускают учителя при реализации программы, не успевая ее выполнить, как раз и кроется в том, что чаще всего они сами провоцируют детей на изменение или потерю исходной цели урока путем обсуждения целого ряда попутных вопросов, ошибок детей, напрямую не связанных с темой урока. Естественно, при отклонении от основной темы урок затягивается, поскольку после обсуждения второстепенных для данного урока вопросов детей нужно вновь возвращать к предмету обсуждения.

Итак, после того как дети вычислят произведение чисел 6142 и 3, предложите это же число 6142 умножить на 32.

Вряд ли кому-нибудь из детей придет в голову мысль 32 раза сложить данное число, так как при умножении дети уже не раз опирались на законы умножения. Как правило, они говорят следующее: «Умножить число 6142 на 32 можно так: умножить 6142 на 30 и 6142 на 2, а затем сложить эти произведения, т. е.

$$6142 \cdot 32 = 6142 \cdot 30 + 6142 \cdot 2$$

А 6142 умножать на 30 — это все равно что 6142 умножить на 3, затем полученное произведение на 10 или наоборот: сначала на 10, а затем на 3. 6142 на 3 мы уже умножали, значит, остается умножить полученное число на 10, для чего достаточно приписать к этому числу справа нуль.

Таким образом, при умножении 6142 на 32 в произведении получим 196544».

Аналогично будут рассуждать дети, если предложить умножить 6142 на 532:

$6142 \cdot 532 = 6142 \cdot 500 + 6142 \cdot 30 + 6142 \cdot 2 = 6142 \cdot 5 \cdot 100 + 6142 \cdot 3 \cdot 10 + 6142 \cdot 2$. Эту сумму произведений мы уже знаем.

Вычислить 6142 на 5 — это все равно что $6142 \cdot 3 + 6142 \cdot 2$.

Оба произведения мы уже вычисляли. Таким образом, опираясь на известные свойства умножения, дети могут найти любое произведение. Если бы им предложили умножить это же число (6142) на 17, например, то они могли бы предложить следующие способы:

$6142 \cdot 10 + 6142 \cdot 7$, а $6142 \cdot 7 = 6142 \cdot 10 - 6142 \cdot 3$

или $6142 \cdot 17 = 6142 \cdot (20 - 3) = 6142 \cdot 20 - 6142 \cdot 3 = \underbrace{6142 \cdot 2}_{12284} \cdot 10 - \underbrace{6142 \cdot 3}_{18426} =$

$= 122840 + 18426 = 141266$

$$\begin{array}{r} 6142 \\ +\ 6142 \\ \hline 12284 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12284 \\ +\ 6142 \\ \hline 18426 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 122840 \\ +\ 18426 \\ \hline 141266 \end{array}$$

Способ, который применяют дети к упоминаемым числам и тем, которые предложены в учебнике, — 7218 и 832, может быть зафиксирован «столбиком». Показывать им «столбик» не нужно, просто предложите им в группах обсудить, как может выглядеть запись умножения «столбиком», чтобы при этом был виден способ действия.

Не сомневайтесь, что либо один из двух, либо оба варианта, представленные в учебнике, будут кем-либо из учеников предложены. В противном случае их всегда можно предложить для обсуждения от имени других детей, придумавших такой (или такие) вариант записи способа действия.

Особенность этой формы записи состоит в том, что, умножая, например, на сотни, ученики сразу пишут два нуля справа от числа, которое появится позже, при умножении на 1000 — 3 нуля, на 10 — 1 нуль.

Запись нулей, показывающих, на какие разрядные единицы ты умножаешь данное число, позволяет избежать традиционные ошибки, которые связаны со «сдвижкой» произведений в алгоритме умножения «столбиком».

Например:

$$\begin{array}{r} {}^{+}\begin{array}{r}7\,2\,1\,8\\ 8\,3\,2\end{array}\\ \hline 1\,4\,4\,3\,6\\ 2\,1\,6\,5\,4\,\square\\ 5\,7\,7\,4\,4\,\square\,\square\\ \hline \end{array}$$

Как правило, *пустые места* провоцируют некоторых учеников на ошибку: они записывают неполные произведения со «сдвижкой» вправо, заполняя пустые места, на которых на самом деле должны быть записаны *нули*.

Нули, с которых и начинается запись неполного произведения, являются показателем осмысленности действия.

Не случайно далее появятся задания на восстановление порядка умножения в «столбик», т. е. последовательности получения неполных произведений по заготовкам, в которых точки — это места для цифр.

Например: «По заготовке определи, как дети собираются вычислить данное произведение».

$$\begin{array}{r} {}^{\times}\begin{array}{r}3\,6\,5\,7\\ 5\,2\,4\,8\end{array}\\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet\,0\,0 \longleftarrow\\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\bullet\bullet\,0\,0\,0\\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,0\\ \hline \end{array}$$

сюда будет вписан результат умножения числа 3756 на 200: $(3756 \cdot 2) \cdot 100$.

При умножении 3756 на 2 получим четырехзначное число. Точками заготовлено 4 места для цифр в записи произведения, к которому нужно будет справа приписать два нуля, поскольку далее его умножают на 100. Нули были приписаны сразу.

Второе неполное произведение, для которого заготовлено 5 мест, должно быть произведением данного числа на 8 единиц, поэтому никаких нулей в заготовке нет.

Третье неполное произведение должно оканчиваться по крайней мере тремя нулями (число нулей на конце неполного произведения может оказаться больше за счет перемножения любого четного (однозначного) числа и числа 5), что означает: здесь должен быть записан результат умножения 3657 на 5, а затем на 1000, т. е. на 5 тысяч.

Последнее произведение — результат умножения на 10.

При умножении числа 3657 на 5248 заготовка для столбика может выглядеть еще так:

```
    3657
   ×5248
--------
•••••000
  ••••00
  •••••0
   •••••
--------
••••••••
```

или

```
    3657
   ×5248
--------
   •••••
  •••••0
  ••••00
•••••000
--------
••••••••
```

и т. д.

Многолетняя практика обучения детей показала правильность подхода: прежде чем перемножать данные числа, дети относительно много времени тратят на заготовки, не отвлекаясь и не тратя лишние силы и время на восстановление в памяти таблицы умножения, чтобы записать конкретный результат. Это позволяет ученику сосредоточиться на самом способе действия. Усвоив способ, дети «с облегчением» приступают непосредственно к вычислениям, которые на фоне глубокого осмысления кажутся им уже легкими и, как ни странно, очень нравятся. Они с удовольствием выполняют данные в учебнике задания на нахождение произведений, а когда придумывают свои, то стараются придумать такие, в которых многозначное число умножается на многозначное.

Мне всегда вспоминается урок в одной из школ г. Адлера, на котором в полной тишине дети делали заготовку для умножения пятизначного числа на пятизначное, предложенное учителем. Один из учеников даже сопит, записывая нули и ставя точки, и приговаривает: «Ох и трудно!» Другой ему: «Зато интересно», третий: «Это Эльвира Ивановна научила нас ставить точки», а четвертый добавляет: «Ставим точки в память о вас!» (я еле удержалась, чтобы не расхохотаться в голос).

Когда заготовка у всех была готова, учительница в тон детям произнесла: «Молодцы! Теперь вам осталось *самое легкое* — вычислить». Интересно, что именно так дети и ощущали это, производя *по собственному желанию* множество вычислений.

Естественно, что со временем (одни раньше, другие позже) дети перестанут делать какие-либо заготовки, немедленно приступая к вычислениям, а вот привычка пошагово контролировать свои действия у них, безусловно, остается. Они в любой момент могут мысленно проверить, не потеряна ли та или иная цифра в произведении, не появилась ли лишняя, что при выполнении деления многозначных чисел будет играть далеко не последнюю роль. А пока нет развернутой записи алгоритма умножения, столбик будет выглядеть так:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3657\\5248\end{array}\\ \hline \boxed{3657\cdot 5}000\\ \boxed{3657\cdot 2}00\\ \boxed{3657\cdot 4}0\\ \boxed{3657\cdot 8}\\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3657\\5248\end{array}\\ \hline \boxed{3657\cdot 8}\\ \boxed{3657\cdot 4}0\\ \boxed{3657\cdot 2}00\\ \boxed{3657\cdot 5}000\\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3657\\5248\end{array}\\ \hline \boxed{3657\cdot 4}0\\ \boxed{3657\cdot 5}000\\ \boxed{3657\cdot 8}\\ \boxed{3657\cdot 2}\ \ 00\\ \hline \end{array}$$

и т. д. Порядок слагаемых значения не имеет. От перестановки слагаемых значение суммы не изменяется.

Аналогичное этому примеру ***задание*** дано под номером ***142.***

Такая форма записи показывает, что научиться умножать многозначное число на многозначное — это значит научиться *умножать многозначное число на однозначное.*

3.2. КОНСТРУИРОВАНИЕ СПОСОБА УМНОЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА ОДНОЗНАЧНОЕ КАК ОСНОВЫ ДЛЯ УМНОЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА МНОГОЗНАЧНОЕ

В ***задании 143*** перед детьми и стоит такая задача. Опять напоминаем, что текст этого задания читать по учебнику не нужно. На уроке нужно опираться на смысл текста и его назначение: обсудить и сконструировать способ умножения многозначного числа на однозначное, восстановить общий способ выполнения любого арифметического действия, который был открыт детьми при изучении сложения многозначных чисел: при выполнении действия сложения, а значит и умножения, нужно: 1) определить разряды, которые переполняются (прикидка); 2) определить количество цифр в результате действия; 3) определить цифру в каждом разряде.

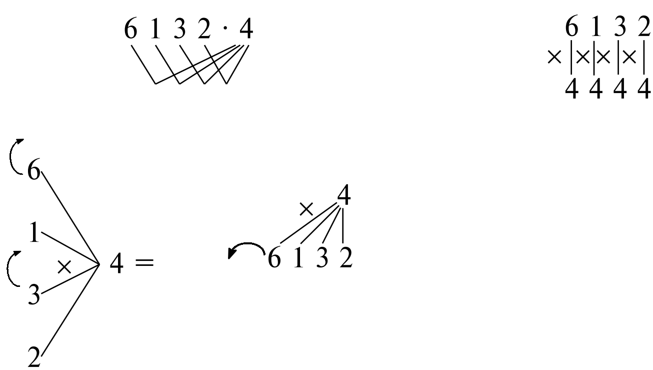
Чтобы сделать прикидку, до того как будут рассмотрены таблицы умножения, дети должны записать «столбиком» сумму одинаковых слагаемых, поскольку конструирование алгоритма умножения многозначного числа на однозначное опирается первоначально именно на запись «столбиком» такой суммы.

Так, при постановке этой задачи предложите ученикам вычислить произведение 6132 на 4 известным им способом:

$$6132 \cdot 4 =$$

$$\begin{array}{r} 6\,1\,3\,2 \\ +\;\; 6\,1\,3\,2 \\ 6\,1\,3\,2 \\ 6\,1\,3\,2 \\ \hline \end{array}$$

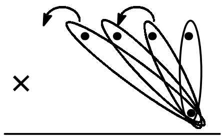
Анализируя этот столбик, дети, как правило, подмечают, что сложение столбиком одинаковых слагаемых сводится к умножению каждой разрядной цифры (для краткости термин «цифра» будем употреблять вместо «однозначное число, изображаемое цифрой») на 4. Поэтому если перед детьми поставить задачу на изменение формы записи такой суммы, то они могут предложить следующие варианты (придуманные детьми на уроке в одной из школ):



Последняя запись была преобразована в следующую:

$$\begin{array}{r} 6\,1\,3\,2 \\ \times \qquad 4 \\ \hline \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

Таким образом, общая схема (модель) способа умножения многозначного числа на многозначное выглядит так:



Вывод, к которому должны прийти дети, таков: умножение, так же как сложение и вычитание, ***выполняют поразрядно***. Чтобы определить количество цифр в произведении, нужно сделать прикидку, т. е. узнать, какие разряды при умножении переполнятся, а чтобы определить, какова цифра в каждом разряде, нужно уметь умножать однозначное число на однозначное, чем дети и займутся после того, как научатся определять количество цифр в произведении. С этой целью им и предлагаются ***задания 144—150***.

Организовать работу над этими заданиями можно по усмотрению учителя.

Диалог между детьми в ***задании 147*** читать не нужно. Такой диалог может возникнуть в вашем классе между детьми. Если же при обсуждении ответа на поставленный вопрос у детей будет единственная точка зрения, то вторую предложите от своего имени. Текст этого задания в учебнике, так же как и вопросы, которые обсуждаются в нем, поможет дома восстановить учебную ситуацию.

Выполнив ***задание 149***, дети придут к выводу, что при умножении данного многозначного числа на однозначное в записи произведения будет либо столько же цифр, сколько их в записи многозначного числа, либо на 1 цифру больше. Так, при умножении четырехзначного числа на однозначное в произведении может получиться либо четырехзначное, либо пятизначное число: четырехзначное — в том случае, если в старшем разряде нет переполнения, а пятизначное — если он переполнится.

Задание 150 — обратное предыдущему. Если в произведении оказалось 3 цифры, то это означает, что могут быть соответственно два варианта: 1)

$$\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet \\ \times\qquad\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet \end{array}$$

или 2)

$$\begin{array}{r} \frown\bullet\bullet \\ \times\qquad\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet \end{array}$$

Задания 148 и 151 можно использовать для проверочной работы.

3.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦ УМНОЖЕНИЯ

Задание 152 — «постановочное» (вводное задание, позволяющее ученику сформулировать задачу на составление таблиц умножения).

Последовательность учебных ситуаций соответствует описанной в теме «Таблицы сложения однозначных чисел»[1]. Идея и подход те же: сначала дети беспорядочно называют однозначные числа, которые нужно уметь перемножать. Затем упорядочивают эти произведения. Самое маленькое однозначное число 0, а самое большое 9, значит, для составления таблицы умножения однозначных чисел нужно перечислить произведения всех чисел от 0 до 9.

Идея упорядочить все называемые произведения неизбежно появляется в каждом классе, если перед детьми поставить вопрос о том, все ли произведения, которые могут понадобиться при умножении многозначных чисел, записаны.

Как правило, составляется полная таблица умножения однозначных чисел (***задание 153***) по аналогии с составлением таблиц сложения однозначных чисел.

Напомним, что система учебных ситуаций, которые необходимо создать учителю на уроке, описана в книге[2].

Работу над заполнением таблицы (см. ключ к заданию 153) можно организовать следующим образом: детям класса разбиться на столько групп, сколько таблиц нужно составить. До анализа полученной таблицы нужно начать составление с таблицы умножения 0, затем таблицы умножения 1, затем таблицы умножения 2, 3 и т. д.

---

[1] См.: Александрова Э. И. Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс. — М.: Вита-Пресс, 2001. — С. 103—106.

[2] См.: Там же.

Обратите внимание: пока речь идет о составлении, а *не о запоминании* табличных результатов.

Заполнение такой таблицы аналогично составлению полной таблицы сложения однозначных чисел.

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Вычислением результатов в каждой строчке и занимается группа (их 10, значит, каждая группа состоит из 2—3 человек. Например, первая группа ищет результаты в 1-й строчке: $\triangle \cdot \boxed{\cdot} = \bigcirc$.)

Способы вычисления произведений могут быть следующими:

1) с опорой на переместительное свойство: если известно, что $9 \cdot 2 = 18$, то $2 \cdot 9$ тоже равно 18, так как $2 \cdot 9 = 9 \cdot 2$, и т. п.;
2) с опорой на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания:

   а) с опорой на сумму одинаковых слагаемых:
   $9 \cdot 2 = 9 + 9$ и т. п.;

   б) с опорой на произведение, непосредственно предшествующее данному:
   $9 \cdot 3 = 9 \cdot 2 + 9 = 18 + 9 = 27$ и т. п.;

   в) с опорой на произведение, непосредственно следующее за данным:
   $9 \cdot 9 = 9 \cdot 10 - 9 = 90 - 9 = 81$ и т. п.;

   г) с опорой на любые произведения, которые были до или после данного:
   $9 \cdot 7 = 9 \cdot 5 + 9 \cdot 2$
   $9 \cdot 7 = 9 \cdot 4 + 9 \cdot 3$
   $9 \cdot 7 = 9 \cdot 10 - 9 \cdot 3$ и т. п.;

3) с опорой на сочетательное свойство:

$9 \cdot 6 = (9 \cdot 3) \cdot 2$

$9 \cdot 8 = (9 \cdot 4) \cdot 2$ и т. п.

Заполняя строчки в таблице, дети наверняка некоторые произведения запомнят.

Выясните, кто какие произведения уже запомнил при составлении своей таблицы. Похвалите детей, порадуйтесь их успехам, поговорите с ними о том, почему таблицы нужно запоминать, только не заставляйте их зазубривать. Этого делать пока **не нужно**! Просто радуйтесь и удивляйтесь тому, что они «так быстро запоминают».

При анализе таблицы случаи умножения нуля и единицы выносятся в виде формул:

$$0 \cdot a = 0 \text{ или } a \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot a = \text{а или } a \cdot 1 = a$$

Теперь таблица выглядит так, как она представлена в задании 153.

Составленную таблицу можно использовать как справочник, в который включены *все* произведения однозначных чисел, необходимые при умножении многозначного числа на однозначное.

$$a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a$$

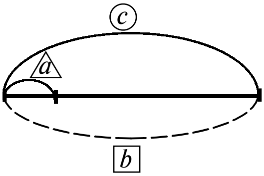
×	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Измените в таблице расположение чисел — множителей (от 0 до 9) и произведения, тогда поиск произведения двух однозначных чисел с помощью такой таблицы будет равнозначен поиску точки на плоскости по ее координатам (имеется в виду декартова система координат).

В связи с рассмотрением отношений между компонентами действия и его результатом можно сформулировать три задачи: 1) нахождение произведения (целого) по данным множителям (один из которых сообщает о части, а другой — о количестве равных частей); 2) нахождение первого множителя (части) по произведению (целому) и второму множителю (количеству частей) — деление на равные части; 3) нахождение второго множителя (количества частей) по произведению (целому) и первому множителю (части) — деление по содержанию.

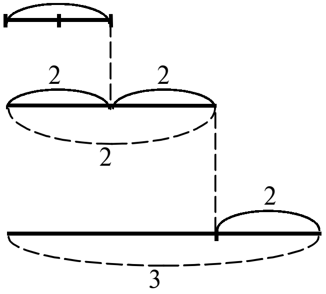
Нахождение компонентов двух взаимообратных действий умножения и деления по одной таблице дает ученику дополнительную возможность осознать взаимосвязь этих действий.

Ранее дети уже были знакомы с общей (для действий умножения и деления) моделью:



По этой одной схеме дети составляют, как известно, три формулы — одну на умножение и две на деление: $a \cdot b = c$; $c : a = b$ и $c : b = a$, что позволяет решать простые текстовые задачи как на умножение, так и на деление.

Отвечая на вопрос: «Что интересного вам удалось заметить?», дети фактически начинают обсуждать *свойства* этой таблицы. Так, в первом столбике (или строчке) каждое следующее произведение на 2 больше предыдущего, в следующей уже на 3 и т. д. Почему? Обосновывая свой ответ, дети должны опираться на графические модели (схемы):



$2 \cdot 2 = 4$

$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2$

и т. д.

3.4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЗАПОМИНАНИЯ ТАБЛИЦ УМНОЖЕНИЯ И РАССМОТРЕНИЯ КАЖДОЙ ТАБЛИЦЫ В ОТДЕЛЬНОСТИ

Запоминание таблиц, опираясь на которые можно будет быстро выполнять умножение многозначных чисел, следует начать, как и запоминание таблиц сложения однозначных чисел, с «самой трудной» — с девяти.

В основу этой работы положена задача *на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата*. В связи с этим изменяется «естественный» порядок изучения таблиц. Целесообразно начать их конструирование с тех, в которых указанная выше связь обнаруживается в наиболее явном виде (таблицы умножения 9, 2, 5 и 6). Таблицы умножения 4, 8, 3 и 7 следует сконструировать, опираясь на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддержания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении.

Опишем, как дети применяют общий принцип нахождения произведения к таблице умножения девяти. (***Задание 154***)

На *первом* этапе вводится задача определения количества цифр в произведениях от 9 × 0 до 9 × 9. Владея методом «прикидки», дети устанавливают, что во всех произведениях, начиная с третьего, будет по две цифры. Делается заготовка:

9 × 0 = •
9 × 1 = •
9 × 2 = • •
9 × 3 = • •
и т. д.
9 × 8 = • •
9 × 9 = • •

Затем (*второй* этап), используя несколько способов нахождения двузначных произведений (через сумму одинаковых слагаемых, через предыдущее произведение, через представление 9 как 10 — 1), дети заполняют заготовленные для цифр места.

На *третьем* этапе дети, как правило, усматривают связь между произведениями: число десятков от произведения к произведению увеличивается на единицу, в то время как число единиц уменьшается.

$$9 \times 2 = 18$$
$$9 \times 3 = 27$$
$$9 \times 4 = 36$$
$$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$
$$9 \times 9 = 81$$

Они обнаруживают, что сумма цифр при этом равна 9, позже это «открытие» превращается в признак делимости на девять. На следующем этапе они начинают исследовать связь между множителем (отличным от 9) и цифрой десятков, а затем цифрой единиц. Замечают следующее: число десятков всегда на 1 меньше множителя, т. е. при умножении 9 на 7 в разряде десятков будет 6, фиксируется это так:

$$9 \times \overset{-1}{7 = 6}3$$

А число в разряде единиц дополняет множитель до десяти или (что значительно удобнее) число десятков до девяти.

$$9 \times \overset{-1}{\underset{7+3=10}{7 = 63}} \qquad 9 \times \overset{-1}{7 = 6}\ 3 \quad \underbrace{6\ 3}_{6+3=9}$$

Другими словами, при умножении 9 на 7 нужно назвать число, предшествующее числу 7, — это число 6 — и произнести *шесть*десят. Затем дополнить число 6 до 9 — это будет число 3 — и продолжить называть произведение: *шесть*десят *три*.

Дети самостоятельно находят варианты конкретизации этого способа для каждого из случаев умножения числа 9:

$$9 \times \overset{2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 9}{a} = (a - 1)\ (10 - a)$$

или

$$9 \times \overset{2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 9}{a} = (\underbrace{a - 1)\ k}_{a\,+\,k\,=\,10} \quad \text{или} \quad 9 \times a = (\underbrace{a - 1)\ k}_{(a\,-1)\,+\,k\,=\,9}$$

В классах с хорошей подготовкой проводится и доказательство открытого детьми способа:

$$9 \times a = (10 - 1) \times a = 10 \times a - a$$

Чтобы выполнить вычитание, надо из a десятков «занять» 1 десяток, значит, их останется $(a - 1)$, т. е. на 1 меньше числа a, а затем из занятого десятка (числа 10) вычесть a, что равнозначно поиску дополнения числа a до 10.

Отметим, что такой способ определения цифр в произведении позволяет достаточно быстро перевести таблицу умножения девяти в план умственных действий.

Запоминанию таблиц умножения способствуют ***задания 155—159***. Отвечать на поставленные в этих заданиях вопросы дети могут, глядя в составленную таблицу. Однако если кто-либо из детей пытается ответить без зрительной опоры, то хвалите это стремление, но *требовать* ответов по памяти ни в коем случае *нельзя*. Времени и других приемов для запоминания таблиц впереди вполне достаточно.

Анализ результатов умножения в этой таблице (***задания 155—159***), сопоставление их с результатами других (***задание 158***) таблиц умножения способствуют непроизвольному запоминанию. Теперь каждый урок должен заканчиваться и начинаться с вопроса: «Какие произведения из таблицы умножения вы уже запомнили?» Для ответа на этот вопрос каждому можно завести блокнотик (тетрадь будет восприниматься детьми, как средство для контроля со стороны учителя, а нужно, чтобы блокнот принадлежал только ребенку). Их проверять не нужно, ученик сам будет отслеживать темпы своего продвижения и качество запоминания. Для этого лист делится сначала на 2 части:

Помню	**Не помню**

В первую колонку он записывает на память все те произведения, которые помнит и в которых уверен, что не ошибется.

Например:

$$9 \cdot 5 = 45$$
$$9 \cdot 0 = 0$$
$$9 \cdot 1 = 9$$
$$9 \cdot 9 = 81$$
$$9 \cdot 2 = 18$$

Порядок записи произведений не имеет значения. После того как он их записал, во вторую колонку вписывает все остальные произведения из таблицы умножения 9, которые может вычислить. Например, во второй колонке теперь появится запись (в любом порядке):

$$9 \cdot 3$$
$$9 \cdot 4$$
$$9 \cdot 7$$
$$9 \cdot 8$$

Теперь предложите записать способ вычисления там, где он может найти произведение.

Позже эти вычисления нужно выполнять устно.

Помню	**Не помню**
$9 \cdot 5 = 45$ $9 \cdot 1 = 9$ $9 \cdot 0 = 0$ $9 \cdot 9 = 81$ $9 \cdot 2 = 18$	$9 \cdot 3 = 9 + 9 + 9 = 27$ $9 \cdot 4 = 27 + 9 = 36$ $9 \cdot 7$ $9 \cdot 8$

Во второй колонке могут остаться произведения, которые ребенок не помнит и не может вычислить, именно они и должны стать предметом обсуждения.

Заполняя колонки (их нужно заготовить дома заранее сразу на нескольких отдельных страницах или распечатать на отдельных листах на ксероксе) в начале урока, в конце урока, в начале следующего урока, ученик должен сам оценивать свои успехи (или неудачи).

Вы же в любом случае должны его хвалить: «Хорошо, что не забыл! Молодец!», если ребенок ничего не прибавил ни к концу урока, ни к следующему. Поверьте, ваше терпение и доброжелательность будут вознаграждены сполна, если не здесь и сейчас, то в другом месте и потом, но это произойдет обязательно.

Если ученик не способен в памяти удерживать даже то, что он совсем недавно еще знал, как ему кажется, то это не его вина, а беда. Поддержите и его словами: «Хорошо, что ты не все забыл! Я знаю случаи (других детей), когда ученик совсем все забыл. Уверена, что все у тебя получится».

Многолетняя практика показывает, что если не давить на ребенка, не требовать от него зазубривания, а поддерживать живой интерес и желание запоминать, то это обязательно происходит; в конце концов, если он не способен запоминать, то пусть не так быстро, как вам бы этого хотелось, он вычислит нужный результат, поэтому в этом случае лучше направить усилия ребенка на *способы* получения результата, а не на сам результат, который им может быть получен, если он владеет способами вычислений.

Особое внимание уделено выполнению умножения многозначного числа на 9 (***задания 160, 161, 164, 165, 166***), записи многозначных чисел с помощью цифр 0, 1 и 9 и их умножению на любое однозначное число (***задания 165, 167***)

Кроме указанных выше заданий, направленных на непроизвольное запоминание таблиц умножения, предлагается серия заданий вычислительного характера, включая составление и решение уравнений (***задания 162, 168***), нахождение значения выражения (***задания 166, 168, 174, 175***), решение текстовых задач (***задания 172, 173, 179***). Все эти задания содержат умножение многозначного числа на 9.

Напомним, что, выполняя все перечисленные и последующие задания, ученик может пользоваться таблицами, а не воспроизводить их по памяти, сохраняя при этом установку на запоминание (в конце данного урока и начале следующего дети записывают, какие произведения помнят, а какие нет, и обсуждают способы их запоминания, делясь ими друг с другом).

Эффективным средством для запоминания таблиц умножения, в том числе и таблицы умножения девяти, являются задания, направленные на подбор по данным заготовкам подходящих цифр или на восстановление пропущенных (***задания 170, 171, 176, 177, 178***).

Рассмотрим подробнее на примере ***задания 170*** способ их выполнения.

Запишите на доске первую заготовку и предложите в парах или индивидуально подобрать подходящие цифры. Чтобы в произведении получить четырехзначное число, не должно быть переполнения в старшем разряде:

$$\times\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet\bullet \\ 9 \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$$

Уточните задание, перед тем как дети начнут его выполнять: нужно четырехзначное число умножить на 9 и получить четырехзначное.

Понятно, что если первый множитель в данной заготовке записать с помощью цифр 0 и 1 (с единицей в старшем разряде), которые могут повторяться, то это могут быть такие произведения:

$$\times\begin{array}{r} 1111 \\ 9 \\ \hline 9999 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1110 \\ 9 \\ \hline 9990 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1101 \\ 9 \\ \hline 9909 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1011 \\ 9 \\ \hline 9099 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}1100\\9\end{array}\\\hline 9900\end{array}\qquad\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}1010\\9\end{array}\\\hline 9090\end{array}\qquad\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}1001\\9\end{array}\\\hline 9009\end{array}\qquad\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}1000\\9\end{array}\\\hline 9000\end{array}$$

Первый пример записан с помощью 4 единиц, второй, третий и четвертый — с помощью трех единиц и одного нуля, пятый, шестой и седьмой — с помощью двух единиц и двух нулей и последний (восьмой) — с помощью одной единицы и трех нулей.

Кроме таких первых множителей, могут быть и множители следующего вида.

Любое многозначное число от 0 до 9

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}1\,0\,\bullet\,\bullet\\9\end{array}\\\hline\end{array}$$

Любое однозначное число от 0 до 9

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}1\,1\,0\,\bullet\\9\end{array}\\\hline\end{array}$$

После того как дети выполнят поставленное задание и восстановят пропущенные цифры, выпишите на доске *все* различные числа, которые у них получились, и обратитесь к ним с вопросом: «Как вы узнаете, какую цифру можно брать (показываете первый множитель), а какую нет?» Предложите им научить вас. Дайте им время на обсуждение в группах.

Первый вопрос, который следует задать: «С какого разряда удобнее начинать подбирать цифру (однозначные числа, изображенные цифрой)?»

Ясно, что удобнее начать со старшего разряда, поскольку нужно следить за тем, чтобы не было переполнения при умножении на 9. Значит, в старшем разряде можно взять только единицу, так как $1 \cdot 9$ или $9 \cdot 1 < 10$, при других числах в старшем разряде произведение будет больше 10, значит, разряд переполнится.

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}1\,\bullet\,\bullet\,\bullet\\9\end{array}\\\hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\end{array}$$

В следующем, третьем разряде может быть либо 0, либо 1, иначе разряд переполнится (образуется новая мерка) и тем самым переполнит следующий, четвертый разряд, что недопустимо.

Теперь для дальнейшего исследования можно условно разбиться на 2 группы (с более мелкими подгруппами, например, по 4 человека): одни размышляют над тем, какой может быть цифра во втором разряде, если в третьем цифра 0, а другие обсуждают то же, если в третьем разряде цифра 1, и т. д.

$$1)\ \begin{array}{r} \times\ 1\,0\,\overset{?}{\bullet}\,\overset{?}{\bullet} \\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \times\ 1\,1\,\bullet\,\bullet \\ 9 \\ \hline \end{array}$$

Ответы детей будем записывать в схематическом виде:

$$1)\ 1\,0\,\bullet\,\overbrace{\bullet}^{\text{любое число от 0 до 9}}$$

Ясно, что и в младшем разряде может быть любое число, значит

любое число (от 0 до 9)

$$1\,0\,\bullet\,\bullet$$

2) Если во втором разряде взять 0, то тогда в следующем разряде (младшем) можно брать любое число:

любое число (от 0 до 9)

$$1\,1\,0\,\bullet$$

Если же взять 1, то в последнем (младшем) разряде может быть либо 0, либо 1 и ничего другого:

$$1\,1\,1\,\overbrace{\bullet}^{0\text{ или }1}$$

Итак, «обучая» вас тому, какие числа можно брать в том или ином разряде и почему, дети осмысливают способы действия подбора, в том числе собственные, вновь и вновь обращаясь к таблице умножения 9.

После такого анализа и обсуждения предложите каждому выбрать ***любое*** число по этой заготовке и выполнить умножение. Предложите и «свои» числа, например:

$$\begin{array}{r} \times\ 1097 \\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 1083 \\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 1106 \\ 9 \\ \hline \end{array}$$

и т. д.

Вслед за этим запишите на доске вторую заготовку из задания 170 (остальные стрелки можно добавлять по своему усмотрению):

$$\begin{array}{r} \times\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ 9 \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

Пусть дети в группах, парах или индивидуально (кто как хочет) обсудят, какие цифры могли быть пропущены в каждом разряде пятизначного числа, а затем запишут несколько таких чисел и выполнят умножение. Как и прежде, они могут пользоваться таблицами умножения. Оставшиеся две заготовки из этого задания предложите для индивидуальной работы, вследствие которой дети могут объединиться в группы для обсуждения.

$$\begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet \\ \times\quad 9\,0 \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet \\ \times\qquad 9 \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

При умножении на 90 нужно сразу записать 0 в единицах произведения:

$$\begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet \\ \times\quad 9\,0 \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,0 \end{array}$$

Это значит, что при умножении трехзначного числа на 9 нужно получить трехзначное. Последняя заготовка содержит «ловушку». Нет такого трехзначного числа, умножив которое на 9 может быть получено пятизначное: при умножении трехзначного числа на однозначное может получиться либо снова трехзначное, либо четырехзначное.

Возможно, кто-либо из детей предложит показать: если взять самое большое трехзначное число 999 и умножить его на 9, то произведение будет четырехзначным, а не пятизначным. Однако легче в этом случае воспользоваться тем, что $999 \cdot 9 < 1000 \cdot 9$, а $1000 \cdot 9 = 9000$, — число четырехзначное, значит, произведение трехзначного числа на 9 не может быть пятизначным (можно сделать прикидку и по-другому: $999 \cdot 9 < 999 \cdot 10$, а $999 \cdot 10 = 9990$ — четырехзначное).

Задание 171 можно предложить для самостоятельной работы, не давая больше никаких указаний.

Проверьте, кто из детей может подобрать только конкретные числа, а кто готов развернуть исследования, показывающие, какие числа можно брать в каждом разряде.

В ***задании 176*** конкретизирована общая модель из задания 170:

$$\begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \times\quad 9\,0 \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

Теперь известны 3 первые цифры произведения. Вновь описывать способ работы нет необходимости. Отметим лишь, что читать по книге рассуждения детей не нужно. Это образцы тех рассуждений и точек зрения, которые наверняка появятся у детей вашего класса, отсюда и способам действия присвойте соответствующие имена детей, предложивших их.

По тексту задания 176 дети смогут дома восстановить все рассуждения и способы действий.

Варианты незаконченных примеров из ***задания 177*** распределите между разными детьми (форма работы может быть выбрана произвольно), затем организуйте общее обсуждение.

Задания 178 и 179 используйте для проверочной работы.

Описывать способы работы над уравнениями (пусть дети также выбирают для решения те из них, которые хотят), выражениями и текстовыми задачами нет необходимости, они хорошо известны. Достаточно лишь напомнить о том, что завершается работа над этими типами заданий составлением справочника ошибок, если таковой еще не составлялся, и индивидуальным подбором заданий, необходимых для того, чтобы избавиться от тех ошибок, которые каждый у себя обнаружил. С этой целью в дополнение к учебнику автором данного пособия подготовлены и изданы 2 рабочие тетради.

Если и в них материала для какого-либо из детей окажется недостаточно, то можно использовать в качестве сборника заданий учебники и тетради к другим программам.

Задания 180—183 предназначены для исследования особенностей таблицы умножения двух (не на два, а двух). Работа над данной таблицей и всеми следующими таблицами умножения: 5, 6, 4, 8, 3 и 7 — по своей сути не отличается от описанной выше работы над таблицей умножения 9, в основу которой положена задача на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата. Именно поэтому и изменен «естественный» порядок изучения таблиц, начиная с 9, 2, 5 и 6, в которых упомянутая связь обнаруживается в наиболее явном виде. Поиск закономерностей, связывающих результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу. Появляется возможность поддержания активного интереса учеников к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного запоминания, что, как уже было сказано, *снимает необходимость в специальном заучивании таблиц.*

Кроме непосредственной работы по изучению самих таблиц умножения, детям предлагаются такие задания (для таблицы умножения 2 это ***задания 184—207***), которые требуют использования таблиц как средства для их выполнения.

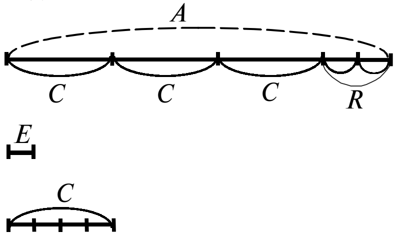
Непосредственное использование табличных случаев умножения в качестве средства дает возможность ребенку осознать, *зачем* нужны таблицы умножения.

Особое внимание необходимо уделить разнообразным заданиям на подбор чисел по заготовкам (***задания 188, 192, 193, 194, 197, 205***), дополняя их «детскими». Предлагая ученикам придумать свои заготовки, да еще и научить других придумывать (***задания 200, 201***), мы тем самым даем возможность гораздо глубже, чем при простом подборе чисел, осознать смысл, суть таких заданий, подготавливая тем самым ребенка к выполнению деления многозначных чисел.

3.5. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ И ЕГО ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Как известно, деление многозначных чисел рассматривается как деление с остатком, которое в математике определено следующим образом: разделить целое неотрицательное число a на натуральное число b — это значит найти таких два целых неотрицательных числа q и r, для которых верно равенство $a = b \cdot q + r$, причем $0 \leq r < b$. Если $r = 0$, то говорят, что деление выполнено нацело. Место изучения деления с остатком в нашей программе жестко определено, поскольку исследование таблиц умножения 5 и 6 предполагает опору на деление с остатком.

Введение понятия о делении с остатком опирается на задачу измерения величины, когда промежуточная мерка не укладывается в величине целое число раз. В этом случае остаток промеряется основной меркой. Покажем это на схеме:



$A = 3C + R$, где $R = 2E$, поэтому результат измерения величины A меркой C, которая не укладывается в величине целое число раз ($3C < A < 4C$), принято записывать так: $\frac{A}{C} = 3$ (ост. 2). Соответственно, если величина A и мерка C

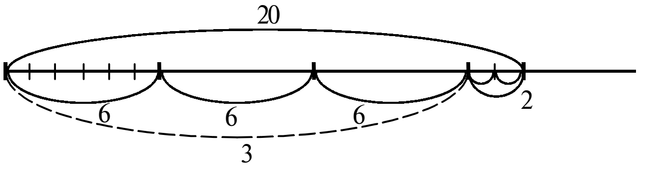
представлены числовыми значениями a и b, то результат деления чисел также будет записан с помощью двух чисел q и r:

$$a : b = q \text{ (ост. r)}$$

или

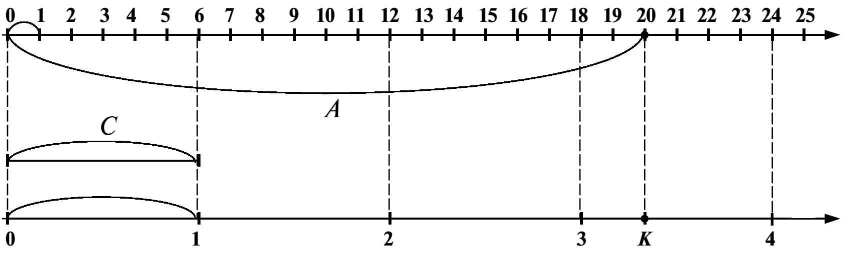
$$a = b \cdot q + r, \text{ где } 0 \le r < \text{b}.$$

Значит, при делении числа 20 на 6 получим:



20 : 6 = 3 (ост. 2)

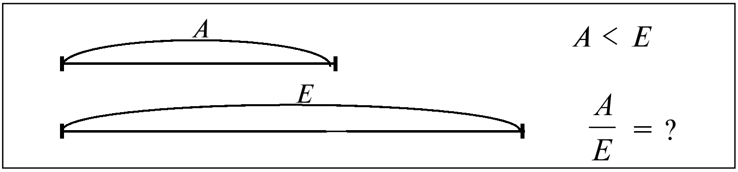
Если показать место числа 20 : 6 = k с помощью двух числовых прямых: (первую построим с шагом E, а вторую с шагом $C = 6E$), то очевидно, что число k = 20 : 6 находится между числами 3 и 4.



Пока мы можем только показать, что число k состоит из двух частей: это 3 целых плюс число, которое пока не знаем, поскольку оно меньше 1 и соответствует результату измерения величины (здесь остатка) меркой, большей, чем измеряемая величина. Ясно, что это число меньше 1.

Однако на данном этапе обучения решать задачу измерения величины в ситуации, когда основная мерка оказалась больше измеряемой величины (именно эта ситуация и приводит к понятию дробного числа), не нужно.

Если же кто-либо из детей (а такое может быть и бывало не раз) поставит такую задачу, то ее непременно надо зафиксировать с помощью графической и знаковой моделей и рассмотреть как задачу, которую предстоит решить позже. Например:



Пока же мы характеризуем результат измерения величины A промежуточной меркой C по их числовым значениям (a и b) с помощью 2 чисел: одно (q) рассказывает о том, сколько раз мерка C вместилась в величине A, а второе (r) — о том, сколько раз мерка E уложилась в остатке от величины A после ее измерения меркой C (остаток — это часть величины A, которая *осталась* после ее измерения промежуточной меркой).

Число q называют неполным частным:

20 : 6 = 3 (ост. 2)

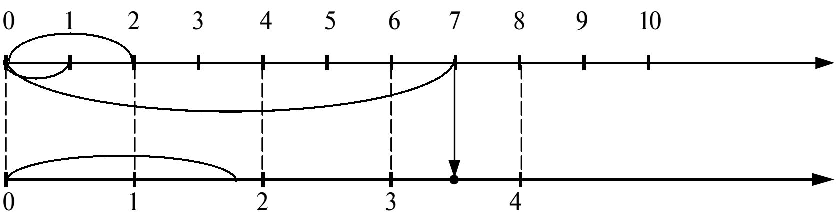
3 — это неполное частное.

2 — это остаток при делении.

Задание 208 позволяет рассмотреть деление с остатком, опираясь на понятную детям ситуацию, которая может быть переведена на язык измерения.

Числовая характеристика величины (количество билетов) — это число 7, основной мерки (билет) — 1, промежуточной мерки — 2.

Для решения данной задачи можно использовать схему, данную под ключом, или числовые прямые:



7 : 2 = 3 (ост. 1).

При проверке результата деления с остатком необходимо, чтобы выполнялось ***два*** условия:

1) равенство: 7 = 2 · 3 + 1.

Если $a : b = q$ (ост. r), то $a = b \cdot q + r$.

2) остаток должен быть меньше делителя: 1 < 2.

Если $a : b = q$ (ост. r), то $r < q$.

Задания с «ловушками» — это задания, в которых не учтено одно из двух условий при доказательстве или обосновании правильности полученного результата действия деления с остатком (см. ***задание 213***).

Кстати говоря, многообразие «ловушек» не только способствует *развитию интереса*, когда необходимо найти подтверждение собственной догадки (а значит, поиск «ловушки» означает «разгадывание» чужих мыслей — задумки автора, «хитрости» задания, как это будет названо позже, в 5 классе), но и *развитию интуиции*. «Ловушки» на «разгадывание» мыслей назовем «ловушками» **первого** типа.

Развитие интуиции ребенка, а не только овладение набором умений и навыков, составляет одну из труднейших задач обучения.

«Ловушки» **второго** типа — это «ловушки», ориентированные на нахождение нового способа действия (речь идет о постановке учебной задачи, т. е. о ситуации разрыва между знанием и незнанием), которые позволяют учителю диагностировать принятие учебной задачи. **Третий** тип «ловушек» — это «ловушки», связанные с лишними данными, с недостающими данными или с неверным исходным условием. Значение таких «ловушек» очевидно. **Четвертый** тип «ловушек» — это задания, которые выполнены с ошибками. С помощью «ловушек» данного типа формируются действия контроля и оценки. И наконец, **пятый** тип «ловушек» — софизмы, значение которых в начальной школе трудно переоценить.

Умение ребенка найти «ловушку», придумать «ловушку», научить других придумывать «ловушки», преобразовать «ловушки», избавиться от «ловушки» свидетельствует о свободном владении материалом и является средством для развития способности ребенка к самостоятельной постановке учебных задач.

Задания с «ловушками» разных типов позволяют ребенку систематически организовывать рефлексию собственных действий и ставить перед собой новые исследовательские задачи.

Работа с разными по смыслу «ловушками» в начальной школе — это и развитие *эмоций* ребенка, и средство для защиты собственного достоинства.

Даже опечатка в учебнике или тетради может быть рассмотрена детьми как «ловушка».

Задания 209—216 предназначены для усвоения действия деления с остатком.

В ***заданиях 217 и 218*** рассматривается деление нуля на натуральное число и деление натурального числа на нуль. Важно отметить, что дети часто понимают выражение «на нуль делить нельзя» как запрет, смысл которого, как правило, от них ускользает. Поэтому необходимо сделать акцент на том, что слово «нельзя» употребляется здесь в смысле «невозможно найти частное натурального числа и числа нуль». Чтобы подольше удержать смысл (так же, как при введении умножения формулу $a \cdot b$ мы долго читаем только как «по a взять b раз» или «b раз взять по a», вместо «a умножить на b»), каждый раз сопровождайте фразу «на нуль делить нельзя», которую произносят дети, вопросами: «Тебе кто-то запретил? Кто тебе сказал, что этого делать нельзя? Тебя за это накажут? Почему нельзя?», вынуждая учеников объяснять смысл.

Формальное проговаривание правила приводит к тому, что в старших классах решение уравнения типа $x \cdot 0 = 0$ сведется к этому правилу и приведет к неверному выводу: как правило, записав $x = 0 : 0$, ученик помнит (в лучшем случае), что на нуль делить нельзя, и приходит к выводу, что уравнение корней не имеет, в то время как их бесконечное множество.

$$x = 0 : 0$$

делить нельзя,
значит, нет корней

Это самое ошибкоопасное место, поэтому не принимайте от детей ответа в виде одного только правила — просите разъяснить его смысл, дополняя вопросами о делении нуля на нуль и решении уравнений типа $x \cdot 0 = a$, где $a \neq 0$.

Задание 219 используйте для проверочной работы, которую есть смысл дополнить заданиями на деление с остатком.

3.6. ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

Таблица умножения 5

Изучение таблицы умножения 5 (***задание 220***) начинается, как обычно, с вычислений (устных) результатов и исследования зависимости между изменяющимся множителем и цифрами в произведении. Первое, что, как правило, бросается детям в глаза, — это что все произведения оканчиваются либо цифрой 0, либо цифрой 5. Перепишите эти произведения в 2 столбика, отделив умножение на 0 и на 1 (эти случаи мы уже знаем):

$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 1 = 5$
$5 \cdot 2 = \mathbf{10}$	$5 \cdot 3 = \mathbf{15}$
$5 \cdot 4 = \mathbf{20}$	$5 \cdot 5 = \mathbf{25}$
$5 \cdot 6 = \mathbf{30}$	$5 \cdot 7 = \mathbf{35}$
$5 \cdot 8 = \mathbf{40}$	$5 \cdot 9 = \mathbf{45}$

Вывод: если число 5 умножать на четное число, то произведение будет оканчиваться нулем, а если на нечетное, то пятеркой.

Как только это свойство обнаружено, закрывайте все ответы и предложите игру или физминутку (по типу игры «Топай-хлопай»):

«Я буду называть произведения из таблицы умножения 5, а вы поднимите руки вверх (встаньте, подпрыгните и т. п.), если оно оканчивается цифрой 0, и опустите вниз, если цифрой 5».

5×3; 5×6; 5×9; 5×0; 5×2; 5×4; 5×7 и т. д.

В качестве «ловушки» можно назвать произведения 5×10; 5×37; 5×14 и другие (вперемежку с табличными). По условию игры вы должны были назвать *только* табличные случаи. Однако высказать свои предположения относительно того, какой цифрой может оканчиваться каждое такое произведение, очень значимо: понять, что подсказывает интуиция, и, заинтересовавшись, искать свои доказательства или залезть в книги, справочники.

Понятно, что это сделают немногие дети, но если такие в классе есть, то этот шанс нельзя упустить. Часто, заинтересовавшись на уроке, дети отыскивают информацию в разных источниках (в том числе и у родителей) и, найдя ее, делятся с другими детьми, организуя фактически факультативные занятия или кружок. Неважно, что такой организатор порой сам толком объяснить не может (в силу отсутствия у него средств) суть рассматриваемого содержания, это всегда поправимо, важно не загубить у детей желание познавать новое, поддержать интерес и постоянно подогревать его.

Итак, как только дети научились определять цифру в разряде единиц, которой оканчивается двузначное произведение, возникает следующая задача: нет ли связи второго множителя с первой цифрой в записи произведения, с цифрой в разряде десятков.

В первом столбике произведений все очевидно:

$$5 \cdot \mathbf{2} = \mathbf{1}\,0$$
$$5 \cdot \mathbf{4} = \mathbf{2}\,0$$
$$5 \cdot \mathbf{6} = \mathbf{3}\,0$$
$$5 \cdot \mathbf{8} = \mathbf{4}\,0$$

Цифры (однозначное число, обозначенное цифрой) в разряде десятков в 2 раза меньше второго множителя (таблица умножения 2 уже изучена).

Это свойство проверим и для произведений второго столбика. Нечетный множитель делится на 2 с остатком, отбросив который мы также получим цифру в разряде десятков:

$$5 \cdot \mathbf{3} = \mathbf{1}5 \qquad \mathbf{3} : 2 = \mathbf{1} \text{ (ост. 1)}$$
$$5 \cdot \mathbf{5} = \mathbf{2}5 \qquad \mathbf{5} : 2 = \mathbf{2} \text{ (ост. 1)}$$
$$5 \cdot \mathbf{7} = \mathbf{3}5 \qquad \mathbf{7} : 2 = \mathbf{3} \text{ (ост. 1)}$$
$$5 \cdot \mathbf{9} = \mathbf{4}5 \qquad \mathbf{9} : 2 = \mathbf{4} \text{ (ост. 1)}$$

Про остаток можно сказать и по-другому: «не обращая внимания» на остаток, записываем неполное частное на место цифры десятков.

Напомним, что заучивать правила нахождения цифры в разряде десятков и в разряде единиц *не нужно* ни по отношению к этой таблице, ни по отношению к предыдущим и последующим.

Эти исследования способствуют непроизвольному запоминанию таблиц, а различие в правилах (в свойствах) у разных таблиц поддерживает интерес к изучению таблиц на протяжении длительного времени. Серия упражнений, следующих за таблицей умножения 5 (***задания 221—232***), аналогична предыдущим, предназначенным не только для усвоения самих табличных случаев, но и для освоения действий умножения многозначных чисел и для использования их при решении задач и уравнений.

Более того, выполняя ***задание 231,*** дети фактически приступают к изучению действия деления многозначных чисел. Но об этом позже.

Таблица умножения 6

Книга вторая начинается с изучения таблицы умножения 6 (***задание 233***). Таблица умножения 6, как и каждая из предыдущих, имеет свои особенности. Предложите детям отыскать что-либо интересное, сопоставив произведения с изменяющимся множителем. Они, без сомнения, заметят, что при умножении 6 на четное число произведение оканчивается той же цифрой, с помощью которой оно записано.

Пусть, как и при изучении таблицы 5, дети запишут в первый столбик произведения, в которых второй множитель — четное число, а в другой — нечетное.

2 : 2

$$6 \cdot 2 = 1\ 2 \qquad 6 \cdot 3 = 1\ 8$$

4 : 2

$$6 \cdot 4 = 2\ 4 \qquad 6 \cdot 5 = 3\ 0$$

$$\overset{6\,:\,2}{}$$

$$6 \cdot 6 = 3\;6 \qquad 6 \cdot 7 = 4\;2$$

$$\overset{8\,:\,2}{}$$

$$6 \cdot 8 = 4\;8 \qquad 6 \cdot 9 = 5\;4$$

Зависимость между вторым множителем и цифрой в разряде десятков и цифрой в разряде единиц у произведений первого столбика очевидна (заучивать эти особенности не нужно!). Начните эти произведения читать снизу вверх вместе с детьми (дети читают хором): «Шестью восемь — сорок восемь, шестью шесть — тридцать шесть, шестью четыре — двадцать четыре». На этом месте сделайте паузу и спросите детей, что интересного они заметили. Без сомнения, дети услышат рифму. Теперь опять вернитесь к последнему произведению — и опять все вместе, нараспев и весело прочтите: «Шестью восемь — сорок восемь, шестью шесть — тридцать шесть, шестью четыре — двадцать четыре и, наконец, шестью два — двенадцать».

— Что такое? Что случилось? Почему пропала рифма? Как можно прочитать это число, чтобы сохранить рифму?

С такими вопросами обратитесь к детям. Дайте им возможность в течение 1—2 минут обсудить ответы на поставленные вопросы. Понятно, что причина «сбоя» в рифме кроется в образовании числительных второго десятка, которые читают справа налево, начиная с цифры в разряде единиц, в то время как все остальные двузначные числительные читают слева направо, т. е. начиная со старшего разряда. Как правило, дети вскрывают эту причину и предлагают для сохранения рифмы прочитать число 12 как «десять два».

Итак, теперь прочитайте вновь все произведения снизу вверх: «Шестью восемь — сорок восемь, шестью шесть — тридцать шесть, шестью четыре — двадцать четыре, шестью два — десять два, то есть двенадцать».

После троекратного прочтения произведений первого столбика закройте записи на доске и обратитесь к детям с вопросами: «Кто из вас уже запомнил эти произведения? Хотите проверить себя?» Конечно, дети с удовольствием согласятся. Теперь спросите эти же произведения вперемежку: «Шестью четыре? Шестью два? Шестью восемь? Шестью шесть?» Подбросьте как «ловушку» такие произведения: шестью семь, шестью пять и др. Теперь можно перейти ко второму столбику, в котором, кроме указанных в его записи закономерностей, вряд ли что-либо еще дети смогут обнаружить, но и эта особенность, как все, которые они заметили, так же как и особенности, обнаруженные в других таблицах, не нужно запоминать специально. Еще раз напомним, что поиск закономерностей и особенностей в каждой таблице способствует непроизвольному запоминанию, часто с опорой на зрительную память. Все, что детям удается заметить при сопоставлении произведений, анализе причин зависимостей, работает на поддержание интереса к изучению таблиц умножения и их запоминание, тем более что задача учителя — бурно и радостно реагировать на стремление детей запомнить произведения, помогая детям и придумывая вместе с ними приемы запоминания. Чем больше эмоций «проживает» ребенок при изучении таблицы умножения, тем быстрее и легче он ее запомнит. Конечно, легче всего заставить детей при участии родителей зазубрить таблицы умножения, но такой способ обучения в рамках данного подхода невозможен. Вряд ли с бездумно вызубренными произведениями ребенок сможет действовать при умножении многозначных чисел, поскольку для полноценного и качественного усвоения этого алгоритма ученик должен не столько воспринимать двузначное табличное произведение как одно число, сколько видеть (а смотреть на двузначное число или называть его — это еще не значит его видеть) по отдельности цифру в разряде десятков и цифру в разряде единиц, иначе ошибки, связанные с переносом цифры десятков в следующий разряд, неизбежны.

Ребенок, воспринимающий двузначное число как одно целое, не может мысленно отделить одну цифру от другой, а именно эта особенность к мысленному расчленению объекта восприятия и является, как показывает практика, залогом успешного овладения ребенком алгоритмом любого арифметического действия, требующего переноса (или разбиения) единиц одного разряда (цифры в разряде десятков табличных сумм или произведений) в следующий.

В ***задании 234*** детям предлагается составить вопросы к таблице умножения 6, какие были в задании 181 по отношению к другим таблицам. Хотя вопросы как таковые не сформулированы, детям предлагается записать, *на* *сколько одно произведение* из таблицы умножения 2 *отличается от другого.* По аналогии с этим заданием составляются пары произведений:

$\triangle 6 \cdot \boxed{6}$ и $\triangle 6 \cdot \boxed{7}$ (на _____)

$\triangle 6 \cdot \boxed{8}$ и $\triangle 6 \cdot \boxed{9}$ (на _____)

и т. д.

Работу над этим заданием необходимо дополнить упражнениями, аналогичными содержащимся в заданиях 182 и 183, которые имеют особое значение для запоминания любых таблиц умножения. Напомним, что ответы на перечисленные вопросы по отношению к таблице умножения 6 и всех последующих (так же как и предыдущих) ребенок может давать как с опорой на таблицу, так и по памяти. Радуйтесь и не скрывайте от детей удовольствие, которое вы испытываете от их успехов.

Понятно, что далеко не все дети смогут ответить по памяти на вопрос о том, есть ли в таблице умножения 6 произведение, равное 7, 15, 24, 58, 64, 36, 40, 48 и т. д. и если есть, то какое оно. Равно как и на вопросы о том, есть ли в изучаемой таблице произведение, которое начинается цифрой 3 (1, 2, 7, 4, 8, 5 и т. д.) и если есть, то какое это произведение; есть в данной таблице произведение, которое заканчивается цифрой 3 (5, 2, 1, 8, 9, 6, 4, 7), и если есть, то какое.

Работа над ***заданием 235*** аналогична описанной ранее по отношению к заданию 170 с той разницей, что здесь детям предлагается после решения полученных примеров составить обратные на деление:

если $a \cdot b = c$, то $c : a = b$ и $c : b = a$, где a и c — это числа, которые подобрал ученик при $b = 6$.

Работая над данным заданием, не забывайте, что пока еще *необходимо позволять* детям подглядывать, если нужно в таблицу умножения, поощряя и радуясь за тех, кто уже запомнил произведения из таблицы умножения 6. Пусть эти дети поделятся своими способами запоминания произведений с теми, кто пока их не помнит. Это не страшно, пусть ребенок сам захочет их запомнить, а в этом ему как раз и помогают задания данного типа. Обсуждение вопроса о том, какие цифры можно писать на месте каждой точки в заготовке (цифры первого трехзначного множителя с учетом того, сколько цифр может быть в произведении), требует постоянного обращения к таблице умножения 6, создавая тем самым предпосылки для запоминания.

При выполнении ***задания 236*** обращаем внимание на то, что на данном этапе обучения при умножении на круглые числа нули подписываем строго разряд под разрядом, тогда алгоритм умножения останется таким же, как в том случае, когда на месте нулей могут быть записаны другие числа.

Не нужно уносить нули в сторону, заменяя предложенную форму записи на традиционную:

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}43009\\ 600\end{array}\\ \hline\end{array}$$

Такая форма записи будет непременно «изобретена» детьми в специально организованной учебной ситуации значительно позже. Даже если кому-нибудь из детей родители покажут подобную форму записи, то предложите детям обсудить, верна ли она. При подобной записи нарушается основной принцип, лежащий в основе выполнения любого арифметического действия, — ***поразрядность***, а значит, подобная форма записи на данном этапе обучения должна быть признана неверной.

Задание 237 читать не нужно. Эти рассуждения наверняка возникнут у детей вашего класса, а если какое-либо звено будет отсутствовать, то его вы всегда сможете восполнить, приняв участие в диалоге с детьми.

После выполнения этого и аналогичного ему ***задания 238*** в классе предложите для домашней работы их же — задания 237 и 238. ***Задание 239*** используйте для самостоятельной работы в начале следующего урока.

Задание 240 можно для желающих предложить «на троих». Содержание задания не представляет особых трудностей, однако обсудить способ его выполнения стоит. *Во-первых*, важно установить, какое число записано первым в каждой условной строчке («условной» строчка будет для тех детей, кто, договорившись выполнять это задание втроем, возьмет на себя одно из трех упражнений, а ответ на поставленные вопросы будет консолидированным). Это должно быть число 0. *Далее*, не имеет значения, как будут дети записывать числа, делящиеся на заданное: вперемежку, вспоминая нужные произведения из соответствующей таблицы, или запишут рядами числа в определенной последовательности, увеличивая каждое следующее число на 5, на 6 или на 9, в зависимости от того, в какую строчку чисел их нужно записать.

Третье. Интересно и важно обратить внимание и на последнее число в ряду, так как в задании не сказано, что нужно записать числа, которые есть в таблице умножения. Последним числом в каждой строчке должно быть число 90, а не наибольшее произведение из каждой таблицы: 45, 54, 81.

Упражнения из ***задания 241*** предложите на выбор, это значит, что все они окажутся распределенными между детьми класса. После выполнения ученики объединяются в группы в соответствии с выбранным выражением и соотносят свои решения, вынося результат на доску.

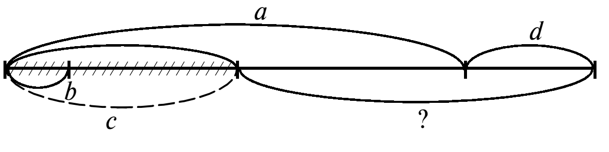
После предъявления результатов и замены чисел буквами первое и последнее выражения должны быть признаны одинаковыми (буквы, которыми дети обозначат числа, значения при этом не имеют):

$$a - b \cdot c + d$$

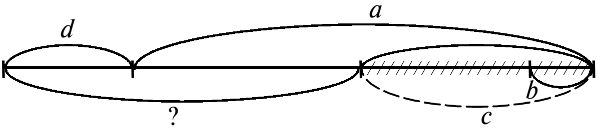
Причем в последнем выражении от детей не должна ускользнуть «ловушка» (в смысле «хитрой» задумки автора), смысл которой спровоцировать ученика на выполнение вычитания (2324 — 324) раньше, чем деления, и сложения (2 + 1998) раньше, чем умножения и вычитания. Предложите от своего имени этот способ вычисления: 2324 — 324 = 2000, 2 + 1998 = 2000, а 2000 : 2000 = 1. Пусть дети обоснуют, почему так находить значение данного выражения нельзя. Нужны скобки, указывающие на такой порядок действий. После такой провокации уместно обсудить порядок выполнения действий и возможности его изменения по отношению к каждому выражению при том же его значении.

Обсуждение провести в группах, образованных «вокруг» каждого выражения. Схема — вот опора для обоснования способа вычисления значения выражения.

Например, схема к первому (а значит, и к последнему) выражению может выглядеть так:



или



где $a = 416002$, $b = 7623$, $c = 6$, $d = 3764$.

Схема показывает по крайней мере 2 основных способа действий:

I способ

1) $b \cdot c = k$; 2) $a - k = m$; 3) $d + m = e$;

II способ

1) $a + d = p$; 2) $b \cdot c = k$ 3) $p - k = e$

(первое и второе действия можно поменять местами, они никак не связаны друг с другом).

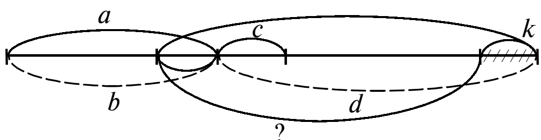
Произведение $(b \cdot c)$ можно было бы вычесть и из d, а затем к полученной разности прибавить число a, но так можно было бы поступить в том случае, если $b \cdot c \le d$.

Свобода выбора ребенком порядка действий в зависимости от того, каковы конкретные числовые значения a, b, c и d, показывает глубину осмысления и гибкость мышления, сформированность навыка.

Если же построение схемы и, как следствие, выбор удобного порядка действий вызывают у учеников трудности, значит, необходимо вернуться к готовым схемам, по которым могут быть составлены аналогичные выражения. Возможно, вы поспешили при переходе от схемы к формуле (от графической модели к знаковой), поэтому осуществить обратный переход, требующий восстановления схемы по заданной формуле (здесь выражению), некоторые ученики и не смогли.

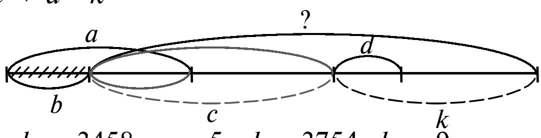
Покажем схемы к остальным выражениям:

$a : b + c \cdot d - k$



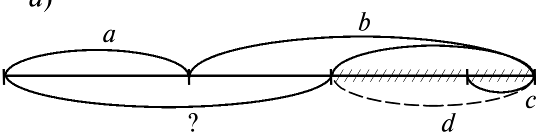
$a = 842$, $b = 2$, $c = 2739$, $d = 5$, $k = 4867$

$(a - b) \cdot c + d \cdot k$



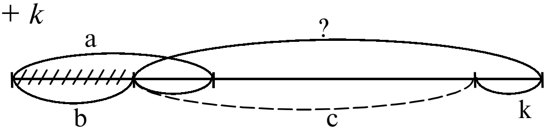
$a = 89361$, $b = 3458$, $c = 5$, $d = 3754$, $k = 9$

$a + (b - c \cdot d)$



$a = 4568$, $b = 93762$, $c = 478$, $d = 9$

$(a - b) \cdot c + k$



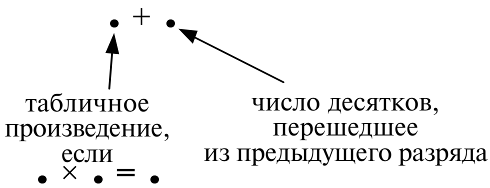
$a = 38074$, $b = 2937$, $c = 6$, $k = 12976$

Задания 242—244 вряд ли нуждаются в комментариях. Способ работы с ними и их назначение описаны раньше.

Задания 245—246 требуют опоры на произведения из таблиц, которые еще не рассматривались, однако если в задании 246 сообщается значение недостающего произведения, то в задании 245 ученики, опираясь на переместительное свойство умножения, могут утверждать, что необходимые произведения из ранее не изучавшихся таблиц им известны.

Ошибки, которые возможны при умножении многозначных чисел, могут быть трех типов:

1) при списывании многозначных чисел (их называют ошибками на внимание): пропуск или запись лишних цифр; перестановка цифр; замена одних цифр другими, сходными по написанию;
2) на алгоритм выполнения действия: запись разряда под разрядом, пропуск нулей в неполном произведении, перенос разрядных единиц;
3) на вычисления: знание табличных случаев умножения; сложение двух однозначных чисел, одно из которых — результат табличного умножения, а второе — число десятков двузначного табличного произведения, которое переносится из предыдущего разряда:



Число ошибок, как известно, возрастает, если сумма этих чисел оказывается двузначным числом.

Например:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 3} \\ \times\ \bullet\bullet 29 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$9 \cdot 4 = \mathbf{3}6$ $\quad$ $2 \cdot 4 = 8$

$2 \cdot 4 = 8$ $\quad$ или $\quad$ $9 \cdot 4 = \mathbf{3}6$

$8 + 3 = 11$

В первом случае ребенок выполнял умножение справа налево, а во втором — слева направо. Оба способа действия необходимо поддерживать: если первый (традиционный), без сомнения, удобнее, то второй необходим для проверки пробных цифр в частном при выполнении деления многозначного числа на многозначное. Поэтому ни в коем случае не требуйте от детей на *данном* этапе обучения владения только общепринятым алгоритмом умножения многозначного числа на однозначное — справа налево, т. е. от младшего разряда к старшему. Наоборот, можно устроить соревнования, кто быстрее может безошибочно умножать начиная со старшего разряда. Обученному умножать только справа налево это нелегко. Для детей, которые складывали и вычитали начиная с любого разряда, опираясь на предварительную прикидку, нет ничего особенного.

Кроме указанных ошибкоопасных мест, о которых шла речь выше, есть еще и сложение двузначного числа с однозначным (• • + •), где первое слагаемое — результат табличного умножения, а второе — число десятков, которое перенесли в данный разряд из предыдущего.

Например:

$$\begin{array}{r} {}^{6}\;{}^{7} \\ \bullet\,\bullet\,6\,8 \\ \times\qquad 9 \\ \hline \end{array}$$

$6 \cdot 9 = 54$

$54 + 7 = 61$,

где 7 — это число десятков в предыдущем произведении — 72 ($8 \cdot 9$).

Если при сложении двузначного числа с однозначным происходит «переход через разряд», то количество ошибок сразу возрастает.

Анализ ошибкоопасных мест после изучения половины всех таблиц, а не после их окончательного рассмотрения, позволит предотвратить в дальнейшем подобные ошибки при умножении на остальные числа (4, 8, 3 и 7). К этому анализу ошибкоопасных мест нужно будет вернуться после изучения оставшихся таблиц и использования их произведений при умножении многозначных чисел.

Поскольку в качестве ошибкоопасных мест выделены случаи особого сложения: • + • и • • + • , то такое моделирование ошибкоопасных мест дает возможность предложить интереснейшие для детей задания, позволяющие вновь и вновь возвращаться к таблицам умножения. Сама форма работы с этими заданиями служит дополнительным мотивом для заучивания произведений. Ребенок, запомнивший табличные результаты, получает удовольствие от участия в выполнении таких заданий. Опишем подробнее способ работы. Сначала выбирается первая модель:

$$\bullet + \bullet$$

Учитель, обращаясь к детям, предлагает следующий способ работы:

– Я буду называть первое слагаемое, а вам нужно определить, могло оно таким быть или нет.

Если названное число таким могло быть, то нужно сразу назвать множители, произведение которых могло дать такое число.

Например, учитель называет число 6, которое могло быть получено как результат перемножения либо чисел 2 и 3, либо 1 и 6.

Итогом такой работы станет вывод о том, что первое слагаемое может оказаться любым числом от 0 до 9. Второе слагаемое в этой модели — это цифра (число) десятков двузначных табличных произведений, которая перешла из предыдущего разряда. Это значит, что второе слагаемое может быть любым числом от 1 до 8 (так как самое маленькое двузначное произведение $10 = 2 \cdot 5$, а самое большое двузначное произведение $81 = 9 \cdot 9$).

Теперь, называя, например, цифру 5, учитель тем самым фактически ставит перед ребенком такую задачу: назвать двузначные табличные произведения, которые начинаются цифрой 5. А это 54, равное $6 \cdot 9$, и 56, равное $7 \cdot 8$.

Это очень интересные и полезные задания, работа над которыми в новой постановке вновь и вновь вынуждает ребенка либо по памяти, либо опираясь на таблицу умножения, висящую на стенке в классе, обращать внимание на различные произведения, способствует как непроизвольному, так и произвольному запоминанию.

Аналогичная работа выполняется и по второй модели, позволяя тем самым активизировать запоминание и заучивание ребенком (по собственному желанию!) табличных случаев умножения и уделить специальное внимание приемам устного сложения чисел в пределах ста.

Вывод, к которому непременно приходят дети, отвечая на вопрос, от чего зависят скорость и правильность вычислений при умножении многозначного числа на многозначное: «От знания на память таблицы умножения и умения складывать:

а) однозначные числа;

б) двузначные числа с однозначными».

Таким образом, обсуждение вопроса о том, какие ошибки можно допустить при умножении многозначных чисел, позволяет содержательно организовать исследование этого вопроса, повышая у ребенка как интерес, так и способность к осознанию собственных проблем, выстраивать благодаря этому индивидуальную программу своего продвижения в освоении действия.

Описанный способ организации исследования вопроса об ошибкоопасных местах по отношению к данному предметному материалу позволяет учителю самостоятельно перенести этот способ при изучении других тем программы, придумывать свои варианты исследований для формирования прочных и осознанных вычислительных навыков, навыков решения задач и уравнений. Подход этот универсален и может быть применен и при изучении других дисциплин и формировании других навыков.

Особенность ***заданий 247 и 248*** состоит в том, что многозначные числа во всех данных выражениях (произведениях) записаны с помощью цифр, соответствующих числам, умножать которые дети умеют. Все используемые табличные случаи уже встречались в изучаемых таблицах.

Таблицы умножения 4 и 8

Задание 249 предполагает комплексное изучение таблиц умножения 4 и 8 с опорой на таблицу умножения 2. Выполнение этого задания сопровождается всей той описанной выше (по отношению к предыдущим таблицам умножения) системой заданий (типа 181 — 183), позволяющих ребенку интенсивно и с удовольствием запоминать табличные случаи.

Выполнение ***заданий 250—252*** так или иначе опирается на изучаемые таблицы умножения, а ***задание 253*** подробно описывает возможную логику рассуждения детей вашего класса при изучении вопроса о том, можно ли сравнивать произведения, не выполняя умножения. Тем самым ученики повторяют способы сравнения многозначных чисел.

Это задание, как и аналогичные, не читается в классе, а сначала «проигрывается» с детьми, а дома воспроизводится с опорой на текст в учебнике.

Задания 254—260 вряд ли нуждается в комментариях, учитель сам вправе выбрать удобный для детей конкретного класса способ организации при их выполнении.

Особо хочется остановиться на ***задании 261***, поскольку оно открывает новую страничку в изучении умножения как основы алгоритма деления многозначных чисел, хотя подготовка к рассмотрению таких заданий проводилась и раньше (см. ***задание 238*** и др.).

Ученик выделяет числа-подсказки (это слово было придумано детьми на уроках в разных школах в период моих многолетних исследований и экспериментов). На их основе он будет подбирать подходящие цифры. Умение определять числа-подсказки — это то умение, на котором и будет развернут основной способ определения цифры в частном при делении многозначного числа на многозначное. Цифра, которую подберет ребенок, будет точной, а не пробной, и перепроверять ее практически не нужно. Поэтому самостоятельное выполнение заданий подобного типа — это залог успеха и сигнал для перехода к изучению деления многозначных чисел.

Таких заданий было много как до данного, так и после: ***задания 264, 272, 274, 278, 284, 289, 291, 292***. Именно эти задания позволят ученику овладеть самой сложной операцией при делении многозначных чисел — *подбором цифры в частном.*

Выполнение остальных ***заданий*** начиная ***с 262 по 293*** позволяет использовать и тем самым укрепить вычислительные навыки при нахождении значений выражений (***262, 263, 265, 271, 275, 283, 285, 290, 293***), решении текстовых задач (***266, 280, 281, 286, 287, 288***).

Таблицы умножения 3 и 7

Работа над таблицами умножения 3 и 7 строится по аналогии с остальными, несмотря на то, что для запоминания в них остались лишь произведения 3 · 3, 3 · 7 и 7 · 7. Закончив рассмотрение последних таблиц, предложите каждому ученику выписать самые трудные *для запоминания* произведения из всех таблиц умножения, а затем объединиться в группы на основе одинаково выделенных случаев и обсудить вопрос о приемах и методах запоминания. Пусть дети сами поразмыслят о том, как легче запомнить некоторые из трудных случаев. Например, один из случаев (7 · 8 = 56) легко запомнить, если поменять местами левую и правую части этого равенства: 56 = 7 · 8.

Дети наверняка увидят ряд последовательных чисел: 5, 6, 7 и 8; другими словами, 56 это 7 · 8. Возможно такая перестановка позволит избежать путаницы с произведением 6 и 9 (6 · 9 = 54).

Придумывание собственных историй, рассказов с использованием необходимых для запоминания произведений, аналогии, соотношение чисел-произведений с какими-либо датами рождения, номерами квартир, домов, телефонов и т. п. — вот тот далеко не полный перечень средств, к которым можно прибегнуть, чтобы помочь самому себе запомнить труднозапоминаемое. И наконец, если после всех тех заданий, которые впереди предстоит выполнить ученику в рамках вычисления произведений двух многозначных чисел, вы будете констатировать проблемы с таблицами умножения, можно для отдельных детей (а по желанию это могут делать и все остальные) прибегнуть к заполнению таблиц, данных в рабочей тетради № 2 (задания первой рабочей тетради, как и остальные задания второй тетради, вряд ли нуждаются в дополнительном комментарии, поскольку это задания тренировочного типа, которые предлагаются в дополнение к учебнику).

Образец заполнения таблицы на примере *таблицы умножения 7* выглядит так. (Задания 1, 2 и 3 из рабочей тетради № 2).

Задание 1.

«Если тебе еще не удалось запомнить таблицы умножения, то впиши пропущенные в задании вычисления».

1. Если $a + 7$, то на сколько $a \cdot (b + 1) > a \cdot b$? (На 7 единиц)

На сколько единиц каждое последующее произведение в таблице умножения 7 больше предыдущего?

$7 \cdot (b + 1) > 7 \cdot b$? (На 7)

2. Чему равно данное произведение?

$7 \cdot 1 = 7$ и $7 \cdot 0 = 0$

Составь таблицу умножения 7, опираясь на предыдущие произведения:

$7 \cdot 2 = 7 \cdot (1 + 1) = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 7 = 7 + 7 = 14$
$7 \cdot 3 = 7 \cdot (2 + 1) = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 14 + 7 = 21$
$7 \cdot 4 = 7 \cdot (2 + 2) = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 14 + 14 = 28$
$7 \cdot 4 = 7 \cdot (3 + 1) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 21 + 7 = 28$
$7 \cdot 5 = 7 \cdot (3 + 2) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 21 + 14 = 35$
$7 \cdot 5 = 7 \cdot (4 + 1) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = 28 + 7 = 35$

3. Составь таблицу умножения 7, опираясь на произведения этого числа и числа 10:

$10 \cdot 2 = 20$
$7 \cdot 2 = (10 - 3) \cdot 2 = 10 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 20 - 6 = 14$

$10 \cdot 3 = 30$

$7 \cdot 3 = (10 - 3) \cdot 3 = 10 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 30 - 9 = 21$

$10 \cdot 4 = 40$

$7 \cdot 4 = (10 - 3) \cdot 4 = 10 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = 40 - 12 = 28$

$10 \cdot 5 = 50$

$7 \cdot 5 = (10 - 3) \cdot 5 = 10 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = 50 - 15 = 35$

4. Выпиши в каждый столбик два первых произведения, а третье вычисли, опираясь на два первых:

$7 \cdot 1 = 7$

$7 \cdot 3 = 21$

$7 \cdot 2 = 7 \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 21 - 7 = 14$

$7 \cdot 3 = 21$

$7 \cdot 5 = 35$

$7 \cdot 2 = 7 \cdot (5 - 3) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 35 - 21 = 14$

$7 \cdot 1 = 7$

$7 \cdot 4 = 28$

$7 \cdot 3 = 7 \cdot (4 - 1) = 7 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 28 - 7 = 21$

$7 \cdot 2 = 14$

$7 \cdot 5 = 35$

$7 \cdot 3 = 7 \cdot (5 - 2) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = 35 - 14 = 21$

$7 \cdot 1 = 7$

$7 \cdot 5 = 35$

$7 \cdot 4 = 7 \cdot (5 - 1) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 1 = 35 - 7 = 28$

5. А теперь впиши в таблицу те произведения, которые тебе удалось запомнить:

$7 \cdot 2 =$ ___	$7 \cdot 3 =$ ___
$7 \cdot 1 =$ ___	$7 \cdot 4 =$ ___
$7 \cdot 5 =$ ___	$7 \cdot 10 =$ ___

Задание 2.

1. Продолжи составление таблицы умножения 7, опираясь на предыдущие произведения:

$7 \cdot 6 = 7 \cdot (3 + 3) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 21 + 21 = 42$

$7 \cdot (4 + 2) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 28 + 14 = 42$

$7 \cdot (5 + 1) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 = 35 + 7 = 42$

$7 \cdot 7 = 7 \cdot (6 + 1) = 7 \cdot 6 + 7 \cdot 1 = 42 + 7 = 49$

$7 \cdot (5 + 2) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 35 + 14 = 49$

$7 \cdot (4 + 3) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = 28 + 21 = 49$

$7 \cdot 8 = 7 \cdot (7 + 1) = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 1 = 49 + 7 = 56$

$7 \cdot (6 + 2) = 7 \cdot 6 + 7 \cdot 2 = 42 + 14 = 56$

$7 \cdot (5 + 3) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 = 35 + 21 = 56$

$7 \cdot (4 + 4) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 28 + 28 = 56$

$7 \cdot 9 = 7 \cdot (8 + 1) = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 56 + 7 = 63$

$7 \cdot (7 + 2) = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 2 = 49 + 14 = 63$

$7 \cdot (6 + 3) = 7 \cdot 6 + 7 \cdot 3 = 42 + 21 = 63$

$7 \cdot (5 + 4) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 = 35 + 28 = 63$

2. Составь таблицу умножения 7, опираясь на произведения этого числа и числа 10:

$10 \cdot 6 = 60$

$7 \cdot 6 = (10 - 3) \cdot 6 = 10 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = 60 - 18 = 42$

$10 \cdot 7 = 70$

$7 \cdot 7 = (10 - 3) \cdot 7 = 10 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = 70 - 21 = 49$

$10 \cdot 8 = 80$

$7 \cdot 8 = (10 - 3) \cdot 8 = 10 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 80 - 24 = 56$

$10 \cdot 9 = 90$

$7 \cdot 9 = (10 - 3) \cdot 9 = 10 \cdot 9 - 3 \cdot 9 = 90 - 27 = 63$

3. Впиши в каждый столбик два первых произведения, а третье вычисли, опираясь на два первых:

$7 \cdot 9 = 63$

$7 \cdot 3 = 21$

$7 \cdot 6 = 7 \cdot (9 - 3) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 3 = 63 - 21 = 42$

$7 \cdot 8 = 56$

$7 \cdot 2 = 14$

$7 \cdot 6 = 7 \cdot (8 - 2) = 7 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = 56 - 14 = 42$

$7 \cdot 8 = 56$

$7 \cdot 1 = 7$

$7 \cdot 7 = 7 \cdot (8 - 1) = 7 \cdot 8 - 7 \cdot 1 = 56 - 7 = 49$

$7 \cdot 9 = 63$

$7 \cdot 2 = 14$

$7 \cdot 7 = 7 \cdot (9 - 2) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 2 = 63 - 14 = 49$

$7 \cdot 9 = 63$

$7 \cdot 1 = 7$

$7 \cdot 8 = 7 \cdot (9 - 1) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 1 = 63 - 7 = 56$

$7 \cdot 10 = 70$

$7 \cdot 1 = 7$

$7 \cdot 9 = 7 \cdot (10 - 1) = 7 \cdot 10 - 7 \cdot 1 = 70 - 7 = 63$

4. Впиши в каждую строчку первое произведение (если не помнишь, вычисли удобным способом), а второе вычисли, опираясь на первое:

$7 \cdot 4 = 28$

$7 \cdot 8 = 7 \cdot (4 + 4) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 28 + 28 = 56$

$7 \cdot 6 = 42$

$7 \cdot 12 = 7 \cdot (6 + 6) = 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 42 + 42 = 84$

$7 \cdot 3 = 21$

$7 \cdot 6 = 7 \cdot (3 + 3) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 21 + 21 = 42$

$7 \cdot 7 = 49$

$7 \cdot 14 = 7 \cdot (7 + 7) = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 49 + 49 = 96$

$7 \cdot 8 = 56$

$7 \cdot 16 = 7 \cdot (8 + 8) = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 56 + 56 = 112$

$7 \cdot 9 = 63$

$7 \cdot 18 = 7 \cdot (9 + 9) = 7 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 63 + 63 = 126$

5. А теперь просто впиши в таблицу все произведения, не вычисляя их:

$7 \cdot 0 =$ ___	$7 \cdot 3 =$ ___
$7 \cdot 9 =$ ___	$7 \cdot 5 =$ ___
$7 \cdot 6 =$ ___	$7 \cdot 2 =$ ___
$7 \cdot 8 =$ ___	$7 \cdot 1 =$ ___
$7 \cdot 7 =$ ___	$7 \cdot 4 =$ ___

Задание 3.

1. Найди каждое из данных произведений, если известно, что $7 \cdot 100 = 700$.

$7 \cdot 98 =$ ___	$7 \cdot 92 =$ ___	$7 \cdot 108 =$ ___
$7 \cdot 95 =$ ___	$7 \cdot 99 =$ ___	$7 \cdot 109 =$ ___
$7 \cdot 97 =$ ___	$7 \cdot 104 =$ ___	$7 \cdot 107 =$ ___
$7 \cdot 93 =$ ___	$7 \cdot 106 =$ ___	$7 \cdot 105 =$ ___

2. Найди каждое из данных произведений, если известно, что $7 \cdot 1000 = 7000$.

$7 \cdot 992 =$ ______	$7 \cdot 991 =$ ______
$7 \cdot 1008 =$ ______	$7 \cdot 994 =$ ______
$7 \cdot 1005 =$ ______	$7 \cdot 1006 =$ ______

$7 \cdot 996 =$ ______ $7 \cdot 1007 =$ ______

$7 \cdot 993 =$ ______ $7 \cdot 1003 =$ ______

3. Опираясь на таблицу умножения, найди следующие произведения (второй множитель выбери по своему усмотрению):

$7 \cdot$ ___ = (___ – ___) · ___ = ___ · ___ – ___ · ___ = = ___ – ___ = ___

$7 \cdot$ ___ = (___ + ___) · ___ = ___ · ___ + ___ · ___ = = ___ + ___ = ___

$7 \cdot$ __= (___+ ___+___) · __=__ · ___+___ · ___+ + ___· ___=___+___+ ___ =___

4. Найди произведения несколькими способами, подчеркни самый удобный (второй множитель дети выбирают по своему усмотрению):

$7 \cdot 16 =$ ___ · (___ + ___) = ___ · ___ + ___ · ___ = ___+ + ___ = ___

$7 \cdot$ (___ + ___) = ___ · ___ + ___ · ___ = ___ + ___ = = ___

$7 \cdot$ (___ + ___) = ___ · ___ + ___ · ___ = ___ + ___ = = ___

$(16 - 9) \cdot 7 =$ ___ · ___ – ___ · ___ = ___ – ___ = ___

$(16 - 8) \cdot 7 =$ ___ · ___ – ___ · ___ = ___ – ___ = ___

Итак, после изучения всех таблиц мы вновь возвращаемся к умножению многозначных чисел.

3.7. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА МНОГОЗНАЧНОЕ

По программе эта тема показана под номером 8 после рассмотрения понятия классов и сетки классов. Практика последних лет показала необходимость изучения этой темы до изучения сетки классов.

Нахождение произведения двух многозначных чисел начнем с заготовок, так же как и нахождение результата любого арифметического действия. Это значит, что прежде чем выполнить умножение, необходимо сделать прикидку и определить, сколько цифр будет в произведении.

Для этого сначала определяется количество цифр в каждом неполном произведении. Важно при проектировании умножения использовать один цвет (обратите внимание на обложку учебника) для цифры разряда, на который производится умножение, и соответствующих нулей (***задание 294***). Появление заготовки раньше, чем непосредственное умножение, позволяет предложить детям новые типы заданий:

1) «По заготовке подбери подходящие числа. Отсутствие стрелок в заготовках означает, что их можно ставить по своему усмотрению» (***задания 298, 300, 301, 303***);
2) «Найди ошибки в заготовках» (***задание 305***);
3) «Вычисли, опираясь на заготовки» (***задания 302, 304, 316, 323, 329***).

Все перечисленные задания дают возможность производить вычисления, предложенные в «опосредованном виде» и позволяют ученику тренироваться с удовольствием, не уставая от однотипных заданий.

Думаем, нет нужды напоминать о том, что задания могут выполняться индивидуально, в паре, обсуждаться в группе. Поскольку каждый из перечисленных типов заданий может иметь не одно, а несколько решений, то установление всех возможных вариантов подходящих чисел является целью каждого мини-исследования. Ребенок может не только сам выбирать для себя задания, но и придумывать собственные. Вообще надо отметить, что придумывание своих таких же заданий с их последующим выполнением так, «как он хотел бы, чтобы его выполнили другие», позволяет ученику осознать, насколько он понимает то, чему учился, а учителю увидеть, усвоил ли ребенок смысл предлагаемых заданий. Не случайно, предлагая ученику придумать свое задание, мы делаем упор на слова *такое же*. Важно понять, выделяет ли ребенок существенные признаки (характеристики) задания или нет, что для него главное — способ как существенная характеристика математического задания или результат, который может быть получен. По тому, что придумывают дети, становится понятным, что каждый из них понимает под словами «такие же» (числа), «такое же» (уравнение), «такую же» (задачу). Это дает возможность учителю корректировать дальнейшее обучение, расставлять нужные акценты, анализируя вместе с детьми весь спектр придуманных ими заданий. Каждое из этих заданий должно быть выполнено прежде всего тем учеником, который его придумал.

Понятно, что ребенок составлял то или иное задание не для себя, а для других, поэтому предлагать ему «в лоб» выполнить его же задание не имеет смысла, тем не менее иногда дети такое придумывают (лишь бы придумать!), что не то что выполнить, но и понять-то невозможно, что это такое. Поэтому нами и была «изобретена» «косвенная» форма выполнения задания: вы предлагаете ему выполнить свое задание именно так, как бы ему хотелось, чтобы его выполнил другой ученик. Другими словами, создать образец выполнения этого задания. В этом возрасте ребенок еще не видит подвоха и с удовольствием создает образцы, если придуманное им задание вообще выполнимо. Если же нет, то он пытается либо осмыслить причину и изменить задание, либо придумывать заново. Во всяком случае, из придуманных детьми заданий создается сборник упражнений — «задачник», а из образцов выполнения — «решебник».

Кроме перечисленных заданий, направленных на осмысление и приобретение вычислительного навыка умножения многозначных чисел, в этом же разделе ученикам предлагаются для решения уравнения (***задание 309***), различные задания на нахождение значения выражения (***306, 308, 310, 311, 315, 319, 320, 321, 325, 326, 327, 328***). Часть из них, например ***310, 319*** и др., можно использовать для проверочных работ.

Рассмотрим подробнее некоторые из перечисленных выше заданий, требующих вычислений, которыми и овладевает ученик.

Так, при выполнении ***задания 306*** следует обсудить вопрос о том, какой из двух множителей при записи «столбиком» удобнее писать первым, а какой вторым. Понятно, что для человека, свободно владеющего умножением, особой разницы нет, но если учесть то обстоятельство, что чем меньше неполных произведений придется складывать, тем меньше будет ошибкоопасных мест, то обсудить этот вопрос имеет смысл.

Обычно при выборе порядка записи множителей при умножении в «столбик» ориентируются на количество цифр в записи каждого числа, например, если оба числа трех- или четырехзначные, то, как правило, разницы нет, а вот при умножении трехзначного числа на четырехзначное или пятизначное удобнее умножать большее на меньшее. Однако в конкретном случае может оказаться и не так. Например, умножить 506 на 435 (см. второй «столбик» задания 306) удобнее в обратном порядке, поскольку умножать тогда придется только на два числа: на 5 и на 6, так же как и при умножении 8003 на 251:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 251 \\
8003 \\
\hline
\bullet\bullet\bullet\bullet 000 \\
+\qquad \bullet\bullet\bullet \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\ 251 \\
8003 \\
\hline
2008000 \\
+\qquad 753 \\
\hline
2008753
\end{array}
$$

Это же произведение можно вычислить, начав умножение с младшего разряда, что учителю хорошо знакомо, поэтому его мы не показываем.

Напомним, что сначала дети выполняют умножение так, как им удобно, а только потом вы обсуждаете разные варианты записи «столбиком».

Если все дети вашего класса выполнили умножение одинаково, то это для вас тревожный симптом: ведь если они свободно владеют способом умножения многозначных чисел, то всегда находятся дети, выбирающие другие варианты умножения.

Если же таких детей в вашем классе не оказалось, то предложите им для обсуждения (от своего имени или от имени «детей из другого класса») отсутствующие варианты вычислений, и пусть они обоснуют такой способ вычислений. Обратитесь к ним с вопросом: «Как мог рассуждать ученик, если он умножал таким способом?» После анализа причин перестановки множителей дайте детям возможность придумать множители для умножения «столбиком», которые:

а) не нужно менять местами (например: 3756 · 28; 676 · 824; 6389 · 4008 и т. д.);

б) нужно поменять местами (56 · 372; 829 · 5736; 509 · 328; 10007 · 629 и т. д.).

А затем вновь вернитесь к вопросу о том, какие ошибки можно допустить при умножении многозначных чисел, составьте справочник ошибок, с помощью которого дети и будут выполнять все последующие вычисления.

Приведем фрагмент статьи учителя начальных классов школы № 816 Москвы Н. В. Зотовой о работе над составлением справочника ошибок[1].

Одной из узловых задач курса математики в начальной школе является формирование вычислительных навыков. Освоив все арифметические действия, поняв и выучив таблицы сложения и умножения, овладев традиционными способами проверки, дети все же допускают ошибки при решении примеров. Такое положение можно исправить, если после изучения каждого арифметического действия несколько уроков посвятить конструированию «Справочника ошибкоопасных мест». Уроки желательно построить таким образом, чтобы дети не боялись рассуждать, производить оценку своих действий, показать свое непонимание.

На первом этапе учащимся предлагается подумать, какие ошибки можно допустить при списывании математического выражения с доски, из учебника, с карточки... Учащиеся выделяют следующие виды ошибок:

1) замена арифметических знаков;

2) ошибки в записи чисел:

а) 12656 вместо 12566 — перестановка цифр в числе;

б) 1256 вместо 12566 — пропуск цифры;

в) 125566 вместо 12566 — лишняя цифра;

г) 12556 вместо 12566 — замена цифры.

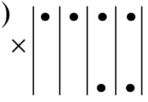
Каждый ребенок оформляет карточку, перечисляя предполагаемые ошибки. На следующих уроках отрабатывается алгоритм проверки чисел и арифметических знаков в математических выражениях с помощью ввода специальных значков, оставляющих «след» от проверки.

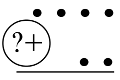
Освоив способ умножения многозначных чисел, дети приступают к анализу ошибкоопасных мест при умножении. Выявлению ошибок, которые можно допустить при выполнении этого арифметического действия, посвящается не менее двух спаренных уроков. К этому времени учащиеся умеют анализировать примеры, у них отработан механизм проверки чисел при списывании, алгоритм проверки действия сложения, которое необходимо выполнять при решении примеров на умножение. Задание детям понятно, хотя оно не из легких. На уроке создаются доброжелательная обстановка, психологический комфорт, атмосфера сотрудничества. В процессе творческой работы учащиеся, испытывающие

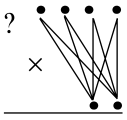
[1] Феникс. — 1997. — № 6. — С. 125—138. (Текст фрагмента отредактирован автором настоящего пособия.)

какие-либо затруднения, дискомфорт, могут обратиться за помощью, за поддержкой к одноклассникам и учителю.

Первые три ошибки, которые возможны при выполнении данного действия, фиксируются детьми достаточно быстро, так как они аналогичны ошибкам, возможным при выполнении действий сложения и вычитания.

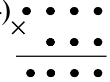
1)  — *Ошибка при записи чисел в «столбик». Достаточно поставить вертикальные палочки для того, чтобы напомнить самому себе о поразрядной записи.*

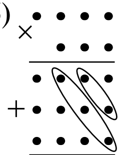
2)  — *Замена знака умножения на знак сложения. Достаточно обвести знак действия и маркером сделать цветной фон для того, чтобы привлечь собственное внимание к знаку действия.*

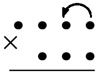
3)  — *Стоит знак умножения, а выполняют действие сложения.*
Достаточно с помощью соединений показать умножение для того, чтобы напомнить себе способ выполнения действия.

При формировании карточки «Возможные ошибки при выполнении действия умножения» дети используют разные цвета.

Ошибки 1—3 обозначены одним цветом, а ошибки 4—8 выделены другим цветом:

4)  — *Умножили только на единицы, забыв умножить на десятки, сотни и т. д.*

5)  — *Неправильно записали неполные произведения.*

6)  — *Забыли прибавить десятки к произведению десятков, сотни к произведению сотен ...*

7) — *Прибавили десятки к десяткам множителя, а не к произведению десятков...*

Например:

$$\begin{array}{r} {}^{+1} \\ \times\; 625 \\ 12 \\ \hline 12\,4\,0 \\ +\;6250 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {}^{+1} \\ \times\; 625 \\ 12 \\ \hline 12\,6\,0 \\ +\;6250 \\ \hline \end{array}$$

Для того чтобы избежать излишней громоздкости алгоритма, в нем не выделены в отдельные пункты ошибки, которые возможны при сложении неполных произведений, хотя они проговариваются. На модели этот момент фиксируется следующим образом:

8) $\begin{array}{r} \times\;\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \oplus\;\bullet\bullet\bullet\bullet 0 \\ \bullet\bullet\bullet\bullet 00 \\ \hline \end{array}$ — *Ошибка при сложении (см. «Возможные ошибки при выполнении действия сложения», карточка № 2).*

Эта исследовательская работа учащихся теряет смысл, если учитель в дальнейшем не планирует таких заданий, выполнение которых, во-первых, обеспечивало бы автоматическое усвоение действия умножения; во-вторых, привело бы к совершенствованию вычислительных умений и навыков, в-третьих, сформировало бы навык глубоко осознанной проверки.

Речь идет о заданиях следующего типа.

1. Реши пример, который записан правильно:

$$\begin{array}{l} \times\,7238 \\ 321 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\;62034 \\ 508 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\;627132 \\ 125 \\ \hline \end{array}$$

2. Найди ошибки, объясни их происхождение:

а) $\begin{array}{r} \times\;5734 \\ 5 \\ \hline 28570 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \times\;62703 \\ 243 \\ \hline 188109 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} \times\;7832 \\ 19 \\ \hline 7832 \\ 70488 \\ \hline 78320 \end{array}$

г) $\begin{array}{r} 38502 \\ \times\ 603 \\ \hline 115506 \\ +\ 2310120 \\ \hline 3425626 \end{array}$ д) $\begin{array}{r} 754 \\ \times\ 17 \\ \hline 5278 \\ +\ 7540 \\ \hline 2818 \end{array}$ е) $\begin{array}{r} 624 \\ \times\ 29 \\ \hline 5612 \\ +\ 12480 \\ \hline 17092 \end{array}$

3. Придумай примеры по схеме и реши их:

4. Придумай задания с «ловушками».

Думаем, что краткое описание учителем способов работы с учениками поможет и вам организовать ее на уроках по формированию у детей действий контроля и оценки.

При выполнении ***задания 308*** обратите внимание прежде всего на способы определения того, какие из данных неравенств верны.

Так, можно установить истинность первого неравенства, не прибегая к вычислениям. В дополнение к тем рассуждениям, которые приведут дети, можно предложить желающим определить, на сколько одно произведение больше (или меньше) другого. Интерес представляет способ, которым ученики будут находить эту разность. Опираясь на понятие умножения, его свойства и отношение частей и целого, можно, не вычисляя обоих произведений с помощью умножения в «столбик» определить разность:

$25 \cdot 101 < 25 \cdot 102$ (на 25),

а $25 \cdot 102 < 26 \cdot 102$ (на 102), значит,

$25 \cdot 101 < 26 \cdot 102$ (на $127 = 25 + 102$)

Если сравнить левую часть второго неравенства с правой, то нетрудно заметить, что в левой части от меньшего числа (по сравнению с уменьшаемым в правой части неравенства) отнимают большее число, чем вычитаемое в правой части, а значит, разность слева должна быть меньше ($1374 - 238 < 1380 - 237$).

Вывод: это неравенство неверное.

Рассматриваемые неравенства в математике считают математическими высказываниями. Математическое высказывание — это предложение, относительно которого имеет смысл вопрос, истинно оно или ложно. Здесь предложение записано на математическом (а не на естественном, русском) языке с использованием символов, а вопрос об истинности (а значит, и ложности) предложения сформулирован с помощью термина «верно» («неверно»), т. е. каждое предложение несет в себе либо верную информацию, либо ложную.

Итак, третье неравенство также ложное, так как

$$793 > 789 \text{ и } 504 > 493,$$
$$\text{значит, } 793 + 504 > 789 + 493$$

Последнее неравенство также ложно, что нетрудно доказать, дополнив вывод указанием того, на сколько одно произведение больше (меньше) другого.

Таким образом, выполняя задания такого типа и предлагая детям придумывать самим аналогичные задания (например, предложите придумать верные (или неверные, т. е. ложные) неравенства или равенства), мы тем самым начинаем в неявном виде изучать математические высказывания, устанавливая их истинность или ложность. Изучение высказываний, высказывательных форм, используемых в процессе доказательств, относится к одному из интереснейших разделов математики — «Математической логике», элементы которой в явном виде будут рассмотрены в последней четверти 6 класса, в процессе рефлексии (осмысления) всего начального курса математики, положенного в основу обучения алгебре и геометрии в 7 классе.

Когда дети будут выполнять ***задание 315***, которое предназначено для того, чтобы подготовить их к выполнению ***задания 320***, у них может возникнуть идея подписывать множители «столбиком», нарушая поразрядную запись (см. задание 320) в связи с необходимостью преобразовать эту запись в наиболее удобную для вычислений. Рассуждения относительно удобства могут быть аналогичны описанным ранее.

В ***заданиях 318 и 320*** показана общепринятая в нашей стране форма умножения в «столбик», когда начиная с умножения на число десятков нули в неполных произведениях принято не писать, оставляя это место свободным. Это и создает предпосылки для ошибок, хорошо известных работающему учителю: вместо записи

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 3 & 7 & 2 \\
\times & & & 2 & 1 & 7 \\ \hline
 & & 2 & 6 & 0 & 4 \\
+ & & 3 & 7 & 2 & \\
 & 7 & 4 & 4 & & \\ \hline
 & 8 & 0 & 7 & 2 & 4
\end{array}$$

может оказаться запись, в которой пустые места заполняются путем сдвига неполных произведений начиная со второго.

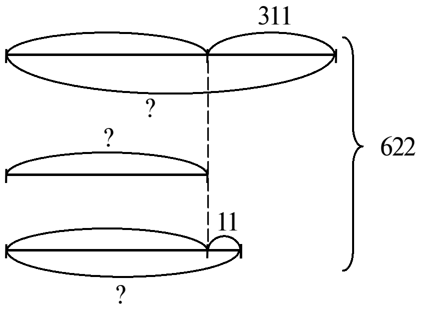
$$\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & 7 & 2 \\
\times & & 2 & 1 & 7 \\ \hline
 & 2 & 6 & 0 & 4 \\
+ & & 3 & 7 & 2 \\
 & & 7 & 4 & 4 \\ \hline
 & 3 & 7 & 2 & 0
\end{array}$$

Если можно не писать нули в неполных произведениях при умножении в «столбик» на число десятков, сотен, тысяч и т. д., то почему их нельзя не писать при умножении в «столбик» круглых чисел? Такой вопрос вряд ли вы услышите от детей, но думается, что потеря нулей при умножении круглых чисел есть следствие из правил, по которым в одних случаях нули можно не писать, а в других — нельзя. Чтобы избежать подобных ошибок и не создавать самим ошибкоопасные места, пусть ученики пишут нули в неполных произведениях (используя цвет), сообщая тем самым о разрядах, на которые умножают (см. обложку учебника).

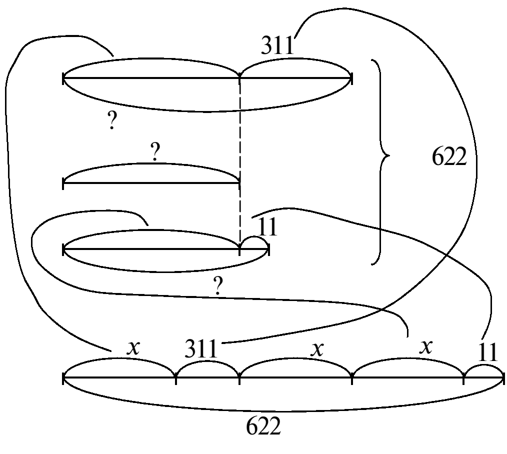
Кроме перечисленных выше заданий, требующих от учеников умения умножать числа, им предлагается и ряд текстовых задач, опять-таки опирающихся на указанное умение (***задания 307, 317, 324***).

Рассмотрим решение одной из текстовых ***задач*** под номером *307*.

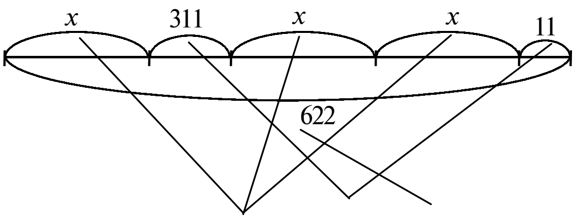
Понятно, что чертить схему к данной задаче нужно начиная с изображения отрезком второй величины, поскольку именно с ней сравниваются первая и третья:



Преобразуем эту «ступенчатую» схему в линейную и обозначим буквой *x* вторую величину, соединив «дорожками» соответствующие части:



Составим уравнение:



$$x \cdot 3 + \underbrace{322}_{311\,+\,11} = 622$$

Значит, $x \cdot 3 = 622 - 322$

$x \cdot 3 = 300$

$x = 300 : 3$ ← эту строчку дети могут пока не писать, так как будут искать число, которое при умножении на 3 дает 300.

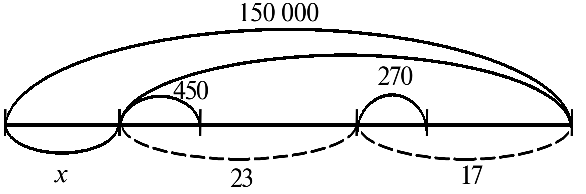
$x = 100$

Подобрать число 100 не составит труда.

Возможно, многие дети запишут выражение, показывающее, как найти x:

$x = (622 - (311 + 11)) : 3$ или $x = (622 - 322) : 3$,
объясняя при этом, откуда взялось число 322.

Решение ***задачи 317*** записывается с опорой на схему:

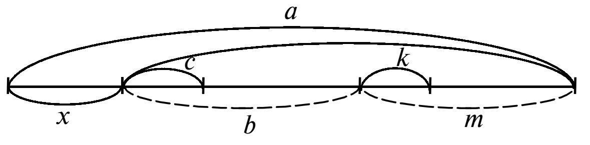


$x = 150000 - (450 \cdot 23 + 270 \cdot 17)$[1] или
$x = 150000 - 450 \cdot 23 - 270 \cdot 17$

Перед тем как решать задачу с числовыми данными, можно сначала предложить детям «восстановить» задачу: «Какой могла быть задача, если автор вместо букв подставил подходящие числа?»

Тогда вместо числовых данных появятся буквы и задача будет выглядеть так (можно карандашом написать буквы, зачеркнув числа, если мысленно у ребенка такая замена еще не получается): «Птицефабрика должна отправить в магазины a яиц. Она уже отправила b ящиков по c яиц и m ящиков по k яиц. Сколько яиц осталось отправить в магазины?»

А схема решения задачи будет такой:



$x = a - (c \cdot b + k \cdot m)$ или $x = a - c \cdot b - k \cdot m$

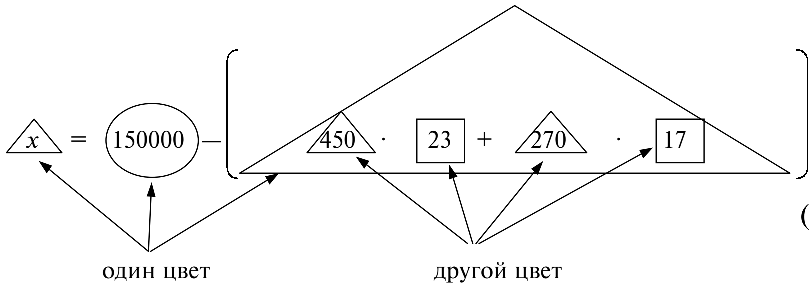
Наверняка при решении этой задачи появятся ошибки, связанные с перестановкой множителей, а точнее, с осмысле-

---

[1] Произведения в скобках можно поменять местами.

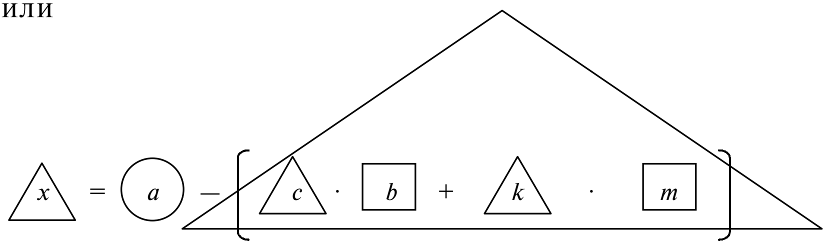
нием того, какое число о чем сообщает: о мерках или количестве мерок (речь идет о наименовании и способе записи).

Яйцо — это маленькая мерка (исходная единица счета), ящик — большая мерка, значит, числа 450 и 270 сообщают о том, сколько маленьких мерок в одной большой, а числа 23 и 17 — о количествах соответствующих больших мерок. Используя знаки △, □, ○, выражение для нахождения неизвестной величины можно записать так:



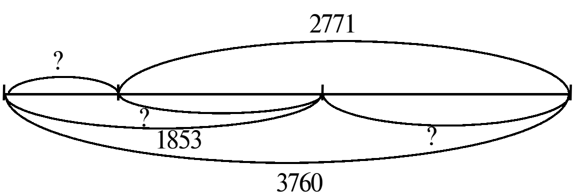
(1)

или



(2)

В уравнениях (1) и (2) выражения в скобках являются частью величины *a*, равно как и *x*. Схема к ***задаче 324*** после преобразования будет выглядеть так:



Способы решения этой задачи очевидны.

Заменив числовые данные буквами, можно предложить, как и к предыдущим задачам, придумать свою задачу и вновь подобрать подходящие числа.

Замену числовых данных буквами можно производить как *до*, так и *после* решения задачи.

Если замена сделана *до* решения, то необходимо еще обсудить, подходят предложенные автором числовые данные к данной задаче или нет, рассуждая тем самым об области допустимых значений по отношению к смыслу (сюжету) задачи. А после ее решения дети могут подставить свои числа, сделать необходимые вычисления и дать ответ на вопрос задачи.

Задания из раздела «Проверь себя», а также ***задания 312, 313 и 314*** можно использовать для проверочных или тестовых работ.

3.8. КЛАССЫ ЧИСЕЛ. СЕТКА КЛАССОВ

Изучение *темы «Как устроено многозначное число»* (название темы в учебнике) начинается с игры, описанной на с. 37 учебника.

Уяснение содержания умножения создает предпосылки для того, чтобы построить *сетку классов чисел* и на этой основе осмыслить многозначное число (знак соотносится с цифрой) как число многоразрядное (разряд соотносится с однозначным числом). Осмысление многоразрядного числа уже обеспечивалось выполнением действий сложения и вычитания (включая сложные случаи, когда один из разрядов в уменьшаемом равен нулю), а также конструированием способа умножения многозначного числа на многозначное, которое свелось к умению умножать многозначное на однозначное.

Фактически дети, постоянно действуя с многозначными числами, уже овладели чтением многозначных чисел (в пределах 6—7 знаков) в десятичной системе счисления. В случае затруднения они всегда могли воспользоваться общим для всех систем счисления способом чтения многозначных чисел путем перечисления слева направо цифр в записи числа с указанием системы счисления. Однако, как показала многолетняя практика, несмотря на то, что дети изучали лишь названия первых четырех разрядов, они к данному моменту времени приобрели умение читать многозначные числа «по-взрослому», хотя такая задача перед ними пока не стояла. Тем более что никаких специальных арифметических диктантов не было и не должно было быть. Способа, которым они владели (перечислением цифр с указанием системы счисления), для записи и чтения чисел, имеющих в записи больше 4 знаков, им вполне было достаточно для усвоения действий с любыми многозначными числами, тем более что многозначные числа дети списывали либо с доски, либо из учебника, а не записывали на слух. Такая задача до сих пор перед ними не стояла, поэтому, предлагая поиграть в игру, описанную в учебнике (читать учебник не нужно, нужно организовать игру в классе так, как описано в учебнике), рано или поздно каждый ученик (все до единого!) столкнется с ситуацией, когда записать следующее число он сможет, а вот прочитать — нет. Тогда-то и возникнут у всех и каждого вопросы: «Почему так получается? Какие числа я умею читать, а какие нет? Что же я такое знаю, что одни числа читаю, а другие нет?» Анализируя способ чтения чисел, после которых уже идут те, которые ученик не умеет прочитать, «обнаруживаем» класс тысяч и класс единиц и вводим названия следующих двух классов — миллионов и миллиардов (биллионов). Вывод, к которому должны прийти дети, таков: умение читать многозначные числа зависит от того:

1) сколько классов ты знаешь;
2) умеешь ли ты читать трехзначные числа. Отработка этих умений — основа формирования навыка.

Ошибкоопасное место при выполнении ***задания 330*** состоит в том, что разбивать число на классы (использовать дужки) нужно, отсчитывая по 3 разряда *начиная с младшего*, т. е. справа налево, а не наоборот. Заучивать с детьми названия четвертого и тем более пятого классов (***задание 337***) не нужно, они даны для ознакомления, а вот радоваться, восхищаться и поощрять детей к поиску в справочниках названий следующих классов очень важно. Как правило, дети, которые проявляют интерес к математике, выискивают такие сведения и знакомят с ними остальных детей, как в рамках урока, так и за его пределами. Для сведения:

5-й класс миллиардов еще называют классом ***биллионов***.

6-й класс называют классом квадриллионов (квадриллион — это число, изображаемое единицей с 15 нулями, т. е. 10^{15}).

7-й — класс квинтиллионов (10^{18}).

8-й — класс секстиллионов (10^{21}).

9-й — класс септиллионов (10^{24}).

Таким образом, зная названия девяти классов, можно читать 27-значные числа. Чтение трехзначных чисел, даже если они записаны с одним или двумя нулями в старших разрядах (8 003 032), вряд ли вызовет затруднения у детей, поскольку сам способ введения записи многозначного числа не вступает в противоречие с подобной формой записи числа (нули впереди означали то, что соответствующими мерками при измерении не пользовались). В то же время введение понятия числа как количественной характеристики множества не создает предпосылок для записи числа с нулями перед другой цифрой, что и приводит к необходимости отдельно заниматься чтением и записью многозначных чисел с нулями в середине и на конце, предлагая арифметические диктанты в качестве тренинга для ребенка и диагностического средства для учителя.

Надеемся, что диктант, предложенный детям, обучавшимся понятию числа через измерение, покажет лучшие результаты при условии адекватной реализации предлагаемой программы и способа обучения.

3.9. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Деление многозначных чисел — это самая трудная тема в курсе математики начальной школы. Сначала детей учат делить многозначное число на однозначное, затем на двузначное, на трехзначное и так далее, а лишь потом, уже в 5 классе, они обобщают способ деления любого многозначного числа на любое многозначное.

Традиционно подбор цифры в частном при делении многозначного числа на многозначное связан с округлением, а точнее, с операцией, похожей на округление, опираясь на которое ученик подбирает цифру в частном.

Например, в учебнике математики для 3 (школа 1—3) или 4 (школа 1—4) класса под редакцией Ю. М. Колягина (М.: Просвещение, 1998) на с. 189, 193, 199 читаем:

> Надо 492 разделить на 82.
> *Разделю* 492 не на 82, а на 80, чтобы легче было найти цифру частного.

Итак, для того чтобы найти цифру в частном, необходимо сначала «округлить» делитель до старшего разряда (на самом деле, как уже упоминалось, речь идет об операции, похожей на округление, так как правило округления не рассматривается), а затем делимое и делитель «округляются» до 1—2-значного числа.

Читаем дальше:	Для этого разделю 49 на 8, получу 6. Это *пробная цифра*, ее *нельзя* сразу *записать* в частном, сначала *надо проверить*, подходит ли цифра 6.

Чтобы проверить, верно ли подобрана таким способом цифра, необходимо выполнить последовательно операции:

1) умножить делитель на найденное число;
2) сравнить полученное произведение с неполным делимым. Если произведение окажется больше неполного делимого, то подобранную цифру в частном нужно уменьшить на единицу, затем умножить делитель на новое число и опять сравнить с неполным делимым и так до тех пор, пока не получим произведения, равного неполному делимому или меньше его.

   Если произведение оказалось меньше неполного делимого, то необходимо перейти к следующим операциям;
3) вычесть полученное произведение из неполного делимого;
4) сравнить остаток с делителем, и если он окажется больше делителя, то подбор другой цифры с необходимостью потребует повторного выполнения четырех перечисленных операций.

При этом не нужно забывать, что выполнение умножения многозначного числа на однозначное таит в себе по крайней мере три ошибкоопасных места: знание таблицы умножения, перенос числа десятков в следующий разряд (в случае двузначного табличного произведения) и сложение его с однозначным или двузначным числом, полученным в следующем разряде табличным умножением.

Отсюда следует, что скорость и правильность операции умножения зависят от безупречного знания табличных случаев и навыка сложения, тогда как следующая операция — вычитание — требует, в свою очередь, безупречного знания не только табличных случаев вычитания, но и самого алгоритма. Что касается четвертого шага (сравнение остатка с делителем), то о нем дети чаще всего просто забывают.

Таким образом, при выполнении деления многозначных чисел основное время и силы ребенка уходят на подбор цифры в частном, и хорошо, если округление с первого раза позволяет подобрать нужную цифру в частном.

Известно, что нахождение цифры в частном путем предлагаемого методикой «округления» часто оказывается несостоятельным: ребенок все делает согласно правилу, а цифра при этом не подходит, значит, время подбора нужной цифры увеличивается по крайней мере в 2 раза. Если же у ребенка еще есть проблемы с умножением и вычитанием многозначных чисел, то можно себе представить, каким трудоемким, однообразным занятием предстает перед ним деление многозначного числа на многозначное.

В связи с этим был разработан принципиально иной подход к обучению делению многозначных чисел. Новизна этого подхода сводится по сути к четырем моментам:

1) формируется обобщенный способ деления *любого* многозначного числа *сразу на любое*;
2) вводится понятие «подсказки» (термин был придуман детьми и сохранен, поскольку в традиционной методике нет адекватного понятия), опираясь на которую дети быстро и практически безошибочно подбирают цифру в частном;
3) рассматривается общий алгоритм деления с остатком, когда среди прочих случаев встречается делимое меньше делителя (например, 3 : 5= 0 (ост. 3), 2 : 7 = 0 (ост. 2) и т. п.).
   Ребенок, традиционно столкнувшись с такой ситуацией, произносит примерно следующее: «3 на 5 ***не делится***, поэтому в частном пишут нуль». На деле эти нули в частном дети как раз и пропускают, поскольку образуют промежуточное неполное делимое по типу первого неполного делимого;
4) предлагается 10 основных блоков заданий, в каждом из которых может оказаться несколько типов, а в каждом типе — несколько видов.

Рассмотрим подробнее подход к обучению делению многозначных чисел.

Прежде всего дети устанавливают, как узнавать, сколько цифр будет в произведении двух (и более) многозначных чисел, в том числе и при умножении на однозначное. Результат обсуждения выглядит, например, так: при умножении четырехзначного числа на однозначное может получиться либо четырехзначное число, либо пятизначное (в общем случае при умножении многозначного на однозначное получается либо столько же цифр, сколько их в многозначном (в большем) числе, либо на одну цифру больше).

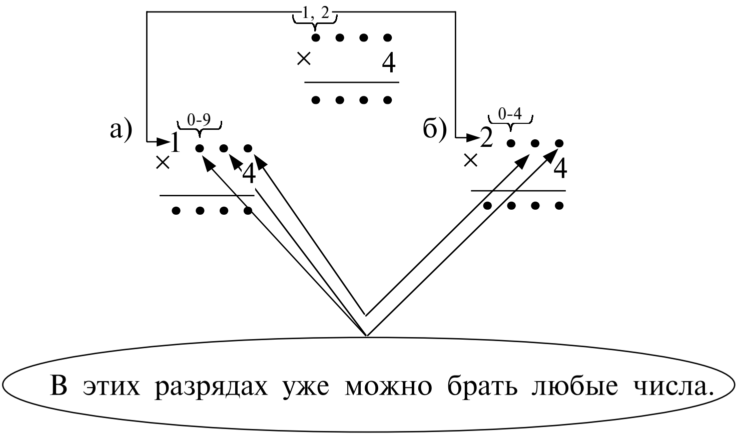
Значит, умножая 4-значное число на однозначное, рассмотрим два случая:

1) $\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \times\qquad\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \times\qquad\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$

Детям предлагается подобрать вместо точек в заготовке подходящие числа. Это задание приводит к следующим рассуждениям. Выбираем в качестве однозначного множителя любое число от 2 до 9[1] и начинаем подбор большего множителя со старшего разряда. При этом будем следить за тем, чтобы при умножении он не переполнялся, если рассматриваем первый случай, и, наоборот, следим за его переполнением во втором.

Однако этого оказывается недостаточно, так как при определенных значениях старшего разряда необходимо следить за тем, какую можно брать цифру в предыдущем разряде.

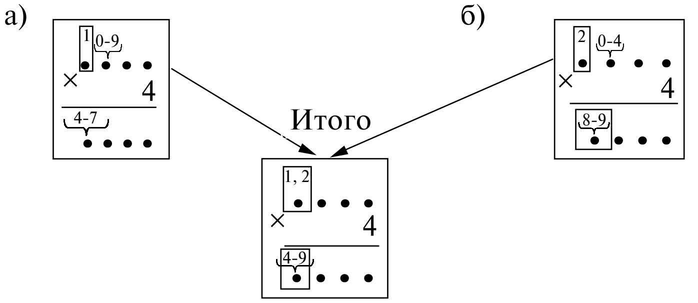
Так, совершенно очевидно, что при рассмотрении первого случая в старшем разряде можно брать лишь числа 1 и 2, но, взяв число 2, необходимо в предыдущем разряде подбирать такие числа, которые при умножении на 4 будут иметь в разряде десятков число меньше 2, т. е. чтобы оно не переполняло старший разряд. Последовательность рассуждений выглядит так:



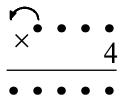
На основании представленных рассуждений можно выяснить, какие значения будет принимать число в *старшем разряде произведения:*

---

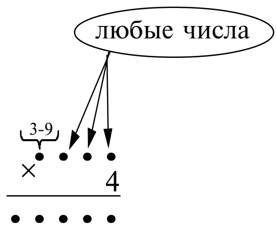
[1] Выбор чисел в качестве однозначного множителя определяется *последовательностью* изучения таблиц умножения, которая отличается от общепринятой. Напомним, что таблица таблицы изучаются в следующем порядке: *9, 2, 5, 6, 4, 8, 3 и 7*, причем умножение нуля (и на нуль) и единицы (и на единицу), а также умножение на 10, 100, 1000 и т. д. предшествует работе над таблицами умножения.



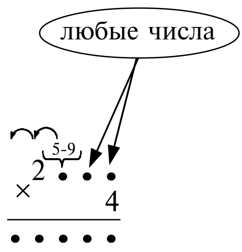
Аналогично исследуется второй случай:



Теперь необходимо подобрать в старшем разряде такое число, которое при умножении на 4 приведет к его переполнению, а значит, это могут быть числа от 3 до 9:



Однако, учитывая описанные выше рассуждения, становится очевидным, что и число 2 тоже можно взять в старшем разряде, но при условии, что из предыдущего разряда перейдет не меньше двух единиц, ведь 2 · 4 = 8, до переполнения разряда недостает 2 единиц, которые могут прийти из предыдущего разряда, а это может быть при любом из чисел от 5 до 9 в предыдущем разряде.



Таким образом, задание выглядит так:

$$\begin{array}{r} \overbrace{\bullet}^{2,\ 3\text{-}9}\bullet\ \bullet\ \bullet \\ \times\qquad 4 \\ \hline \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

Числа от 3 до 9, без сомнения, подходят, а число 2 обводим пунктиром (так называемая «слабая» позиция, по аналогии с понятием сильной и слабой позиций звуков в русском языке), желая показать, что его можно взять только с учетом предыдущей цифры.

Обсуждение того, какие цифры подходят, а какие нет, организуется учителем сначала во фронтальной форме, затем в групповой и лишь потом в индивидуальной под «девизом»: «Проверь себя». Это означает, что нужно ответить самому себе: «Могу ли я самостоятельно определять, какие числа подходят для каждого разряда, а какие нет».

Следующий тип заданий, с которым работают дети, выглядит так:

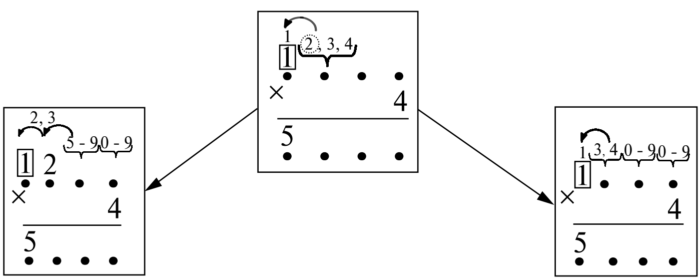
«Каким может быть первый множитель, если известно следующее?»

1) $\begin{array}{r} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \times\qquad 4 \\ \hline 5\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \times\qquad 4 \\ \hline 2\,7\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$

Исследования, аналогичные предыдущим, показывают, что при заданных «подсказках» в произведении (в первом случае «подсказкой» служит число 5, а во втором — число 27) и известном множителе (4), в старшем разряде первого множителя мы получаем всегда одно-единственное число (в первом случае это число 1, а во втором — число 6).

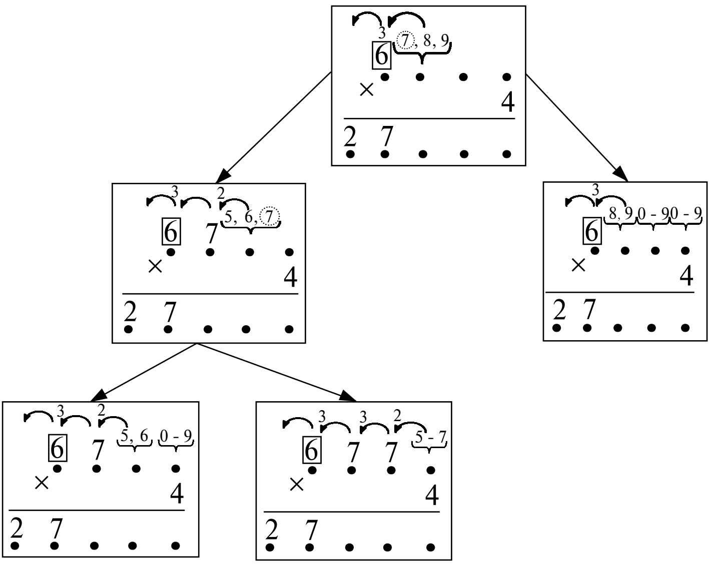
1) $1 \times 4 = 4$, а нам нужно число 5, значит, из предыдущего разряда должна прийти 1 единица. Значит, в нем наверняка может быть число 3 или 4, так как $3 \times 4 = \boxed{1}\,2$, и $4 \times 4 =$ $= \boxed{1}\,6$.

Число 2 в «слабой» позиции и обведено пунктиро, т. к. $2 \times 4 < 10$, но из предыдущего разряда можно прислать 2 или более единиц, которые переполнят разряд.



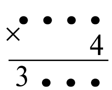
Итак, все эти исследования, которые дети делают с огромным удовольствием, распределяя задания между группами (число групп будет расти), показывают, что если в произведении известно число в старшем разряде и известен второй множитель, то цифра в старшем разряде первого множителя *определяется однозначно.*

2) Теперь рассмотрим второй случай, когда произведение получено при переполнении старшего разряда. Очевидно, что теперь в произведении должно быть задано ***двузначное*** число, которое так же единственным образом позволит определить цифру старшего разряда в первом множителе.

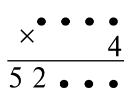


и т. д.

Здесь же учитель предлагает детям «ловушки» — софизмы[1]:



или



Таким образом, в первом случае числа 5, 1 и 4 связаны между собой так: если известны 5 и 4, то однозначно

[1] *Софизм* — уловка, выдумка, головоломка, умышленно ложное умозаключение с замаскированной ошибкой. (Большой энциклопедический словарь. Математика. — М.: Большая Российская Энциклопедия, 1998. — С. 555).

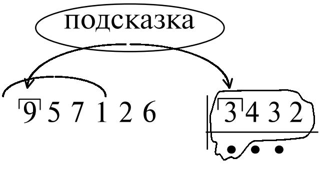
можно найти число 1, если заданы 5 и 1, то можно найти 4 и далее, а во втором случае имеем дело с числами 27, 4 и 6. Фактически, подбирая по двум числам-«подсказкам» третье, ребенок выполняет деление, т. е. осуществляет подбор цифры в частном. *Подбор* этот *осуществляется умножением*, а *не делением*, аналогично тому, как вводилось вычитание с переходом через разряд, когда ребенку легче находить разность через дополнение (т. е. сложением) вычитаемого до уменьшаемого, чем использовать приемы вычитания (см. статью «Как учить ребенка считать?» в предыдущей книге для учителя, работающего во 2 классе).

Очевидно, что анализируя то, где и какую цифру можно брать, а какую нельзя, и доказывая правильность выбора, дети многократно обращаются к таблице умножения (здесь к таблице умножения на 4), запоминая ее непроизвольно.

Теперь рассуждения при делении очевидны:

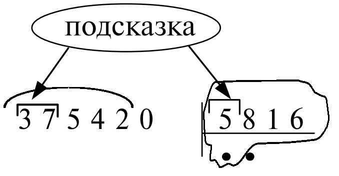
1) Выделяем *первое неполное делимое* (дужкой) — о его формировании пойдет речь дальше.
2) Определяем *количество цифр* в частном (традиционным способом).
3) Выделяем *«подсказку»* в неполном делимом и делителе () — в неполном делимом она всегда будет *однозначной,* если цифр в неполном делимом и делителе (хоть в первом, хоть в последующих) *одинаково,* или *двузначной,* если в неполном делимом на одну цифру больше, чем в делителе. «Подсказка в делителе всегда однозначное число в старшем разряде.
4) С помощью умножения (а не деления!) подбираем цифру в частном. Все пробы дети могут производить устно, так как после описанных заданий на подбор цифр при умножении многозначного на однозначное у них формируется умение видеть и учитывать «переносы» из предыдущего разряда.

Рассмотрим алгоритм на конкретном примере в той его части, когда нужно подбирать цифру в частном.



Напомним, что для определения первой цифры (и последующих) в частном *не нужно* 9 *делить* на 3, а нужно подобрать в частном такое число, которое *при умножении* на 3 *даст* 9. Это число 3. Устно ребенку легко определить, что число 3 в частном не подходит: 3×3 действительно равно 9, однако в предыдущем разряде $4 \times 3 = \boxed{1}2$, значит, к 9 добавится по крайней мере единица из предыдущего разряда, а нужно только число 9. Значит, в частном первая цифра будет не 3, а 2, что легко проверить, не умножая весь делитель, а только старший разряд и предыдущий.

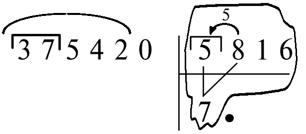
Еще один пример.



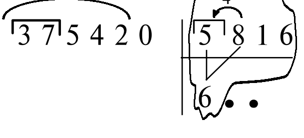
«Подсказкой» для подбора цифры в частном служат числа 37 и 5. В таблице умножения 5 нет произведения, равного 37. Кстати, задания такого типа предлагались при изучении таблиц умножения, несмотря на то, что ребенок мог не помнить, чему равно то или иное произведение, но уже умел определить, есть то или иное число в указанной таблице умножения или его нет. Очевидно, что если 5 умножить на 7, то получится 35, значит, ребенок будет пробовать число 7 в качестве первой цифры частного. Однако число 7 не подходит, так как из предыдущего разряда придет по крайней мере 5 единиц, ведь

$7 \times 8 = \boxed{5}6$, значит, $\overbrace{35}^{5 \times 7} + 5 > 37$.

(Обратите внимание! *Складывать 35 и 5 не нужно*, нужно только сделать прикидку.)



Итак, число 7 не подходит, а значит, нужно *устно* проверить число 6:



$$6 \times 5 = 30 \qquad 6 \times 8 = \boxed{4}8$$

$$30 + 4 = 34,\ 34 < 37$$

Понятно, что из предыдущего разряда в данном случае придут 4 единицы (при других цифрах во 2-м и 1-м разрядах может перейти в старший разряд и 5 единиц), которые не переполнят число 37. Даже если вместо цифры 8 в дели теле была бы цифра 9, то $5 \times 6 = 30$ и $9 \times 6 = \boxed{5}4$ дало бы 35 вместо 37.

Описанный способ подбора цифры в частном, опирающийся не на округление, а на «подсказки» и учет переполнения данного разряда за счет предыдущего, позволил значительно сократить время подбора и проверки выбранной цифры. *Все* необходимые *вычисления* можно выполнять *устно*. Нет необходимости письменно выполнять утомительные для многих детей вычисления. Это значит, что ребенок не теряет интереса, находясь в исследовательской позиции. Ведь теперь *скорость и правильность* выполнения деления многозначных чисел, т. е. *навык*, *зависят от* скорости выполнения описанных выше заданий *на умножение,* причем запоминание и закрепление таблицы умножения происходят естественно. Если же ребенок ее частично и зазубривает, то сознательно и с удовольствием, так как сама форма заданий вызывает у него большой интерес.

Подведем итоги. Предложенный способ подбора цифры в частном не требует знания таблицы деления в том традиционном виде, который доставляет ребенку немало трудностей: нет необходимости ему запоминать, чему равно 56 : 8 или 35 : 7, поскольку он будет искать такое число, которое при умножении на 8 дает ему число 56. «Но так он и ищет результат деления 56 на 8 !» — скажете вы. «Вот именно, — отвечу я, — *деления*». Да, внешне все выглядит именно так, но специальная проверка показала, что ничего подобного. В том-то и дело! Ему не нужно говорить о *делении,* он говорит только об *умножении*. Любой «средний» ребенок пытается запоминать ответы в таблице деления. Традиционно таблицу умножения он зубрит раньше, *чем* изучает *таблицу деления,* и она (таблица умножения) у него вся представлена в созвучиях, причем если он заучил, что «пятью восемь сорок», то спросите его, сколько будет 5 умножить на 8, а не «пятью восемь», и он непременно задумается, не говоря уже о «восемью пять» или

«8 умножить на 5». А с табличным делением дела обстоят значительно хуже, что подтверждают многочисленные исследования.

Опыт показывает, что, к сожалению, мы часто желаемое выдаем за действительное. Учим-то мы так, как нужно, а вот результат порой оказывается часто иным, и только специально организованные исследования помогают нам осмыслить последствия того или иного метода обучения, пусть даже хорошо испытанного. В данном случае парадокс состоит в том, что чем лучше за лето (как это часто бывает) ребенок зазубрил таблицу умножения до ее изучения в классе, тем хуже как для ребенка, так и для учителя. Мы часто удивляемся, почему ребенок, зная «назубок» таблицу сложения, плохо вычитает, а зная таблицу умножения, плохо делит.

Описанный выше способ позволяет значительно упростить для ребенка процедуру подбора цифры в частном. Он был опробован на протяжении последних лет (начиная с 1990 г.) не только в классах РО, но и в традиционных. Таким образом, *переход* к обучению делению многозначных чисел *целесообразен лишь тогда,* когда ребенок быстро и самостоятельно способен выполнять *два типа заданий на умножение,* описанных ранее.

Следующей, не менее важной проблемой при обучении делению многозначных чисел является *пропуск детьми нулей в частном,* а эта ошибка связана с поиском неполного делимого.

Нуль в частном ребенок должен получить тогда, когда неполное делимое (кроме первого) оказывается меньше делителя:

Например:

$$\begin{array}{r|l} -\,3\,5\,3\,5 & \boxed{5} \\ \underline{3\,5\quad\;} & 7\,0\,\cdot \\ \boxed{3} & \end{array}$$

Как может рассуждать ребенок, пропускающий нули в частном?

Начнем искать первое неполное делимое: три на 5 *не делится* так, чтобы в частном получились тысячи, значит, возьмем 35. Итак, первое неполное делимое 35, теперь начнем выполнять деление.

$$\begin{array}{r|l} -\,3\,5\,3\,5 & 5 \\ \underline{3\,5\quad\;} & 7\,\cdot\,\cdot \\ 0\,3 & \end{array}$$

Слова «не делится» оказываются ключевыми, и у детей закрепляется способ: не делится, значит, переходим к двузначному неполному делимому, *ничего не записывая в частном.*

Далее 3 на 5 тоже *не делится*, значит, снесем следующую цифру и получим следующее неполное делимое 35, которое и разделим на 5. В ответе — 77, а не 707.

Ребенка, как правило, ничуть не смущает то, что в частном у него должно было получиться 3 цифры.

Возникает вопрос: «Почему, несмотря на то, что детей учат определять количество цифр в частном (а этому все, как правило, научаются), одной из типичных ошибок остается та, о которой мы только что упомянули?»

Первую причину мы уже обнаружили: способ нахождения *первого* неполного делимого служит для ребенка основой при нахождении *последующих* неполных делимых.

Это естественно, ведь ему предлагают первое неполное делимое находить одним способом, а при нахождении последующих неполных делимых должен появиться *другой* способ *в той же ситуации,* когда делимое оказывается меньше делителя. Именно здесь возникает противоречие: ребенок должен в одном случае произносить слова «не делится», например «3 на 5 *не делится...*», и переходить к следующему делителю без отметки в частном, в другом случае почему-то в частное писать 0, который как раз и есть *результат деления* с остатком: 3 : 5 = 0 (ост. 3).

Вторая причина кроется, на наш взгляд, как ни странно, в поиске количества цифр в частном. Казалось бы, операция, которой дети без труда овладевают, сама по себе проста. Ее предлагают ребенку для того, чтобы он мог себя контролировать: определил, что частное должно быть четырехзначным, а разделив, получил трехзначное, значит, мог пропустить нуль в частном. Если же частное оказалось пятизначным, значит, мог получить остаток, больший делителя, который разделил вторично и получил лишнюю цифру. Но что удивительно (это подтверждают все учителя), пока учитель требует определять количество цифр в частном — дети определяют. Как только перестали требовать, так дети перестают это делать, что дополнительно влечет за собой вышеупомянутые ошибки. Представляется, что это связано с тем, что *до обучения* действию деления ему никогда не нужно было определять количество цифр в результате, здесь же ни с того ни с сего это нужно делать, да еще ко всему само действие нужно начинать не с младшего разряда, как это было до сих пор, а почему-то со старшего.

Все это нарушает ту логику, которая была жестко определена, когда ребенка учили находить сумму, разность и произведение многозначных чисел, при выполнении которых, не нужно определять, сколько цифр будет в результате действия, а само действие нужно было выполнять только начиная с младшего разряда.

Первое противоречие в нашем варианте разрешается так.

Наряду со случаями типа 13 : 5 = 2 (ост. 3) рассматриваются такие, как 4 : 5 = 0 (ост. 4) — в таблице умножения 5 нет произведения, равного 4, но есть меньшее, оно равно 0, так как 5 · 0 = 0.

Тогда на первом этапе обучения деление может выглядеть так:

```
_3535  | 5
 0     |----
 --    | 0707
 35
 35
 --
  04
   0
  ---
   35
   35
   --
    0
```

или

```
_10548  | 12
 0      |------
 --     | 008..
 10
  0
 ---
 105
  96
  ---
   94
 и т. д.
```

Рассуждая таким образом, дети приходят к выводу, что нули в начале записи числа не имеют значения[1] в отличие от последующих, и тогда становится понятным смысл того, что такое первое неполное делимое. Нули, которые появляются в середине или в конце, нельзя не писать. Часть детей быстро отказывается писать нули перед частным, упрощая свою запись, другая часть детей достаточно долго их «тянет», но у тех и других практически отсутствуют ошибки на пропуск нулей в частном, при условии, что родители, которых учили по-другому, не вмешиваются в обучение своего ребенка (важно их предупредить об этом).

Второе противоречие снимается за счет *общего* подхода к выполнению любого арифметического действия над многозначными числами.

Таким образом, конструируя принципиально иной способ обучения делению многозначных чисел, мы не только избегаем традиционных ошибок, но и значительно облегчаем для ребенка этот трудоемкий процесс, сокращая время на процедуру деления, делая его для ребенка интересным.

---

[1] О смысле нулей перед числом речь идет во 2 классе при введении понятия многозначного позиционного числа.

В *задании 342* подробно представлена последовательность рассуждений относительно первого из четырех примеров. Напомним, что работа в классе организуется без опоры на учебник. Предложите детям первый пример (остальные — по выбору) сначала для совместного обсуждения в группах, а затем всем классом. После выяснения того, каковы допустимые значения чисел в каждом разряде множителя, нужно предложить каждому (теперь индивидуально) выбрать любое из допустимых чисел и выполнить умножение, после чего составить два обратных примера на деление и сконструировать совместно новую форму записи. Дайте возможность детям самим ее придумать.

Кстати, для сведения, в американских школах используют другую форму записи деления «уголком» (мы будем письменное деление называть делением «в столбик» или «столбиком», сохраняя тем самым общее название письменного способа выполнения любого арифметического действия):

```
      9 8 6                  1 2 5
   ________              ___________
  3)2 9 5 8             35)4 3 7 5
   -2 7                   -3 5
   ----                   -----
     2 5                    8 7
    -2 4                   -7 0
    -----                  -----
       1 8                  1 7 5
      -1 8                 -1 7 5
      -----                ------
         0                      0
```

Обратите внимание на то, где в частном (оно сверху) начинают записывать первую цифру, — разряд над разрядом, что тем самым показывает сколько цифр в частном. Если деление выполняют с остатком, то записывают так:

```
      7 1 8 R 1
   ____________
  6)4 3 0 9
   -4 2
   -----
     1 0
    -  6
    -----
       4 9
      -4 8
      -----
         1
```

Это же деление в свернутом виде записывают так:

$$\begin{array}{r} 7\;1\;8\;R\,1 \\ 6\overline{)4\;3^{1}\,0^{4}\,9} \end{array}$$

Здесь маленькие цифры — это остатки от поразрядного деления.

Кстати говоря, ученики школ № 137 (учитель Е. С. Тихончук) и № 70 (учитель О. Ф. Трутько) г. Минска придумали независимо друг от друга такую свернутую запись деления многозначного числа на однозначное:

$$\overset{2}{\ulcorner 3\;2\urcorner}\;\overset{2}{7}\;\overset{1}{6}\;\overset{3}{3}\;5 : 5 = \underset{\cdot}{6}\;\underset{\cdot}{5}\;\underset{\cdot}{5}\;\underset{\cdot}{2}\;\underset{\cdot}{7},$$

где над соответствующим разрядом записывается остаток от деления (5 × 6 = 30; 32 — 30 = 2: вычитание выполняется устно, а остаток — число 2 — записывается над соответствующим разрядом. Затем они как бы присоединяют к числу 2 следующую цифру, которую нужно сносить, чтобы получить следующее неполное делимое 27, показывая его дужкой:

$$\overset{2}{\ulcorner 3\;2\urcorner}\,7$$

Это аналог свернутой записи по-американски, где остаток записывается цифрами меньшего размера *после* уменьшаемого (это плохо, т.к. так записывают степень), а *не над ним*.

Американский способ записи в нашем случае мог выглядеть так:

$$3\;2\;{}^{2}7\;{}^{2}6\;{}^{1}3\;{}^{3}5 : 5 = \underset{\cdot}{6}\;\underset{\cdot}{5}\;\underset{\cdot}{5}\;\underset{\cdot}{2}\;\underset{\cdot}{7},\ \text{т. е.}$$

$$\begin{array}{l|l} 327635 & 5 \\ \cline{2-2} -30 & 65527 \\ \cline{1-1} \boxed{2}7 & \\ -25 & \\ \cline{1-1} \boxed{2}6 & \\ -25 & \\ \cline{1-1} \boxed{1}3 & \\ -10 & \\ \cline{1-1} \boxed{3}5 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Уместно здесь показать и еще одну форму записи, которую придумал несколько лет назад ученик одной из харьковских школ, пытаясь самостоятельно сконструировать деление многозначного числа на однозначное «столбиком» (после того как научился выполнять письменное умножение).

$$\begin{array}{lr} & 1\,6\,8\\ & 2\\ : & 3\,4\\ \hline & 5\,0\\ & 8\,4\\ \hline \end{array}$$

Из данной записи очевидно, что никто его такому способу не учил. Рассуждал он так: «8 разделю на 2, получу 4, 6 разделю на 2, получу 3 (обратите внимание на то, что ответы он записывает строго разряд под разрядом), а вот 1 на 2 не делится, но 1, это же 1 сотня, а 100 разделить на 2, получится 50 (и опять вписывает число 50 в разрядную таблицу), теперь сложу 34 и 50 — получится 84».

Так же он и другие дети делили 1358 на 2:

$$\begin{array}{lr} : & 1\,3\,5\,8\\ & 2\\ \hline & 4\\ & 2\,5\\ + & 1\,5\,0\\ & 5\,0\,0\\ \hline & 6\,7\,9 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{lr} : & 1\,3\,5\,8\\ & 2\\ \hline & 5\,0\,0\\ & 1\,5\,0\\ + & 2\,5\\ & 4\\ \hline & 6\,7\,9 \end{array}$$

Рассуждали они так:

$$8 : 2 = 4$$
$$50 : 2 = 25$$
$$300 : 2 = 150$$
$$1000 : 2 = 500$$

Записывая строго разряд под разрядом («столбиком»), ученики выполнили сложение.

Из данных примеров совершенно очевидно, что начинать деление таким способом можно и с младшего разряда, и со старшего, и с любого другого. «Хоть из середины», — говорят дети.

Подводя итоги, скажем только следующее: чем больше давать возможность детям конструировать собственные способы действия и возможные варианты их описания, тем интереснее работать учителю, тем радостнее детям от собственных выдумок, тем устойчивее у них интерес к изучению математики и вообще к учебе в школе, что и составляет *одну из важнейших целей обучения*.

Текст ***задания 343***, которое нельзя отрывать от предыдущего задания, позволит учителю (а затем и детям дома) обсудить с детьми своего класса способ деления многозначного числа на однозначное. Именно обсуждение того, как может выглядеть деление столбиком, позволит детям придумать свои варианты, поэтому сначала дайте возможность поразмышлять над этим вопросом, а уже потом показывайте общепринятую форму записи, представленную как в *задании 342*, так и в *задании 343*.

Способам, придуманным детьми или сконструированным при активном участии отдельных детей, дайте их имена: Сашин способ, Ксюшин способ —в учебнике это условные имена.

Главное — четко выделить способы: первый (Сашин) способ — это поразрядное деление (подбор цифры в частном осуществляется умножением, т. е. подбором числа, на которое нужно умножить 4, чтобы получить соответствующее неполное делимое или число меньшее, но близкое к нему, учитывая то, сколько единиц может прийти из предыдущего разряда), при котором первое неполное делимое (здесь 1) меньше делителя, а значит, первая цифра в частном 0. Во втором способе (Ксюшином) выделение первого неполного делимого (здесь 18) опирается на мысленное представление этого нуля перед первой значащей цифрой, т. е. второй способ записи — это свернутый (сокращенный) первый способ.

Важно, чтобы дети сначала научились развернутому способу, прописывая умножение на 0, а затем свернутому. После чего можно предложить детям поразмышлять над тем, какие еще шаги при делении многозначного числа на однозначное можно выполнять в уме. Возможно, и ваши дети придумают свернутую форму записи, которую предложили минские школьники. Думаем, что такая форма записи даст импульс к дальнейшему освоению приемов устного вычисления и значительно улучшит качество устных вычислений.

Позже, анализируя ошибкоопасные места, к которым относится вычитание как одна из операций при делении многозначного числа на многозначное (в частности, при делении на однозначное число), можно специально, отдельно потренироваться в устных вычислениях трех типов:

1) • • — • •

уменьшаемое — это неполное делимое

вычитаемое — табличное произведение

2) • • — •

3) • — •

Работа с такими моделями обещает быть очень интересной, поскольку уменьшаемое здесь жестко «привязано» к вычитаемому, а оно — с таблицей умножения.

Способ работы с аналогичными моделями уже был описан выше (с. 94—96) по отношению к умножению многозначных чисел (там, где также обсуждался вопрос о том, какие ошибки можно допустить при умножении многозначных чисел и от чего зависит умение быстро и правильно производить вычисление произведений).

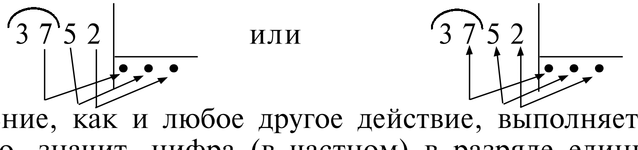
Вряд ли есть необходимость комментировать выполнение ***заданий 344—349***, поскольку содержание этих заданий мало чем отличается от традиционных, с которыми учитель хорошо знаком. А вот ***задания 350 и 351*** хотелось бы обсудить.

Прежде чем выбрать одно или несколько чисел из перечисленных в задании 350, необходимо определить по количеству цифр в частном первое неполное делимое. Это действие обратно действию по нахождению количества цифр в частном. Надо отметить, что конструирование новых типов заданий по отношению к общеизвестным, направленным на формирование вычислительного навыка, строится по тому же принципу, что и составление задач, обратных данной. Для этого важно выделить операционный состав действия и понять, что дано в условии и что по этим данным можно найти, а далее менять известные компоненты с неизвестным. Если в ***заданиях 345—349*** дети так или иначе, опираясь на первое неполное делимое (выделенное самим ребенком и данное в готовом виде), определяли количество цифр в частном, то теперь известно количество цифр в частном, а значит, можно узнать, каким могло быть первое неполное делимое: в первом примере это число 37, а во втором — 1643, значит, из данных чисел в первом примере могли быть делителем числа 7 (если бы делитель был равен 2 или 3, то первым неполным делимым было бы не число 37, а число 3, а тогда в частном было бы 4 цифры), 8, 9, 16 и 27 (остальные числа не подходят по тем же соображениям).

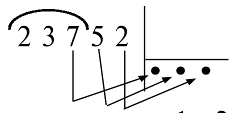
Во втором примере делителем могли оказаться только числа 237 и 1029. Будь делителем одно из оставшихся чисел, в частном было бы цифр больше, чем 3.

Предложите детям распределить между собой эти числа т. е. каждый берет одно из данных чисел в качестве делителя, определяет с его помощью первое неполное делимое, а затем определяет, сколько цифр будет в частном. Это позволит за короткий промежуток времени увидеть весь набор примеров, которые могут получиться при подстановке на место делителя каждого из данных чисел по отношению к обоим примерам.

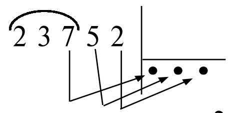
Однако напомним, что предложить детям выполнить задание 350 — это не значит сначала обсудить всем классом как его нужно делать. Нужно сначала дать возможность без участия и «чуткого руководства» учителя детям группой, в паре или индивидуально выполнить это задание по отношению *к первому* примеру, а затем предложить научить вас подбирать подходящие в качестве делителя числа. Обучая других, дети, без сомнения, определят последовательность рациональных действий, выберут соответствующую логику рассуждений и тем самым осмыслят способ действия. Так, для того чтобы не перебирать все числа по порядку, записывая их делителями, можно начать с определения того, каким должно быть первое неполное делимое, чтобы в частном было трехзначное число (именно так сформулировано *задание 351*, которое вы предложите для индивидуальной работы после того, как рассмотрите способ определения первого неполного делимого при выполнении рассматриваемого задания). Для этого можно специальными «уголками» или дужками показать связь цифр в частном с цифрами делимого, начиная с конца:



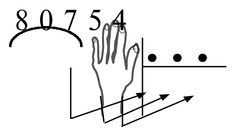
Деление, как и любое другое действие, выполняется поразрядно, значит, цифра (в частном) в разряде единиц получилась при делении единиц; десятков — при делении десятков и так далее. Значит, первая отличная от нуля цифра получилась при делении сотен, а в делимом их 37, значит, первое неполное делимое 37. Соединяя «уголками» (или дужками) соответствующие разряды, мы определяем последнюю цифру первого неполного делимого, а значит, сможем его назвать полностью, показав дужкой сверху:

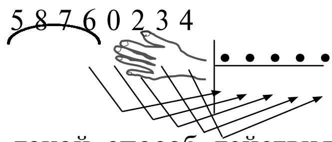


или



Выполнив еще 1—2 примера из того же задания 351, некоторые дети могут предложить «свернутый» способ действия: если в частном 3 цифры, то достаточно в делимом прикрыть последние 2 (2 = 3 — 1) цифры, тогда число, которое останется, и будет первым неполным делимым, если же в частном должно быть 4 цифры, то прикрыть в делимом нужно 3 (3 = 4 — 1), если 5, то 4, если 6, то 5 и так далее:





Если дети сконструировали такой способ действия при выполнении *упражнений 350 и 351*, то ***задания 352 — 355*** вряд ли вызовут затруднения.

Однако форсировать события не нужно. Способ может быть обнаружен при выполнении последующих ***заданий***, например ***353*** или ***354***, тем более что работа над ***заданиями 354*** и ***355*** завершается предложением научить других определять первое неполное делимое, если известно количество цифр в частном.

Задание 356 является обратным по отношению к предыдущему, в котором был известен делитель, а значит, можно было точно установить, каким должно быть первое неполное делимое, затем узнать, сколько цифр будет в частном. Теперь ученикам фактически предстоит, зная делитель и количество цифр в частном, определить, каким может быть первое неполное делимое. Для начала им предлагается выбрать из готовых чисел подходящие в качестве первого неполного делимого, что поможет им в дальнейшем определять область допустимых значений для первого неполного делимого при известном делителе. Конечно, дети могут проверять по порядку данные числа, но могут провести рассуждения, опираясь на предыдущие задания. Вряд ли есть надобность их описывать. Они очевидны: в первом примере первое неполное делимое может быть только двузначным числом, бо́льшим или равным делителю, т. е. 89 и 99, а во втором — трехзначным, т. е. 134. Вообще, с этим заданием можно и нужно поработать глубже с тем, чтобы понять, каким наименьшим и наибольшим числом может быть первое неполное делимое, если делитель 63 (97), а в частном должно получиться трехзначное число. В первом случае наименьшим двузначным числом может быть число 63, а наибольшим 99. Это означает, что областью допустимых значений для первого неполного делителя является множество всех натуральных чисел в интервале от 63 до 99 включительно.

Предложите каждому ученику выбрать любое число из этого интервала и проверить, подходит оно или нет.

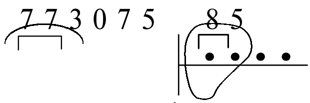
Первым неполным делимым при делителе 97 и трехзначным частным может быть любое натуральное число от 100 до 969 (первые две цифры не должны образовать число, равное или большее 97). Предложите детям самим придумать аналогичное задание.

Задания 357—360 показывают, что для установления связи между неполным делимым, делителем и количеством цифр в частном нет необходимости знать, с помощью каких цифр записано каждое из чисел, участвующих в делении. Так, ***задание 357*** — фактически обратное по отношению к заданию 351, с той разницей, что в нем не записаны конкретные числовые значения. А ***задание 358*** — обратное по отношению к заданиям, в которых нужно было определить количество цифр в частном (***346, 347, 348*** и др.). ***Задание 359*** содержит лишние данные: для однозначного определения количества цифр в первом неполном делимом достаточно знать количество цифр в частном (см. ***задание 360***, в котором для ответа нужно сначала найти первое неполное делимое). Если же брать количество цифр в частном, оставив в качестве известного (с позиции количества цифр) делитель, то ответ однозначным быть не может. При делении четырехзначного числа на двузначное (примеры 1 и 3) в частном может быть 2 или 3 цифры и ничего другого, аналогично можно рассуждать и при сравнении примеров 2 и 4. Выполнив это задание, следующие — *361 и 362* — можно предложить для самостоятельной работы.

Перед работой над ***заданием 364*** уместно вернуться к заданиям типа 261, 264 и 289, чтобы соотнести числа-«подсказки» при умножении с их местом, если записано деление. В делителе «подсказкой» всегда является число в старшем разряде, а вот в делимом она будет однозначной, если количество цифр в записи неполного делимого равно количеству цифр в записи делителя. Если же в записи неполного делимого на 1 цифру больше, то «подсказкой» в нем является двузначное число, образованное цифрами двух старших разрядов.

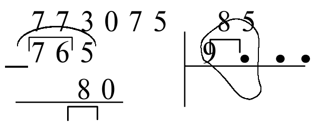
Пусть каждый после проверки выберет один из примеров и выполнит деление.

Покажем это на примере:

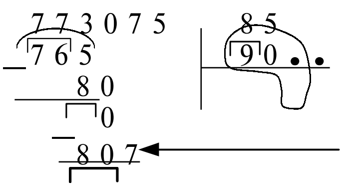


Подобрать первую цифру в частном — это значит найти число, на которое нужно умножить 8, чтобы получилось число 77 или меньше. Естественно, это число 9, так как $8 \cdot 9 = 72$, но прежде чем писать это число, нужно проверить, сколько единиц перейдет при этом из предыдущего разряда.

Так как $5 \cdot 9 = 45$, значит, из предыдущего разряда придет еще 4 единицы, а значит, получится $76 = 72 + 4$. Следовательно, число 9 подходит. Все рассуждения ученик производит устно, записывая в частное не пробную цифру, а точную. Теперь выполним умножение, найдем остаток и образуем второе неполное делимое, в котором вновь выделим «подсказку»:



Число 1 в частном не подходит, так как $80 < 85$, поэтому берем 0, т. е. $85 \cdot 0 = 0$; $80 - 0 = 80$. Сносим следующую цифру, образуя третье неполное делимое, и показываем «подсказку»:



умножение на 0 обязательно!

Теперь опять подходит число 9 (его можно не проверять, так как с ним уже работали):

```
 773075 | 85
-765    |----
   80   | 909.
  -0
   807
  -765
    425
```

Подбираем последнюю цифру. Для этого опять нужно ответить на вопрос: «На какое число нужно умножить 8, чтобы получилось число 42 (или меньше)?» Отвечаем: «На 5». Проверим, подходит ли это число. Для этого проверяем цифру в разряде десятков предыдущего произведения: $5 \cdot 5 = 25$, значит, $40 + 2 = 42$, но это еще не конец. Если полученное число оказалось равным искомому, то нужно проверить, какой будет цифра в следующем разряде неполного делимого. Это число 5, но и $5 \cdot 5$ тоже дает 5 в единицах, значит, цифра 5 в частном подобрана правильно:

```
 773075 | 85
-765    |----
   80   | 9095
  -0    | ....
   807
  -765
    425
   -425
      0
```

Если совместное решение такого (или другого) примера вызывает затруднения, то обязательно обсудите способ подбора цифр в частном совместно. «Оградите», как показано выше, делитель и ту цифру в частном, которую ищете, замкнутой линией, чтобы все остальное не мешало. Ребенку в этом случае легче сосредоточиться.

Итак, еще раз с самого начала пошагово восстановим логику рассуждений при делении многозначного числа на многозначное.

Пусть нужно разделить 2355392 на 3874.

```
2355392 | 3874
        |------
```

1) Найдем первое неполное делимое. Это число 23553.

2 3 5 5 3 9 2 | 3 8 7 4

2) Определим количество цифр в частном. Их три:

2 3 5 5 3 9 2 | 3 8 7 4
| • • •

3) Покажем, что будем искать первую цифру в частном:

2 3 5 5 3 9 2 | 3 8 7 4
| • • •

4) Найдем «подсказки». При умножении четырехзначного числа (делитель) на однозначное (первая цифра в частном) нужно получить пятизначное (первое неполное делимое). Это значит, что «подсказка» в делимом должна быть двузначным числом (23), а в делителе — число в старшем разряде (3):

2 3 5 5 3 9 2 | 3 8 7 4
| • • •

5) Теперь начнем подбирать цифру в частном. Это значит, что нужно найти такое число, которое при умножении на 3 дало бы число 23 или меньше. Это число 7, так как 7 · 3 или 3 · 7 = 21, но из предыдущего разряда при этом придет как минимум 5 единиц, так как 7 · 8 = 5 6, а 21 + 5 = 26, 26 > 23, значит, цифра 7 не подходит. Проверим цифру 6.

6 · 3 = 18, 6 · 8 = 4 8, а 18 + 4 = 22. Возможно, число 6 и подходит, но поскольку произведение 48 близко к 50 и может переполниться до 50 единиц в десятках за счет предыдущего произведения (а так оно и есть: 6 · 7 = 4 2, тогда 48 + 4 = 52), то необходимо проверить и третью цифру делимого — 5. Поскольку 6 · 7 = 42 и это произведение не может переполняться за счет предыдущего больше чем на 5 единиц, то произведение 6 · 8 = 48 не может увеличиться больше чем на 4 единицы, т. е. получится 52, значит, 2 — это и будет третья цифра произведения, а в неполном делемом это цифра 5.

Вывод: первая цифра частного — 6.

Возможно, эти подробнейшие рассуждения покажутся вам громоздкими, но мы специально подобрали такой пример, с помощью которого можно показать все оттенки рассуждений, в которых иногда (надо сказать, достаточно редко) может возникнуть необходимость. В данном же примере было достаточно проверить переполнение за счет предыдущего разряда и на этом остановиться: $6 \cdot 3 = 18$, а $18 + 4 = 22$, где 4 — это цифра в старшем разряде произведения $6 \cdot 8 = 4\ 8$.

Итак, первая цифра найдена. Ее подбор дети выполняют устно. К этому они должны были основательно подготовиться за счет множества других заданий, в том числе и показанных ранее.

6) Выполним деление с остатком: для этого делитель умножим на 6, вычтем это произведение из неполного делимого и найдем остаток:

```
  2 3 5 5 3 9 2 | 3 8 7 4
 _2 3 2 4 4     |---------
      3 0 9     | 6
                | . . .
```

7) Снесем следующую цифру и образуем второе неполное делимое, число 3099:

```
  2 3 5 5 3 9 2 | 3 8 7 4
 _2 3 2 4 4     |---------
      3 0 9 9   | 6 • •
```

Теперь вернемся к пункту 4. Выделим «подсказку» во втором неполном делимом — это число 3 — и подберем цифру в частном — это 0, так как 1 не подходит, выполним умножение, а затем вычитание, получим остаток, снесем следующую цифру, получим третье неполное делимое и все опять начнем сначала (с пункта 4 по пункт 6).

```
  2 3 5 5 3 9 2 | 3 8 7 4
 _2 3 2 4 4     |---------
     3 0 9 9    | 6 0 8
   _        0   | . . .
     3 0 9 9 2
   _ 3 0 9 9 2
             0
```

Подведем итоги. Главное — то, что цифры в частном можно подбирать устно, значительно сужая границы поиска. Цифру в частном подбираем умножением, а не делением одного числа-«подсказки» на другое.

Задания 363—375 предназначены для осмысления зависимости между всеми компонентами действия с акцентом на нахождение «подсказок» в каждом неполном делимом. ***Задания 365, 368, 369, 371, 374*** относятся к так называемому оценочному блоку[1] и содержат ошибочные варианты выполнения от имени разных детей. Подобные ошибки могут встретиться и у детей вашего класса, поэтому на них и нужно опираться, а не на текст учебника. Другое дело, если ваши ученики подобных ошибок не делали, тогда для оценивания и можно предложить книжные варианты.

Каждое из упоминаемых заданий так или иначе связано с делением многозначного числа на многозначное. Значит, в заготовки нужно подставлять подходящие числа, не обращая внимания на то, выполняется деление нацело или с остатком. Поэтому не бойтесь преобразовывать заготовки в числовые выражения и находить их значение делением одного числа на другое. Не забывайте предлагать ученикам самим придумывать аналогичные («такие же») задания с последующим выполнением.

Большое число тренировочных заданий вы найдете в рабочей тетради №2, которая дополняет учебник.

ТЕМА 4. ДЕЙСТВИЯ

---

[1] См.: Александрова Э. И. Методика обучения математике, 1 класс. — С. 15.

4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ УСТНЫХ И ПИСЬМЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Задания 376—393 — это уравнения, текстовые задачи и числовые или буквенные выражения, для решения которых требуется выполнить те или иные арифметические действия с многозначными числами. Особое внимание необходимо уделить графическому изображению отношений между величинами с помощью схем. Нужно выделить поразрядность выполнения любого арифметического действия как основной принцип построения этих действий.

Советы по работе с подобными заданиями были даны раньше. Одни задания можно выполнить в классе, другие дома, третьи — использовать в качестве проверочных работ. Предоставляем учителю право по своему усмотрению рассортировать их. А задания под названием «Проверь себя!» или аналогичные им — использовать для контрольной работы, предоставляя ребенку возможность выбора таких упражнений, с которыми он может успешно справиться. Пусть каждый оценит свои возможности, реализует их и проанализирует впоследствии состояние своего оценочного действия.

Овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для *классификации устных и письменных вычислений*. Рассматриваются приемы устного счета, в том числе умножения на 11, на 25 и др.

В процессе формирования этих приемов должны быть закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Выполняя устные и письменные вычисления, учащиеся не только осмысливают известные и новые приемы, но и придумывают аналогичные задания друг для друга. Так, подбирая многозначное делимое и однозначный делитель, кратный делимому, они ищут среди прочих такой способ, который позволил бы, не выполняя деления, узнать, будет ли делимое кратно делителю. Это приводит к *постановке* *новой учебной задачи на конструирование признаков делимости,* которые рассматриваются следующими группами: делимость на 2, 5 и 10; на 4, 25 и 100; на 8, 125 и 1000; на 9 и 3.

Три первые группы обосновываются делимостью 10 на 2 и 5, 100 на 4 и 25, 1000 на 8 и 25. Делимость же на 9 и 3 устанавливается с опорой на соответствующие таблицы умножения. Работая над признаками делимости, учащиеся тем самым отрабатывают умножение и деление многозначных чисел. Рассматриваются «составные» признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 20 и т. д.

Итак, содержанием последней, четвертой главы учебника являются прежде всего устные и письменные вычисления и их классификация. Конструирование приемов устных вычислений при умножении и делении, включая умножение на 11, 101, умножение и деление на 25 и признаки делимости, позволяет ученикам дополнительно поупражняться в умножении и делении многозначного числа на многозначное.

Все используемые приемы устного сложения, вычитания, умножения и деления чисел вам хорошо известны, поэтому вряд ли их нужно разъяснить (владение приемами устных вычислений является составной частью знаний, умений и навыков, которыми должен обладать выпускник педагогического учебного заведения), а способы организации обучения детей также многократно описывались ранее, поэтому остановимся лишь на методических особенностях подхода:

1) осуществление перехода к выявлению приемов устных вычислений с опорой на классификацию примеров (математических выражений, ***задание 394***);
2) самостоятельное конструирование общих способов действий (лежащих в основе приемов устных вычислений),основанных на использовании свойств арифметических действий;
3) применение выделенных приемов устных вычислений в пределах 100 и 1000 при выполнении действий с круглыми многозначными числами, что значительно расширяет круг заданий, предназначенных для формирования этих приемов. Тем самым у детей повышается интерес к их освоению;
4) использование цвета для выделения чисел, над кото-

рыми действие может быть выполнено устно;

5) знакомство с частными приемами.

Рассмотрим подробнее каждую из перечисленных особенностей.

В ***задании 394*** детям предлагается назвать примеры, которые они могут решить устно, и примеры, для решения которых им понадобится запись «столбиком». Понятно, что такое разделение всех примеров на 2 группы условное, поскольку у разных детей разная степень сформированности вычислительных навыков. Это значит, что одно и то же выражение одни дети будут находить устно, а другие письменно. Однако примеры в этом задании подобраны так, что вряд ли вызовут разночтение. Очевидно, что сложение в первом «столбике», умножение во втором и деление с последующим вычитанием в третьем большинство детей отнесут к письменным вычислениям, а остальные — к устным. Следовательно, правомерны вопросы и просьба: «Как вы узнаёте, какие примеры удобно решать устно, а какие письменно? Какие приемы устных вычислений вы знаете и для каких действий? Научите!»

После каскада перечисленных вопросов дайте возможность детям на тех примерах, которые даны в задании, или, если необходимо, на других, обсудить приемы вычислений, причем предложите описать приемы так, чтобы было понятно человеку, который не умеет ими пользоваться. В этом им может помочь ***задание 395***, но это не значит, что вы предлагаете ученикам ознакомиться с приемами устного сложения по учебнику. Как и прежде, учебник позволит дома восстановить основные приемы, поскольку можно предположить, что дети могут использовать значительно больше разных частных приемов. Это значит, что в каждом таком случае ученики должны не только обосновать правомерность использования того или иного приема, но и проанализировать все его плюсы и минусы.

А вот упорядочить основные приемы, а они прописаны в ***заданиях 395*** и ***398,*** необходимо.

В этих заданиях, так же как и в других последующих, связанных с использованием приемов устного выполнения действия, необходимо учесть и такую особенность (в списке она четвертая) методики обучения, как использование цвета для выделения тех чисел, к действиям над которыми сводится поиск результата.

Это не значит, что дети будут такими приемом пользоваться постоянно. Нет, сначала они будут записывать эти числа в цвете (можно цветным карандашом, цветной пастой или фломастером), а затем можно выделять их, например, таким значком (***задание 397***):

$$300 + 200; \qquad 5200 + 9100 \text{ и т. д.}$$

Задания 396—402, в которых отображена третья особенность подхода, помогут детям восстановить и заново осмыслить приемы устного сложения и вычитания и вновь вернуться к вопросу о том, какие вычисления они считают устными, а какие письменными. Граница между ними в рамках данной программы очень условна, и вот почему. Традиционно принято считать, что письменные действия — это вычисления «столбиком» или «в столбик», которые выполняют (кроме деления) начиная с младшего разряда, а устные вычисления — со старшего. Деление же «выпадает» из общего правила без всяких на то оснований (мы выше показали в качестве примера и обратный порядок выполнения деления начиная с младшего разряда).

Однако, обучая детей в рамках описываемой программы, мы неоднократно подчеркивали, что начинать действовать можно с любого разряда: справа налево, и слева направо, и с середины. Более того, умение умножать начиная со старшего разряда, с учетом всех переполнений в разрядах, несомненно, является залогом успешного овладения обобщенным способом деления многозначного числа на многозначное, гарантией того, что ученик сможет устно (!) подбирать цифры в частном. Другое дело, что ребенок, понимая, что выполнять любое арифметическое действие можно и справа налево, выбирает *удобный* (прежде всего для себя) способ действия. Это значит, что умножать большинство детей наверняка будут начиная с младшего разряда, и это правильно. Однако в любой момент каждый должен уметь выполнить это же действие в обратном порядке, пусть не так быстро, главное — правильно, т. е. с учетом всех переполнений. Такие вычисления, как показала многолетняя практика, не только очень полезны для осмысления способа и алгоритма действия, но и способствуют интенсивному развитию способности к устным вычислениям. Поэтому одним из показателей качественного формирования навыков письменных и особенно устных вычислений как раз и становится свободное владение алгоритмами выполнения действий с разной последовательностью шагов.

Возвращаясь к попытке выделения основания для классификации устных и письменных вычислений, можно сослаться, с одной стороны, на различия в объеме памяти: одни дети могут, не записывая «столбиком», складывать четырех-пятизначные числа, а другим и двузначные не всегда «по зубам». Поэтому такие дети, как правило, вычисляя устно, мысленно представляют запись «столбиком», складывая так, как они делали бы это письменно. Такой способ одни ученики назвали полуписьменным, другие — полуустным.

Иногда ученики называют полуустным действие, записанное в строчку. Сами вычисления ученик при этом выполняет устно, т. е. не переписывает пример «столбиком».

Если же первый способ действия дети называют полуустным, то тогда второй — полуписьменным. В конечном счете это неважно, поскольку самое главное то, что они разными словами отображают *разные* способы действия.

Обсуждению удобного для каждого из учеников способа и должен быть посвящен анализ мыслительных действий по отношению к устному и полуустному, письменному и полуписьменному выполнению действия.

4.2. ПРИЕМЫ УСТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Переход к приемам устного умножения происходит начиная с ***задания 403***, которое переносится на доску, как и «вводное» задание 394. Способы умножения, описанные от имени детей в ***задании 404***, помогут вам сориентироваться во время их обсуждения детьми вашего класса и упорядочить приемы устного умножения, представленные еще в ***заданиях 406*** и ***408.*** Эти приемы используются и при выполнении ***заданий 405***, ***407*** и ***409***.

В ***задании 410*** в схематичном виде отображена та особенность, которая идет под третьим номером на с. 146 данного пособия.

Задания 411—433 дают возможность не только потренироваться в устных вычислениях, но и сконструировать различные частные приемы устных вычислений. Работа с такими приемами позволяет активизировать вычисления, повышает у детей интерес, расширяет кругозор, но тем не менее *не является обязательной*. Это значит, что этот материал в случае отставания от программы, независимо от причин, может быть опущен и использован на факультативных занятиях для желающих или в математическом кружке. И факультатив, и математический кружок могут быть организованы для детей, наиболее способных или интересующихся математикой.

Кроме этих приемов, известны еще многие другие, широко представленные в изданиях, описывающих организацию внеклассной работы, которую в классах развивающего обучения по Д. Б. Эльконину — В. В. Давыдову можно развернуть «руками» самих детей. О способности к самостоятельному изучению и обучению этому других детей свидетельствуют многие учителя, работающие по данной программе.

Напоследок отметим, что, завершая работу над приемами устных вычислений, относящихся к умножению, нельзя не вернуться к арифметическим действиям, в которых один из компонентов может оказаться нулем (***задания 430—431***), что позволяет значительно расширить круг решаемых уравнений. Дети впервые столкнутся с ситуацией, когда уравнение может иметь не один (как это было раньше), а несколько корней (***задание 433***). Более того, в ***задание 432*** включены уравнения с двумя неизвестными. Эти уравнения имеют бесконечное множество решений в виде пар чисел, удовлетворяющих равенству с двумя неизвестными.

Здесь, без сомнения, нужно не просто говорить о числах x и y или только о числах x (***задание 433***), при которых равенство окажется верным, но и предложить детям дать название равенствам, содержащим одну (или несколько) неизвестную величину. Интересно, назовут они их уравнениями или нет, поскольку определения уравнения от детей еще не требовалось, а задания на распознавание уравнений среди равенств и выражений, содержащих неизвестные величины, были.

В ***заданиях 434—441*** рассматриваются приемы устного деления. При конструировании этих приемов старайтесь опираться на подбор частного через умножение, помня при этом о том, что конструирование приема и его применение — «вещи» индивидуальные. Что удобно одному, неудобно другому. Больше прислушивайтесь к детям и не навязывайте им только те приемы и способы действий, которыми владеете и пользуетесь сами. Не всегда то, что вам кажется легким, оказывается таковым для детей. А то, что кажется трудным вам в силу уже сложившихся стереотипов и навыков, может для ребенка оказаться простым и понятным, совпадающим с его логикой.

Задания 442 и 443 завершают изучение приемов. Способы организации действий детей при выполнении таких заданий уже описывались. Раздел «Проверь себя!» поможет составить проверочные, тестовые или контрольные работы.

Кроме указанного выше учебного материала, изучение признаков делимости также может быть при необходимости вынесено за рамки обязательной программы, хотя знакомство с ними является мощным средством для закрепления навыков деления многозначного числа на однозначное и на многозначное числа. Тренировочные упражнения представлены в неявном виде, поскольку, воспользовавшись тем или иным признаком делимости, ученик, выполняя деление, проверяет, правильно ли он установил, делится ли данное число с остатком (отличным от нуля) или нацело.

4.3. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

В начальной школе, как правило, вопросы делимости натуральных чисел, в том числе признаки делимости, не рассматриваются, тем не менее многие аспекты этой теории так или иначе используются в неявном виде, например при делении суммы, разности, произведения на число.

Напомним, что если говорят: число *a делится на число b* (a и b — натуральные числа), то *это значит, что существует такое натуральное число q, что $a = b \cdot q$*. Число b называют делителем числа a, а число a — кратным числа b.

Отношение делимости обладает рядом свойств, например:

1) если одно число делится на второе, а второе делится на третье, то первое число делится на третье;
2) если каждое из двух чисел a и b делится на число c, то сумма $a + b$ и разность $a - b$ делятся на c;
3) если одно из двух чисел a и b делится на c, а другое не делится на c, то сумма $a + b$ и разность $a - b$ не делятся на c.

Установлен ряд признаков делимости, по которым можно определить, делится ли число n (записанное в десятичной системе счисления) на данное простое число *p*. Обычно применение находят те признаки делимости, проверка которых осуществима легче, чем непосредственное деление числа *n* на *p*. Среди признаков наиболее удобны следующие.

Для делимости на 2 или на 5 надо, чтобы последняя цифра числа делилась на 2; для делимости на 3 — чтобы сумма цифр числа делилась на 3; для делимости на 11 — чтобы разность суммы цифр, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах, делилась на 11; имеются также признаки делимости на другие числа: для делимости на 4 надо, чтобы число, записываемое двумя последними цифрами, делилось на 4; для делимости на 9 — чтобы сумма цифр числа делилась на 9. Менее удобны признаки делимости на 7 и на 13: на эти числа должна делиться разность числа тысяч и числа, выражаемого последними тремя цифрами; эта операция уменьшает число знаков в числе, и последовательное ее применение приводит к трехзначному числу; например, 825678 делится на 7, так как $825 - 678 = 147$ делится на 7[1].

Мы уже обращали внимание учителя на то, что, выполняя те или иные устные или письменные вычисления, необходимо не только использовать известные и новые «детские» приемы, но и предлагать ученикам придумывать задания друг для друга по аналогии с теми, которые им предлагает учитель. Такой подход, как правило, и приводит детей к постановке новых учебных задач, в частности речь идет об «изобретении» признаков делимости, по которым, не выполняя деления, можно предсказать: разделится одно число на другое без остатка (нацело) или с остатком (отличным от нуля). Понятно, что речь идет о делимости натуральных чисел.

Интересна история включения этого материала в программу. В одной из базовых школ г. Екатеринбурга ученикам было предложено задание с тем, чтобы «потянуть время» до прихода на урок кинооператора (в тот день планировался открытый урок для кинофильма о школе): по заготовке подобрать такие числа, чтобы деление выполнялось нацело (без остатка):

---

[1] См.: Школьная энциклопедия. Математика. — М.: Большая Российская Энциклопедия, 1996. — С. 29

$$\begin{array}{r|l} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet & \bullet \\ \cline{2-2} & \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

В нашем учебнике это ***задание 444.***

Способ подбора, который, что называется, «с ходу» предложили ученики, — с опорой на обратное действие — умножение. Они преобразовали эту заготовку и с помощью умножения стали находить подходящие числа:

$$\begin{array}{r} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \times\quad\quad \bullet \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5\,3\,7\,4 \\ \times\quad\quad 2 \\ \hline 1\,0\,7\,4\,8 \end{array}$$

Это значит, что:

$$\begin{array}{r|l} 1\,0\,7\,4\,8 & 2 \\ \cline{2-2} & 5\,3\,7\,4 \end{array}$$

Этот способ в учебнике представлен от имени Насти в ***задании 445*** и частично в ***задании 446***.

Поскольку урок в привычном смысле для детей еще не начался (на задуманном открытом уроке должен был быть рассмотрен другой материал, который до урока нельзя было трогать, поскольку на нем хотели показать «вживую» перед камерой рождение мысли), то дети свободно перемещались по классу, а учитель и мы наблюдали за детьми со стороны. Каждая новая идея тут же сообщалась, и автор идеи подбегал, в буквальном смысле слова, к нам за поддержкой. Наша оценка идеи всегда была восторженной, и ученики тут же пытались ее либо обосновать, либо опровергнуть (в задании 445, например, предложена идея поразрядного деления).

Так, выбрав для исследования в качестве первого делителя число 2, дети тут же задумались над вопросом: «А нельзя ли без применения умножения, по записи числа узнавать, делится оно нацело на 2 или нет?» Этого первого вопроса, который возник у кого-то из детей, было вполне достаточно, чтобы развернуть исследование, обсуждая вопрос в стихийно сложившихся группах. Эта проблема была решена методом проб и ошибок с пока еще нестрогим доказательством признака делимости на 2, который представлен в ***заданиях 446—448***. Обоснование признака делимости на 2 позволило обосновать и признак делимости на 5, а значит, и на 10 (***задание 448***).

Задания 449—452 не только позволят ученикам спользовать признаки делимости при их выполнении, но и дадут возможность потренироваться в делении. Предложите детям проверить с помощью деления свой вывод и обоснованность своих рассуждений.

Задания 453—468 посвящены признакам делимости на 4, 25 и 100. В эту же группу признаков, характерной особенностью которых является опора: на последнюю цифру (признаки делимости 2, 5 и 10), на число, образованное двумя последними цифрами (признаки делимости на 8, 125 и 1000), входят и признаки делимости на 16, 625 и 10000, которые определяются числом, образованным четырьмя последними цифрами, и т. д.

Конечно, изучение признаков делимости и выполнение всех этих заданий предназначены, как уже говорилось выше, для *ознакомления* с целью поддержания и развития у детей интереса к изучению действий с числами, в частности деления, для расширения представлений о натуральных числах, для более глубокого усвоения материала, связанного с делением многозначных чисел.

Это значит, что требовать от детей заучивания признаков делимости или каких-либо утверждений, истинных или ложных (***задания 461, 462, 468*** и др.), *не нужно.*

Начиная с ***задания 469*** по ***задание 494*** рассматриваются признаки делимости на 9 и на 3 и использование признаков делимости при решении *текстовых задач.* Интересно, что при обсуждени этих признаков делимости ученики так же пытались связать эти признаки с цифрами, записанными на разных местах (смотрели на первые цифры, на цифры в середине числа), долго мучаясь и не принимая при этом никаких подсказок с моей стороны. Кстати, подсказки, которые даны в учебнике, предназначены не для чтения их в готовом виде, а для подтверждения догадки, рожденной на уроке. Так вот, подбирая с помощью умножения числа, которые делятся на 9 без остатка, ученики долго пытались увязать отдельные цифры в записи числа или числа, образованные с их помощью с делимостью на 9. Кстати, начинать изучение признаков, опирающихся на сумму цифр, нужно с делимости на 9, а не с делимости на 3, как это принято, поскольку такое свойство дети обнаруживали в явном виде при изучении таблицы умножения 9. Итак, все безуспешные поиски детей на уроке свелись к тому, что нашелся кто-то (а такой ребенок всегда находится, как показала многолетняя практика в многочисленных детских коллективах), кто предложил обратиться к таблицам умножения, в частности к таблице 9. Изучая эту таблицу, ученики обнаружили, что *сумма цифр* в произведении всегда равна 9. Опираясь на это свойство и был сконструирован способ определения цифры в разряде единиц. Именно это свойство и послужило для детей отправной точкой. Они решили проверить, будет ли сумма цифр в десятичной записи числа, которое заведомо делится на 9, равна 9. При вычислении суммы цифр и было обнаружено, что 9 получается не всегда, а вот число, делящееся на 9, равное одному из табличных произведений, получается. На этом основании был сделан вывод: если сумма цифр в десятичной записи числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Доказательства признаков делимости приведены в книге Л. П. Стойловой «Математика: Учебное пособие» (М.: Издательский центр «Академия», 1997. — С. 353—355), с которой учителю советуем ознакомиться (детям такое доказательство на данном этапе обучения недоступно и ни к чему).

Зная основные признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8 и 9, можно конструировать «составные» или «комбинированные». Например, признак делимости на 6: число, которое одновременно удовлетворяет признаку делимости на 2 и на 3, делится на 6. Это значит, что если число оканчивается четной цифрой и сумма цифр в его десятичной записи кратна трем, то это число делится на 6.

Проверим делимость числа 3018732 на 3: последняя цифра четная — 2, а сумма цифр равна 24 ($3 + 0 + 1 + 8 + 7 + 3 + 2 = 24$), а $24 \vdots 3$, значит, число $3018732 \vdots 6$.

Кстати, обращаем ваше внимание на то, что для математической записи предложения о делимости нацело одного числа на другое используется знак $\vdots$. Запись $a \vdots b$, где a и b — натуральные числа, означает, что число a делится на число b нацело (без остатка)[1], а вот записать $a \vdots b = c$ *нельзя*. В этом случае можно использовать только двоеточие: $a : b = c$.

Мы привели пример конструирования признака делимости на 6, в учебнике (***задание 477***) предлагается сконструировать признак делимости на 18, опираясь на признаки делимости на 2 и на 9.

---

[1] Если число a не делится на b нацело, то записывают так: $\overline{a \vdots b}$, где черта сверху означает отрицание высказывания $a \vdots b$. Новое высказывание можно прочитать еще и так: «Неверно, что число a делится нацело на число b».

Конструировать новый признак можно лишь с взаимно простыми числами, т. е. теми, у которых наибольший общий делитель равен единице. На этом основании можно скомбинировать признаки делимости на 6 (2 и 3), на 10 (2 и 5), на 12 (3 и 4), на 14 (2 и 7), на 15 (3 и 5), на 18 (2 и 9), на 20 (4 и 5), на 36 (4 и 9) и т. д.

Весь этот материал и еще многое, связанное с ним, можно использовать, как уже говорилось, на факультативных занятиях или на занятиях в математическом кружке. Как правило, вопросы делимости вызывают у детей огромный интерес.

1. МАТЕРИАЛ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ

Кроме дополнительных приемов умножения (на 11, 101, 25 и др.), которые предложены в этой главе, и вопросов делимости, о которых шла речь выше, можно предложить для факультативных занятий или в качестве дополнительного материала для классов с углубленным изучением математики конструирование умножения и деления чисел, записанных в недесятичных системах счисления.

Для этого достаточно составить таблицу умножения для однозначных чисел в той или иной системе счисления (складывать и вычитать дети умеют). Например: составим таблицы для троичной и пятеричной систем, зная, что $a \cdot 0 = 0$ и $a \cdot 1 = a$, где a — однозначное число в выбранной системе счисления:

В троичной системе достаточно знать, что $2 \cdot 2 = 11_3$.

Таблица умножения в пятеричной системе счисления начиная с числа 2 выглядит так.

x	2	3	4
2	4	11_5	13_5
3	11_5	14_5	22_5
4	13_5	22_5	31_5

Достаточно знать произведения из закрашенной части этой таблицы умножения для того, чтобы найти произведение чисел 3012_5 и 34_5.

$$\begin{array}{r} \times\; 3\,0\,1\,2 \\ 3\,4 \\ \hline +\; \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,0 \\ \hline \end{array}$$

Для того чтобы было понятно, умножим с помощью составленной таблицы число 3012_5 отдельно на 4 (цифра в разряде единиц) и на 30. Каждое произведение однозначных чисел ищем по таблице:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3\,0\,1\,2 \\ 4 \end{array} \\ \hline \dot{2}\,\dot{2}\,\dot{1}\,\dot{0}\,\dot{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3\,0\,1\,2 \\ 3\,0 \end{array} \\ \hline \dot{1}\,\dot{4}\,\dot{0}\,\dot{4}\,\dot{1}\,\dot{0} \end{array}$$

Значит,

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3\,0\,1\,2 \\ 3\,4 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 2\,2\,1\,0\,3 \\ 1\,4\,0\,4\,1\,0 \end{array} \\ \hline 2\,1\,3\,0\,1\,3 \end{array}$$

Итак, $3012_5 \times 34_5 = 213013_5$.

Проверим результат следующим образом — переведем каждое число в десятичную систему счисления:

$$3012_5 = \underbrace{3 \cdot 5^3}_{\underbrace{3 \cdot 125}_{375}} + \underbrace{0 \cdot 5^2}_{0} + \underbrace{1 \cdot 5^1}_{5} + \underbrace{2 \cdot 5^0}_{\underbrace{2 \cdot 1}_{2}} = 375 + 7 = 382$$

$$34_5 = 3 \cdot 5 + 4 = 15 + 4 = 19$$

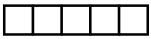
$$2\,1\,3\,0\,1\,3_5 = 2 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + \underbrace{0 \cdot 5^2}_{0} + \underbrace{1 \cdot 5^1}_{5} + \underbrace{3 \cdot 5^0}_{3 \cdot 1} =$$

$= 2 \cdot 3125 + 1 \cdot 625 + 3 \cdot 125 + 5 + 3 = 6250 + 625 + 375 + 8 = 7258$, значит, $382 \cdot 19$ должно быть равно 7258, что верно.

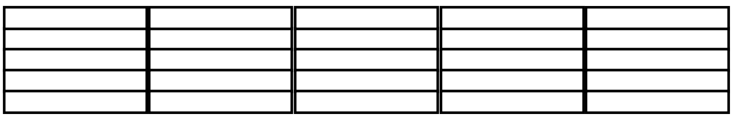
Конечно, чтобы делать проверку подобным способом, нужно уметь переводить числа из одних систем счисления в другие.

Способы перевода чисел из одной системы в другую, так же как и описание способов выполнения действий с числами, записанными в недесятичных системах счисления, описаны в уже упомянутой книге Л. П. Стойловой и во множестве других книг по математике. Однако обучение детей этим способам должно опираться на изображение мерок и величин, построенных по заданному числу. Так, величина, которая задана числом 3012_5 (мы переводим это число в десятичную систему счисления), содержит 3 мерки E_4, 1 мерку E_2 и 2 мерки E_1 (мерки E_3 отсутствуют, так как на третьем месте справа в записи числа записана цифра 0). Изобразим систему мерок начиная с мерки E_1, равной площади 1 клетки:

 E_1

 E_2

 $E_3 = \underbrace{(5 \cdot 5)}_{5^2} E_1 = 25\ E_1$



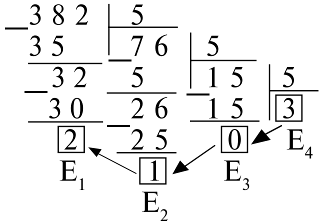
$$E_4 = \underbrace{25 \cdot 5}_{5^3} E_1 = 125 E_1$$

Числа 5, 25, 125 записаны в десятичной системе счисления, значит:

E_4	E_3	E_2	E_1
3	0	1	2_5

$$= 3 \cdot \underbrace{125}_{5^3} + 0 \cdot \underbrace{25}_{5^2} + 1 \cdot \underbrace{5}_{5^1} + 2 \cdot \underbrace{5^0}_{1} = 382$$

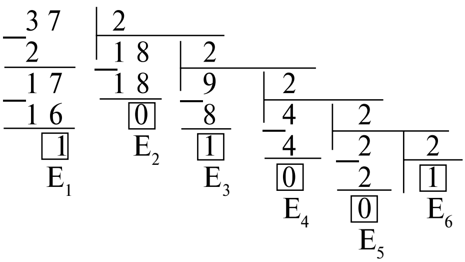
Понятно, что если бы число 382 мы хотели бы записать в пятеричной системе счисления, то нужно было бы это число разделить на 5, тогда остаток рассказывал бы о мерках E_1, а частное — о том, сколько мерок E_2 во всей величине, затем, если частное не является однозначным числом, меньшим 5 (а именно такой может быть цифра в записи числа в пятеричной системе счисления), то его еще раз нужно разделить на 5, тогда остаток будет сообщать о мерках E_2, затем опять проверить частное и, если нужно, снова разделить его на 5, и так до тех пор, пока в частном не получим однозначное число, которое меньше основания системы счисления. Число в новой (здесь в пятеричной) системе счисления будет записано с помощью следующих цифр: в старшем разряде — последнее частное, в предыдущем — последний остаток, и далее все остатки, от последнего до первого (они в рамках):



— частное, которое меньше 5 — основания системы счисления, значит,

$382 = \overset{E_4}{3}\,\overset{E_3}{0}\,\overset{E_2}{1}\,\overset{E_1}{2}{}_5$

Вот еще один пример перевода числа 37 из десятичной системы счисления в двоичную:



— значит 37, $= \overset{E_6}{1}\,\overset{E_5}{0}\,\overset{E_4}{0}\,\overset{E_3}{1}\,\overset{E_2}{0}\,\overset{E_1}{1}{}_2$

По тому, сколько раз делили на 3, видно, что для обратного перевода нужно единицу в шестом разряде (E_6) умножить на $2^5 = 32$, единицу в третьем разряде (E_3) умножить на $2^2 = 4$, единицу первого разряда (E_1) умножить на $2^0 = 1$, где число 2 сообщает об основании системы счисления, а 0 рассказывает о том, что эту мерку еще не укрупняли (т. е. речь идет о единичной мерке E_1), и полученные произведения сложить.

Значит, $100101_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37$

Проверьте себя:

1) переведите числа 2316_7, 1101110_2, 210_3, 342_5 в десятичную систему счисления, затем обратно (ответы: 846; 110; 21; 97);

2) выполните действия с числами, записанными в недесятичных системах счисления, затем проверьте действие путем перевода каждого множителя в десятичную систему счисления:

$1101_2 \times 101_2$; $212_3 \cdot 122_3$; $342_5 \times 413_5$; $42033_5 : 31_5$; $101101_2 : 11_2$ (ответы: 1000001_2; 11211_3; 314401_5; 1143_5; 1111_2).

Кроме описанного выше материала, для факультатива можно предложить еще один способ умножения многозначных чисел, основанный на правиле «ножниц». Способ был разработан автором данной книги, а вот название для правила (способа умножения) придумали ученики харьковской школы № 17 во время эксперимента по обучению учащихся 2 классов (программа трехлетней начальной школы). Отправной точкой в конструировании способа послужила задача определения цифры в каждом разряде произведения двух многозначных чисел, когда количество цифр в нем уже определено.

Нет необходимости подробно описывать методику обучения, поскольку усвоение этого способа не входит в перечень необходимых умений, однако поделиться основными идеями, положенными в основу способа, имеет смысл, поскольку ими вполне можно воспользоваться при конструировании приемов устных вычислений, тем более что таким способом для умножения двузначных чисел пользовались в старину. На Руси его называли «способом умножения крестиком», в Америке его называли «американским способом», однако им пользовались еще индийцы в VI в н. э., поэтому правильнее было бы назвать его индийским способом. Правда, пользовались им, как правило, лишь при умножении двузначного числа на двузначное. Мы же разработали не только общий способ умножения любого многозначного числа на любое многозначное, назвав правило нахождения цифры в каждом разряде правилом «ножниц», но и методику обучения этому способу. Удобство его в том, что все вычисления можно выполнять устно, поэтому там, где дети обучались этому способу, навыки устных вычислений были ошеломляющими: практически все дети производили необходимые вычисления быстро, правильно и с удовольствием, соревнуясь друг с другом в скорости нахождения результата. Запись в конечном виде выглядела так:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 3\,2\,7 \\ 4\,9\,6 \end{array} \\ \hline {\scriptstyle 2\;\,3} \\ 1\,6\,2\,1\,9\,2 \end{array}$$

Покажем вкратце, как мы рассуждали, определяя цифру в каждом разряде.

Сначала делается заготовка для всех цифр, которые могут быть в произведении (без всякой предварительной прикидки).

В нашем случае при умножении трехзначного числа на трехзначное может получиться либо 6 цифр, либо на 1 цифру меньше (5). Заготовку делаем для 6 цифр (в крайнем случае в старшем разряде напишем цифру 0, которая на результат не влияет).

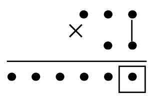
Итак, $\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}327\\496\end{array}\\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$

Проанализируем, как можно в этом примере получить единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д.

Единицы в произведении можно получить только от умножения единиц на единицы (имеются в виду числа, записанные в разряде единиц у множителей). Причем если в общем случае считать такое произведение всегда двузначным числом (если число однозначное, то на месте десятков всегда можно записать 0), то в разряд единиц запишем вторую цифру (не второй разряд, а вторую цифру, считая слева направо):

$$Е = Е \times Е \text{ (II ц.)}$$

Покажем это произведение на модели (схеме):

 II цифра

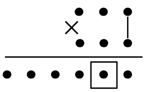
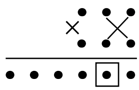
Чтобы определить цифру в разряде единиц, нужно 7 умножить на 6 и назвать и записать вторую цифру. Значит, говорю: 7 × 6 равно двум, а не 42, так как нужна только вторая цифра числа 42. Пишу в единицах число 2:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}327\\496\end{array}\\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\boxed{2} \end{array} \longleftarrow 7 \times 6 \text{ (вторая цифра } 4\boxed{2}\text{)}$$

Перехожу *к десяткам*. Десятки в произведении складываются из первой цифры произведения единиц на единицы и вторых цифр от умножения десятков первого множителя на единицы второго и единиц первого на десятки второго:

$$Д = Е \times Е \text{ (I ц.)} + Д \times Е \text{ (II ц.)} + Е \times Д \text{ (II ц.)}$$

На модели:

 I цифра и  II цифра

Говорим: 7 × 6 равно 4 (первая цифра числа $\boxed{4}$2), пишем 4 под разрядом десятков, отделив чертой искомое произведение, затем говорим: 2 × 6 равно 2, пишем 2 (вторая цифра числа 1 $\boxed{2}$) туда же и продолжаем говорить: 7 × 9 равно 3 (вторая цифра числа 6 $\boxed{3}$).

Получаем запись:

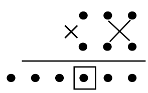
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 3\,2\,7 \\ 4\,9\,6 \end{array} \\ \hline \bullet\;\bullet\;\bullet\;\boxed{\bullet}\;\bullet\;2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|l} 4 & \leftarrow 7 \times 6 \text{ (первая цифра } \boxed{4}\,2) \\ 2 & \leftarrow 2 \times 6 \text{ (вторая цифра } 1\,\boxed{2}) \\ 3 & \leftarrow 9 \times 7 \text{ (вторая цифра } 6\,\boxed{3}) \\ \hline \end{array}$$

Если числа 2 и 3 присчитывать к числу 4, то в произведение можно сразу вписать число 9 : 4 + 2 = 6, 6 + 3 = 9. Позже, для того, чтобы найти число 9, как и любое другое число, множители не проговариваются. Достаточно, глядя на множители, сразу называть нужную цифру произведения: смотрю на множители 7 и 6, называю 4, к нему сразу присчитываю 2 (посмотрев на множители 2 и 6), получаю 6 (4 + 2), затем к 6 присчитываю 3 (глядя на множители 9 и 7), получаю 9 и пишу эту цифру в разряд десятков. Перехожу к следующему разряду — сотням:

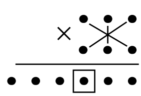
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 3\,2\,7 \\ 4\,9\,6 \end{array} \\ \hline \bullet\;\bullet\;\bullet\;\boxed{\bullet}\;9\,2 \end{array}$$

Сотни сложатся из первых цифр предыдущих произведений — десятков на единицы и единиц на десятки:



I цифра

и из вторых цифр произведений сотен на единицы, единиц на сотни и десятков на десятки:



II цифра

Итак, С = Д × Е (I) + Е × Д (I) + С × Е (II) + Е × С (II) + + Д × Д (II).

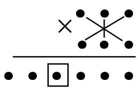
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 3\;\,2\;\,7 \\ 4\;\,9\;\,6 \end{array} \\ \hline \bullet\;\bullet\;\bullet\;\boxed{\bullet}\;9\;\,2 \\ \hline \end{array}$$

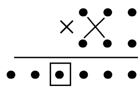
$$\begin{array}{|c|cl} 1 & \leftarrow & 2 \times 6 \text{ (первая цифра } \boxed{1}\,2\ ) \\ 6 & \leftarrow & 9 \times 7 \text{ (первая цифра } \boxed{6}\,3\ ) \\ 8 & \leftarrow & 3 \times 6 \text{ (вторая цифра } 1\,\boxed{8}) \\ 8 & \leftarrow & 4 \times 7 \text{ (вторая цифра } 2\,\boxed{8}) \\ 8 & \leftarrow & 2 \times 9 \text{ (вторая цифра } 1\,\boxed{8}) \\ \hline \end{array}$$

Присчитывая эти числа устно, получим: 1 + 6 = 7, 7 + 8 = 15, 15 + 8 = 23, 23 + 8 = 31, значит, в разряде сотен пишем 1, а 3 переносим в следующий разряд, сделав пометку, чтобы о ней не забыть, и переходим к поиску цифры в следующем разряде:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3\,2\,7\\4\,9\,6\end{array}\\ \hline \bullet\ \bullet\ \overset{3}{\boxed{\bullet}}\,1\,9\,2\end{array}$$

Далее, анализируем состав числа *в тысячах* и покажем кратко на схемах:


I цифра


II цифра

Т = С × Е (I) + Е × С (I) + Д × Д (I) + С × Д (II) + + Д × С (II)

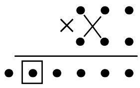
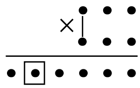
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3\ \ 2\ \ 7\\4\ \ 9\ \ 6\end{array}\\ \hline \bullet\ \ \bullet\ \ \overset{3}{\boxed{\bullet}}\ 1\ \ 9\ \ 2\end{array}$$

1	←	3 × 6 (первая цифра $\boxed{1}$ 8)
2	←	4 × 7 (первая цифра $\boxed{2}$ 8)
1	←	2 × 9 (первая цифра $\boxed{1}$ 8)
7	←	3 × 9 (вторая цифра 2 $\boxed{7}$)
8	←	4 × 2 (вторая цифра произведения, в котором в десятках нуль: 0 $\boxed{8}$)

Значит, *цифра в разряде тысяч* будет найдена так:
1 + 2 = 3; 3 + 1 = 4; 4 + 7 = 11; 11 + 8 = 19; 19 + 3 = 22 (число 3 в последней сумме — это то, которое перешло из предыдущего разряда, оно было записано для памяти мелко над рамкой). В разряд тысяч запишем 2, а еще 2 (цифра в десятках) перейдет в следующий разряд:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3\,2\,7\\4\,9\,6\end{array}\\ \hline \bullet\ \overset{2}{\boxed{\bullet}}\,2\,1\,9\,2\end{array}$$

Найдем цифру в десятках тысяч (ДТ):

 I цифра    II цифра

Условная формула для вычисления:

ДТ = С × Д (I) + Д × С (I) + С × С(II)

Развернутое умножение:

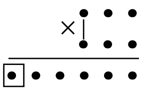
$$\begin{array}{r} \times\ 3\ 2\ 7 \\ 4\ 9\ 6 \\ \hline \bullet\ \overset{2}{\boxed{\bullet}}\ 2\ 1\ 9\ 2 \end{array}$$

$\boxed{2}$ ← 3 × 9 (первая цифра $\boxed{2}$7)
$\boxed{0}$ ← 4 × 2 (первая цифра $\boxed{0}$8, которую можно не писать)
$\boxed{2}$ ← 3 × 4 (вторая цифра 1$\boxed{2}$)

Сложим: 2 + 2 — это 4, да еще 2 — получим 6.
Свернем запись:

$$\begin{array}{r} \times\ 3\,2\,7 \\ 4\,9\,6 \\ \hline \boxed{\bullet}\,6\,2\,1\,9\,2 \end{array}$$

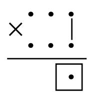
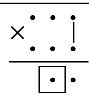
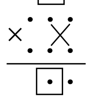
И последняя цифра *в сотнях тысяч* (СТ):

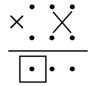
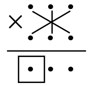
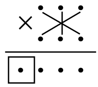
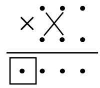
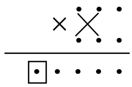
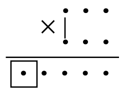
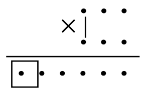
 I цифра   СТ = С × С (I)

$$\begin{array}{r} \times\ 3\,2\,7 \\ 4\,9\,6 \\ \hline \boxed{1}\,6\,2\,1\,9\,2 \end{array}$$

3 × 4 (первая цифра $\boxed{1}$2)

В общем виде вся схема выглядит так:

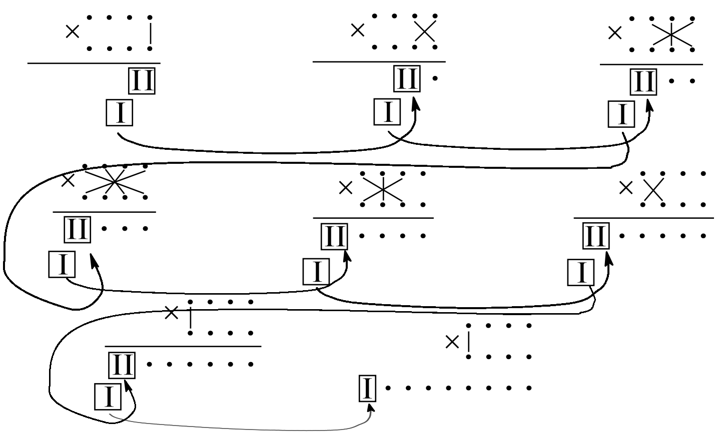
Е		II цифра
Д	 	I цифра II цифра

С		I цифра
		II цифра
Т		I цифра
		II цифра
ДТ		I цифра
		II цифра
СТ		I цифра

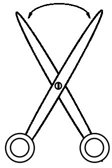
Если множители имеют разное число знаков, то их можно «уравнять», дописав необходимые нули в старших разрядах:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 6\,3\,2\,7 \\ 0\,4\,1\,8 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Схема для умножения «в динамике» будет выглядеть так:



Думаем, чтопри взгляде на общую схему становится понятным, почему правило нахождения цифр в произведении дети назвали правилом «ножниц». Был изготовлен специальный инструмент, похожий на ножницы, из двух палочек, скрепленных так, что они могли раскрываться и складываться:



Кроме этого инструмента, похожего на ножницы, можно составить карточку, играющую роль памятки:

> «Чтобы найти очередную цифру произведения, начиная со второго разряда выполни следующие действия:
> 1) отступи вправо на один разряд, затем по правилу «ножниц» перемножай все числа и складывай *первые* цифры этих произведений;
> 2) вернись к искомому разряду, затем по правилу «ножниц», перемножай все числа и прибавляй *вторые* цифры этих произведений к сумме, полученной ранее;
> 3) запиши полученный результат, если он меньше 10. Если же он больше 10, то запиши число десятков над местом для цифры следующего разряда».

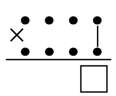
Чтобы воспользоваться такой карточкой, необходимо после определения количества цифр в произведении дописывать в множителях нули перед первой значащей цифрой, чтобы количество цифр в записи множителей было равно количеству цифр в произведении:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0\,0\,0\,3\,7\,5 \\ 0\,0\,0\,2\,1\,6 \end{array} \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

Поскольку такой способ определения цифр в каждом разряде был промежуточным, то мы не станем его описывать.

Упрощенная схема умножения по правилу «ножниц» уже описана. На схеме видно, как «ножницы», открывшись до конца, начинают складываться:

1-й шаг[1]

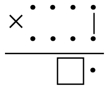
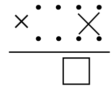


II ц.

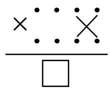
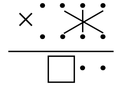
---

[1] Шаг соответствует номеру искомого разряда.

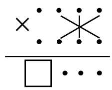
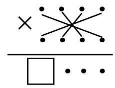
2-й шаг

а)  I ц. б)  II ц.

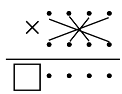
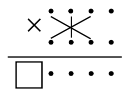
3-й шаг

а)  I ц. б)  II ц.

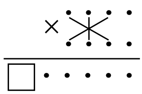
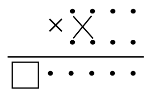
4-й шаг

а)  I ц. б)  II ц.

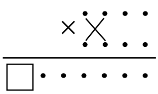
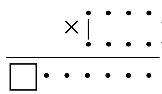
5-й шаг

а)  I ц. б)  II ц.

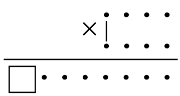
6-й шаг

а)  I ц. б)  II ц.

7-й шаг

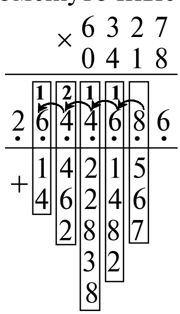
а)  I ц. б)  II ц.

8-й шаг

а)  I ц.

Пошаговая схема использования «ножниц» показывает, что каждая схема используется дважды, только сначала у произведения используется вторая цифра, а затем первая.

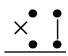
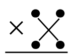
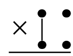
Выполним умножение, сделав развернутую запись, чтобы можно было увидеть, какие числа складывались сначала вслух, а потом «про себя», т. е. устно проговариваются только слагаемые, промежуточные и конечная сумма:



Впоследствии нуль в 4-м разряде второго множителя можно не писать, так же как нет необходимости записывать состав каждого числа в том или ином разряде, поскольку присчитывать можно и нужно устно.

Конечно, на первый взгляд такой способ умножения покажется громоздким, тем более что мы показали лишь последовательность шагов, а не методику обучения этому способу. Однако детям, которые в совместной деятельности устанавливали состав каждого числа в том или ином разряде очень быстро осваивали этот способ и считали невероятно быстро, проверяя свой результат с помощью калькулятора.

Этим способом можно эффективно пользоваться при умножении двузначного числа на двузначное, поскольку опорных схем, показывающих умножение по правилу «ножниц», всего три, каждая из которых используется дважды:

1)  2)  3) 

Например:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}75\\69\end{array} \\ \hline \overset{1}{\underset{\cdot}{5}}\,\underset{\cdot}{1}\,\underset{\cdot}{7}\,\underset{\cdot}{5} \\ \hline 464 \\ 33 \\ 20 \end{array}$$

Суммы чисел под чертой вычисляются устно:
4 + 3 = 7 — пишем в десятках 7, далее 6 + 3 = 9, 9 + 2 = 11, пишем вторую цифру 1 в сотнях, а первую цифру 1 переносим в разряд тысяч, значит, в тысячах получим цифру 5.

Еще пример:

$$\begin{array}{rcl} & \times\begin{array}{r}24\\32\end{array} & \\ \cline{2-2} & \boxed{7}\boxed{6}\,8 & \leftarrow 4 \times 2 = 0\boxed{8} \\ 3 \times 4 = \boxed{1}2 \rightarrow & \boxed{1}\boxed{4} & \leftarrow 2 \times 2 = 0\boxed{4} \\ 2 \times 3 = \boxed{0}6 \rightarrow & \boxed{6}\boxed{2} & \leftarrow 3 \times 4 = 1\boxed{2} \end{array}$$

Интересно то, что в эксперименте, который проводился несколько лет назад, дети, которых научили сначала действовать описанным способом (при котором в конечном итоге они записывали только множители произведения), а затем показали традиционный, пришли в неописуемый восторг.

Они считали, что традиционный способ гораздо легче, так как ничего не нужно вычислять в уме, все можно записать. Все последующие произведения они стали находить традиционным способом, хотя отлично владели предыдущим.

Дети, которых сначала научили традиционному умножению, а затем умножению по правилу «ножниц», тоже ликовали:

«Как здóрово! — говорили они. — Ничего не нужно писать, все можно вычислить устно!» Теперь дети все вычисления выполняли только новым способом, несмотря на то, что старым они отлично владели.

Такая восторженная реакция детей, обучавшихся новому для них способу действия, абсолютно адекватна ситуации. И в первом случае, и во втором сработал эффект новизны.

Кстати говоря, такой же эффект был обнаружен при выполнении итоговой контрольной работы в 4 классе (по курсу начальной школы). Оказалось, что многие дети решали текстовую задачу не составлением уравнения (или выражения) по схеме, как они всегда это делали, а по действиям. Поскольку перед выпуском из начальной школы для «смягчения» ситуации, когда в 5 классе учителя математики требуют от детей расписывать задачу по действиям, да еще прописывать рядом пояснение к каждому из них, мы рекомендовали учителю начальных классов в последней четверти, перед самым окончанием 4 класса, показать эту *новую для ученика* форму записи, именно этой новой формой записи многие дети и воспользовались. Вряд ли это означает, что предыдущий способ потерял для них смысл. Пройдет совсем немного времени, и они вновь к нему с удовольствием вернутся.

Завершая разговор о содержании факультативных занятий, добавим, что задания в учебнике под заголовком «Задачи на смекалку» (№ 495—514) также предназначены для внеклассной работы там, где общий уровень развития детей и уровень их математической подготовки недостаточны для использования этих заданий при работе в классе.

2. ЗАДАЧИ НА СМЕКАЛКУ

Задание 495.

Подробное описание подобных игр вы найдете в книге Б. А. Кордемского «Математическая смекалка» (М.: Юнисам, МДС, 1994).

Задание 496.

1) Среди чисел, из которых составлены оба произведения, есть числа 2 и 5, произведение которых равно 10. Значит, любое произведение, содержащее эти множители, будет оканчиваться цифрой 0.

2) Среди нечетных чисел, из которых составлено произведение, есть число 5, значит, произведение и будет оканчиваться цифрой 5.

Задание 497.

Число спичек сообщает о периметре прямоугольника (мерка — длина спички). Значит, чтобы узнать, сколько различных прямоугольников можно выложить из данного числа спичек, нужно определить, какими могут быть натуральные числа a и b — длины сторон прямоугольника, при условии, что $a \cdot 2 + b \cdot 2 = p$ или $a + b = p : 2$.

Если спичек 8, то $8 : 2 = 4$, а $4 = 2 + 2$ и $4 = 3 + 1$, значит, из 8 спичек можно выложить *два* различных прямоугольника, один из которых квадрат ($a = b = 2$).

Из 10 спичек можно выложить тоже 2 прямоугольника, так как $10 : 2 = 5$, а $5 = 4 + 1$ и $5 = 2 + 3$.

Из 12 — три ($6 = 5 + 1$; $6 = 4 + 2$ и $6 = 3 + 3$).

Из 14 — три ($7 = 6 + 1$; $7 = 5 + 2$; $7 = 4 + 3$).

Только один прямоугольник можно выложить из 4 и 6 спичек ($2 = 1 + 1$ и $3 = 2 + 1$).

Нельзя выложить прямоугольник, используя все спички, если их число нечетное. Чтобы из спичек выложить равносторонний треугольник, пятиугольник, шестиугольник (и т. д.), нужно, чтобы число спичек соответственно делилось (нацело) на 3, 5, 6.

Задание 498.

Ответы в комментариях не нуждаются: 90000 и 10008.

Задание 499.

Нет, не может. Последней парой всегда будет пара юбка — брюки (число юбок — нечетное), значит, вместо такой пары «вырастет» юбка.

Задание 500.

Рассуждение первое. Число яиц, которое лежит в корзине, меньше 40, но больше 5, так как можно яйца считать пятерками, а при делении на 2 это число должно давать в остатке 1. Это значит, что число яиц нечетное. Если бы это число делилось на 5, то оно оканчивалось бы цифрой 0 или цифрой 5. По условию при делении на 5 (счет пятерками) остаток равен 1, значит, число яиц должно оканчиваться либо цифрой 1 ($0 + 1$), либо цифрой 6 ($5 + 1$). Но цифрой 6 оканчиваться не должно, так как 6 — четное число. Значит, число яиц оканчивается цифрой 1, а это числа 11, 21 и 31. Но по условию при делении на 3 остаток должен быть равен 1, значит, числа 11 и 21 тоже не подходят, остается число 31, так как 31 : 2 = 15 (ост. 1); 31 : 3 = 10 (ост. 1); 31 : 5 = 6 (ост. 1).

Ответ: в корзине 31 яйцо.

Рассуждение 2. Наибольшее общее кратное чисел 2, 3 и 5 равно 30 (2×3×5), но так как при различном счете остаток равен 1, то число яиц — 31.

Очевидно, что второе рассуждение значительно проще, однако дети пока не рассматривали понятие наименьшего общего кратного, поэтому их рассуждения могут быть такими, как первое.

Задание 501.

Обозначим задуманное число буквой x и запишем все действия с этим числом:

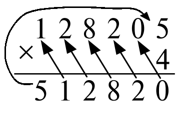
$$(x \cdot 4 + 98 + 7 - 77) : 4 - x = (x \cdot 4 + 28) : 4 - x =$$
$$= x + 7 - x = 7$$

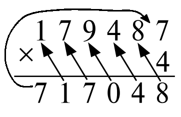
Это значит, что каким бы ни было число x, в результате таких преобразований всегда получится 7. Аналогичных заданий можно придумать множество.

В основе этого арифметического фокуса, как и ему подобных, лежат тождественные алгебраические преобразования. «Разоблачить» теоретическую основу фокуса, как правило, нетрудно, а вот похитрее замаскировать ее — дело непростое.

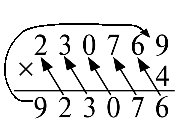
Предложите детям самим придумать арифметические фокусы или найти их в математической литературе, например в уже упомянутой книге Б. А. Кордемского «Математическая смекалка».

Задание 502.





$179\,487 \cdot 4 = 717\,948$



$230\,769 \cdot 4 = 923\,076$

Задание 503.

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$

$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$

$$123 \cdot 9 + 4 = 1111$$

и т. д.

$$12\,345\,678 \cdot 9 + 9 = 111\,111\,111$$

1) Число единиц в результате таково, какое число прибавляют к произведению.

2) Каждый следующий результат на 10, 100, 1000 (и т. д.) больше предыдущего, а так как $12 = 11 + 1$, $123 = 111 + 12$, $1234 = 1111 + 123$ и т. д., то понятно, почему второе слагаемое нужно увеличивать на 1:

$$12 \cdot 9 + 3 = (11 + 1) \cdot 9 + (2 + 1) = \underbrace{11 \cdot 9}_{99} + \underbrace{1 \cdot 9 + 2}_{11} + 1 =$$
$$= 11 + 100 = 111$$

$$99 + 1 = 100$$

$$123 \cdot 9 + 4 = (111 + 12) + (3 + 1) = \underbrace{111 \cdot 9}_{999} + \underbrace{12 \cdot 9}_{111} + 3 + 1$$
$$= = 1000 + 111 = 1111$$

и т. д.

$$999 + 1 = 1000$$

Задание 504.

$$1 \cdot 1 = 1$$
$$11 \cdot 11 = 121$$
$$111 \cdot 111 = 12\,321$$
$$1111 \cdot 1111 = 1\,234\,321$$
$$11111 \cdot \underbrace{11111}_{\textbf{5 цифр}} = 123\,454\,321$$

и т. д.

$$111111111 \cdot \underbrace{111111111}_{\textbf{9 цифр}} = 12\,345\,678\,987\,654\,321$$

Достаточно произведение записать «столбиком», чтобы понять принцип:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 1 & 1 \\
\times & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & \boxed{1} & 1 & 1 \\
 & 1 & \boxed{1} & 1 & \\
1 & 1 & \boxed{1} & & \\
\hline
1 & 2 & \boxed{3} & 2 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & \times & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & \\
 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & \boxed{1} & & & \\
1 & 2 & 3 & \boxed{4} & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

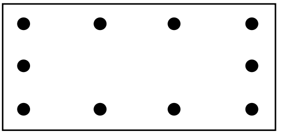
Задание 506.

Анализируя условие задачи, легко прийти к выводу о том, что «совместимы» только волк и капуста.

Отсюда и способ решения: первый рейс — перевезти козла, оставить его на другом берегу и вернуться. Второй рейс — перевезти либо волка, либо капусту (одно из двух), забрать с этого берега козла и перевезти обратно. Третий рейс — забрать капусту, а козла оставить, перевезти ее к волку и вернуться. Четвертый рейс — перевезти козла.

Задание 507.

Можно считать, что стул, который стоит в углу (у пересечения двух стен), относится и к одной стене, и к другой:



Кстати, в таких задачах лучше говорить о табуретках, а не о стульях, но мы предложили ее по готовому тексту.

Задание 510.

$$\begin{array}{r} 4\mathbf{1}5 \\ \times\ \mathbf{3}8\mathbf{2} \\ \hline 8\mathbf{3}0 \\ \mathbf{3}3\mathbf{2}0\mathbf{0} \\ 1\mathbf{2}4\mathbf{5}\mathbf{0}\mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1}5\mathbf{8}5\mathbf{3}0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32\mathbf{5} \\ \times\ \mathbf{1}47 \\ \hline \mathbf{2}27\mathbf{5} \\ \mathbf{1}\mathbf{3}0\mathbf{0}\mathbf{0} \\ 325\mathbf{0}\mathbf{0} \\ \hline \mathbf{4}7\mathbf{7}\mathbf{7}5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13\mathbf{3} \\ \times\ 11\mathbf{3} \\ \hline \mathbf{3}99 \\ 1\mathbf{3}3\mathbf{0} \\ 13\mathbf{3}\mathbf{0}\mathbf{0} \\ \hline 15029 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 57\mathbf{3} \\ \times\ \mathbf{2}19 \\ \hline 5\mathbf{1}5\mathbf{7} \\ 5730 \\ 1\mathbf{1}\mathbf{4}6\mathbf{0}\mathbf{0} \\ \hline 1\mathbf{2}\mathbf{5}48\mathbf{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11\mathbf{7} \\ \times\ \mathbf{3}19 \\ \hline 1\mathbf{0}5\mathbf{3} \\ 1\mathbf{1}7\mathbf{0} \\ 3\mathbf{5}1\mathbf{0}\mathbf{0} \\ \hline 3\mathbf{7}32\mathbf{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{3}\mathbf{9}7 \\ \times\ \mathbf{3}4 \\ \hline 15\mathbf{8}8 \\ \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{9}\mathbf{1}\mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1}34\mathbf{9}\mathbf{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5\mathbf{2}97\mathbf{5} & \mathbf{3}\mathbf{2}\mathbf{5} \\ \cline{2-2} -\ 325 & \mathbf{1}63 \\ \cline{1-1} 2\mathbf{0}47 & \\ -\ 1\mathbf{9}50 & \\ \cline{1-1} 975 & \\ -\ 975 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{1}729\mathbf{1}71 & \mathbf{1}9 \\ \cline{2-2} -\ 17\mathbf{1} & 9\mathbf{1}009 \\ \cline{1-1} \mathbf{1}9 & \\ -\ 19 & \\ \cline{1-1} \mathbf{1}71 & \\ -\ 17\mathbf{1} & \\ \cline{1-1} \mathbf{0} & \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
-110768 & 112 \\
\underline{1008} & \overline{98\mathbf{}9} \\
-996 & \\
\underline{896} & \\
-1008 & \\
\underline{1008} & \\
\mathbf{0} &
\end{array}
$$

Задание 514.

1) $$
\begin{array}{r}
+\ 57\boxed{8}22 \\
\underline{439\boxed{8}} \\
62120
\end{array}
$$

2) Не имеет решения.

3) $$
\begin{array}{r}
+\ 90306 \\
\underline{90306} \\
180612
\end{array}
$$

4) а) $$
\begin{array}{r}
-\ 7481 \\
\underline{7250} \\
+\ 231 \\
\underline{231} \\
462
\end{array}
$$

б) $$
\begin{array}{r}
-\ 9481 \\
\underline{9250} \\
+\ 231 \\
\underline{231} \\
462
\end{array}
$$

5) $138 \cdot 138 = 19044$

$$
\begin{array}{r}
\times\ 138 \\
\underline{138} \\
+\ 1104 \\
414 \\
\underline{138} \\
19044
\end{array}
$$

6) $208 \cdot 208 = 43264$

К остальным заданиям ответы даны в учебнике.

3. ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Пояснительная записка

Данные контрольные работы составлены в соответствии с Государственной программой Э. И. Александровой (система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова) и могут быть использованы как для проверки знаний, умений и навыков, так и в качестве диагностических, позволяющих оценить границу знаний учеников, их способность самостоятельно определять эту границу.

Контрольные работы можно использовать как для трехлетней начальной школы, так и для четырехлетней, они не требуют нескольких вариантов, задающих разные уровни трудности, поскольку предоставляют ребенку возможность выбора, обеспечивающего дифференцированную оценку трех основных уровней выполнения: низкого, среднего и высокого.

Каждая контрольная работа предназначена для выполнения в два или три приема (в зависимости от темпа детей). ***Не допускается*** занижение отметки в том случае, если ребенку не была предоставлена возможность выполнения какого-либо задания в связи с нехваткой времени.

Наборы заданий, как и сами задания, должны быть напечатаны на отдельных листах так, чтобы ими было удобно пользоваться. Для дополнительных способов выполнения заданий можно использовать тетрадные листы. При таком подходе каждый ребенок будет выполнять работу в индивидуальном темпе.

В зависимости от конкретной ситуации учитель вправе дополнить предлагаемые наборы недостающими, с его точки зрения, заданиями или составить аналогичные.

Оценивание выполненных работ происходит адекватными системе развивающего обучения средствами. Как известно, в системе обучения Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова используется безотметочное оценивание работы ребенка, основанное на ***содержательной***, дифференцированной оценке учителей, которой предшествует ***самооценка*** ребенка по четким критериям, полученным от учителя[1].

Для такого дифференцированного оценивания используют разные инструменты, которыми пользуются учителя.

Первым и наиболее простым является использование «линеечек», второй — использование балльной оценки. Оба способа учителю хорошо знакомы из работ Г. А. Цукерман. Сопоставление для отчета перед администрацией полученных оценок с традиционными отметками по пятибалльной шкале не вызовет у учителя затруднений. Однако учителю РО необходимо помнить, что для такого сопоставления достаточно сделать выборку выполненных заданий в объеме и по сложности, не превышающих требований, предъявляемых к минимуму знаний.

---

[1] См.: Цукерман Г. А. Оценка без отметки. Москва — Рига: ПЦ «Эксперимент», 1999.

Для получения полной картины необходимо рассортировать выполнение каждого задания на три основных уровня выполнения: низкий, средний и высокий, что без труда сделает любой учитель.

Форму записи решений ученик может выбрать по своему усмотрению.

При соотнесении качества и объема выполненной работы с отметкой по пятибалльной шкале ***не допускается*** ее снижение за исправления, грамматические ошибки или нарушение общепринятых записей (их, как принято в системе Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова, можно оценивать по отдельной шкале). Эти показатели несущественны при оценке математической подготовки учащихся.

Для качественного анализа выполнения работы учитель сначала составляет таблицы обработки полученных данных, на основании которых может сделать анализ.

Урок анализа контрольной работы и работы над ошибками проводится не способом обсуждения того, как нужно было правильно выполнить предложенные задания, а обсуждением в группах того, какие ошибки могли быть допущены при выполнении каждого задания. Это значит, что, проверяя контрольную работу, учитель не делает в работах детей никаких пометок. Работа выглядит так, как если бы ее не проверяли, что дает возможность после обсуждения характерных для данного задания ошибок, выявленных учителем, спрогнозированных и зафиксированных детьми с помощью условных символов во время совместного обсуждения, предложить каждому ребенку посмотреть, нет ли в его работе тех ошибок, о которых говорили дети. Причем обосновать причину каждой ошибки, которую прогнозируют дети, работая в группе, нужно предложить тому ребенку, который именно такую ошибку и сделал (о чем, естественно, он не догадывается, поскольку в его работе учитель никаких пометок не делал). Составляется справочник ошибок, опираясь на который ребенок приступает к самостоятельной проверке. Теперь, вооружившись ручкой, пишущей цветом, отличным от того, каким написана работа, ребенок исправляет найденную ошибку. Беспокойство должны вызвать те дети, которые не смогли обнаружить в своей работе допущенные ошибки. Учитель, выяснив причину такой ситуации, планирует коррекционную работу.

Контрольная работа 1

Задание 1

Проверь, правильно ли выполнены действия.

1) $$\begin{array}{r} 52796 \\ +\ 90238 \\ \hline 142924 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 69371 \\ +\ 32486 \\ \hline 101857 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 50036 \\ -\ 1274 \\ \hline 49762 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 6137 \\ -\ 1241 \\ \hline 7378 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 326 \\ \times\ 27 \\ \hline 2282 \\ +\ 6529 \\ \hline 8802 \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 745 \\ \times\ 408 \\ \hline 5960 \\ +\ 29800 \\ \hline 35760 \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r|l} 24124 & 74 \\ \cline{2-2} -\ 222 & 326 \\ \hline 192 & \\ -\ 148 & \\ \hline 444 & \\ -\ 444 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r|l} 211596 & 687 \\ \cline{2-2} -\ 2061 & 38 \\ \hline 5496 & \\ -\ 5496 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Задание 2

Проверь, правильно ли ученики решали уравнения. Вычисли результат там, где ты можешь.

1) $x \cdot 8 = 1616$
$x = 1616 : 8$

2) $96 : x = 3$
$x = 96 : 3$

3) $x : 25 = 100$
$x = 25 \cdot 100$

4) $x \cdot 8 = 4$
$x = 8 : 4$

5) $x \cdot 5 + 7 = x \cdot 6$
$x = 7$

6) $(x - a) \cdot b = c$
$x = c : b + a$

Задание 3

Начерти прямоугольник, площадь которого можно вычислить по формуле $8 \cdot 5$ или $a \cdot b$.

Запиши, как узнать, чему равна сторона квадрата той же площади.

Задание 4

Дети решали такие задачи.

1. Ученики вместе с родителями и учителями поехали отдыхать на природу в 5 легковых автомобилях и 2 автобусах. В каждый автомобиль поместилось по *a* человек, а в каждый автобус — по *b*. Сколько всего человек поехало на отдых?

2. Ученики вместе с родителями и учителями поехали отдохнуть на природу в 5 легковых автомобилях и 2 одинаковых автобусах. Всего c человек. Сколько человек уместилось в каждом автобусе, если в каждой легковой машине уместилось по 5 человек?

В этих задачах дети вместо букв a, b и c подбирают подходящие числа.

Как ты думаешь, какие из данных чисел они могли выбрать?

$a = 30,\quad b = 164,\quad c = 478;$
$a = 5,\quad b = 36,\quad c = 97;$
$a = 4,\quad b = 40,\quad c = 100;$
$a = 100,\quad b = 200,\quad c = 900.$

Если сможешь, реши любую задачу (или обе) и запиши ответ на ее вопрос.

Контрольная работа 2

1. Выбери из каждого набора заданий только те, которые сможешь решить. Реши их.

2. Из оставшихся заданий выбери и отметь буквой «Т» задания, которые, по-твоему, вообще невозможно выполнить.

Набор 1

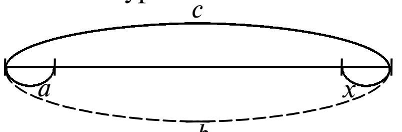
Задание 1

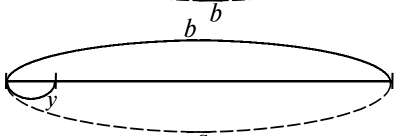
Реши уравнения.

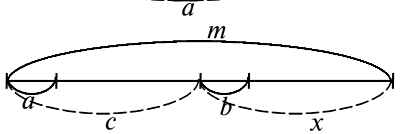
1) $x \cdot 2 = 120$
2) $264 : x = 2$
3) $x : 2 = 37$
4) $6 \cdot x = 0$
5) $10 + x \cdot 5 = 5$
6) $100 \cdot x = 5$
7) $a - b \cdot x = c$
8) $x \cdot 64 + 2176 = 6272$
9) $12307 - x : 124 = 11932$
10) $x \cdot 6 - 15 = x \cdot 5$

Задание 2

По схемам составь уравнения.

1) 

2) 

3) 

Набор 2

Реши задачи, а затем вместо букв подбери подходящие числа и ответь на вопрос задачи.

1. В роще росло b тополей, а берез — в 4 раза больше. Сколько тополей и берез росло в роще?

2. На двух полках стояли книги. На одной из них a книг. Во сколько раз на этой полке книг было меньше, чем на второй?

3. На трех полках стояли книги. На первой стояло a книг, на второй — в 2 раза больше, чем на первой, а на третьей — на c меньше, чем на второй. Сколько книг стояло на трех полках?

4. В одном кармане денег было в 3 раза больше, чем в другом. Когда из первого кармана переложили во второй b рублей, то денег в обоих карманах стало поровну. Сколько денег было в каждом кармане первоначально?

Набор 3

Задание 1

Выполни действия.

1) 3792 + 7504; 93076 + 8236
2) 87631 — 61926; 173529 — 84135
3) 1326 · 4; 254 · 39; 8317 · 4009
4) 120642 : 6; 3939 : 13; 306909 : 1263

Задание 2

Найди значения выражений.

1) 25 · 376 · 40
2) 265 + 35 · 7 + 135
3) 126 — 26 : 13 + 37
4) (126 — 26) : (13 + 37)
5) 30275 — 69984 : 324 + 8776
6) 6257 + 873 · 45 — 9805 : 37

Задание 3

Подбери подходящие числа и выполни действия.

1) $$\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet \\ \times\quad\ \bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \times\quad\ 6 \\ \hline 38\bullet\bullet\bullet \end{array}$$

3) $$\begin{array}{l|l} \bullet\bullet\bullet\bullet & \bullet \\ \cline{2-2} & \bullet\bullet\bullet \end{array}$$

4) $$\begin{array}{l|l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet\bullet \\ \cline{2-2} & \bullet\bullet \end{array}$$

5) $$\begin{array}{l|l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet \\ \cline{2-2} & \bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$$

Инструкция к проведению контрольной работы 1

Контрольная работа 1 предназначена для проверки уровня сформированности действий контроля и оценки у учащихся.

Умение видеть ошибкоопасные места предопределяет формирование навыка и является одним из показателей сформированности указанных действий (контроля и оценки).

Контрольная работа должна быть напечатана на листах так, чтобы ребенок имел возможность не только пометить и исправить найденные им ошибки, но и записать решение.

Задание 1 не только позволит учителю оценить сформированность у ребенка действий контроля и оценки, но и покажет в неявном виде степень овладения знаниями и умениями по теме «Действия с многозначными числами».

Если ученик способен выявить допущенные ошибки да еще может каким-либо еще способом зафиксировать причины, которые привели ученика к такой ошибке, то это есть необходимое (хотя и недостаточное) условие того, что при самостоятельном выполнении аналогичных заданий он, прежде чем их выполнять, задумается над тем, какие ошибки возможны. Это значит, что, мысленно составив план действий, он уже не допустит их у себя. Следующая контрольная работа даст возможность учителю соотнести уровень сформированности действия контроля с уровнем самостоятельного выполнения аналогичных заданий.

Задание 2 предназначено для того, чтобы оценить уровень сформированности понятия отношения частей и целого.

Оно дает возможность проверить, на что ориентируется ребенок при решении уравнения.

Для этого детям предлагается 4 уравнения, в которых часть, целое и количество частей представлены конкретными числовыми значениями.

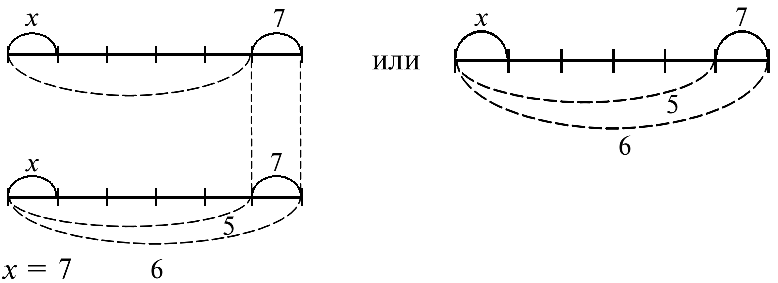
При выборе способа нахождения корня уравнения ребенок может опираться как на связь между частью, целым и количеством частей, так и на конкретные числовые значения. Это и необходимо выявить.

Для этого предлагается 3 типа уравнений:

а) первые четыре уравнения, в отличие от остальных, содержат часть, целое и количество частей, причем неизвестное — либо часть, либо целое, либо количество частей.

Однако, задавая в готовом виде способ нахождения неизвестной величины, можно определить, на что ориентируется ребенок: на конкретные числа, действия с которыми он умеет выполнять, или, не обращая внимания на числа, на отношение между величинами;

б) уравнение $x \cdot 5 + 7 = x \cdot 6$ является для ребенка совершенно незнакомым. Ему еще не приходилось иметь дело с подобными уравнениями, в которых неизвестная величина содержится в обеих частях уравнения. Значит, ребенок должен либо отказаться от его оценки, поставив рядом знак «?», а это значит, что он фиксирует границу между собственным знанием и незнанием, либо предпринять попытку нарисовать схему, с помощью которой можно оценить способ нахождения неизвестной величины. Например:

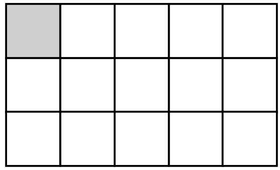


Возможен, но наименее вероятен вариант, при котором, узнав, что $x = 7$, дети вместо x подставят число 7, получат верное равенство и сделают вывод о том, что уравнение решено верно. Однако это маловероятно, так как дети должны ориентироваться на ***способ*** решения уравнения, а не на готовый результат, даже если он известен. Именно поэтому детей на данном этапе обучения учитель не учит делать проверку путем подстановки;

в) уравнение $(x - a) \cdot b = c$ предназначено для того, чтобы оценить уровень овладения понятием отношения частей и целого в «чистом» виде, когда числовые значения не оказывают на ребенка «давления». Сравнив решение этого уравнения с предыдущими, учитель сможет обнаружить, понимает ребенок способ решения уравнений на основе понятия отношения частей и целого или демонстрирует лишь натренированность на решении конкретных типов уравнений.

Задание 3 Цель задания — проверить у детей уровень конкретизации понятия умножения.

С понятием площади дети сталкивались в 1 классе при изучении величин. Они использовали площади фигур при графическом моделировании действия умножения, когда, например, вычисляли, сколько клеточек в данной фигуре.



$5 \cdot 3 = 15$

Однако формулу площади прямоугольника еще не рассматривали. Эта тема изучается в 4 классе. В связи с этим и интересно посмотреть, смогут ли ученики самостоятельно связать понятие умножения со способами вычисления площадей.

Выполнение этого задания свидетельствует о высоком уровне мышления. Обоснованный отказ его выполнения можно рассматривать как показатель высокого уровня сформированности действия оценки.

Задание 4 позволит учителю обнаружить умение ребенка решать задачи, увидеть, связывает ли ученик выбор числовых значений величин с реальной ситуацией и возможностью выполнения действий, необходимых для ответа на вопрос задачи. Другими словами, речь идет об области допустимых значений букв по отношению к сюжету задачи и к выполнимости арифметических действий, в частности действия вычитания.

Можно предложить детям вычеркнуть те пары чисел a и b, которые подобраны неверно.

Выполнение задания можно оценивать как высокий уровень в том случае, если ребенок выбрал подходящую задачу и пары чисел.

Инструкция к проведению контрольной работы 2

Контрольная работа 2 предназначена для проверки уровня как усвоения изученного материала, так и сформированности оценочной самостоятельности. Очевидно, что на данном этапе дети еще не могут достичь полной оценочной самостоятельности, оценки границ своих знаний и умений, но проверить состояние умения оценивать свои достижения необходимо. Для этого в каждый набор заданий включены так называемые задания с «ловушками». К ним на данном этапе обучения относятся как задания с недостающими данными, так и задания, способы работы над которыми не рассматривались.

Выполнять контрольную работу 2 необходимо ***в два или три приема*** (в зависимости от темпа детей), а значит, наборы заданий и задания в них должны быть напечатаны на листах так, чтобы ими удобно было пользоваться.

4. НАВИГАТОР ПО ЗАДАНИЯМ УЧЕБНИКА ДЛЯ 3 КЛАССА

Информация для учителя

Все задания, содержащиеся в учебнике, обеспечивают достижение учащимися образовательных результатов, предусмотренных ФГОС НОО. Конкретизировать использование заданий помогут приведенные далее сводные таблицы.

При работе с навигатором надо иметь в виду, что достижение образовательных результатов не ограничивается выполнением отдельных заданий учебника. Такие результаты можно получить только на основе системной работы со всеми учебными и методическими пособиями данного УМК в комплексе.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА «МАТЕМАТИКА» В 3 КЛАССЕ

Наиболее значимые задания на обеспечение личностных, метапредметных и предметных образовательных результатов

Задания на обеспечение личностных результатов	Задания на обеспечение метапредметных результатов	Задания на обеспечение предметных результатов
Книга 1: №№: 1–14, 17–26, 28, 5–6 (стр. 18), 11 (стр. 20), 17 (стр. 22), 19, 23 (стр. 23), 26–28 (стр. 26–27), (стр. 32), 30–34, 38–42, 48–58, 67–71, 73, 75–77, 85–87, 90–96, 98, 100, 102, 103, 105, 109, 120, 122–124, 128, 136, 138, 3–4 (стр. 82), 141–158, 160–165, 178, 179, 181–182, 185, 187–192, 199–206, 207–217, 219–222, 224, 229, 231, 236–242, 260, 263, 265, 1–2 (стр. 145), 6–8 (стр. 146–147). *Книга 2:* стр. 58–59 (постановка учебно-практической	*Книга 1*: №№: 14, 17–26, 28, 1–2 (стр. 17–18), 5–6 (стр. 18–19), 11 (стр. 20), 19 (стр. 23), 21–23 (стр. 24–25), 26–30 (стр. 26–27), 33 (стр. 28), 2, 3 (стр. 32), 32–34, 36–46, 48, 53–59, 62–74, 75–81, 84–87, 89–98, 100, 101–112, 114–117, 119–124, 126–136, 138–140, 3–5 (стр. 82–84), 7 (стр. 84), 10 (стр. 86), 14–17 (стр. 87–89), 19 (стр. 89), 21 (стр. 50), 24 (стр. 91), 141–165, 171, 175–182, 184–185, 187–192, 199–200, 203–218, 219–224, 226–231, 236, 245, 251–	*Книга 1*: №№: 1–28, 1–6 (стр. 17–19), 12–19 (стр. 20–23), 23–33 (стр. 25–28), 1–3 (стр. 32), 29–76 (стр. 78–92), 95–98, 102–103, 105–112, 114–118, 122–128, 130–136, 138–139, 3 (стр. 82), 7 (стр. 84), 24 (стр. 91), 141–179, 181–185, 187–196, 199–218, 219–224, 226–230, 231–266, 268–275, 1–8 (стр. 145–147). *Книга 2*: №№: 276–283, 285–296, 300, 304, 307, 310–315, 317–319, 321, 324, 327–336, 1–20 (стр. 29), 337–363, 366, 369, 372, 1–5 (стр. 48), 10 (стр. 51),

задачи); №№: 276–278, 280–282, 285–288, 291–296, 301, 303–304, 307–309, 310–313, 317, 319, 321, 324–327, 330–336, 1–8 (стр. 29), 337–339, 341–349, 355, 359, 361–363, 365–366, 369, 1–4 (стр. 48), 10 (стр. 51), 14 (стр. 52), 19, 22 (стр. 53), 373, 385–412, 414, 416–422, 433, 2–6 (стр. 83), 21 (стр. 92), 22–25 (стр. 93), 437–455, 458, 461, 463–466, 469–472, 474–481, 483–486, 1–12 (стр. 115–120), 16–17 (стр. 120), 20 (стр. 123), 487–516, 518, 523, 525–526, 529–532, 537, 13–14 (стр. 148–149), 25 (стр. 153), 31 (стр. 157), 36 –37 (стр. 159).	254, 256–260, 262–263, 265–267, 274, 1–2 (стр. 145), 6–8 (стр. 146–147). *Книга 2*: стр.58–59 (постановка учебно-практической задачи); №№:276–278, 281, 285, 286, 288, 292–294, 296, 307, 310–312, 315, 317, 321, 326, 327, 330, 331–336, 1–3 (стр.29), 6–8 (стр. 30), 14 (стр.34), 337, 338, 342–344, 348, 349,354, 361–363, 365–366, 369, 2–3 (стр. 48), 10 (стр. 51), 22 (стр. 53), 24 (стр.54), 25, 28 (стр. 55), 385–389, 391–395, 397–412, 414, 417–422, 427, 433, 2–5 (стр. 83), 15 (стр. 89), 20–25 (стр. 92), 437–458, 460–461, 463–466, 468–472, 474–481, 483–486, 1–14(стр.115), 16 (стр. 120), 487–523, 525, 529, 531, 535, 537. Рубрика «Проверь себя»: стр.57, 95, 126	24–25 (стр. 54), 380, 385–436, 2–9 (стр. 83), 18–25 (стр. 92), 437–486, 1–14 (стр. 115), 16 (стр. 120), 25 (стр. 126), 487–537, 25 (стр. 153), 30–31 (стр. 157), 36–37 (стр. 159).

1. Задания на достижение личностных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Развитие самостоятельности и личной ответственности: • готовность и способность к саморазвитию; • умение понимать и принимать точку зрения другого человека и аргументировать собственную; • способность к критическому мышлению; • способность слушать и слышать собеседника, готовность прийти на помощь в совместной деятельности. Овладение начальными навыками адаптации в динамично изменяющемся и развивающемся мире: • адекватно оценивать свои возможности при решении поставленных учебно-практических задач; • умение в коммуникации осуществлять постановку новых целей и задач (в пределах своих возможностей); • умение принимать на себя ответственность за организацию совместной деятельности; • развитие навыков сотрудничества со взрослыми и сверстниками.	*Книга 1*: №№: 1–26, 28, 1–2 (стр. 17), 5–6 (стр. 18), 18–19 (стр. 23), 21–23 (стр. 24–25), 26–28 (стр. 26–27), 30 (стр. 27), 3 (стр. 32), 32–42 (стр. 33), 46, 51, 55–58, 65–68, 71, 73, 75, 77, 80–81, 84–87, 90–98, 100, 102–106, 108–112, 114, 117, 120, 124, 126–136, 138, 10 (стр. 86), 19 (стр. 89), 21 (стр. 90), 22–25 (стр. 90–91), 141–165, 169–171, 176, 178, 179, 181–182, 185, 187–194, 199–200, 203–217, 219–224, 226, 229, 230–242, 253–254, 256–260, 262–263, 265–266, 1–3 (стр. 145–146), 8 (стр. 147). *Книга 2*: стр. 58–59 (постановка учебно-практической задачи); №№: 276–278, 280–288, 291–296, 300–301, 303–304, 307–309, 310–317, 319, 321, 324–328, 330–336, 1–3 (стр. 29–30), 6–8 (стр. 31), 10 –12 (стр. 32), 16 (стр. 34), 337–338, 341–344, 346–349, 353–355, 359, 361, 362–363, 365–369, 372, 1–3 (стр. 48), 7 (стр. 50), 10 (стр. 51), 22 (стр. 53), 24 (стр. 54), 25 (стр. 55), 380, 28 (стр. 55–56), 373–377, 385–391, 393–412, 414,

	416–422, 427, 433, 2–6 (стр. 83), 8 (стр. 85), 15 (стр. 89), 17 (стр. 91), 21 (стр. 92), 22–25 (стр. 93), 437–461, 463–466, 469–472, 474–477, 480–481, 483–486, 1–13 (стр. 115–120), 16–17 (стр. 120), 20 (стр. 123), 22 (стр. 124), 25 (стр. 125–126), 482–504, 506–512, 514–520, 525–526, 529–532, 535, 537, 9 (стр. 147), 13–15 (стр. 148–149), 20 (стр. 151), 22 (стр. 152), 29 (стр. 156), 31 (стр. 157), 36–37 (стр. 159), 40 (стр. 161), 538–557. Рубрика «Проверь себя»: стр. 57, 95, 126
Принятие и освоение социальной роли ученика: • формирование мотивации к обучению и познанию; • готовность учиться на базовом и высоком уровне на основе учебно-познавательных мотивов (в пределах своих возможностей); • готовность активно осваивать новое содержание, открывать новые способы решения учебно-практических задач (в пределах своих возможностей); • готовность к саморефлексии причин успешности / неуспешности в своей учебной деятельности.	*Книга 1*: стр. 33 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–28, 1–3 (стр. 17), 11 (стр. 21), 17 (стр. 22), 22 (стр. 24), 23 (стр. 25), 25 (стр. 25), 28 (стр. 27), 30 (стр. 27), 33 (стр. 28), 36 –37 (стр. 29–30), 3 (стр. 32), 30–42, 43–45, 48, 51–60, 63, 65–69, 70–73, 77–81, 83–93, 95–98, 100–103, 105–112, 114–117, 119–120, 122–124, 126–136, 138, 3–5 (стр. 83), 10 (стр. 86), 14 (стр. 87), 21 (стр. 90), 22–23 (стр. 90), 24 (стр. 91), 141–182, 185–194, 199–217, 219–224, 228–242, 244–245, 256–260, 262–263, 265–268 (1–6), 269–275.

Формирование эстетических потребностей, ценностей и чувств: • готовность к самореализации (выражения себя) в различных видах творческой и проектной деятельности.	*Книга 2:* стр. 58–59 (постановка учебно-практической задачи); №№: 276–288, 292–296, 300–301, 303–308, 310–315, 317–319, 326–328, 330–331, 333–336, 1–3 (стр. 29), 6–16 (стр. 30), 337–349, 353–354, 359, 361–363, 365–366, 368–369, 372, 2–4 (стр. 48), 9–10 (стр. 51), 15 (стр. 53); 24 (п.3, 4)–25 (стр. 54); 27–28 (стр. 55), 3 (стр. 57), 385–414, 416–421, 427 (стр. 80), 433, 15 (стр. 89), 16–25 (стр. 91), 437–477, 479–481, 483–486, 1–14 (стр. 11), 16–17 (стр. 120), 23–25 (стр. 125), 5–8 (стр. 127), 487–531, 535–537, 10–15 (стр. 148), 17 (стр. 150), 19 (стр. 151), 25 (стр. 153), 26–40 (стр. 154), 538–557. Рубрика «Проверь себя»: стр. 95

2. Задания на достижение метапредметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Основные группы познавательных результатов	
Учебно-логические универсальные действия: • овладение логическими действиями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, классификации по	*Книга 1*: №№: 1–28, 1–2 (стр. 17–18), 4–6 (стр. 18–19), 3 (стр. 32), 31, 32–34, 36–39, 41–46, 44–56, 58–63, 65–67,

родовидовым признакам, установления аналогий и причинно-следственных связей, построения рассуждений, отнесения к известным понятиям; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности проводить сравнение и классификацию способов решения задач по самостоятельно выбранным основаниям и критериям; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности схематизации и моделирования; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности выделять в процессе анализа задачи требование и условие; • овладение базовыми предметными и межпредметными понятиями, отражающими существенные связи и отношения между объектами и процессами.	69–73, 75–82, 83–98, 100–103, 105–114, 116–117, 120–126, 128–132, 136, 138, 141–156, 158–171, 174–182, 185–217, 219–222, 224, 229, 239–242, 253, 260, 267–275, 1, 2 (стр. 145). *Книга 2:* стр. 58–59 (постановка учебно-практической задачи); №№: 276–291, 292–318, 319–336, 1–8 (стр. 29), 11–16 (стр. 32), 337–359, 361–372, 2–3 (стр. 48), 10 (стр. 51), 19 (стр. 53), 22–25 (стр. 53), 25–28 (стр. 55–56), 1–14 (стр. 57), 373–375, 380, 385–424, 427, 431–435, 2–10 (стр. 83–88), 13, 15 (стр. 89), 17–25 (стр. 91–94), 6–8 (стр. 96), 437–481, 483–486, 1–13 (стр. 115–120), 16–17 (стр. 120–121), 20 (стр. 123), 23–25 (стр. 125–126), 487–537, 13 –15 (стр. 148–149), 22 (стр. 152), 25 (стр. 153), 31 (стр. 157), 36–37 (стр. 159), 40 (стр. 161), 538–557.
Учебно-информационные универсальные действия: • способность к кодированию и декодированию информации;	*Книга 1*: №№: 16, 22, 23, 25–26, 28 (1, 6), 3 (стр. 17), 4–5 (стр. 18), 20 (стр. 24), 23 (стр. 25),

• формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотеки и Интернета; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности записывать, фиксировать полученную из разных источников существенную и несущественную информацию, в том числе с помощью инструментов ИКТ.	25 (стр. 25), 3 (стр. 32), 36–39, 53, 54, 55–61, 63, 65–70, 76–77, 80–86, 89, 95, 105–106, 109, 123–124, 129, 134 (1, 2), 3 (стр. 82), 4 (стр. 84), 7 (стр. 84), 19 (стр. 89), 21–24 (стр. 90–91), 141, 147–150, 154–157, 164, 181, 217–218, 243. *Книга 2:* №№: 280, 282, 285–286, 294–295, 302, 304, 307, 309, 315, 317, 319, 321, 324, 327, 330–332, 334–335, 337–338, 341, 343–348, 359, 9, 16 (стр. 51), 28 (стр. 55–56), 380, 385–386, 391–409, 416, 418, 421, 427, 431, 4 (стр. 83), 438, 441, 447, 449, 451, 453, 463, 469, 471, 477, 25 (стр. 126), 487–488, 491–494, 496, 500–503, 507, 512, 516, 517, 522, 525, 36 (стр. 159), 548, 553, 556–557.
Универсальные учебные действия решения задач: • формирование умения переводить проблему в задачу и находить наиболее эффективные способы ее решения; • формирование умения определять и формулировать проблему в своей учебной деятельности при решении учебно-практической	*Книга 1*: №№: 1–28, 1, 2 (стр. 17–18), 6 (стр. 19), 11 (стр. 20), 17 (стр. 22), 18–23 (стр. 23–25), 27–30 (стр. 26–27), 32–46, 49–58, 61, 65–67, 69–75, 84–87, 99–102, 105, 109, 110, 114, 119, 124–128, 140, 3–5 (стр. 82–84), 7

задачи и построении нового способа решения задачи; • формирование умения произвольно и осознанно владеть общими способами решения учебно-практических задач; • формирование умения решать учебно-практические задачи по освоенному способу; • формирование умения выбирать наиболее эффективные способы решения учебно-практических задач; • формирование умения понимать причины успеха/неуспеха учебной деятельности и способности конструктивно действовать даже в ситуациях неуспеха; • формирование умения понимать, что причина неудач при решении учебно-практических задач может находиться в неправильно осуществленных учебных действиях.	(стр. 84), 15–16 (стр. 88), 141–176, 179–182, 185–189, 190–192, 199–207, 208–217, 224–229, 231, 242, 253, 260, 265, 267. *Книга 2:* №№: 276, 278, 280–282, 285–287, 288, 292–294, 296, 304, 307, 310–312, 315, 317, 321, 326–327, 330–336, 1–3 (стр. 29), 6–8 (стр. 30–31), 14, 16 (стр. 34), 337–349, 351, 354, 361–366, 368–369, 1–3 (стр. 48–49), 10 (стр. 51), 19, 22 (стр. 53), 24 (стр. 54), 25 (стр. 55), 28 (стр. 55–56), 3 (стр. 57), 373–383, 385–436, 2–4 (стр. 83), 5–6 (стр. 84), 7–9 (стр. 85–87), 15 (стр. 89), 17 (стр. 91), 21 (стр. 92), 22–25 (стр. 92–94), 437–454, 457–458, 461, 463–466, 469–481, 483–486, 1–10 (стр. 115), 12–13 (стр. 119), 16–17 (стр. 120), 25 (стр. 125–126), 6–8 (стр. 127), 487–489, 491–526, 528–532, 535, 537, 13–15 (стр. 148–149), 25 (стр. 153), 29 (стр. 156), 31 (стр. 157), 35–37 (стр. 158).

Основные группы коммуникативных результатов	
Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на передачу информации другим людям: • формирование умения слушать собеседника, задавать простые вопросы в процессе диалога; • формирование умения задавать вопросы в процессе диалога, необходимые для организации совместной деятельности и сотрудничества с партнерами при решении учебно-практических задач; • овладение навыками смыслового чтения текстов задач; • формирование умения строить понятное для партнера по диалогу простое монологическое высказывание.	*Книга 1*: №№:1–3 (стр. 17), 5 (стр. 17), 19 (стр. 23), 22–23 (стр. 24), 25–30 (стр. 25), 32–33 (стр. 28), 2–3 (стр. 32); 31–46, 50–62, 65–73, 75–81, 84–87, 90, 93–96, 102–103, 105, 107–111, 114, 119, 120, 123–124, 128, 130–132, 134–136, 138, 10 (стр. 86), 15–16 (стр. 88), 22 (стр. 90), 24 (стр. 91), 141–158, 160–165, 171, 175–176, 179, 181–182, 185, 187–192, 199–200, 202–218, 219–224, 226, 228–233, 239–242, 245, 251, 253, 256–266, 274.
Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на учет позиции собеседника, партнера по деятельности: • формирование умения допускать возможность различных точек зрения, в том числе не совпадающих с его собственной, и ориентироваться на позицию партнера в общении и взаимодействии; • формирование умения формулировать собственное мнение и позицию; • формирование умения понимать относительность мнений и подходов к решению проблемы, договариваться и приходить к общему	*Книга 2:* стр. 58–59 (постановка учебно-практической задачи); №№: 276–288, 291–296, 300–301, 303–309, 310–315, 317–319, 321, 324, 326–327, 330–336, 1–8 (стр. 30–31), 16 (стр. 34), 337–349, 353–355, 359, 361–366, 368–369, 372, 1–3 (стр. 48–49), 10 (стр. 51), 19 (стр. 53), 22 (стр. 53), 24 (стр. 54), 28 (стр. 55–56), 373–375, 380, 385–412, 414, 416–422,

решению в совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов при решении учебно-практических задач. Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на кооперацию и сотрудничество: • умение определять общую цель и путь ее достижения; умение договариваться о распределении функций и ролей в совместной деятельности; • формирование умения осуществлять взаимный контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь; • формирование умения различать цель, способ и результат действия и передавать эти различения в диалоге с партнерами при решении учебно-практических задач; • формирование умения кооперировать деятельность других людей, т.е. согласовывать усилия по достижению общей цели при решении учебно-практических задач.	424–427, 431, 433, 2–6 (стр. 83), 8 (стр. 85), 17 (стр. 91), 19–25 (стр. 92), 5–8 (стр. 96), 437–455, 457–458, 459–466, 468–481, 483–486, 1–13 (стр. 115–120), 16 (стр. 120), 17 (стр. 121), 20 (стр. 123), 6 (стр. 127), 487–526, 528–532, 535, 537, 13–15 (стр. 148), 26–31 (стр. 154), 36 (стр. 59).
Основные группы регулятивных результатов	
Регулятивные универсальные учебные действия целеполагания: • формирование умения принимать цель учебно-практической задачи и сохранять ее при выполнении учебных действий.	*Книга 1*: стр. 33 (постановка учебно-практической задачи); №№: 10–11, 16–21, 23–26, 29–59, 65–67, 78–79, 94–96, 105, 109, 123–124, 130, 132, 141–161, 163–

	165, 170, 178, 187, 191, 194, 200, 205, 209, 211, 213–222, 224, 226, 228–229, 231, 242, 253, 274, 1–8 (стр. 145–147). Рубрика «Проверь себя»: стр. 92 *Книга 2:* стр. 58–59 (постановка учебно-практической задачи); №№: 276–277, 280, 284–288, 292–294, 296, 300–301, 303, 310–311, 316–317, 319, 324, 326, 332–336, 1–8 (стр. 29), 337, 341–344, 349, 354, 363, 366, 2–3 (стр. 48), 10 (стр. 51), 19 (стр. 53), 22–24 (стр. 53), 373–383, 385–422, 427, 431, 437, 454, 457–458, 461, 463–466, 469–477, 479–486, 3 (стр. 115), 5–10 (стр. 16), 12 (стр. 119), 16–17 (стр. 121), 24–25 (стр. 125–126), 8 (стр. 127), 487–520, 523, 525–526, 529–533, 535, 537, 9 (стр. 147), 13–15 (стр. 148), 22 (стр. 152), 29 (стр. 156), 31 (стр. 157), 36–37 (стр. 159), 538–557.
Регулятивные универсальные учебные действия планирования: • формирование умения планировать собственные действия при	*Книга 1:* №№: 10–11, 16, 18–21, 23–27, 6 (стр. 19), 48, 50, 53, 62, 65–68, 74, 77–82, 85–87,

решении учебно-практической задачи; • формирование умения следовать установленному плану нахождения способа решения задачи.	89, 91–94, 96, 102, 105–109, 130–133, 136–140, 141–161, 163, 164, 176, 178, 179, 184, 187–191, 199–200, 209–212, 216–223, 226, 229, 235–237, 242, 245, 257, 262, 274, 1–3 (стр. 145), 7–8 (стр. 147). *Книга 2:*№№: 276–278, 280, 284–288, 296–300, 304, 306, 310–313, 16 (стр. 34), 337–347, 349, 354, 359, 366, 369, 372, 10 (стр. 51), 22 (стр. 53), 24 (стр. 54), 28 (стр. 55–56), 1 (стр. 57), 373, 375, 385, 386–412, 417–422, 427, 431–433, 2–8 (стр. 83), 15 (стр. 89), 17–25 (стр. 91–94), 2 (стр. 95), 8 (стр. 96), 437–454, 458–461, 463–466, 469–481, 483–486, 1–14 (стр. 115–120), 487–520, 525–531, 537, 13–15 (стр. 149), 22 (стр. 152), 26–34 (стр. 154), 36–37 (стр. 159).
Регулятивные универсальные учебные действия контроля и коррекции: • формирование умения следовать установленным правилам контроля и успешно использовать их в процессе решения задач, не допуская ошибок;	*Книга 1:* №№: 1–28, 1–36 (стр. 17–32), 32, 50, 62–63, 70, 73, 81, 84, 86, 90, 92, 95–96, 105, 108, 131, 134, 137–138, 3 (стр. 82), 4 (стр. 83), 7 (стр. 84), 15–16 (стр. 88), 24 (стр. 91),

• формирование умения осуществлять пошаговый и итоговый контроль по результату решения задачи, самостоятельно обнаруживать ошибки и вносить коррективы при решении учебно-практической задачи.	142, 146, 147, 149–152, 155–179, 180–182, 184–190, 193, 199–209, 211–215, 221, 224, 229, 233–239, 245, 253, 259, 260, 262, 263, 265–266, 274, 6 (стр. 146). Рубрика «Проверь себя»: стр. 39–42, 145 *Книга 2:* №№: 279–291, 304–307, 312, 315, 317–318, 321, 324, 327–328, 330–336, 1–3 (стр. 29), 6–8 (стр. 30), 338–349, 353–354, 363, 365–366, 369, 372, 25 (стр. 55), 386–413, 414, 418, 419–421, 427, 3–4 (стр. 83–84), 5–6 (стр. 84), 6–8 (стр. 96), 437, 439, 440–454, 463–465, 477, 480–486, 2–13 (стр. 115–120), 22–25 (стр. 124–126), 487–520, 525, 531, 535, 537, 13–14 (стр. 148), 22 (стр. 152). Рубрика «Проверь себя»: стр. 126, 162
Регулятивные универсальные учебные действия оценки: • формирование умения адекватно воспринимать предложения и оценку учителей, товарищей, родителей и других людей; • формирование умения, используя результаты контроля и оценки,	*Книга 1:* №№: 1–28, 1–37 (стр. 17–31), 39–42, 62–63, 70, 81, 84, 90, 95, 97–98, 105, 110, 135, 5 (стр. 83), 10 (стр. 86), 147, 152, 155–164, 165–171, 175–176, 178, 181, 185, 187–190, 193,

вносить необходимые коррективы в решение учебно-практической задачи.	199–206, 208–215, 221, 224, 229, 233, 245, 259, 260, 262–263, 265, 266, 274, 6 (стр. 146). Рубрика «Проверь себя»: стр. 32, 92 *Книга 2:* №№:280–283, 285–286, 303, 304, 307, 309, 312, 315, 319, 326, 327, 335, 1–3 (стр. 29–30), 7–8 (стр. 31), 338–349, 362, 365–366, 369, 372, 3 (стр. 48), 10 (стр. 51), 25 (стр. 55), 3 (стр. 57), 387–414, 416–422, 5 (стр. 84), 9 (стр. 86), 1 (стр. 95), 6–8 (стр. 96), 437–439, 440–441, 446, 447–455, 461, 463–466, 469–472, 480, 481, 483–486, 2–13 (стр. 115–120), 22–25 (стр. 124–126), 487–520, 525, 531, 535, 537, 13–14 (стр. 148), 22 (стр. 152), 36 (стр. 159). Рубрика «Проверь себя»: стр. 57, 126, 162

3. Задания на достижение предметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Понятие умножения и деления: • уметь находить способ измерения величин в ситуации, когда	*Книга 1:* №№: 29–53, 54–140, 1–19 (стр. 80–89), 21–25 (стр. 90–91),

предложенная учителем величина значительно больше исходной мерки; создавать и оценивать ситуации, требующие перехода от одних мер измерения к другим; • уметь использовать схему умножения (она же и деления) при решении текстовых задач, составляя выражение или уравнение; по схеме придумывать или подбирать текстовые задачи; применять калькулятор при проверке вычислений; • уметь анализировать зависимость между величинами, с которыми ученик имеет дело при решении задач; • уметь строить графические модели арифметических действий и осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно; читать и строить диаграммы; • уметь решать уравнения типа $a \times x = b$, $x \times a = b$, $a : x = b$, $x : b = a$.	1–4 (стр. 92), 183, 207, 218, 219, 243.244, 251, 252, 254–256, 259–262, 264, 268–275. *Книга 2:* №№: 295, 297, 299, 302, 308, 309, 318–319, 323–326, 328–331, 333, 336, 1 (стр. 29), 3–20 (стр. 30), 360–365, 367–371, 1–28 (стр. 48–56), 382, 384, 421–436, 1–9 (стр. 83), 15–16 (стр. 89), 3–8 (стр. 95), 475, 476, 11 (стр. 118), 14–15 (стр. 120), 17–18 (стр. 121), 20 (стр. 123), 521–524, 527–537, 9–12 (стр. 147), 17–23 (стр. 150), 25 (стр. 153).
Действия с многозначными числами: • уметь умножать и делить многозначное число на многозначное с опорой на таблицу умножения однозначных чисел от 0 до 9; • владеть основным приемом устных вычислений при выполнении любого арифметического действия; • уметь искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять	*Книга 1:* №№: 142–165, 171–178, 180–186, 188–191, 195–218, 219–232, 235–244, 254–258, 260, 265–268, 1–2 (стр. 145). *Книга 2:* №№: 278–291, 294, 297–299, 303–309, 312–315, 317–321, 323, 325–336, 1–10 (стр. 29), 14 (стр. 34), 337–372, 1–28 (стр. 48), 1–4 (стр. 57), 385–436, 7–10 (стр. 85), 15–16 (стр. 89), 1–8 (стр. 95), 437–486, 1–25

ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки; • уметь выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания с недостающими данными, с лишними данными, софизмами и др.; • уметь находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами.	(стр. 115), 1–8 (стр. 126), 487–537, 10–25 (стр. 148), 35–40 (стр. 158), 553, 556, 557.

ПРОГРАММА

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В основу новых Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) положен культурно-исторический системно-деятельностный подход (Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов и их ученики и последователи), согласно которому содержание образования проектирует определенный тип мышления. Ориентация на развитие теоретического типа мышления предполагает построение учебных предметов как систему научных понятий, усвоение которых напрямую зависит от формирования учебной деятельности и организации учебных действий ребенка.

В концепции образовательных стандартов подчеркивается, что обучение осуществляет свою ведущую роль в умственном развитии прежде всего через содержание, которое в свою очередь определяет методы, формы организации и общения детей, характер дидактических материалов и другие стороны учебного процесса.

Данная программа по математике и соответствующий ей УМК изначально были ориентированы на деятельностный подход в обучении (теоретические положения этой научной школы легли в основу ФГОС нового поколения). Это означает, что они позволят реализовать цели и задачи ФГОС, поскольку ориентированы как на достижение предметных, личностных и метапредметных результатов, так и (как следствие) на формирование разных компетенций младших школьников, опираясь при этом на исторический подход при изучении основного математического понятия — понятия числа.

Содержание курса математики представлено целостной системой специальных (ключевых) учебно-практических задач, с которых и начинается всякая новая тема, а не набором заданий развивающего характера. Итогом решения учебных задач являются прежде всего обобщенные способы действий, позволяющие формировать у ребенка универсальные учебные действия (УУД), а новые знания, задаваемые как основания детского умения, становятся качественно иными (формирование навыков при таком подходе становится не целью, а одним из средств для овладения УУД). Условия решения таких задач либо воссоздают ситуации, в которых зарождалось исторически то или иное понятие (к примеру, понятие числа), либо задают реальные жизненные ситуации (к примеру, введение смысла умножения). Такой подход, по замыслу разработчиков ФГОС, даст возможность получить метапредметные результаты. Более того, решение подобных задач с неизбежностью требует организации коллективно-распределенных форм деятельности, что создает оптимальные условия для получения предметных, метапредметных и, конечно, личностных результатов, а математическое содержание приобретает личностно значимый характер. Именно содержание учебного предмета должно создавать благоприятные условия для развертывания учебной деятельности детей и способствовать интенсивному развитию мышления и мыслительных операций, связанных с ними: анализа, рефлексии и планирования.

Однако конструирование учебной программы не только предполагает отбор содержания, но и требует осознания связи содержания усваиваемых знаний и умений с психическим развитием ребенка.

Ориентация на развитие ребенка предполагает опору на активные методы обучения, формирующие у школьника универсальные учебные действия. Это означает, что знания не должны даваться ему в готовом виде. Они должны быть получены в совместной деятельности с другими детьми и учителем как организатором и соучастником процесса обучения.

Основным математическим понятием, определяющим главное содержание данной программы и всего курса школьной математики в целом, является «действительное число», представленное в начальной школе в виде целого неотрицательного числа.

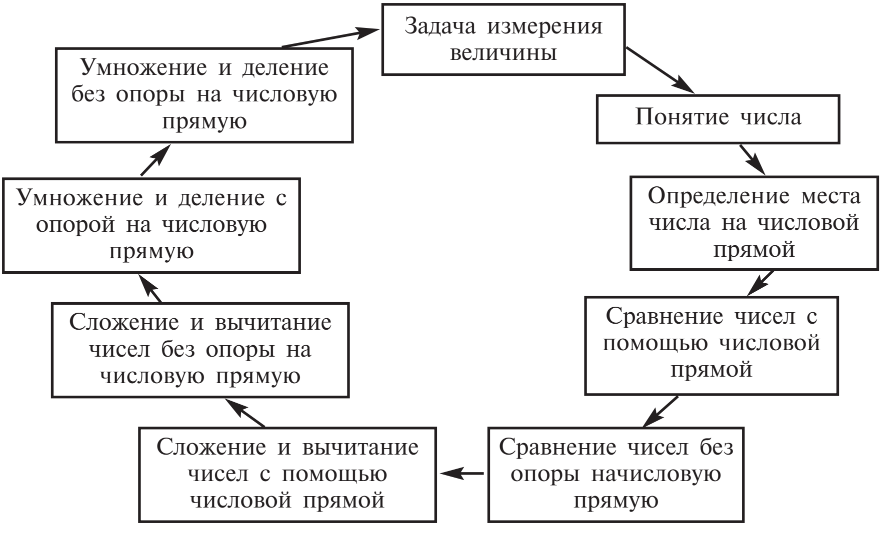
Существуют разные точки зрения относительно изучения этого базового математического понятия в начальной школе. Однако речь идет о построении начального курса математики как части целостного учебного предмета, представленного системой понятий, которые рассматриваются через систему учебных задач. Поэтому становится ясно, что преемственность в обучении требует уже в начальной школе рассматривать основное математическое понятие — понятие числа через понятие величины как системообразующего понятия курса математики. Измерение величин, в отличие от счета предметов, требует организации практических действий, и не в одиночку, а совместно с другими детьми, т. е. в коллективно-распределенной, групповой форме деятельности, вынуждает ребенка общаться, действовать руками, что является основой для развития моторики, коммуникативных умений, расширения познавательных интересов, установления межпредметных связей.

Операцией, специфической для способа измерения величин, является «откладывание» единицы измерения (мерки) на измеряемой величине и счет таких «откладываний». Число в этом случае является характеристикой величины и зависит не только от измеряемой величины, но и от выбранной мерки. Меняя условия, при которых с помощью практических действий решается задача измерения и обратная ей задача построения (воспроизведения) величины посредством «откладывания» мерок (единиц измерения), учащиеся будут «выращивать» различные виды чисел, знакомясь с общепринятыми способами их обозначения. Ориентация на обобщенные способы действий является одной из новых задач ФГОС.

Основным средством, фиксирующим результаты сравнения величин, их сумму и разность, служат различные графические модели: схема, числовая прямая, числовой луч, а начиная со 2 класса вводятся диаграммы, использование которых впервые рекомендовано в начальной школе. Опора на графическую модель, так же как и на знаковую (формулу), позволяет изучить отношения равенства-неравенства, частей и целого, которые служат основой при обучении решению текстовых задач и уравнений. Предлагая уже с первого класса задачи с буквенными данными, мы ставим ученика в ситуацию поиска необходимых сведений (информации), анализа сюжета задачи для подбора «подходящих» чисел, а к 4 классу ученик столкнется с задачами-ловушками, к которым отнесем задачи с лишними данными, с недостающими данными и др. Именно они дают возможность ученику оценить потребность в дополнительной информации, определить ее возможные источники , проанализировать ее. Работа с информацией как раз и отличает новые подходы в обучении не только математике, но и другим предметам, что в итоге дает возможность формировать информационную, а значит, и компьютерную грамотность.

Все понятия, как уже было сказано выше, в том числе и базовые понятия величины и числа, вводятся через учебно-практические задачи. Так, в 1 классе это задачи, в которых необходимо подобрать предмет, обладающий изучаемым свойством, а затем, когда речь пойдет о величине, нужно непосредственно измерить ее соответствующей меркой. Результатом измерения всякий раз будет являться число. Процесс измерения и его результат описываются с помощью графических моделей (схем), в частности числового луча и числовой прямой.

Сравнение, сложение и вычитание величин и чисел, которые их характеризуют, с опорой на числовую прямую служат **общим основанием** к конструированию арифметических действий с любыми числами. Схематично логика изучения понятия числа и действий с ним может быть представлена так:



Изучение каждого вида чисел (а в начальной школе рассматриваются не только однозначные и многозначные числа, принадлежащие множеству целых неотрицательных чисел, но и десятичные дроби, позволяющие ученику осознать общий принцип образования позиционного числа и общий принцип выполнения арифметических действий с ними — принцип поразрядности) в строго определенной логике позволит ученику на более поздних этапах освоения математики самостоятельно проектировать свое продвижение в предмете при условии осознания этой ***общей*** для всех видов чисел логики, существенно повышая мотивацию и интерес ребенка. Представляется, что именно в этом и есть смысл ***преемственности*** содержания и целостности школьного курса математики.

Использование числовой прямой (а не числового луча) в качестве основной графической модели дает возможность заложить общие подходы для изучения арифметических действий по отношению не только к целым неотрицательным числам, хотя именно они являются носителями этих общих способов действий с числами, но и к другим видам чисел.

Так, например, способы сравнения, сложения и вычитания чисел с помощью числовой прямой (точнее, двух числовых прямых) позволяют без проблем ввести аналогичные операции над положительными и отрицательными числами в основной школе (что было опробовано на протяжении ряда лет).

Для знакомства с десятичным принципом образования многозначных чисел дети, как и ранее, обращаются к задаче измерения: сначала они измеряют длину, теперь будут измерять площадь. Измерение и построение величин по частям с помощью системы мерок (длины, площади) дает возможность перейти к табличной форме записи чисел, позволяя сравнивать их между собой без построения самих величин. Замена системы мерок для измерения длины (площади) с произвольной основной (исходной) меркой и постоянным отношением между ними, в том числе с отношением кратным 10, позволяет «оторвать» число от числового значения величины (именованного числа) и рассмотреть многозначные числа как результат измерения величины любой системой мер (и десятичной в частности). Осознав основной принцип образования многозначного числа (в пределах 4 и более разрядов), можно перейти к изучению сложения и вычитания многозначных чисел «столбиком».

Методика обучения действиям с многозначными числами опирается на использование предметных моделей (плоских геометрических фигур) для обнаружения основного принципа выполнения любого арифметического действия — принципа поразрядности. Анализируя этот принцип, нетрудно прийти к выводу: при поразрядном сложении сумма однозначных чисел (табличные случаи) может быть меньше десяти, равна десяти или больше десяти. Оценив сумму, ученик может определить, какие разряды при сложении двух (и более) многозначных чисел «переполняются», а какие нет, может (ничего не вычисляя) узнать, сколько цифр (знаков) получится в сумме, и в завершение может вычислить цифру[37] в каждом разряде. Другими словами, прежде чем выполнить то или другое арифметическое действие, ему необходимо будет сделать оценку и прикидку, чему, как известно, в новых стандартах придается особое значение как важным учебным навыкам. Этому в полной мере отвечает, с нашей точки зрения, методика обучения выполнению арифметических действий.

Таким образом, определять количество цифр в результате действия дети будут не только при делении, как это принято традиционно, но и при вы-

[37] Для краткости будем употреблять термин *цифра* вместо *однозначное число, записанное с помощью цифры.*

полнении всех арифметических действий. Общий подход к выполнению любого арифметического действия позволит значительно облегчить формирование прочных вычислительных навыков, поскольку не требует от ребенка постоянной перестройки и запоминания способов, отличающих одни вычисления от других. Подчеркнем, что навыки выполнения письменных вычислений и на их основе приемов устного счета (а не наоборот!) формируются путем анализа операционной структуры каждого арифметического действия, анализа различных способов его выполнения, содержательного анализа ошибкоопасных мест (составление «справочника ошибок»), что делает формирование навыков вычислений не самоцелью, а средством для развития анализа, рефлексии и планирования (в том числе мысленного) как характеристик теоретического типа мышления. Формирование у учащихся нового типа мышления — одна из приоритетных задач, поставленных перед школой ФГОС.

В соответствии с описанным выше подходом к формированию обобщенных способов действий особое внимание уделено месту и последовательности изучения таблиц сложения всех однозначных чисел от 0 до 9 (а не от 1 до 9!), работе над приемами их составления и запоминания. Формирование навыков табличного сложения и вычитания (а потом и табличного умножения и деления) происходит на основе непроизвольного запоминания, которое является результатом (следствием) исследования зависимости между изменяющимся слагаемым и цифрой в разряде единиц у двузначной суммы, которая получается при «переполнении» разряда:

$$\mathbf{9 + 4 = 1\overset{-1}{\curvearrowright}3;\quad 8 + 7 = 1\overset{-2}{\curvearrowright}5} \text{ и т. п.}$$

Конструирование приемов устных вычислений и их обоснование опираются на свойства действия с использованием не только графических моделей, но и предметных.

Для того чтобы смысл одного из важнейших математических понятий — умножения не был подвергнут «ревизии» в основной школе, мы рассматриваем его как особое действие, связанное с переходом в процессе измерения величин к новым меркам (В.В. Давыдов). Становится очевидным, что при таком предметном смысле действия умножения произведение может быть найдено (вычислено) разными способами в зависимости от того, какие числа получились в результате измерений.

Как и при изучении сложения и вычитания, изучение умножения и деления (как обратного действия) строится с опорой на графическую модель (схему) и предметную (используются конструкторы «Лего»). Умение изображать отношения между компонентами действия с помощью схемы позволит ученику описать одно и то же отношение с помощью нескольких формул: $a \cdot b = c,\ \ c : a = b,\ \ c : b = a.$

Таким образом, при введении понятия умножения мы движемся не от суммы к произведению (произведение дробных чисел, которое рассматривается в 5—6 классах, в отличие от натуральных не может представлено суммой одинаковых слагаемых, как этому учат в начальной школе, что только усугубляет проблему преемственности с основной школой), а от произведения к сумме, что позволит задать ***общий*** (для всех видов чисел) ***смысл*** действия умножения.

Одной из важнейших учебных задач в данном варианте обучения математике является «конструирование» способа умножения многозначного числа на многозначное, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это традиционно принято.

Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддержания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что снимает необходимость в специальном предварительном заучивании таблиц, а в процессе формирования приемов будут закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Завершается изучение арифметических действий с многозначными числами «конструированием» деления многозначного числа на многозначное, которое требует предварительного освоения новых типов заданий, а затем уже последовательного выполнения следующих операций:

а) нахождения первого неполного делимого по известному делителю (и, наоборот, нахождения возможных делителей при неизвестном неполном делимом), что, как правило, требует «разбиения» разрядов;

б) определения количества цифр в частном по уже известному неполному делимому (и, наоборот, нахождения первого неполного делимого по известному количеству цифр в частном);

в) определения «подсказок»[38];

г) подбора цифр в частном с помощью умножения и опоры на «подсказки» (и, наоборот, восстановления «подсказок» по известной цифре частного), а не на округление делимого и делителя, как это принято. Такой подбор дети выполняют не делением, а умножением, что значительно облегчает задачу определения цифры в частном.

Овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для классификации устных и письменных вычислений.

Для проверки вычислений в тех случаях, когда ученик сомневается, ему предлагается в ряде заданий использовать калькулятор.

Итак, описанный подход к изучению умножения и деления, аналогич-

---

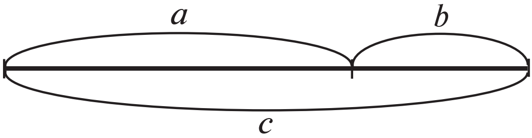
[38] Понятие «подсказка» введено в связи с принципиально новым подходом к обучению обобщенному способу деления любого многозначного числа на любое многозначное число (а не «дозами»: сначала на однозначное, затем на двузначное, трехзначное и т. д.), значительно облегчая подбор цифры и сокращая время такого подбора.

ный подходу к изучению сложения и вычитания, дает возможность значительно упростить методы обучения решению текстовых задач, задавая обобщенный способ работы над задачей (не от действий к выражению, а от выражения к действиям).

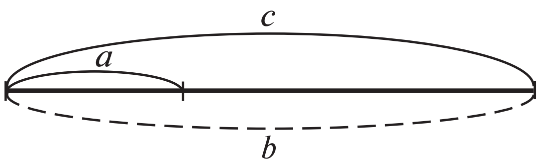
Достаточно научиться изображать отношение «целого и его частей» с помощью схемы в двух ситуациях:

1) если части, из которых составлено целое, неравные, то отношение между ними может быть описано тремя основными формулами: $a + b = c$, $c - a = b$ и $c - b = a$, где a и b — части, а c — целое.

Схема отношения выглядит так:



2) если же все части равные, то отношение между частями и целым может быть описано дополнительными формулами: $a \cdot b = c$; $c : a = b$ и $c : b = a$, где a — часть, b — количество таких частей, c — целое, а схема такого отношения выглядит так:



При решении текстовых задач, уравнений и при нахождении значения выражения учащиеся опираются на изображение отношений с помощью этих двух схем, умения работать с которыми вполне достаточно для поиска неизвестной величины или числа.

Решение текстовых задач сопровождает изучение всех тем, однако углубление представления о задаче, принципов построения текста, способов ее моделирования не только с помощью схемы (или диаграммы), но и краткой записи (в том числе в табличной форме) происходит на заключительном этапе обучения в 4 классе.

Анализ способов моделирования текстовой задачи, преобразования краткой записи (одной из форм которой является таблица) и схемы создает необходимые предпосылки для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения задач путем составления и решения уравнений.

Новый раздел «Работа с информацией» изучается, как и рекомендовано, на основе содержания всех других разделов курса математики, однако наиболее ярко он представлен при обучении решению текстовых задач с буквенными данными, о чем было сказано выше. Это работа и с диаграммами, и с различными таблицами, что позволит использовать учебники не только для изучающих базовый вариант, но и для тех, кто выбрал другие два варианта, в том числе с расширенным разделом, посвященным работе с информацией, поскольку в учебнике представлены задания на построение простейших линейных связок, высказываний.

Возврат в 4 классе к понятиям периметра (длины), площади и объема и способам их вычисления обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию готовых результатов измерения. Такой подход позволяет осмыслить основные принципы, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые. Именно в начальной школе создаются предпосылки для систематического изучения геометрии в средних классах как конкретизация тех основных понятий и принципов, с которыми дети уже работали, изучая свойства объектов трехмерного пространства, что и составляет предмет элементарной геометрии. Таким образом, геометрический материал в рассматриваемой программе не является инородным, он органически включен в общую логику построения курса начиная с 1 класса, что делает его более осмысленным и содержательным и дает возможность учителю использовать учебники при выборе любого из трех вариантов, представленных во ФГОС.

Итак, геометрическая линия рассматривается без отрыва от числовой, являясь основой символического описания **отношений между величинами** и **отношений между числами** как характеристиками величин. Это значит, что различные геометрические фигуры (отрезок, прямоугольник, круг и т. д.) нужно использовать в качестве графических моделей, что дает возможность осознать геометрические формы не только как ***образы предметов*** окружающего мира, но и как ***математические модели***. Происходит перенос свойств одного образа на другой, что является основой для понимания математики, основой метода познания реальной действительности, основой формирования универсальных учебных действий (в том числе формирования ***общего*** умения решать задачи). Именно такие цели сформулированы в концепции ФГОС нового поколения.

Предлагаемое математическое содержание позволяет организовать обучение в форме ***учебно-поисковой деятельности***, которая по своей сути является коллективно-распределенной. Наряду с общей грамотностью она дает возможность ученику приобрести умение разрабатывать и проверять гипотезы (как свои, так и чужие), работать в проектном режиме, проявлять инициативу в принятии решений, выстраивать отношения с одноклассниками, брать на себя те или иные функции и т. п. Это и становится одним из значимых ожидаемых результатов образования и предметом стандартизации, поскольку у детей появляется способность самостоятельно решать встающие перед ними новые задачи, усиливается познавательная активность, создавая предпосылки познавательного развития, формируется умение учиться как компетенция, обеспечивающая овладение новыми компетенциями. Необходимым условием такой деятельности является развертывание учебного диалога, который неизбежно приводит к интенсивному развитию речи, оказывая значимое влияние не только на коммуникативное и личностное развитие ребенка, но и на не менее важное социальное развитие. Решение одной и той же задачи разными группами детей (особенно в первый год обучения) позволяет сопоставить и критически оценить особенности их подходов, что в свою очередь рождает у детей взаимный интерес к работе друг друга.

Общение детей между собой на материале математики обогащает каждого из них, дает возможность самому учителю четко представлять, какие дети в первую очередь нуждаются в коррекции, учит детей работать в едином коллективном ритме, принимать позицию равноправного партнера. Другими словами, необходимо организовать обучение, ориентированное на такое психическое развитие ребенка, которое способствует его психологической готовности к школьному обучению (совершенно очевидно, что среди детей, принятых в первый класс, не все будут психологически готовыми к школьному обучению) и развитие у него универсальных учебных действий.

С первых дней изучения математики от детей требуется работа руками. Так, говоря о длине или ширине полоски, важно, чтобы дети прошлись по ней пальчиком, все действия с предметами должны осуществляться каждым ребенком, а не только выходящим к доске или, что еще хуже, самим учителем. Вся учебно-поисковая деятельность на первом году обучения (как и на последнем) связана с овладением способами сравнения по разным признакам различных предметов, окружающих ребенка, и с измерением величин. Это требует прикладывания одного предмета к другому, перекраивания фигур, переливания, пересыпания, ощупывания, т. е. опоры на все органы чувств. Для этого ребенок использует бумагу, ножницы, пластилин, конструкторы (а затем геометрические инструменты, технические приборы) и т. д., что позволяет интенсивно развивать сенсомоторную координацию, что особенно важно для 6—7- летних учеников.

Материал в учебниках структурирован так, чтобы было удобно и учителю, и родителям тех детей, которые по ряду причин могут пропустить уроки. Каждая тема завершается разделом «Проверь себя», но не менее значимыми являются и разделы «Это интересно» и «Задания на смекалку». Характер заданий, включенных в учебник, их построение и подбор основаны на принципе составления обратной задачи по отношению к данной. Среди этих заданий есть и те, которые дадут возможность учителю диагностировать сформированность у учащихся метапредметных и предметных компетенций. Прежде всего это так называемые задания с ловушками, задания на доопределение условий, на поиск общего в различном, на выбор способов действий и др. Использование различных типов заданий позволяет не только учить ребенка думать, развивать интуицию, воображение, но и включать эмоции, ставить новые исследовательские задачи и создавать атмосферу сотворчества и соразмышления.

Представленный курс математики по своему содержанию построен так, чтобы научить ребенка строить рассуждения, выбирать аргументацию, различать обоснованные и необоснованные суждения, вести поиск информации, уметь решать учебные и практические задачи средствами математики. Все это и составляет умение учиться (учить самого себя). ФГОС определяют умение учиться как основу развития личности, познающей мир через его освоение и преобразование в конструктивном сотрудничестве с другими.

Факторами, определяющими эффективность предлагаемого подхода к обучению математики для реализации целей ФГОС, являются:

1) особенности математического содержания (введение понятия числа как результат практического действия измерения), заданного в контексте решения значимых жизненных задач);

2) логика курса математики, заданная системой учебно-практических задач, выстроенная в соответствии со структурой учебной деятельности и основанная на мотивации, на понимании учеником (а не только учителем!), что и зачем ему нужно знать и уметь, способствует созданию индивидуальной образовательной траектории;

3) подбор специальных новых типов заданий, адекватных новому подходу и представленных в виде целостной системы, которая позволяет ученику освоить универсальные учебные действия, обеспечивающие ему в дальнейшем способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса;

4) использование квазиисследовательского метода в обучении дает возможность не задавать понятия в готовом виде, а создавать условия для самостоятельных открытий, что существенно повышает мотивацию и интерес к учению, имеет неоценимое значение для познавательного развития ученика;

5) организация коллективно-распределенных форм деятельности, являясь основой коммуникативного развития ребенка, придает результатам образования социальную и личностную значимость;

6) система отношений детей между собой и с взрослыми: учителями и родителями, которая не только обеспечивает социализацию ребенка, но и формирует образ мира.

Система учебно-практических (ключевых) задач в курсе математики

1 КЛАСС

1. **Задача на восстановление объекта, обладающего различными свойствами (признаками).**

Решение этой задачи методом подбора объекта позволяет:

а) выделить те признаки, по которым его можно сравнивать с другими объектами;

б) найти различные способы сравнения предметов. Например, при сравнении по длине дети сначала опираются на зрительное восприятие, т. е. сравнивают «на глаз», а затем, когда этот способ не срабатывает, находят другие способы сравнения (наложение или приложение).

Научившись сравнивать различные предметы и геометрические фигуры по длине (ширине и высоте), ребенок попадает в ситуацию, когда этого умения становится недостаточно для сравнения. Например, необходимо подобрать точно такой же круг или многоугольник, у которых ребенок не может обнаружить ставшие привычными длину и ширину. У него возникает необходимость сравнения по другому признаку — ***площади***.

Такой общий подход к появлению новых признаков сравнения предметов позволяет ребенку уже на первых этапах обучения использовать его при решении целого класса частных задач на сравнение, что, в свою очередь, значительно расширяет набор признаков, по которым можно сравнивать предметы. Например, не только по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, форме, цвету, материалу, количеству, но и по углам, расположению на плоскости и в пространстве, по составу частей и даже «по красоте». Сравнение «по красоте» является ключом к формированию каллиграфического навыка. Так, сравнивая уже написанные кем-то цифры, буквы, дети самостоятельно выделяют их основные элементы, анализируют способы их написания и тем самым конструируют образец, что принципиально меняет методику обучения — не от образца к написанию, а от написания к образцу, а от него к написанию.

Действуя с реальными предметами, их признаками (свойствами) и результатами сравнения по заданному признаку, дети выделяют существенные связи и отношения между компонентами действия, выполняя три основных типа заданий:

а) есть предметы, известен признак — необходимо установить результат сравнения;

б) есть предметы, известен результат сравнения — нужно установить, какой признак был выбран;

в) известны признак и результат сравнения — необходимо подобрать соответствующие предметы.

Вариативность этих заданий очевидна, что позволяет учителю в полном объеме контролировать свои действия и по мере необходимости их перестраивать.

2. **Задача на восстановление величины в ситуации, когда подбор величины, равной данной, невозможен и для ее восстановления необходимо изготовить новую величину** (речь, конечно, идет о предмете как носителе величины).

3. **Задача на моделирование отношений равенства-неравенства**, которая решается сначала с помощью предметов, затем копирующего рисунка предметных моделей (полосок), а лишь потом трансформируется в графическое (сначала отрезками, а затем, начиная со 2 класса, линейными, столбчатыми и круговыми диаграммами) и знаковое моделирование (буквенными формулами).

4. **Задача на введение буквенно-знаковых символов.** Введение знаков и букв представляет собой одну из важнейших задач в «дочисловом» периоде. В букве, обозначающей то или иное свойство, но не предмет, обобщаются выделенные отношения равенства-неравенства.

При обозначении величин используются буквы латинского алфавита. Сначала вводятся те буквы, которые совпадают с русскими по написанию и произношению (*A, K, E* и др.), затем те, которые совпадают по написанию, но не совпадают по произношению (*B, P, C* и др.), и лишь затем буквы *R, Q* и др. Буквы *X, У, Z* вводятся для обозначения неизвестной величины.

5. **Задача на введение операций сложения и вычитания величин.** Решение задачи уравнивания величин и изучение способов перехода от неравенства к равенству приводят к необходимости *введения операций сложения и вычитания* величин и изучения их свойств сначала на предметном уровне, затем с опорой на графическую и знаковую модели.

Раннее введение операций сложения и вычитания величин существенно расширяет возможности применения дошкольного опыта ребенка и позволяет на уровне сформированных ранее умений оперировать с числами, подбирая «подходящие» числа вместо букв в формулах, описывающих результаты сравнения и уравнивания величин.

Подбор «подходящих» чисел к формулам, а затем к текстам задач имеет особое значение. Во-первых, дает возможность всем без исключения детям использовать свой дошкольный запас независимо от его объема и сделать тем самым выполнимыми любые предлагаемые учителем задания. Во-вторых, закладывает основы для таких важнейших математических понятий, как область допустимых значений, решение уравнений или выражений с параметрами. В-третьих, помогает детям устанавливать связь, а следовательно, делать «прикидку» того, подходят ли выбранные учениками числа к сюжету задачи и соответствует ли полученный результат тексту решаемой задачи и реальным фактам. Подбор так называемых подходящих чисел к текстовым задачам с буквенными данными относится, как уже было сказано, к разделу «Работа с данными» (из Примерной программы по математике, рекомендуемой Федеральным государственным образовательным стандартом), который в настоящей программе не выделен в отдельную тему, а органично встроен в различные другие разделы, в том числе и в обучение решению текстовых задач. Чтобы заменить буквы числовыми данными, дети должны будут определить возможные источники информации и осуществить поиск соответствующих числовых данных, проанализировать полученные сведения, соотнеся их сначала с сюжетом задачи, а затем с выполнимостью арифметических действий.

Насколько важно сформировать у ребенка умение подставлять в любые буквенные математические выражения числа, настолько необходимо умение выполнять обратные переходы, решая задачу восстановления буквенных выражений по числовым. Это оказывается решающим фактором изучения математики в старших классах, при работе с взаимообратными функциями, со способом нахождения интеграла как задачей по восстановлению первообразной функции по ее производной и т. д.

Уравнивая величины, дети устанавливают разностное отношение между ними, фиксируемое с помощью выражений «больше на», «меньше на», что позволяет приступить к раннему решению текстовых задач, включающих эти отношения.

Схема к задаче появляется «синхронно» с чтением текста: текст читает учитель, структурируя его в соответствии с возможностью изображения заданных величин и отношений между ними. Решение записывается с помощью буквенного ***выражения, равенства*** или ***уравнения***. Числовые значения придумывают дети в соответствии с сюжетом задачи и выполнимостью арифметических действий на основе пока еще дошкольного опыта. Если же текст задачи содержит числовые данные, то дети сначала должны оценить правомерность таких данных, т. е. проверить, подходят ли они по смыслу задачи, затем «восстановить» ее с буквенными данными и составить математическое выражение (а затем уравнение) для ее решения, а потом подставить вместо букв те числовые значения, которые были даны автором.

В дальнейшем способ «синхронного» составления схемы к задаче перестанет срабатывать, что приведет к необходимости искать другие способы моделирования, в том числе в форме краткой записи.

6. **Задача на введение понятия части и целого.** Введение понятия части и целого при решении задачи на воспроизведение величины по ее известным частям позволяет освоить способы построения и решения уравнений и существенно расширить класс решаемых задач. Подбор же «подходящих» к данному отношению чисел даст возможность рассмотреть состав числа (преимущественно однозначного), опираясь опять-таки на дошкольные умения.

Выполняя задания с «ловушками», где часть может оказаться больше, чем целое, или целое составлено без учета частей, дети устанавливают отношения между данными понятиями. Установление связи между сложением и вычитанием величин на основе понятий части и целого позволяет соотнести целое с суммой и уменьшаемым, а части — со слагаемым или вычитаемым и разностью и увидеть, что разные действия: $A + B = C$, $C - A = B$ или $C - B = A$ — характеризуют одно и то же отношение между величинами. Нахождение неизвестного при решении уравнений опирается не на правила, а на отношение между частями и целым, которое представлено в виде графической модели (схемы).

Понятие части и целого позволяет ввести переместительное и сочетательное свойства сложения величин. Порядок выполнения действий над величинами определяется не с помощью правил, а с опорой на схему, что создает предпосылки для установления свойств сложения чисел и порядка выполнения действий при сложении и вычитании чисел.

Таким образом, к концу дочислового периода у учащихся складывается содержательное расчлененное представление о величинах, их свойствах, операциях над ними (сравнение, сложение, вычитание), свойствах этих операций, равенств, неравенств. Формируются умения решать уравнения и задачи в буквенно-знаковой форме, складываются благоприятные предпосылки для формирования у учащихся понятия об области допустимых значений переменных, входящих в математическое выражение, уравнение или текстовую задачу.

Ключевая учебная задача появляется в ситуации, когда освоенные способы непосредственного сравнения предметов по заданному свойству не подходят, что приводит к необходимости **опосредованного сравнения величин**, где в качестве посредника первоначально выступает мерка, равная одной из сравниваемых величин (отчасти этот способ сравнения уже применялся детьми раньше), а затем и число, которое вместе с меркой (сначала меньшей, чем заданная величина) служит средством для воспроизведения такой же величины в другом месте или в другое время.

Задача измерения-отмеривания ставит перед детьми новые вопросы: какие предметы можно использовать в качестве той или иной мерки, а какие нельзя или неудобно, какое из свойств предмета может участвовать при использовании его для измерения. Так, например, ребро кубика можно использовать как мерку длины, а грань — как мерку площади и т. д.

Эта исследовательская задача приводит к ***оценке соотношения между величиной и меркой***, когда мерка либо намного меньше измеряемой величины, что делает ее неудобной — появляются составные мерки, либо больше, а иногда мерка вообще непригодна для измерения (например, для измерения длины окружности мерка, изготовленная из твердого материала, не подходит, так как не может изменять свою форму). Необходимо заметить, что, как правило, для измерения длины используются линейки, изготовленные из дерева, пластмассы или металла, что не дает возможности, например, при введении понятия «радиана» в старших классах «положить» радиус окружности на ее дугу, чтобы получить центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу окружности.

2 КЛАСС

Исследование вопроса о том, ***какие бывают мерки***, завершает изучение понятия величины в 1 классе и приводит к исследованию во 2 классе вопроса о том, ***какие бывают числа***, т. е. как в разное время разные люди записывали и называли числа, которые появились в процессе измерения и служат для построения нужной величины. Таким образом, ***программа 2 класса*** начинается **с измерения-отмеривания** и позволяет рассмотреть ***исторический аспект числа***: от его меточной формы до арабских цифр. Рассматривается устная и письменная нумерация разных народов. Это позволяет развести в сознании ребенка смысл числа как отношения величин и цифры как знака для его обозначения (проводится аналогия между звуком и буквой в русском языке).

Измеряя, отмеривая различные величины, дети приходят к необходимости «изобретения» измерительных приборов со шкалами, а следовательно, и к «изобретению» числовой прямой, числового луча и других числовых линий, которые характеризуются началом отсчета, направлением и единичной (исходной, основной) меркой.

Учащиеся решают **учебно-практические задачи**:

1. **Конструирование числовой прямой.** Процесс построения числовой прямой дает представление об упорядоченном бесконечном ряде чисел, в котором каждое число имеет собственное место, и, таким образом, дает возможность ***использовать порядковый аспект числа*** с опорой на его основные свойства.

2. **Количественный аспект числа** выражается результатом измерения величины меркой того же рода. Исследуется зависимость между величиной, меркой и числом. Теперь число отвечает на вопрос «Сколько мерок E содержится в величине A?», т. е. является характеристикой величины A. Так у учащихся формируется понятие числа. Теперь можно сравнивать величины по их числовым характеристикам без построения самих величин. Это приводит к необходимости выполнения операции сравнения чисел.

3. При **сравнении чисел** с помощью числовой прямой (чем дальше число по направлению, тем оно больше) возникает новая учебная ситуация, при которой ответить на вопрос, какое из двух чисел больше или меньше, легко, а вот на сколько больше (меньше) — путем пересчитывания количества шагов (мерок) между ними — оказывается трудно. На помощь приходит «измерительный» прибор — вторая числовая прямая (линейка).

4. Конструирование **способа сложения и вычитания чисел** (как правило,

в пределах десятка) сначала с помощью двух линеек (принцип логарифмической линейки), затем с помощью двух числовых прямых и, наконец, с помощью одной числовой прямой.

Выбор двух одинаковых линеек для выполнения действий позволяет сформулировать ряд условий:

а) шаги (мерки) на линейках одинаковы;

б) значки (цифры) для обозначения чисел одинаковы;

в) последовательность этих значков одинакова.

Таким образом, при сложении (вычитании) двух чисел, заданных в любой нумерации, ребенок использует две одинаковые линейки с соответствующими цифрами; «манипулируя» ими, он находит (считывает) нужный результат.

5. Увеличение числа слагаемых или отсутствие линеек создает предпосылки **для «открытия» нового способа сложения (вычитания) путем присчитывания (отсчитывания) по единице**. Теперь ребенку понятно, почему, например, при сложении отсчет второго слагаемого начинается не от начала числовой прямой, а от точки, соответствующей первому слагаемому.

В дальнейшем этот способ тоже окажется неудобным, когда вместо суммы 3784 + 2 надо будет находить сумму 3784 + 2561. ***Это, в свою очередь, потребует поиска «нового» способа поразрядного сложения взамен «старого» способа — присчитывания.***

6. В следующей учебной задаче рассматривается ситуация, когда **величина оказывается намного больше мерки**, что приводит к необходимости использования для измерения набора мерок, который упорядочивается от большей (из мерок, меньших измеряемой величины, что легко проверить непосредственным сравнением) к исходной (основной).

В таком случае результат измерения выражается не одним числом, а некоторым набором чисел, где каждое соответствует определенной мерке. Появляется табличная форма записи числа, которая приобретает со временем форму «заготовки», т.е. места для каждой цифры.

7. Следующая учебная ситуация, приводящая к решению учебно-практической задачи, требует **определения отношений между мерками для их изготовления** в другом месте или в другое время. Появляется новая числовая характеристика отношения между последующей и предыдущей мерками. Это отношение фиксируется стрелочкой и числом над прообразом разряда. Отношения между соседними мерками оказываются двух видов, одно из них постоянно. Тогда мы уже имеем дело не с набором мерок, где отношения между соседними мерками различны, а с системой мерок с постоянным отношением между соседними мерками (основание системы), при этом система остается открытой, т. е. всегда (по необходимости) может быть построена следующая мерка.

Это позволяет заранее изготовить различные системы мерок для измерения разных величин, распределив между группами спланированный объем работы. ***Десятичная система счисления*** рассматривается как частный случай. Чтобы измерить величину с помощью системы изготовленных в заданном отношении мерок, сначала нужно выбрать мерку, с которой удобно начинать измерение, — самую большую из тех мерок, которые меньше измеряемой величины. Свой выбор необходимо доказать, сравнив непосредственно следующую за выбранной мерку с измеряемой величиной, которая должна оказаться уже больше этой величины.

Из сказанного следует: если основание системы (а это и есть основание системы счисления) равно, например, 6, то цифры 6 и последующих в записи многозначного числа быть не может, так как дети уже сравнивали величину со следующей меркой, в которой было 6 предыдущих. Другими словами, вводится естественное и осмысленное (благодаря наличию контрольного действия) ограничение на каждую цифру в записи позиционного многозначного числа в заданной системе счисления.

Таким образом, представление о позиционном многозначном числе формируется в рамках ***задачи измерения величины системой мерок с заданным или выбранным отношением***, где сначала определяется количество необходимых для измерения мерок (это значит, становится известным, сколько цифр будет в записи числа), а лишь затем производится сама операция измерения (это значит, определяется цифра каждого разряда), что позволяет впоследствии задать операционный состав способа выполнения любого арифметического действия как последовательного выполнения двух основных операций: определение количества цифр (разрядов) в искомом результате выполняемого действия и нахождение цифры, соответствующей каждому из этих разрядов.

Всеобщность этого способа, его применимость для нахождения результатов всех четырех арифметических действий очевидны, в то время как традиционная программа предусматривает лишь частичное использование этого способа в одном случае — при делении многозначных чисел.

8. Появление **новой формы натуральных чисел** требует вновь способов их сравнения, сложения и вычитания взамен ранее известных: сравнения с помощью числовой прямой, сложения и вычитания соответственно с помощью присчитывания и отсчитывания. Таким новым способом становится **поразрядное выполнение** всех указанных действий, что позволяет ребенку выполнить ***следующую задачу:*** вначале научиться определять, сколько цифр будет в результате выполнения действия, для чего придется определять те разряды, которые будут «переполняться» (при сложении и умножении) или разбиваться (при вычитании и делении), а затем знать табличные случаи (для всех действий), что предполагает конструирование таблицы сложения (вычитания), а затем и умножения (деления). Из сказанного понятно, что нет необходимости рассматривать по отдельности во времени случаи сложения (вычитания) без перехода через разряд и с переходом. Речь идет как раз о числах, при сложении (вычитании) которых в одних разрядах должен быть переход, а в других нет.

Решение этой задачи, безусловно, приходится на 2 класс, тогда как традиционно дети, к примеру, в 1 классе учат таблицу сложения (вычитания), а лишь затем, условно говоря, «узнают», зачем она нужна (для действий с многозначными числами).

Характеризуя программу 2 класса, необходимо подчеркнуть, что она рассчитана прежде всего на углубление и конкретизацию ранее усвоенных теоретических знаний о величине и числе. Значительную роль в этом отношении призвана сыграть работа, направленная на овладение общими способами и опирающимися на них приемами выполнения любых арифметических действий на примере сложения и вычитания, которым во 2 классе отводится значительное время.

9. Опираясь на понятие позиционного числа, дети должны **выявить основной принцип сложения и вычитания многозначных чисел** — поразрядное выполнение соответствующих действий. Им предстоит, во-первых, проанализировать операционный состав соответствующего способа выполнения арифметических действий, во-вторых, осознать всеобщность этого способа, его применимость для нахождения и проверки результатов всех четырех арифметических действий. Кроме того, наряду с анализом ошибкоопасных мест и составлением так называемых справочников ошибок (о чем упоминалось выше), которые можно допустить при выполнении того или иного арифметического действия, рекомендовано для проверки использовать калькулятор, но только в тех случаях, когда ученик сомневается в правильности вычислений. Выявление допущенной ошибки и служит основой для развертывания совместных с другими детьми действий по рефлексии, анализу и предвосхищению возможных ошибок, устанавливая при этом не только причины их появления и способы обнаружения, но и поиск заданий, позволяющих избавиться от каждой из них.

Поскольку этот способ содержательно связан со сформированным у детей понятием числа, вводившимся на основе измерения величин, его усвоение должно не только способствовать овладению рациональными приемами вычислений (что само по себе составляет одну из важных задач начального обучения математике), но и обеспечивать более глубокое понимание содержания понятия числа и действий с числами.

Первая из указанных выше задач (анализ операционной структуры общего способа вычисления результата арифметического действия) может и должна быть решена в процессе изучения материала, связанного с действиями сложения и вычитания. Детям уже известна связь между количеством разных мерок, которые использовались для измерения (построения) величины, и количеством разрядов в числе, фиксирующем результаты измерения. Опираясь на эти знания, они могут установить обусловленность разрядной структуры результата сложения (вычитания) структурой известных его компонентов (слагаемых, уменьшаемого и вычитаемого). Анализ этой зависимости позволяет установить рациональные приемы **конструирования таблиц сложения и вычитания**, способствующие их эффективному непроизвольному запоминанию, что имеет немаловажное значение для формирования вычислительных навыков.

10. Овладев приемами **письменных вычислений**, дети конструируют и **приемы устных вычислений** внетабличных случаев, причем не только в пределах 100, но и во всех случаях, которые сводятся к действиям в пределах 100, что значительно ***расширяет круг устных вычислений***. Продолжение этой работы предусматривается в процессе изучения действий умножения и деления.

3 КЛАСС

Умножение является центральной темой **программы 3 класса и одной из основных учебных задач.** В отличие от традиционной программы оно рассматривается как особое действие, связанное **с переходом в процессе измерения величин к новым меркам** (В.В. Давыдов). Фактически с этим действием дети сталкивались уже во 2 классе при изучении позиционных чисел. Однако там оно не было зафиксировано как особое действие и не получило развития. Поэтому **первой и основной *учебной задачей*** становится воспроизведение величины в ситуации, когда измеряемая величина много больше заданной мерки, в связи с чем возникает необходимость использования вспомогательной, промежуточной мерки. Одно из чисел, описывающее эту ситуацию, фиксирует отношение вспомогательной мерки к исходной (или к стандартной мерке, являющейся основанием принятой системы счисления), второе — количество вспомогательных мерок в измеряемой величине («по... взять... раз»), третье — отношение измеряемой величины к исходной мерке. Логическим завершением анализа этой ситуации является **введение деления** как действия, направленного на определение промежуточной мерки («деление на части») или числа таких мерок («деление по содержанию»). Тем самым появляется возможность установить содержательные связи между умножением и делением, а также содержательно интерпретировать отношения «больше (меньше) в... раз», «больше (меньше) на...».

Как и при изучении действий сложения и вычитания, изучение умножения и деления предусматривается начать с рассмотрения этих действий в общей (абстрактной) форме с помощью моделей. Имеется в виду, что при изучении умножения в качестве средств моделирования должны быть использованы не только линейные, но и плоскостные схемы, а также обеспечен переход от графических к символическим (буквенным) моделям (формулам). Овладение умением строить графические модели умножения и деления, осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно является одной из **важнейших задач этого этапа обучения**.

Особое внимание в процессе этой работы предусматривается уделить изучению **свойств умножения** — переместительного, сочетательного и распределительного (относительно сложения и вычитания). Исследование этих свойств опирается прежде всего на предметные действия ребенка, фиксирующиеся с помощью графических и знаковых моделей. В связи с этим рассматриваются порядок действий, определяемый только с опорой на графическую модель, а не на правила, предполагающие деление действий над числами на действия двух ступеней (действия первой ступени — читание, второй — умножение и деление), и его изменение. В итоге ученики должны овладеть умением определять значения выражений типа $375 \cdot 294 - 375 \cdot 293$ или $3984 \cdot 975 - 974 \cdot 3984$ и т. д.

Второй *учебной задачей* является ***конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное***, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это принято. Другими словами, любая таблица умножения начинается с умножения на нуль, например: $9 \cdot 0$, $9 \cdot 1$, $9 \cdot 2$, $9 \cdot 3$ и т. д.

Понимание предметного содержания умножения и его свойств позволяет существенно перестроить **работу с таблицами умножения (деления)**. В основу этой работы положена задача **на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата**. В связи с этим изменяется «естественный» порядок изучения таблиц. Целесообразно начать их конструирование с тех, в которых указанная выше связь обнаруживается в наиболее явном виде (таблицы умножения 9, 2, 5 и 6). Таблицы умножения 4, 8, 3 и 7 следует сконструировать, опираясь на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддерживания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что **снимает необходимость в специальном заучивании таблиц**.

Уяснение содержания умножения создает предпосылки для того, чтобы построить **сетку классов чисел** и на этой основе осмыслить многозначное число как число многоразрядное. Освоение многоразрядного числа обеспечивается выполнением действий сложения и вычитания (включая сложные случаи, когда один из разрядов в уменьшаемом равен нулю), а также конструированием способа умножения многоразрядного числа на многозначное, которое сводится к умению умножать многозначное число на однозначное.

Особого внимания требует отработка приемов умножения многозначного числа на многозначное. Их уяснение предполагает предельное развертывание упоминавшегося выше принципа разрядности действий. Дети должны хорошо понимать не только обусловленность количества цифр (разрядов) в произведении множителями, но и способ получения каждой из этих цифр (с этой целью возможна постановка вспомогательных задач, требующих определения значения одного из разрядов произведения независимо от других разрядов). В результате этой работы обычный прием умножения «в столбик» должен приобрести для детей совершенно иное психологическое содержание.

Значительное место в программе 3 класса, как и в предыдущие 2 года, **отводится решению текстовых задач**, работа над которыми должна осуществляться в процессе изучения всех тем. ***Освоение общих способов анализа задачи является одной из сквозных учебных целей курса математики.*** Основное внимание должно быть сосредоточено на формировании основных приемов работы над текстом задачи, на способах моделирования отношений, представленных в условии задачи, в виде различных схем (и диаграмм в том числе), отыскивании на схеме равных величин, что имеет особое значение, так как, с одной стороны, придает всей предшествующей работе вполне определенный смысл, а с другой — позволяет детям выбрать наиболее рациональный способ решения задачи — алгебраический (посредством уравнения) или арифметический (посредством составления математического выражения).

В контексте работы над задачами осуществляется **обучение решению уравнений**. Как и в 1 классе, их решение осуществляется с опорой на схему, при этом никакие «правила» не заучиваются. Дети должны решать уравнения, объясняя и обосновывая каждое свое действие, а не реализовывать готовый алгоритм.

Таким образом, предлагаемая программа 3 класса, будучи по формальной структуре программой ***формирования арифметических действий*** с многозначными числами, по существу предполагает усвоение ***принципов построения этих действий***. Такое содержание программы является предпосылкой для организации деятельности детей, направленной на решение двух типов учебных задач. С одной стороны, это задачи, связанные с выявлением, анализом и содержательным обобщением свойств величин, чисел и математических действий. С другой — это задачи, направленные на поиск и обоснование рациональных приемов выполнения того или иного действия. А в процессе этой деятельности и должны быть реализованы цели развивающего обучения на данном этапе.

Заключительная тема программы 3 класса предусматривает прежде всего, формирование приемов деления многозначного числа на многозначное. Конструирование деления любого многозначного числа на любое многозначное число требует последовательного выполнения четырех операций, о которых сказано ранее.

Как уже говорилось выше, овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для ***классификации устных и письменных вычислений***. Рассматриваются приемы устного счета, в том числе умножения на 11, на 25 и др.

В процессе формирования этих приемов должны быть закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Выполняя устные и письменные вычисления, учащиеся не только осмысливают известные и новые приемы, но и придумывают аналогичные задания друг для друга. Так, подбирая многозначное делимое и однозначный делитель, кратный делимому, они ищут среди прочих такой способ, который позволил бы, не выполняя деления, узнать, будет ли делимое кратно делителю. Это и приводит к ***постановке следующей учебной задачи на конструирование*** признаков делимости, которые рассматриваются следующими группами: делимость на 2, 5 и 10, на 4, 25 и 100, на 8, 125 и 1000, на 9 и 3.

Три первые группы обосновываются делимостью 10 на 2 и 5, 100 на 4 и 25, 1000 на 8 и 25. Делимость же на 9 и 3 устанавливается с опорой на соответствующие таблицы умножения. Работая над признаками делимости, учащиеся тем самым отрабатывают умножение и деление многозначных чисел. Рассматриваются «составные» признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 20 и т. д.

4 КЛАСС

В 4 классе продолжается знакомство с числами, а именно **с десятичными дробями** как частным случаем позиционных систематических дробей в различных системах счисления. Таким образом, ***первая учебная задача*** связана с измерением и восстановлением величины, значительно меньшей исходной (основной) мерки.

Введение **позиционных систематических дробей** обусловлено прежде всего тем, что, завершая изучение понятия многозначного числа и действий с числами, заданными изначально в различных системах счисления, учащиеся вновь возвращаются к задаче измерения и воспроизведения величины в ситуации, когда для измерения (а затем и для воспроизведения) данной величины потребовалась не только система мер, полученных путем укрупнения с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), но и система мер, полученная путем уменьшения исходной меры в одно и то же число раз, равное коэффициенту укрупнения.

Другими словами, для измерения величин, много больших исходной меры, используют систему укрупненных мер с постоянным отношением, а для измерения величин, много меньших той же исходной меры, — систему уменьшенных (дробленых) мер с тем же отношением. Таким образом, учащиеся получают новый вид чисел — дробные, имеющие целую и дробную (после запятой) части. Числа рассматриваются в различных системах счисления, в том числе десятичной. Строится разрядная сетка, и даются соответствующие названия разрядам, полученным в результате уменьшения исходной мерки в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Полученные новые виды чисел получают свое место на числовой прямой, с помощью которой они могут сравниваться друг с другом и с известными видами чисел: с нулем и с ближайшими натуральными числами.

Измерения с помощью системы уменьшенных мер могут быть конечными и бесконечными, что приводит к появлению не только конечных, но и бесконечных дробей, в том числе периодических, которые будут рассматриваться позже (в 6 классе).

Однако предметом исследования становятся конечные десятичные дроби. Вводится операция округления дробей.

Конструирование способов выполнения действий с позиционными систематическими дробями, в том числе и с десятичными, позволит фактически отрабатывать все действия с многозначными числами, не тратя на это дополнительное время перед введением дробей, что и придает осмысленный характер умениям и навыкам счета в связи с использованием его в качестве средства для выполнения более сложных действий.

Такая логика построения материала, когда после действий с многозначными числами появляются подобные им по способу их получения и способу действий с ними позиционные систематические дроби, позволяет гораздо глубже понять ***обобщенный принцип образования позиционных чисел***.

Появление новых видов чисел, в которые входят десятичные дроби, а также способ нахождения дроби от числа и числа по его дроби дают возможность ввести ***понятие процента*** (эти тема вынесена в рабочую тетрадь).

Вычисления с десятичными дробями и процентами включены в решение реальных задач. Ведь в условиях рыночной экономики человеку необходимы принципиально новые умения, неизбежно связанные с математикой: перевод денежных единиц, сравнение цен на товары и многое другое. Именно такие задачи и требуют действий с десятичными дробями, округления дробей, введения понятия процента и др.

Особое место в программе 4 класса, о чем мы уже писали ранее, принадлежит уже известным детям с 1 класса понятиям **периметра, площади, объема** и способам их нахождения. Возврат к этим понятиям обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию ***готовых результатов измерения***. Такой подход позволяет осмыслить ***основные принципы***, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые.

Курс математики 4 класса заканчивается возвратом на новом уровне к **решению текстовых задач**. Создается такая учебная ситуация, при которой ребенок, уже умея решать задачи, задает себе вопросы: «А что же такое задача? Как она устроена? Из чего состоит? По каким признакам можно задачи сравнивать? Что необходимо записать, о чем сообщить другому человеку, чтобы он смог в точности восстановить текст задачи?», т.е. происходит углубление представления о задаче, принципах построения текста, способах ее моделирования с помощью не только схемы, но и краткой записи, преобразованиях, которые создают условия для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения уравнений, а значит, и задач, решаемых с их помощью.

Как правило, детей учат решать задачи по действиям, с опорой на которые и составляется математическое выражение. Однако потребности в его составлении для ребенка нет, ведь задача уже решена. Такой способ обучения решению задач (как и другим, не менее значимым темам программы) есть не что иное, как обучение от частного к общему, в то время как обучение в рамках системы Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова должно строиться с точностью до наоборот: от общего к частному. Это значит, двигаться нужно не от действий к составлению выражения (или уравнения), значение которого и может быть найдено последовательным выполнением арифметических действий. Поэтому сначала дети учатся составлять различные математические выражения (или уравнения) с опорой на схему, которая строится по ходу осмысления задачи, а лишь затем для нахождения значения выражения выполняют действия.

Итак, основное содержание курса математики — формирование понятия рационального числа — представлено как последовательность стратегических (ключевых) учебных задач: формирование понятия величины, т. е. введение в область отношения величин, раскрытие отношения величин как всеобщей формы числа, последовательное введение различных частных видов чисел как конкретизация общего отношения величин в определенных условиях, построение обобщенных способов действий с числами.

Реализация описанного математического содержания возможна лишь при условии готовности учителя организовать сотрудничество детей, требует от него особой организации учебной деятельности школьников в форме постановки и решения ими учебных задач посредством универсальных учебных действий (В.В. Давыдов). В ходе такого обучения и происходят открытие и усвоение понятий, когда дети при участии учителя должны ***сначала осознать потребность*** именно в самом понятии, способе действия, а затем ***сконструировать*** его, вступая в содержательный ***учебный диалог*** как со сверстниками, так и с учителем, что требует от последнего новой педагогической позиции, позволяющей реализовать цели и задачи, поставленные в Федеральном государственном образовательном стандарте.

ПРОГРАММА

1 КЛАСС (4 ч × 33 нед. = 132 ч)

Тема 1. Выделение свойств предметов. Величины отношения между ними. Отношение равенства-неравенства при сравнении предметов по выбранному признаку (68 ч)

1. **Непосредственное сравнение предметов по разным признакам:** форме, цвету, материалу, длине (ширине, высоте), площади, объему, количеству (комплектности по составу частей), массе, расположению на плоскости и в пространстве. Сравнение предметов по этим признакам.

Периметр как длина «границы» любой плоской геометрической фигуры.

Понятие о равновеликости и равносоставленности фигур. Существенные различия межу прямой, лучом, отрезком. Представление о ломаной, угле. Сравнение углов. Подбор предметов или геометрических фигур по заданному признаку.

2. **Моделирование отношений равенства и неравенства между величинами:**

предметное: с помощью полосок;

графическое:

а) с помощью копирующего рисунка;

б) с помощью отрезков;

знаковое:

а) с помощью знаков «=», «≠»;

б) с помощью букв и знаков «=», «>», «<» (формулы $A = B$, $A > B$, $A < B$ и т. д.).

Класс величин. Сравнение величин с помощью посредника, равного одной из них. Транзитивность отношений «равно» (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$), «больше-меньше» (если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$; если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$).

Переход от действий с предметами к схеме и формуле. Восстановление схемы по формуле и наоборот. Преобразования схем и формул. Связь между ними.

Сравнение «по красоте» способов написания цифры 1. Классификация всех цифр на основании сравнения их по составу элементов и форме на три группы:

а) цифры 1, 4, 7;

б) цифры 3, 5, 2;

в) цифры 6, 9, 8 и 0 и их последующее написание.

Тема 2. Сложение и вычитание величин (52 ч)

1. **Сложение и вычитание величин как способ перехода от неравенства к равенству и наоборот.** Три способа уравнивания величин. Введение знаков «плюс» и «минус». Выбор способа уравнивания в зависимости от условий его выполнения. Описание операции уравнивания с помощью схем и формул. Связь между схемой и формулой. Изменение схемы при изменении формулы и наоборот. Тождественные преобразования формул.

Решение текстовых задач (с буквенными данными), связанных с увеличением или уменьшением величин (отношения «больше на...», «меньше на...»). Составление текстовых задач по схеме (формуле). Подбор «подходящих» чисел для решения задачи с точки зрения:

а) сюжета задачи;

б) выполнимости действия;

в) выполнения действия конкретным ребенком (опора на дошкольную подготовку).

2. **Сложение и вычитание величин как способ решения задачи на восстановление целого или части.** Понятие части и целого. Моделирование отношений между частями и целым в виде схемы, формулы и записи с помощью «лучиков» (знакографической записи).

Взаимопереходы от одних средств фиксации отношений к другим.

Введение специальных обозначений для части и целого: $A + A =$ ©

Названия компонентов при сложении и вычитании и их связь с понятием части и целого.

Относительность понятия части и целого. Подбор «подходящих» чисел к формулам. Состав однозначных чисел. Разбиение на части и составление из частей величин, геометрических фигур на плоскости и геометрических тел в пространстве.

Увеличение и уменьшение величины. Понятие нулевой величины.

Скобки как знак, показывающий другую последовательность выполнения операций над величинами: $A - B - C = A - (B + C)$.

Свойства операции сложения величин: переместительное и сочетательное. Составление и решение текстовых задач с буквенными данными на нахождение части и целого. Связь задач на уравнивание величин с задачами на нахождение части и целого.

3. **Понятие уравнения.** Определение значения одного из компонентов с опорой на понятия «часть» — «целое». Подбор «подходящих» чисел к формулам (опора на дошкольную подготовку) и наоборот. Описание числовых выражений с помощью буквенных формул как задача на их восстановление. Решение примеров «с секретами»: сложение и вычитание в пределах десятка с опорой на дошкольную подготовку. «Круговые» примеры, «магические» треугольники и квадраты. Составление детьми примеров «с секретами». Сравнение выражений с числовыми и буквенными данными. Решение задач с помощью уравнений. Подбор вместо букв подходящих чисел к текстовым задачам, выражениям, уравнениям.

Тема 3. Введение понятия числа (12 ч)

Переход от непосредственного сравнения величин к опосредованному.

Сравнение:

а) с помощью посредника, равного одной из сравниваемых величин (на основе транзитивности отношений);

б) с помощью мерки для измерения сравниваемых величин, благодаря которой обнаруживается кратность отношений: A/E и B/E, где A и B — сравниваемые величины, а E — третья величина того же рода, т. е. мерка.

Подбор мерок, удобных для измерения данной величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой. Простые и составные мерки.

Подбор подходящих предметов, используемых в качестве мерки.

Инструменты: циркуль, линейка, угольник. Ознакомление со стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

Знакомство с другими видами величин: время, скорость, стоимость.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу первого класса дети научатся:

- выделять разные свойства в одном предмете и непосредственно сравнивать предметы по разным признакам: по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, количеству, форме, цвету, материалу, углам и др.;
- моделировать отношения равенства и неравенства величин с помощью отрезков (графическое моделирование) и с помощью буквенной формулы (знаковое моделирование);
- производить сложение и вычитание величин при переходе от неравенства к равенству и обратно; исследовать ситуации, требующие сравнения величин и чисел, им соответствующих;
- описывать явления и события с помощью величин;
- прогнозировать результат сравнения величин путем их оценки и прикидки будущего результата;
- строить графические модели отношений (схемы) при решении несложных текстовых задач (с буквенными или числовыми данными), связанных с уменьшением или с увеличением величин; составлять текстовые задачи по схеме и формуле; придумывать вместо букв «подходящие» числа и заменять числовые данные буквенными;
- владеть понятием части и целого, уметь описывать отношения между частями и целым с помощью схем и формул;
- разбивать фигуры на части и составлять целое из частей плоских и объемных фигур;
- решать уравнения типа $a + x = в$, $a - x = в$, $x - a = в$ с опорой на схему;
- выполнять сложение и вычитание в пределах 10;
- представлять состав чисел первого десятка с опорой на дошкольную подготовку на основе понятия части и целого;
- изготавливать и конструировать модели геометрических фигур, предложенные в рабочей тетради, перекраивать их при сравнении площадей.

2 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 136 ч)

Тема 1. Введение понятия числа (продолжение) (35 ч)

1. **Задача непосредственного и опосредованного сравнения величин:**

а) подбор мерки, равной данной величине (повторение);

б) подбор мерок, удобных для измерения величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой.

Простые и составные мерки. Подбор предметов, удобных для их использования в качестве мерки. Знакомство с приборами и инструментами, используемыми для сравнения и воспроизведения величины стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

2. **Действие измерения.** Число как результат измерения величины и как средство для ее восстановления. Компоненты действия измерения: величина (A), мерка (E), число (n) и связь между ними. Запись числа как результата измерения и счета с помощью меток, считалок и с помощью цифр в различных нумерациях (арабская, римская, славянская и др.).

Построение величины по мерке и числу; подбор и изготовление мерки по заданной величине и числу. Зависимость одного из трех компонентов ($A/E = n$) от изменения другого при постоянном третьем (фактически речь идет о функциональной зависимости).

3. **Числовая прямая.** Сравнение величин с помощью числовых значений. Построение числовой прямой. Изображение чисел на числовой прямой (отрезком и точкой). Понятие шкалы. Знакомство с приборами и предметами, имеющими шкалы: линейкой, весами, часами, мерными емкостями, динамометром, спидометром, термометром, транспортиром и др.

Условия существования числовой прямой, числового луча, числового круга: наличие начала отсчета, направления, единичной мерки (шага). Число 0 как результат измерения нулевой величины единичной меркой и как начало отсчета на числовой прямой.

Сравнение чисел на числовой прямой. Последующее и предыдущее числа. Бесконечность числового ряда. Линейка как модель числовой прямой.

Решение текстовых задач. Использование диаграмм.

Тема 2. Сложение и вычитание чисел (24 ч)

1. **Разностное сравнение чисел и сложение и вычитание чисел с помощью:**

а) двух линеек (стандартных и изготовленных) как моделей двух числовых прямых;

б) двух числовых прямых;

в) одной числовой прямой.

2. **Присчитывание и отсчитывание как новый способ нахождения суммы и разности** в условиях отсутствия необходимого числа линеек при трех и более слагаемых.

Решение и составление математических выражений, уравнений и задач с заменой буквенных данных на числовые данные (в пределах десятка). Нахождение значения числовых выражений со скобками. Определение и изменение порядка действий с опорой на схему. Решение различных задач на сложение и вычитание с подбором:

а) «подходящих» чисел к заданному сюжету;

б) сюжетов к схемам с заданными числами.

Тема 3. Многозначные числа (35 ч)

1. **Набор и система мерок.** Задачи на измерение-отмеривание с помощью набора мерок. Упорядочивание и обозначение мерок в наборе. Выбор из данных мерок первой «подходящей» мерки. Запись результата измерения величины набором упорядоченных мер (от большей к меньшей) в форме таблицы. Связь «номера» выбранной мерки с количеством цифр в записи числа. Понятие разряда. Задача на необходимость установления отношения между мерками. Отношение «в... раз больше», «в... раз меньше». Решение задач с заданным отношением. Замена таблицы для записи результатов измерения «заготовками».

Переход от ***набора мерок***, в котором отношение между мерками произвольное, к системе мерок с постоянным отношением между ними (основание системы счисления).

2. **Позиционные системы счисления.** Понятие многозначного позиционного числа как результата измерения величины системой мерок с заданным отношением (основание системы). Чтение и запись чисел в различных системах счисления. Место нуля в записи многозначных чисел. Понятие значащего нуля в записи многозначного числа (когда нуль в середине и на конце) и незначащего (перед старшим разрядом). Сравнение многозначных чисел с помощью числовой прямой и поразрядное сравнение чисел, взятых в одной системе счисления. Представление числа в виде суммы разрядных слагаемых, замена суммы разрядных слагаемых числом.

3. **Десятичная система счисления как частный случай позиционной системы счисления.** Чтение и запись любых многозначных чисел. Названия первых четырех разрядов. Сравнение многозначных чисел.

Решение текстовых задач.

Тема 4. Сложение и вычитание многозначных чисел в разных системах счисления (42 ч)

1. **Постановка задачи** на сложение и вычитание многозначных чисел как переход от способа присчитывания и отсчитывания к конструированию способа выполнения действий «в столбик».

2. **Конструирование способа сложения и вычитания многозначных чисел.** Поразрядность сложения и вычитания как основной принцип построения этих действий. Запись примеров «в столбик», в которых имеются числа с одинаковым и разным количеством разрядов.

Определение разрядов, которые «переполняются» при сложении, путем сравнения суммы однозначных чисел в разряде с основанием системы счисления. Опора на состав числа — основание системы счисления. «Разбиение» разрядов при вычитании. Определение сильных и слабых позиций чисел в разряде. Определение количества цифр (разрядов) в сумме и разности.

Задача на нахождение значения каждой разрядной единицы (цифры каждого разряда) искомой суммы или разности. Постановка задачи на нахождение суммы однозначных чисел (табличные случаи сложения) и обратной задачи на вычитание.

Составление и подбор подходящих математических выражений с многозначными числами для решения текстовых задач, в том числе задач на построение диаграмм.

3. **Табличное сложение и вычитание.** Построение таблиц сложения однозначных чисел на множестве целых неотрицательных чисел. Таблица Пифагора.

Исследование таблицы сложения. Использование таблицы Пифагора как справочника.

Постановка задачи запоминания табличных случаев и выделение «трудных» случаев сложения с переходом через десяток. Исследование зависимости цифры в разряде единиц суммы от изменяющегося слагаемого как основы непроизвольного запоминания суммы.

Нахождение суммы многозначных чисел. Решение текстовых задач, в которых буквенные данные могут быть заменены многозначными числами. Составление и решение уравнений, математических выражений с многозначными числами по схеме.

Выделение табличных случаев вычитания. Конструирование способа вычитания с переходом через десяток. Письменное сложение и вычитание многозначных чисел, заданных в задачах, уравнениях и выражениях. Использование калькулятора при проверке.

Конструирование приемов устного сложения и вычитания многозначных чисел, которые сводятся к внетабличным случаям в пределах 100.

Решение текстовых задач.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу второго класса дети научатся:

- пользоваться понятием натурального числа как универсальным средством сравнения величин при переходе от непосредственного сравнения к опосредованному;
- решать задачи на измерение, отмеривание и нахождение удобной мерки;
- чертить с помощью линейки отрезок данной длины и измерять длину отрезка;
- читать диаграммы, анализировать их и использовать при решении задач;
- записывать результат измерения системой мерок; называть первые четыре разряда в десятичной системе счисления;
- сравнивать числа, группировать их по заданному или самостоятельно установленному правилу;
- складывать и вычитать многозначные числа в различных системах счисления, в том числе в десятичной, опираясь на таблицу сложения однозначных чисел и соответствующие ему табличные случаи вычитания;
- прогнозировать результат вычисления, пошагово контролируя правильность и полноту выполнения с опорой на составленный совместно с другими детьми справочник ошибок;
- делать оценку и прикидку будущего результата;

• пользоваться калькулятором для проверки в том случае, если ученик сомневается в правильности вычислений;

• строить графические модели (схемы, диаграммы) отношений между величинами при решении текстовых задач с буквенными и числовыми данными с опорой на понятие целого и части и разностное сравнение величин;

• исследовать зависимость решения задачи от ее условия, зафиксированного в схеме;

• сравнивать разные способы вычислений и выбирать рациональные способы действий с опорой на графическую модель (схему);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению;

• использовать известные ученику математические термины и обозначения.

Понимать и применять:

• принцип образования последующего и предыдущего чисел на числовой прямой;

• принцип образования многозначных чисел в любой системе счисления;

• общий способ чтения любого многозначного числа в любой системе счисления с неограниченным числом разрядов;

• общий принцип выполнения любого арифметического действия на примере сложения и вычитания любых многозначных чисел в десятичной системе счисления.

3 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 136 ч)

Тема 1. Понятие умножения и деления (24 ч)

1. **Умножение как способ измерения величин**, связанный с переходом в процессе измерения к новым меркам.

Постановка и решение задач, приводящих к изменению единиц измерения. Графическое изображение умножения. Оценка различных отношений между величинами и исходной меркой:

а) когда измерение удобно производить исходной меркой;

б) когда для измерения нужна дополнительная (промежуточная) мерка.

Конструирование формулы вида «по a взять $в$ раз»:

$A/E = a \cdot в$.

Введение термина «умножение». Переход от словесной формы к графической, знаковой и обратно. Конструирование способа замены любого произведения двух чисел одним числом в позиционной форме в десятичной системе счисления как универсального способа сравнения величин, описанных в виде произведения:

а) с помощью числовых прямых или двух линеек;

б) с опорой на отношение частей и целого, т. е. на связь умножения со сложением (в формуле $a \cdot в = c$, где a — часть, $в$ — количество частей, c — целое).

Решение текстовых задач, включающих отношение «больше в... раз», «меньше в... раз», как новый способ уравнивания величин. Кратное сравнение величин. Использование диаграмм при решении задач.

2. **Деление как действие по определению:**

а) промежуточной мерки — деление «на части»;

б) числа промежуточных мерок — деление «по содержанию».

Трехчленность операции умножения. Исследование зависимости между величиной, промежуточной меркой и их количеством. Связь деления с вычитанием. Введение названий компонентов при умножении и делении и их связь с понятием целого и части. Графическое моделирование деления. Зависимость результатов умножения и деления от изменения компонентов и наоборот. Решение и составление по схемам текстовых задач, уравнений, математических выражений.

Тема 2. Свойства умножения (12 ч)

Переместительное свойство умножения. Вычисления с опорой на переместительное свойство.

Сочетательное свойство и вычисления с опорой на него. Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Порядок выполнения действий, изменение порядка выполнения действий с опорой на схему. Приемы устных вычислений с опорой на свойства сложения и умножения. Рациональные способы вычислений.

Решение текстовых задач.

Тема 3. Умножение и деление многозначных чисел (55 ч)

1. **Постановка задачи нахождения произведения многозначных чисел.**

2. **Конструирование** способа умножения многозначного числа на однозначное как основы для умножения многозначного числа на многозначное. Выделение принципа поразрядности выполнения действия. Конструирование способа нахождения результата как последовательное нахождение:

а) разрядов, которые «переполняются»;

б) количества цифр в результате;

в) цифры каждого разряда.

3. **Постановка задачи составления таблицы** умножения однозначных чисел (таблицы Пифагора), включая случаи умножения на 0 и 1. Умножение на 10, 100, 1000 и т. д. Способы работы с таблицей как со справочником.

4. **Постановка задачи запоминания** таблицы умножения и рассмотрение каждой таблицы в отдельности.

Таблица умножения на 9 и соответствующая таблица деления; умножение любых многозначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1, 9, на любое однозначное число с опорой на переместительное свойство умножения; умножение «в столбик» на числа, оканчивающиеся нулями: 90, 900, 9000 и т. д.

Таблица умножения на 2 и таблица деления; умножение многозначных чисел, включающее умножение на 9 и 2. Умножение на 20, 200, 2000 и т. д.

5. **Деление с остатком** и его графическое представление. Деление с остатком в случае, когда делимое меньше делителя. Необходимые и достаточные условия нахождения результата деления с остатком.

Решение текстовых задач.

6. **Таблицы умножения и деления** на 5 и 6, 4 и на 8, 3 и 7. Умножение многозначных чисел на однозначные числа и разрядные единицы. Приемы устных и письменных вычислений при решении уравнений и текстовых за-

дач, в которых буквенные данные могут быть заменены такими числами, с которыми учащиеся могут выполнять действия. Умножение многозначных чисел на разрядные единицы.

Решение текстовых задач.

7. **Классы чисел. Сетка классов.** Чтение и запись многозначных чисел. Определение количества десятков, сотен, тысяч и т. д.

Определение количества цифр в записи многозначного числа по старшему разряду. Действия с многозначными числами. Текстовые задачи.

8. **Умножение многозначного числа на многозначное.** Конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное и запись его в виде модели. Определение числа цифр в произведении. Решение и составление уравнений, математических выражений, текстовых задач по заданным схемам и наоборот.

9. **Деление многозначных чисел.** Конструирование способа деления многозначного числа на однозначное: принципы поразрядности при делении. Постановка задачи деления любого многозначного числа на любое многозначное:

а) определение первого неполного делимого (разбиение);

б) нахождение количества цифр в частном;

в) нахождение «подсказок» при делении многозначных чисел, с опорой на которые происходит подбор цифры в частном. Умножением, а не делением подбирается цифра в частном.

10. **Нахождение значения числового выражения**, содержащего деление многозначного числа на многозначное. Порядок действий в математических выражениях, составленных из многозначных чисел и включающих все арифметические действия. Использование калькулятора для проверки.

Решение задач и уравнений на все действия с многозначными числами. Отображение информации, содержащейся в текстовых задачах, в виде диаграммы.

Тема 4. Действия с многозначными числами (45 ч)

1. **Поразрядность выполнения всех действий с многозначными числами** как основной принцип построения этих действий. (Рефлексия.)

Запись и выполнение сложения, вычитания, умножения и деления «в столбик».

2. **Классификация устных и письменных вычислений.** Анализ известных детям способов устных и письменных вычислений, содержащих:

а) сложение и вычитание;

б) умножение и деление.

3. **Приемы устных вычислений:** умножение на 11, на 101, умножение и деление на 25 и другие числа.

4. **Признаки делимости:** на 2, 5 и 10; на 4, 25, 100; на 8, 125, 1000; на 9 и 3. Признаки делимости на 6, 15, 36 и другие как одновременная опора на известные признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 и т.д.

5. **Решение текстовых задач**, включающих необходимость использования признаков делимости.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу третьего класса дети научатся:

• находить способ измерения величин в ситуации, когда предложенная учителем величина значительно больше исходной мерки; создавать и оценивать ситуации, требующие перехода от одних мер измерения к другим;

• использовать схему умножения (она же и деления) при решении текстовых задач, составляя выражение или уравнение; по схеме придумывать или подбирать текстовые задачи; применять калькулятор при проверке вычислений;

• анализировать зависимости между величинами, с которыми ученик имеет дело при решении задач;

• строить графические модели арифметических действий и осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно; читать и строить диаграммы;

• решать уравнения типа $a \cdot x = в$, $x \cdot a = в$, $a : x = в$, $x : в = a$;

• умножать и делить многозначное число на многозначное с опорой на таблицу умножения (и только умножения!) однозначных чисел от 0 до 9;

• основным приемам устных вычислений при выполнении любого арифметического действия;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами.

понимать:

• смысл умножения как особого действия, связанного с переходом к новой мерке в процессе измерения величин;

• смысл деления как действия, направленного на определение промежуточной мерки или числа этих мерок;

• как устроена сетка классов чисел, включая класс миллиардов.

4 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 736 ч)

Тема 1. Многозначные числа и десятичные дроби как частный случай позиционных систематических дробей (64 ч)

1. **Действия с многозначными числами. Повторение** (11 ч)

2. **Измерение величин:**

а) анализ условий, при которых получается: однозначное число; многозначное число в различных системах счисления;

б) постановка ***задачи воспроизведения величины*** меньшей, чем заданная исходная мерка;

в) набор и система мерок меньших, чем исходная. Построение ***систе-***

мы мер с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), в том числе и с отношением 10;

г) запись результата измерения величины с помощью системы укрупненных мерок и системы уменьшенных мерок. Табличная форма записи, введение запятой. Позиционные систематические дроби в разных системах счисления. Знакомство с записью результата измерения в форме обыкновенной дроби. (Например: 0,13 = 1/3 или 0,25 = 2/5.)

3. **Запись и чтение десятичных дробей.** Место десятичных дробей на числовой прямой. Сравнение десятичных дробей с помощью числовой прямой. Принцип поразрядности при сравнении систематических позиционных дробей. Построение величины по заданной позиционной или обыкновенной дроби и исходной мерке. Округление десятичных дробей с избытком и с недостатком.

4. **Действия с многозначными числами и десятичными дробями.** Сложение и вычитание десятичных дробей. Умножение и деление десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. Сохранение числа при последовательном умножении и делении его на 10, 100, 1000 и т. д.

Конструирование способа умножения десятичных дробей и деления, когда делитель — число натуральное. Сведение случая деления на десятичную дробь к делению на натуральное число.

Микрокалькулятор. Проверка действий с различными видами чисел с помощью микрокалькулятора.

Решение и составление текстовых задач, уравнений и математических выражений с десятичными дробями. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби.

5. **Стандартные системы мер.** Действия с числовыми значениями величин. Десятичные дроби и стандартные системы мер. Перевод одних мер в другие. Меры длины, площади, массы, объема.

Действия с числовыми значениями величин. Решение и составление текстовых задач, требующих подбора «подходящих» к данным числам сюжетов и «подходящих» к данному сюжету чисел.

Деньги как мера стоимости. Валюты в России, Америке, странах СНГ. Курс одних валют по отношению к другим. Стандартные меры измерения времени: век, год, месяц, неделя, сутки, час, минута, секунда. Стандартные меры измерения углов: градус, минута, секунда, радиан.

Число как результат кратного отношения длины окружности к диаметру, т. е. как число радиан в полуокружности.

Тема 2. Периметр, площадь, объем (34 ч)

1. **Периметры различных плоских фигур и способы их вычисления.** Сравнение периметров различных фигур с помощью посредника (например, проволоки и т. п.). Формулы периметра прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других геометрических фигур, включая правильные многоугольники. Вычисление периметров геометрических фигур и фигур произвольной формы (границы фигур — кривые линии). Использование гибких мерок.

2. **Площади геометрических фигур.** Непосредственное и опосредованное

сравнение площадей геометрических фигур. Измерение площади прямоугольника путем непосредственного наложения мерки, в том числе квадратного сантиметра, замена этого способа измерением длин сторон.

Формула площади прямоугольника: $S = a \cdot b$.

Измерение площади прямоугольного треугольника как нахождение половины площади соответствующего прямоугольника. Формула площади прямоугольного треугольника: $S = (a \cdot b) : 2$, где a и b — длины сторон прямоугольника, составленного из двух одинаковых треугольников.

Поиск двух из трех сторон прямоугольного треугольника, измерение которых позволяет вычислить его площадь. Выбор прямоугольных треугольников среди прочих.

Виды треугольников. Постановка и решение задачи нахождения площадей непрямоугольных треугольников путем разбиения их на прямоугольные. Формула площади произвольного треугольника: $S = (a \cdot h) : 2$, где h — высота треугольника.

Нахождение площадей геометрических фигур путем разбиения или перекраивания их различными способами на треугольники или прямоугольники. Поиск рациональных способов разбиения фигуры для вычисления ее площади. Площадь правильного n-угольника. Вычисление площадей различных геометрических фигур.

Палетка как прибор для измерения площадей фигур произвольной формы. Алгоритм измерения площади с помощью палетки. Решение текстовых задач, включающих понятия площади и периметра.

3. **Объемы геометрических тел.** Измерение объема прямоугольного параллелепипеда путем заполнения его кубическими мерками и замена способа непосредственного вложения и пересчета мерок вычислением произведения трех измерений: длины, ширины, высоты — и нахождением с их помощью объема $(V = a \cdot в \cdot c)$ или произведения площади основания на высоту $(V = S \cdot H)$.

Общий подход к вычислению объема любых «призмоподобных» и «пирамидоподобных» геометрических тел.

Тема 3. Анализ решения текстовых задач (38 ч)

1. **Строение задачи. Краткая запись задачи. Схемы. Уравнения.** Краткая запись условия задачи как новое средство моделирования, когда текст задан в косвенной форме или содержит большое количество данных.

Восстановление текста задачи по краткой записи и наоборот. Матричная форма краткой записи (таблица) для задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами.

Преобразование краткой записи к виду, удобному для графического моделирования (составление схемы).

Составление схемы по краткой записи и наоборот. Выделение равных величин и составление уравнений по схеме. Составление разных уравнений по одной и той же схеме на основе выбора обозначения неизвестной величины и выражение остальных неизвестных величин через первую.

Составление к задачам уравнений, удобных для решения. Преобразование уравнений на основе преобразования схем. Зависимость изменения уравнения от изменения схемы и наоборот.

2. **Задачи на «процессы».** Время и его измерение. Понятие о скорости. Общий подход к решению текстовых задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами:

а) на движение (выделение характеристик движения: времени, скорости, расстояния — и связи между ними);

б) на куплю-продажу;

в) на работу (производительность труда, время, объем работ);

г) на изготовление товара (расход ткани на одну вещь, количество вещей, общий расход) и т. п.

Составление краткой записи задачи в виде таблицы:

а) на встречное движение;

б) на движение в противоположных направлениях и в одном направлении.

Понятие скорости удаления и скорости сближения.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу четвертого класса дети научатся:

- читать и записывать многозначные числа и конечные десятичные дроби, сравнивать их и выполнять действия с ними; исследовать связь между десятичными дробями и натуральными числами;
- выполнять любые арифметические действия с многозначными числами (без ограничения числа разрядов); сравнивать разные способы вычислений; выбирать рациональный (удобный) способ действия;
- моделировать с помощью схемы отношения между компонентами арифметических действий в математических выражениях, определяя порядок действий на основе анализа этих отношений;
- прогнозировать результат вычислений, используя калькулятор при проверке;
- составлять формулы периметра и площади любого многоугольника (и прямоугольника в том числе) и использовать их при решении задач;
- вычислять периметры различных плоских фигур, описывать их свойства;
- использовать различные способы вычисления площади фигуры: прямоугольника, треугольника и других многоугольников;
- применять общий способ нахождения периметра, площади и объема любых геометрических фигур;
- изготавливать модели геометрических тел; использовать различные инструменты и технические средства (линейка, угольник, транспортир, циркуль, калькулятор и др.);
- конструировать геометрическую фигуру (отрезок, ломаную, многоугольник, в том числе прямоугольник) с заданной величиной (длиной, в том числе периметром, площадью);
- упорядочивать величины; моделировать и разрешать реальные ситуации, требующие умения находить геометрические величины (планировка, наклейка обоев и т. п.);
- анализировать строение задачи и схему как основание для классифи-

кации;

• выявлять связь между пропорциональными величинами: скоростью, временем, расстоянием; ценой, количеством, стоимостью и др. и использовать известную схему умножения (деления) для решения текстовых задач;

• использовать новое средство моделирования условия задачи — краткую запись; составлять текст задачи по краткой записи; преобразовывать краткую запись и соответствующий ей текст (и наоборот);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами и наоборот;

• представлять информацию в таблице и на диаграмме;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания (и задачи) с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

иметь представление:

• о признаках делимости;

• о многоугольниках и геометрических телах;

• о видах углов и треугольников.

Предлагаемая программа построена так, что позволяет реализовать каждый из трех вариантов программ, которые в настоящее время представлены в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования второго поколения на новом качественном уровне в форме теоретического знания.

Однако, учитывая то обстоятельство, что уровни развития детей, индивидуальные особенности учителей и региональные условия могут значительно различаться, можно предложить еще **три варианта** дифференциации данной программы обучения.

Все они предполагают введение факультативов, но один из вариантов связан с переносом части предложенной программы на факультативное изучение, другой — с дополнением данной программы факультативом, а третий — с усилением самой программы и дополнительным факультативом.

Рассмотрим каждый из этих вариантов.

При **первом варианте** (условно говоря, облегченном) можно предложить на выбор **вынести на факультатив** из программы 3 класса:

1) признаки делимости;

2) некоторые из предложенных приемов устных вычислений, которые традиционно рассматриваются на факультативах (умножение на 11, 101, умножение и деление на 25, умножение одинаковых чисел, оканчивающихся на 5, т. е. 25 · 25, 35 · 35 и т. п.).

Из программы 4 класса:

1) понятие процента и решение соответствующих текстовых задач, работу с рекламными материалами;

2) знакомство с валютами разных стран и курсами валют по отношению

друг к другу;

3) нахождение объемов геометрических тел;

4) кроме выноса части материала на факультатив можно сократить время (но не отказываться совсем!) на решение текстовых задач, приводящих к составлению сложных уравнений.

Особо хотим отметить, что самовольный отказ от изучения других тем программы, например от десятичных дробей и действий с ними, не только нарушит логику построения курса, что недопустимо, но и лишит учащихся возможности, во-первых, переосмыслить на новом уровне принципы устройства многозначных чисел в разных системах счисления, а во-вторых, завершить формирование навыков письменных и устных вычислений с многозначными натуральными числами, которые включены в действия с десятичными дробями в качестве средства. Другими словами, при выполнении действий с десятичными дробями дети фактически отрабатывают действия с натуральными многозначными числами (и это лишь один из примеров).

Второй вариант предусматривает выполнение основной программы и может быть дополнен **факультативом**, ориентированным на углубление изучаемого материала:

1) при изучении во 2 классе позиционных систем счисления можно предложить исследовать способы перевода чисел из одной системы счисления в другую, если величины, с которыми действует ребенок, измерялись разными системами мер, и составить сборник соответствующих заданий на их сравнение, сложение и вычитание. Причем перевод числа из одной системы счисления в другую осуществляется с помощью действия восстановления величины;

2) в развитие предыдущей темы после изучения всех действий с многозначными числами в десятичной системе счисления можно предложить конструирование умножения и деления в недесятичных системах счисления (3—4 класс).

Вообще хотелось бы отметить, что учителя иногда недооценивают ту роль, которая отведена в обязательной программе работе с числами, представленными в недесятичных системах счисления, особенно на первом этапе. Значение этой темы огромно как для осмысления принципа устройства десятичной системы счисления и организации совместной деятельности детей, так и для формирования качественных вычислительных навыков. Так, складывая или вычитая, например, числа в пятеричной системе счисления, дети осмысленно усваивают соответственно состав числа 5 и счет в пределах 5, поэтому, работая с натуральными числами, а затем и дробными в разных системах счисления, учитель предоставляет возможность слабым детям вновь и вновь возвращаться к тому материалу, которой ранее по каким-либо причинам был плохо усвоен ребенком, причем понятно, что это не просто повторение изученного, а возвращение на качественно новом уровне, причем возвращение, обеспечивающее продвижение ребенка вперед.

Третий вариант программы можно использовать в классах, где, во-первых, математику с 1 класса ведут либо учителя математики, либо учителя начальных классов, проявляющие особый интерес к преподаванию математики (и те и другие должны непременно пройти обучение в центре переподготовки работников образования), а во-вторых, большинство поступивших детей оказались с высокой психологической готовностью к школе, хорошей дошкольной подготовкой и ярко выраженными интересом и способностями к изучению математики.

Эта **углубленная** программа обучения математике включает материал, рекомендованный в предыдущем варианте для факультативных занятий.

В качестве дополнительного материала, который учитель может использовать после уроков, можно предложить следующие тематические занятия:

1) задачи на разрезание и перекраивание фигур (1 класс);

2) задачи с переливаниями, дележами, переправами при затруднительных обстоятельствах (1—2 классы);

3) ознакомление учащихся с одним из аналитических методов решения задач, решаемых «от конца к началу» (2—3 классы);

4) задачи на проценты (включены в р/т № 1 для 4 класса);

5) различные занятия по истории математики (1—4 классы);

6) занятия, связанные с изучением вероятности случайных событий (4 класс).

Кроме тематических занятий можно предложить сконструировать способ умножения многозначных чисел (в отличие от умножения «в столбик»), основанный на правиле «ножниц» (автор Э.И. Александрова), позволяющий фактически устно, без записи промежуточных результатов получать произведение. Этот новый способ действия дает возможность значительно улучшить устный счет, делая его более мотивированным (подробно описан в методическом пособии для учителя, 3 класс).

Совершенно очевидно, что предлагаемые темы факультативных занятий могут быть продолжены. Учитель вправе самостоятельно выбрать темы из предложенных или внести собственные, а также использовать данные рекомендации при любом из трех вариантов программы. Однако при подборе собственных вариантов факультативов рекомендуем руководствоваться следующими соображениями: факультатив должен либо углубить понятия, изучаемые в обязательной программе, либо расширить представления детей о математике путем рассмотрения элементов математической логики, теории вероятности, теории графов, истории математики, аналитических методов и нестандартных приемов решения задач. Факультативные занятия не должны включать темы, которые будут предметом исследования в более поздние сроки обучения в школе.

*   *   *

Программа обеспечена учебно-методическими комплектами для каждого года обучения:

1) учебники для каждого года обучения:
2) методические пособия «Обучение математике» (для каждого класса);
3) рабочие тетради (для каждого класса);
4) контрольные работы (для каждого класса).

О° ЛАВЛЕНИЕ