МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Э.И. Александрова

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ *в начальной школе*

4 класс

Пособие для учителя

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

Александрова, Э.И.

Методика обучения математике в начальной школе. 4 класс: Пособие для учителя. — электрон. текст. дан. (37 Мб) — 1 опт. компакт. диск (CD-ROM).

Пособие содержит описание методов, форм организации и общения детей, новые методические приемы, которые помогут учителю при реализации идей развивающего обучения на материале обучения математике в 4 классе.

Пособие написано в соответствии с программой обучения математике Э.И. Александровой в начальной школе.

Минимальные системные требования:
Pentium III 1 ГГц (или аналог от AMD), 256 Мб ОЗУ, видеокарта с 32 Мб памяти, 64 Мб свободного места на HDD, 32x CD-ROM, клавиатура, мышь.
Windows 2000sp4/XPsp3/Windows Vista/Windows 7, Windows 8,
Adobe Acrobat Reader версии 7.0 и выше.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,
Тел.: (495) 181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

ОТ АВТОРА

Уважаемые коллеги!

Данное методическое пособие является частью учебно-методического комплекта по математике, включающего учебник для 4 класса (в двух книгах) и две рабочие тетради.

Первая содержит дополнительный тренировочный материал по теме «Десятичные дроби» и задания по теме «Проценты», которая по ряду соображений перенесена из учебника в рабочую тетрадь и может быть по усмотрению учителя рассмотрена как на уроках, так и на факультативных занятиях.

Вторая рабочая тетрадь, в отличие от первой, по своему назначению полностью совпадает с рабочими тетрадями для 1 класса, смысл которых сопровождать (а не дополнять) учебник математики. Эта тетрадь, содержащая ряд разрезных страниц, поможет учителю избежать излишней траты времени на подготовку дидактических материалов к уроку.

Методические приемы, используемые в обучении по системе Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова, принципы конструирования и подбора учебных заданий, а также особенности формирования умственных действий при решении учебно-практических и учебных задач были подробно рассмотрены в первых трех книгах (*Александрова Э. И.* Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс; 2 класс; 3 класс — М.: Вита-Пресс, 1999, 2000, 2001). Поэтому в этой, четвертой, книге эти вопросы частично опущены.

Из класса в класс сохраняется общий принцип обучения — от предметно-преобразующих действий через графические и знаковые (буквенно-знаковые) модели, в которых зафиксировано общее отношение, составляющее смысл учебной задачи, к формированию умственных действий.

Учебник для 4 класса включает в себя материал, предназначенный для рефлексии и более глубокого осмысления содержания курса математики, усвоение которого составляло одну из задач обучения в предыдущие годы. Именно во 2—3 классе, изучая сложение и вычитание многозначных чисел, а затем умножение и деление, учащиеся выявили основной принцип выполнения любого арифметического действия — **поразрядность**. Теперь в 4 классе детям предстоит открыть для себя смысл нового вида чисел — позиционных систематических дробей, частным случаем которых являются **десятичные** дроби. Им посвящена первая часть учебника. Она возвращает ученика в ситуацию, вновь требующую решения задачи измерения величин, и приводит к введению десятичных дробей. Вторая часть учебника ориентирована на понятие величины. Теперь детям предстоит сконструировать способы вычисления периметров, площадей и объемов, опираясь как на непосредственные измерения, так и на готовые результаты.

Кроме рассмотрения величин и способов их измерений, уточняется понятие текстовой задачи, в частности рассматриваются задачи «на движение» и им подобные (так называемые задачи «на процессы»).

Тренируя детей в решении частных задач, основанных на **общем способе действия**, нужно стремиться к тому, чтобы ребенок понимал не только **как** выполнять те или иные задания, но и **зачем** они необходимы, **чему** он учится, выполняя эти задания, **как** научить других решать такие же задачи.

Для каждого ребенка ответить на вопросы, **зачем, чему** и **как**, — значит обратиться к самому себе, к обоснованию собственных действий. Такой подход к изучению понятий создает необходимые предпосылки как для более глубокого понимания самой математики, логики ее построения, так и для формирования основ теоретического мышления: рефлексии, анализа, планирования, для развития памяти, воображения.

Организуя на уроке совместную деятельность детей, важно представлять, какие вопросы могут возникнуть в процессе обсуждения, какие варианты решений могут предложить дети, что может стать предметом дискуссии.

С этой целью в учебник включены задания, в которых описаны точки зрения вымышленных детей. Нет смысла напоминать, что читать объемные тексты в этих заданиях не нужно. Их значение уже описано в методических пособиях 1, 2 и 3 классов, да и принцип подбора заданий к уроку тот же. Для индивидуальной работы дети могут выбирать те задания, которые им нравятся. Выполнив задание, пусть обоснуют свой выбор.

Если заданий по данному разделу много, то их можно распределить по группам. Внутри группы дети сами организуют свои действия: либо сначала обсудят способы выполнения, а затем каждый попробует выполнить эти задания самостоятельно, либо сначала каждый попробует выполнить их, а потом сравнит свой способ со способами решения других детей, что в 4 классе должно стать нормой.

Если вам покажется, что заданий недостаточно, то их число всегда можно увеличить. Однако следует помнить, что не количество заданий, а **качество**, т. е. **глубина осмысления** способов их выполнения, составляет основную **цель обучения**.

Новый учебник для 4 класса, как и тетради, может быть использован учителями, работающими как в начальной школе, так и в основной, поскольку рассматриваемые в учебнике темы традиционно изучаются в более поздние сроки.

Пользуясь случаем, хочу поблагодарить всех учителей, с которыми имела возможность общаться во время курсов, семинаров, конференций, за тот неоценимый вклад в становление этой системы обучения и данной программы в частности. Хочу сказать спасибо своим маленьким ученикам за те свежие идеи, которыми они щедро делились со мной. Отдельная благодарность Варваре Игоревне Желтухиной и ее ученикам за бескорыстное участие в подготовке и апробации всех учебно-методических комплектов, за душевность и готовность помочь. Особая благодарность моему мужу Мовчану Николаю Петровичу, который оказывал мне огромную помощь при создании всех моих книг. Спасибо!

ВВЕДЕНИЕ

ОСОБЕННОСТИ СОДЕРЖАНИЯ ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В 4 КЛАССЕ

В 4 классе продолжается знакомство с числами, а именно с **десятичными дробями** как частным случаем позиционных систематических дробей в различных системах счисления.

Введение **позиционных систематических дробей** обусловлено, прежде всего, следующими обстоятельствами. Завершая изучение понятия многозначного числа и действий с числами, заданными изначально в различных системах счисления, учащиеся вновь возвращаются к задаче измерения и воспроизведения величины. В ситуации, когда для измерения (а затем и для воспроизведения) данной величины требуется не только система мер, полученная путем укрупнения с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), но и система мер, полученная путем уменьшения исходной меры в одно и то же число раз, равное коэффициенту укрупнения.

Другими словами, для измерения величин, много больших исходной меры, используют систему укрупненных мер с постоянным отношением, а для измерения величин, много меньших той же исходной меры, используют систему уменьшенных мер с тем же отношением. Таким образом, учащиеся получают новый вид чисел — позиционные дроби, записанные в различных системах счисления, в том числе и в десятичной. Строится разрядная сетка, даются соответствующие названия разрядам, полученным в результате уменьшения исходной мерки в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Позиционные дроби, как и целые числа, имеют место на числовой прямой, с помощью которой их можно сравнивать друг с другом.

Измерения с помощью системы уменьшенных мер могут быть конечными и бесконечными, что приводит к появлению не только конечных, но и бесконечных дробей, в том числе периодических.

Однако предметом исследования становятся конечные десятичные дроби. Вводится операция округления многозначных чисел и бесконечных дробей, которая на данном этапе позволит действовать с ними как с конечными десятичными дробями.

Конструирование способов выполнения действий с позиционными систематическими дробями, в том числе и с десятичными, позволит фактически отрабатывать все действия с многозначными числами. Нет необходимости тратить на это дополнительное время. Изучение десятичных дробей придает осмысленный характер умениям и навыкам счета в связи с использованием его в качестве средства для выполнения более сложных действий.

Такая логика построения материала, когда после действий с многозначными числами появляются подобные им по способу их получения и способу действий с ними позиционные систематические дроби, позволяет гораздо глубже понять **обобщенный принцип образования позиционных чисел**.

Анализируя этот принцип, учащиеся без особого труда, опираясь на графические модели, конструируют сравнение, сложение и вычитание позиционных дробей. Понятно, что принцип поразрядности при выполнении сложения и вычитания дробей позволяет установить основное правило записи столбиком этих действий: запятая должна быть под запятой. В учебнике от имени детей предлагаются модели, фиксирующие способ действия (эти модели предложили учащиеся школы «Дидакт» г. Заречного Пензенской области).

Понятно, что учитель не навязывает своим ученикам эти модели и не задает их в готовом виде. Он только создает необходимую учебную ситуацию, при которой дети сначала высказывают свои предположения о способе поразрядного сложения дробей, а затем проверяют их. Рождение моделей, указывающих на способ действия, есть результат обсуждения детьми вопроса о том, **что** нужно сообщить с помощью модели человеку, который хочет научиться складывать (а затем и вычитать) позиционные дроби.

Умножение и деление десятичных дробей опираются на исследование отношений между компонентами и сводятся к умножению натуральных чисел и делению на натуральное число. Причем, как показала многолетняя практика, умножение конструируется без каких-либо сложностей и без опоры на схему.

При поиске способов деления дети предлагают, как правило, следующий: увеличить делитель путем умножения его на степень числа 10 так, чтобы он стал натуральным числом. Разделив делимое на натуральный делитель, они получали частное, которое оказывалось меньше искомого во столько раз, во сколько увеличивали делитель.

Вследствие этого учащиеся приходили к выводу: полученное частное нужно увеличить. Это значит, что необходимо перенести в нем запятую на столько цифр вправо, сколько их было в делителе после запятой. Например, нужно разделить 22,033 на 0,11. Перенесем в делителе запятую на 2 цифры вправо, умножив 0,11 на 100.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} -\,22{,}033 & 11 \\ \cline{2-2} 22 & 2{,}003 \\ \cline{1-1} 0\;033 & \\ 33 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

В частном получили число 2,003, которое, соответственно, в 100 раз меньше искомого, значит, это число теперь нужно увеличить в 100 раз:

$$2{,}003 \cdot 100 = 200{,}3$$

Таким образом,

$$22{,}033 : 0{,}11 = 200{,}3$$

Однако, обнаружив другой способ действия, при котором достаточно перенести запятые вправо у делимого и делителя одновременно на одно и то же число цифр, дети признают его более удобным. Аргумент такой: в первом случае, пока делишь делимое на новый делитель, можно забыть о переносе запятой в частном; во втором случае частное будет оставаться без изменения, что позволит избежать ошибок.

Анализ обоих способов действий ученики выполняют, опираясь на схему.

Изображая дроби с помощью схемы или на числовой прямой, ребенок учится находить дробь от числа и число по его дроби, что дает возможность ввести понятие процента. И хотя эта тема вынесена из учебника в рабочую тетрадь, учитель получает возможность изучить понятие процента в качестве факультатива, сохраняя логику основного подхода к изучению базовых математических понятий.

Если же учебный план не позволяет изучить этот материал в начальной школе, то он, несомненно, будет полезен для учителя математики, который продолжит обучение учеников.

Особое место в программе 4 класса принадлежит уже известным детям с 1 класса понятиям **периметра, площади, объема** и способам их нахождения. Возврат к этим понятиям обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин заданными мерками, включая стандартные меры, к использованию **готовых результатов измерения.** Такой подход позволяет осмыслить **основные принципы,** лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые.

Таким образом, геометрический материал в программе не является инородным, он органически включен в общую логику построения курса начиная с 1 класса, что делает его более осмысленным и содержательным. Именно в начальной школе создаются предпосылки для систематического изучения геометрии в средних классах как конкретизации тех основных понятий и принципов, с которыми дети уже работали, изучая свойства объектов трехмерного пространства, что и составляет предмет элементарной геометрии.

Курс математики 4 класса заканчивается возвратом на новом уровне к **решению текстовых задач.** Происходит углубление представления о задаче, способах ее моделирования, принципах построения текста с помощью не только схемы, но и краткой записи. Их преобразования создают предпосылки для введения в последующих классах тождественных преобразований.

Традиционно задача, как правило, решается сначала по действиям, а затем составляется математическое выражение. В нашем случае сначала составляются различные математические выражения (или уравнения) с опорой на схему, которая строится по ходу осмысления задачи, а затем выполняются действия для нахождения значения выражения.

Напомним, что **процесс** решения текстовой задачи с буквенными данными в течение первых 3 лет дети осуществляли в **семь этапов**:

I **этап** — это **перевод** условия задачи в **графическую модель**, т. е. в **схему**. Кстати, схема, в отличие от чертежа, не требует, во-первых, специальных чертежных инструментов и, во-вторых, точного соблюдения заданных отношений. Схема может выполняться от руки, указывать и отображать заданные отношения;

II этап — это **преобразование** одной графической **модели** в другую. Этот этап может быть пропущен, если необходимости в преобразовании нет изначально либо она отпала в связи со свернутостью действия;

III этап — составление буквенно-знаковой модели, т. е. **составление уравнения**;

IV этап — решение составленного **уравнения**. Этап может совпасть с предыдущим, если ребенок записывает уравнение сразу с помощью равенства вида: $x =$ выражение;

V этап — это **подбор** вместо букв **чисел, подходящих** с трех точек зрения:

1) сюжета задачи;
2) выполнимости арифметического действия;
3) умения успешно оперировать с подобранными числами.

Другими словами, здесь речь идет об **области допустимых значений** по отношению к сюжету, к выполнимости арифметического действия на рассматриваемом (в зависимости от сюжета) множестве чисел, к собственному опыту ребенка в оперировании с числами, что дает возможность диагностировать «область успешности» ребенка;

VI этап — выполнение необходимых **вычислений**, требующих последовательного выполнения арифметических действий с числами;

VII этап — возвращение к условию задачи для **получения ответа** на ее вопрос, так как не всегда величина, которую обозначили буквой x и относительно которой составляется и решается уравнение, может совпадать с величиной, значение которой нужно найти для ответа на вопрос задачи. Решив уравнение, необходимо проверить, получен ли ответ на вопрос задачи.

До четвертого года обучения **основными**, конечно, **являлись четыре этапа: построение схемы, составление и решение уравнения** с буквенными или числовыми данными и **вычисление** числового **значения** искомой величины.

Именно этим основным этапам — моделированию в графической, буквенно-знаковой или числовой форме — отводилось ранее и отводится сейчас значительное место, так как одной из основных задач обучения математике в целом и решению задач в частности является формирование способности к математическому моделированию и переходу от одной модели к другой (и наоборот).

Успешность обучения решению текстовых задач будет зависеть от того, умеет ли ребенок перейти от текста к какому-либо виду моделей: графической, буквенно-знаковой или числовой. Одна и та же модель может описывать отношения между разными величинами в задачах с разными сюжетами и объектами, которые характеризуют данные величины, а умение перейти от графической модели к числовой, к выражению или уравнению, является ключом к решению любой задачи.

Итак, основное содержание курса математики — формирование понятия рационального числа — можно представить как последовательность стратегических учебных задач: формирование понятия величины, т. е. введение в область отношений величин, раскрытие отношения величин как всеобщей формы числа, последовательное введение различных частных видов чисел, конкретизация общего отношения величин в определенных условиях, построение обобщенных способов действий с числами.

К концу 4 класса обучающиеся должны знать:

- единицы величин и соотношения между ними;
- приемы устных вычислений;

уметь:

- выполнять любые арифметические действия с многозначными числами (без ограничения числа разрядов);
- вычислять периметры различных плоских фигур;
- вычислять площади фигур: прямоугольника, треугольника и других многоугольников;
- решать текстовые задачи, раскрывающие зависимости между пропорциональными величинами (скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость и др.);

иметь представление:

- о признаках делимости;
- об основных способах нахождения, площади и объема любых геометрических фигур.
- о чтении и записи конечных десятичных дробей и выполнении действий с ними;

Предлагаемая программа позволяет получить все необходимые знания, умения и навыки, которые в настоящее время представлены в **государственных требованиях** к минимуму содержания обучения математике в начальных классах, на новом качественном уровне в форме теоретического знания.

ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ

На четвертом году учебы, учитывая психологические особенности данной возрастной группы, акцент перемещается **от групповых форм работы к индивидуальным**.

Теперь предметом беспокойства учителя постепенно становятся дети, которые не предпринимают попыток к самостоятельному выполнению заданий.

На данном этапе обучения важно понять причину, по которой ребенок не хочет отделяться от группы, а значит, учителю необходимо найти педагогические приемы, позволяющие помочь ребенку преодолеть тот или иной психологический барьер. Главное — не заставлять ребенка работать в одиночку, а помочь ему. Важно отслеживать динамику развития самостоятельности ученика. Этот процесс становления может растянуться не на один год.

Изменяются и **способы общения** детей друг с другом. Если в первый год обучения в начальной школе организатором диалогов был учитель, то постепенно эта роль переходит к отдельным детям. У них самих возникают новые вопросы, ответы на которые могут носить дискуссионный характер.

Метод обучения по-прежнему носит исследовательский характер. Организаторами исследований могут, кроме учителя, становиться дети.

Другими словами, к концу 4 класса у большинства детей формируются психологические механизмы учебной деятельности, которые позволяют ученикам ставить перед собой очередную учебную задачу и находить способы ее решения, что и составляет одну из важнейших целей развивающего обучения.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ В 4 КЛАССЕ

4 ч × 34 = 136 ч

I полугодие (64 ч)

ТЕМА 1. МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ (64 ч)

(Учебник, книга 1)

1.1. Повторение материала 3 класса: действия с многозначными числами (11 ч)

1. Проверочные (стартовые) работы. Анализ работы: составление справочника ошибок (***задания 1—6***) .... 2 ч
2. Решение задач, уравнений, включающих действия с многозначными числами (***задания 7—16***) .... 2 ч
3. Повторение приемов устных вычислений. Сравнение приемов для разных действий, способов решения уравнений (***задания 17—18***) .... 2 ч
4. Признаки делимости (***задания 19—24***) .... 1 ч
5. Вычисления. Составление уравнений и задач по графическим моделям (***задания 25—29***) .... 2 ч
6. Контрольная работа по теме «Действия с многозначными числами» (***раздел «Проверь себя!»***). Анализ контрольной работы .... 2 ч

1.2. Измерение величин (6 ч)

7. Анализ условий, при которых получается: однозначное число; многозначное число в различных системах счисления (***задания 30—36***) .... 2 ч
8. Постановка задачи измерения величины меньшей, чем заданная исходная мерка. Построение системы мер. Запись и чтение новых чисел (***задания 37—40***). Обыкновенная дробь как другая форма записи позиционных дробей с одной цифрой после запятой (***раздел «Это интересно!»***) .... 2 ч
9. Воспроизведение величины по числу и основной мерке (***задания 41—43***). Проверочная работа .... 2 ч

1.3. Запись и чтение десятичных дробей (10 ч)

10. Запись и чтение десятичных дробей (***задания 44—52***) ... 2 ч
11. Место десятичной дроби на числовой прямой. Сравнение десятичных дробей с помощью числовой прямой (***задания 53—62***) ... 2 ч
12. Проверочная работа (***раздел «Проверь себя!»***) ... 1 ч
13. Округление десятичных дробей. Проверочная работа (***задания 63—73***) ... 2 ч
14. Сравнение десятичных дробей (***задания 74—83***). Проверочная работа ... 3 ч

1.4. Действия с многозначными числами и с десятичными дробями (26 ч)

15. Постановка задачи на конструирование действий с десятичными дробями. Сложение и вычитание десятичных дробей (***задания 84—88***) ... 2 ч
16. Сложение и вычитание многозначных чисел и десятичных дробей. Вычисления. Решение уравнений, задач (***задания 89—96***) ... 3 ч
17. Проверочная работа (***раздел «Проверь себя!»***). Анализ проверочной работы. Составление справочника ошибок ... 1 ч
18. Контрольная работа по теме «Сравнение десятичных дробей» ... 2 ч
19. Умножение и деление десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. (***задания 97—103***) ... 1 ч
20. Конструирование способа умножения десятичных дробей (***задания 104—105***) ... 1 ч
21. Умножение многозначных чисел и десятичных дробей. Решение задач, уравнений (***задания 107—125***) ... 3 ч
22. Проверочная работа (***раздел «Проверь себя!»***). Анализ проверочной работы. Составление справочника ошибок ... 1 ч
23. Конструирование способа деления десятичных дробей на натуральное число (***задания 126—131***). Проверочная работа ... 2 ч
24. Конструирование способа деления на десятичную дробь (***задания 132—134***) ... 2 ч

25. Устные и письменные действия с многозначными числами и десятичными дробями, включая деление. Микрокалькулятор и проверка результата действий с десятичными дробями с его помощью (***задания 135—152***). Проверочная работа .... 3 ч

26. Контрольная работа по теме «Сложение и вычитание десятичных дробей». Анализ контрольной работы. Работа со справочником ошибок .... 2 ч

27. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби (***задания 153—167***) .... 3 ч

1.5. Стандартные системы мер. Действия с числовыми значениями величин (11 ч)

28. Десятичные дроби и стандартные системы мер. Перевод одних мер в другие. Меры длины, площади, объема, массы (***задания 168—183***). Проверочная работа .... 3 ч

29. Действия с числовыми значениями величин (***задания 184—192***) .... 2 ч

30. Контрольная работа по теме «Действия с многозначными числами и десятичными дробями» .... 2 ч

31. Деньги как мера стоимости (***задания 193—196***) .... 1 ч

32. Стандартные меры измерения времени (***задания 197—211***) .... 2 ч

33. Стандартные меры измерения углов (***раздел «Это интересно!»***) .... 1 ч

II полугодие (72 ч)

ТЕМА 2. ПЕРИМЕТР, ПЛОЩАДЬ, ОБЪЕМ (34 ч) (Учебник, книга 2)

2.1. Периметры различных плоских фигур и способы их вычисления (12 ч)

1. Периметр − длина границы плоской фигуры. Сравнение периметров различных фигур с помощью посредника (проволоки, нитки и др.). Измерение периметров различных фигур. Проверочная работа и ее анализ (***задания 1—9***, ***раздел «Проверь себя!»***) .... 2 ч

2. Выделение основных элементов геометрической фигуры, с помощью которых можно находить периметр. Периметр треугольника, четырехугольника и других многоугольников (***задания 10—19***) .... 3 ч

3. Решение задач (***задания 20—26***) .... 1 ч

4. Тренировочные задания (***задания 27—29***, ***раздел «Это интересно!»***) .... 1 ч

5. Вычисление периметров разных фигур, решение задач. Проверочная работа. Составление справочника ошибок (***задания 30—40***, ***раздел «Проверь себя!»***) .... 3 ч

6. Контрольная работа по теме «Действия с числовыми значениями величин». Анализ контрольной работы .... 2 ч

2.2. Площади геометрических фигур (16 ч)

7. Измерение площади прямоугольника путем непосредственного наложения меры — квадратного сантиметра. Формула площади прямоугольника и прямоугольного треугольника (***задания 41—43***) .... 1 ч

8. Определение в прямоугольном треугольнике тех сторон, измерение которых позволяет вычислять его площадь. Понятия катета и гипотенузы. Конструирование способа выделения прямоугольных треугольников среди прочих (***задания 44—46***) .... 1 ч

9. Классификация треугольников по углам. Постановка и решение задачи нахождения площадей непрямоугольных треугольников путем разбиения их на прямоугольные. Формула площади произвольного треугольника. Проверочная работа (***задания 47—57***) .... 3 ч

10. Конструирование способа нахождения площади любой геометрической фигуры путем ее разбиения (или дополнения), перекраивания. Поиск рациональных способов разбиения различных геометрических фигур, в том числе правильных многоугольников (***задания 58—61***) .... 2 ч

11. Выделение основных элементов, с помощью которых можно находить площади геометрических фигур. Сравнение наборов необходимых и достаточных элементов для вычисления периметра и площади одной и той же фигуры. Исследование зависимости

изменения площади от изменения линейных параметров. Связь между периметром и площадью. Решение текстовых задач, включающих понятия площади и периметра. Выявление ошибкоопасных мест (***задания 62—70***) .... 2 ч

12. Контрольная работа по теме «Периметры различных плоских фигур и способы их вычисления» .... 1 ч

13. Анализ контрольной работы (***задания 71—73, 77***, ***раздел «Это интересно!»***) .... 1 ч

14. Вычисление площадей различных фигур (***задания 74—86, раздел «Проверь себя!»***) .... 2 ч

15. Палетка. Работа с палеткой (***задания 87—92***) .... 1 ч

16. Решение задач и уравнений. Проверочная работа (***задания 93—98***) .... 2 ч

2.3. Объемы геометрических тел (6 ч)

17. Знакомство с геометрическими телами. Стандартные меры объема. Измерение объема прямоугольного параллелепипеда (***задания 99—106***) .... 2 ч

18. Решение задач, связанных с измерением периметров, площадей, объемов. Составление справочника ошибкоопасных мест (***задания 107—127***) .... 3 ч

19. Контрольная работа по теме «Периметры и площади геометрических фигур» .... 1 ч

ТЕМА 3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ (38 ч)

3.1. Строение задач. Краткая запись задачи. Схемы. Уравнения (16 ч)

20. Анализ средств самоконтроля при вычислениях и решении задач (***глава 2, раздел «Проверь себя!»***) .... 2 ч

21. Строение задачи. Краткая запись условия задачи как новое средство моделирования (***задания 128—142***) .... 3 ч

22. Переход от текста к краткой записи и обратно (***задания 143—148***) .... 2 ч

23. Преобразование краткой записи к виду, удобному для графического моделирования. Решение текстовых задач с использованием краткой записи (***задания 149—163***) .... 2 ч

24. Анализ средств для самоконтроля при составлении краткой записи и решении задач (***раздел «Проверь себя!»***) .... 1 ч

25. Придумывание задач детьми и их решение (***задания 164—165***) .... 1 ч

26. Решение уравнений, которые могли быть составлены к текстовой задаче. Формирование действия контроля за выполнением тождественных преобразований при решении уравнений. Проверочная работа и ее анализ (***задания 166—187***) .... 5 ч

3.2. Задачи на «процессы» (22 ч)

27. Время и его измерение (***глава 3, задания из раздела «Проверь себя!»***) .... 2 ч

28. Понятие о скорости (***задания 188—192***) .... 2 ч

29. Работа над текстовыми задачами, в которых речь идет о скорости различных процессов: движения, работы. Анализ текста, перевод текста на язык математики (***задания 193—200***) .... 2 ч

30. Проверочная работа и ее анализ .... 1 ч

31. Составление краткой записи к задачам на движение (***задания 201—207***) .... 2 ч

32. Контрольная работа по теме «Строение задач. Краткая запись задачи. Схемы. Уравнения» .... 2 ч

33. Скорость сближения. Скорость удаления. Задачи на совместную работу. Проверочная работа (***задания 208—224***) .... 2 ч

34. Решение задач (***задания 225—250***). Составление справочника ошибок .... 3 ч

35. Итоговые контрольные работы .... 3 ч

36. Решение задач, уравнений (***задания 251—260, раздел «Проверь себя!», задачи на смекалку***) .... 3 ч

ТЕМА 1. МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ (64 ч)

1.1. ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА 3 КЛАССА: ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ЧИСЛАМИ (11 ч)

Одними из основных задач обучения во 2—3 классах были конструирование и освоение детьми общего способа выполнения любого арифметического действия, суть которого сводилась к последовательному выполнению двух операций: определению количества цифр (разрядов) в искомом результате действия и нахождению цифры в каждом разряде.

Первая операция требовала предварительной прикидки, при которой ученик определял, какие разряды «переполняются» (при сложении и умножении) или «разбиваются» (при вычитании и делении), а вторая операция — знания таблиц сложения и умножения.

Содержание первых 29 заданий позволяет детям восстановить способы выполнения арифметических действий. Основной акцент при выполнении этих заданий необходимо сделать на формировании действия самоконтроля.

Сравнительный анализ результатов, полученных при работе с упомянутой группой заданий, и восстановление справочника ошибок позволят каждому ученику наметить индивидуальный план ликвидации ошибок.

Составлением таких справочников дети занимались начиная с 1 класса, причем анализ того, какие ошибки можно допустить при сложении и вычитании многозначных чисел, проводился во 2 классе, а об ошибках при умножении и делении шла речь в 3 классе.

Следует напомнить, что анализ ошибок необходимо произвести не **до** выполнения задания, а **после** (***задания 1—5***). Как только справочники ошибок, которые можно допустить при выполнении сложения — вычитания и умножения — деления, будут составлены, у ученика сразу появляется возможность (перед тем как приступить к тому или иному заданию, требующему действий с многозначными числами) **мысленно** предусмотреть возможные ошибки, особенно те, которые у него уже были.

Таким образом, речь уже идет о составлении внутреннего плана собственных действий до того, как ученик приступит к выполнению задания, что создает предпосылки для формирования у него действия оценки: чем выше уровень сформированности у ребенка действия контроля, тем больше уверенности в том, что и действие оценки превратится в психологический механизм индивидуальной учебной деятельности.

Оценивая возможность безошибочного выполнения того или иного задания, ребенок тем самым оценивает самого себя, свое продвижение в учебном материале. Оценка результатов индивидуальной деятельности должна выступить перед учащимися как особая задача, предпосылки для постановки которой и создаются, по словам В. В. Репкина, в процессе перехода к индивидуальным формам учебной деятельности[1].

Успешность такого перехода в конечном итоге зависит от того, насколько учителю удастся обеспечить формирование у учащихся механизмов самоконтроля и самооценки.

Подробное описание методики формирования этих важнейших учебных действий на примере решения текстовых задач[2], сложения и вычитания многозначных чисел[3], умножения и деления[4] дает возможность реализовать эту методику на другом конкретном материале, в частности при обучении действиям с десятичными дробями, что составляет основное содержание программы 4 класса.

Знания, которые ученик приобрел в процессе предметной деятельности в форме теоретических понятий, были зафиксированы в виде моделей: предметных, графических или буквенно-знаковых, а значит, важно проверить, насколько ученик может переходить от одной модели к другой, конкретизируя их в новых условиях решения задачи.

Так, подбирая к схемам уравнения (***задание 6***), дети анализируют, какие ошибки можно допустить при составлении уравнений по схеме. Первое, на что непременно нужно обратить внимание, — на сплошные и прерывистые дуги.

---

[1] См.: Репкина Н. В., Репкин В. В. Развивающее обучение: теория и практика. — Томск: Пеленг, 1997. — С. 66—68.

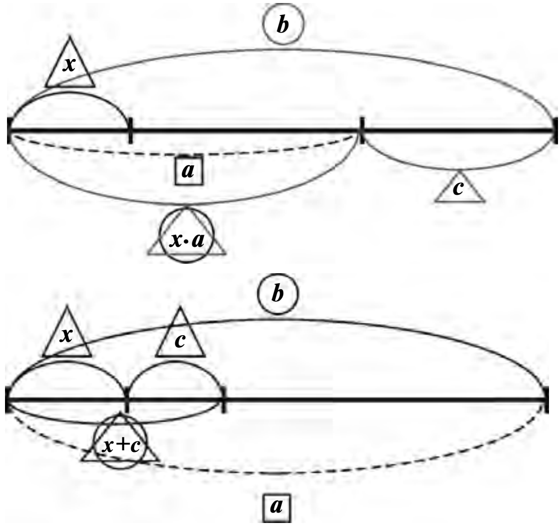
[2] См.: Александрова Э. И. Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс. — М.: Вита-Пресс, 2000.

[3] См.: Александрова Э. И. Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс. — М.: Вита-Пресс, 2001.

[4] См.: Александрова Э. И. Методика обучения математике в начальной школе. 3 класс. — М.: Вита-Пресс, 2002.

Пунктирная дуга означает повтор одинаковых мерок: если на первой схеме a — это количество мерок x, то на второй a указывает на количество мерок $(x + c)$.

Есть смысл дополнить схемы значками △, □ и ◯, используя цветные карандаши (или шариковые ручки), показывая, относительно чего величина является частью или целым.



Не понимая, где часть, где целое, где количество частей, а также относительность понятия целого и его частей, ученик вряд ли может описывать с помощью арифметических действий отношения между величинами. Это самое ошибкоопасное место.

По отношению к первой схеме неверными являются уравнения $(x + c) \cdot a = b$ и тождественное ему уравнение $b : (x + c) = a$, а вот ко второй схеме они как раз подходят. Это значит, что перечень подходящих к этой схеме уравнений может быть дополнен. Не годится к первой схеме (равно как и ко второй, хотя так задание не ставилось) и уравнение $b : a - x \cdot a = c$.

Ко второй схеме не подходит уравнение $b - c - x \cdot a = 0$, но оно подходит к первой схеме, равно как и уравнение $b - x \cdot a = c$.

Список уравнений к первой схеме может и должен быть дополнен уравнениями:

$(b - c) : a = x$; $\qquad b - x \cdot a = c$.

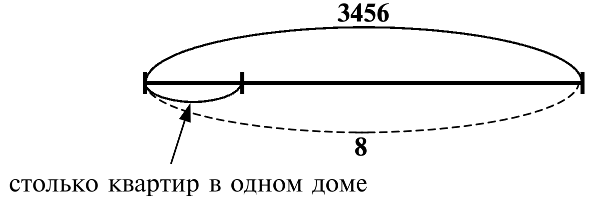
Ко второй схеме можно добавить уравнения, о которых речь шла выше.

Подбирая подходящие уравнения и дополняя этот перечень, ученик сопровождает каждое выбранное или записанное уравнение «показом руками» тех действий, которые производятся над величинами и описываются с помощью арифметических действий. Такой способ работы со схемой и соответствующим уравнением хорошо знаком как учителю, так и ученику.

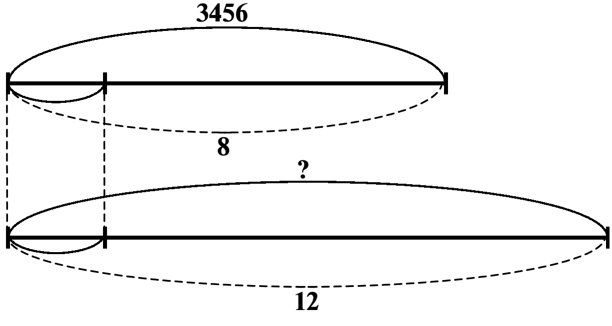
Это задание, так же как и ***задания 7, 8, 9,*** поможет учителю проверить, насколько дети соотносят графическую модель со знаковой моделью, будь то уравнение или выражение.

Как вы помните, работа с графической моделью (схемой), ее преобразование для изучения общих свойств изучаемых понятий (в частности, мы имеем дело с понятием отношения) составляют одну из главных задач обучения в начальной школе. Организовать выполнение этих заданий можно в форме как самостоятельной работы (по желанию), так и работы в парах. А вот обсуждение возможных ошибок, их причин и способов устранения лучше организовать в группах, распределив между ними задания.

Решение задач из ***задания 10*** сопровождается составлением схем. Обратите особое внимание на первую задачу. На самом деле детям предлагается выполнить сразу 3 задания с одинаковыми исходными данными, отношения между которыми на схеме выглядят так:



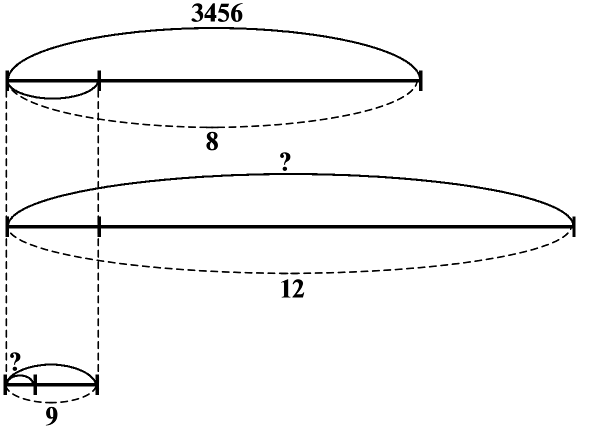
Значит, чтобы узнать, сколько квартир в 12 таких же домах, схему лучше дополнить:



Для ответа на вопрос составляется выражение (3456 : 8) · 12 или уравнение x = (3456 : 8) · 12, если за x принять неизвестное число квартир в 12 домах (знак вопроса зачеркивается и пишется x).

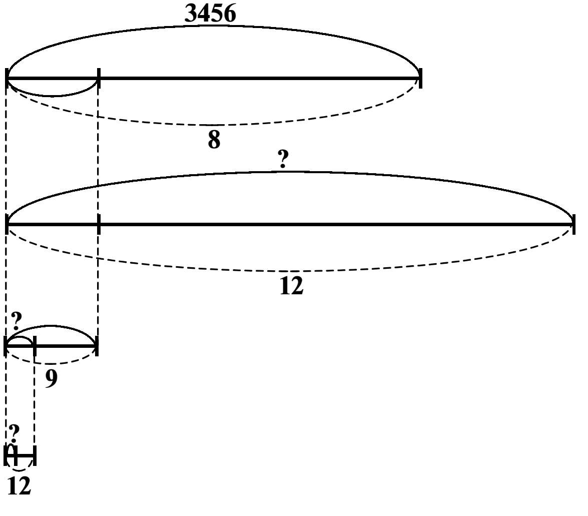
Чтобы ответить на 2-й вопрос, нужно разделить на 9 число квартир в доме.

Схема опять может быть дополнена так:



Значит, для ответа на второй вопрос нужно найти значение выражения (3456 : 8) : 9 или y = (3456 : 8) : 9 (по аналогии с предыдущей записью).

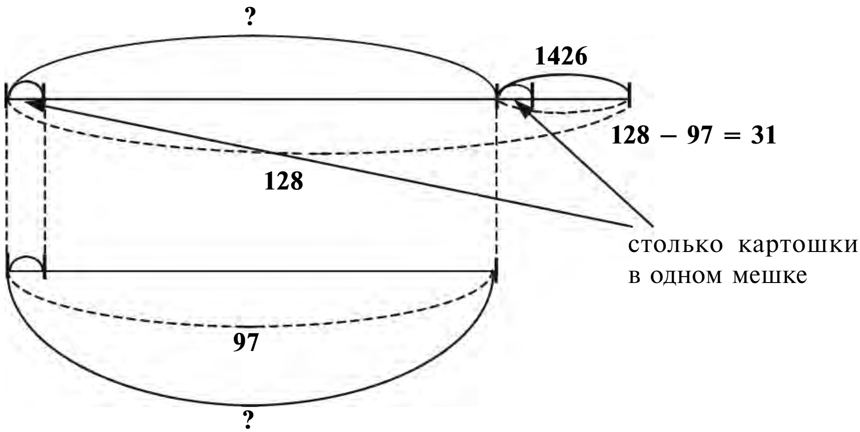
Для ответа на последний вопрос необходимо число квартир в подъезде разделить на 12. На схеме это выглядит так:



Значит, ((3456 : 8) : 9) : 12 — столько квартир на каждом этаже дома.

Скобки во всех трех случаях можно не ставить, так как они не влияют на порядок действий.

Схема к задаче 2 и ее решение выглядят так:



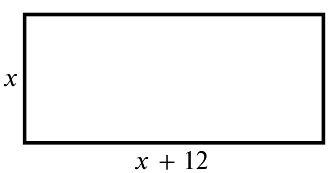
По схеме видно, что разность составляет (128 — 97) мешков, значит, в одном мешке 1426 : (128 — 97) килограммов картошки.

Поэтому для ответа на вопрос: «Сколько картошки собрали с каждого участка?» — нужно записать 2 выражения, или уравнения, обозначив одно неизвестное буквой x, а другое — y:

$x = (1426 : (128 - 97)) \cdot 128$ и $y = (1426 : (128 - 97)) \cdot 97$ или $y = 1426 : (128 - 97) \cdot 128 - 1426$.

Внешние скобки можно не ставить — порядок действий не изменится.

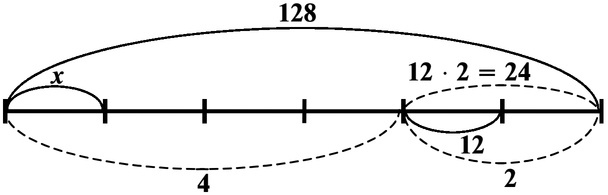
В задаче 3 также 2 вопроса и известны периметр и разность между длиной и шириной, что поможет ответить на первый вопрос. А вот для ответа на второй одно данное (12 м) — лишнее. Для решения первой задачи лучше всего начертить прямоугольник, обозначив его ширину буквой x, тогда длина — это $(x + 12)$.



$P = 128$ м, значит, $x \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 128$ или

$(x + x + 12) \cdot 2 = 128$

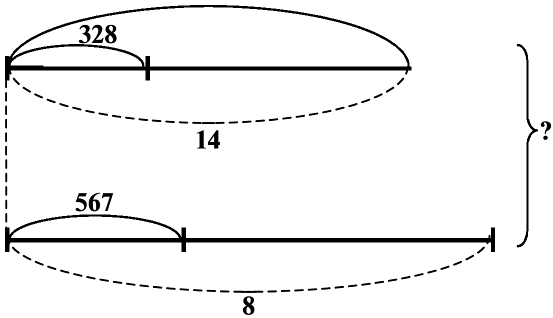
Для решения этого уравнения можно начертить схему:



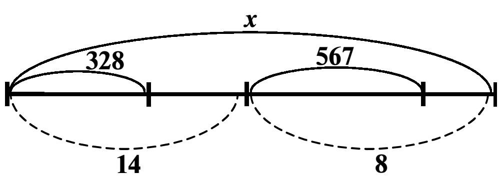
$x = (128 - 12 \cdot 2) : 4$

Для ответа на второй вопрос достаточно 128 разделить на 4: у квадрата все 4 стороны равны, а его периметр равен 128 м.

Четвертая задача самая легкая из всех, ведь для ее решения схема строится довольно просто:



Если эту «ступенчатую» схему преобразовать в «линейную» — отрезок (чего можно и не делать), то она выглядит так:

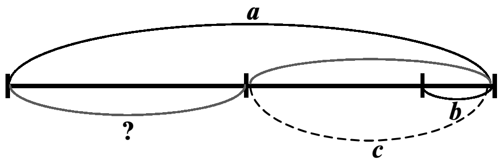


$$x = 328 \cdot 14 + 567 \cdot 8$$

При выполнении ***задания 11*** могут быть ошибки, связанные с порядком действий.

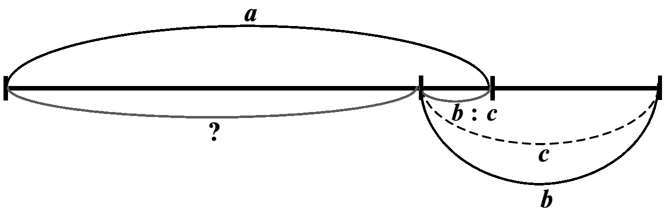
Есть смысл до выполнения этого задания предложить по схеме составить выражение и обсудить вопрос о том, как вычислить его значение, если вместо букв подставить числа.

Понятно, что при подборе чисел нужно учитывать то, что ($b \cdot c$) должно быть (по схеме) меньше a, поскольку ($b \cdot c$) — часть по отношению к a. Отрезок ($b \cdot c$) нужно выделить цветной дугой:



По схеме видно, что пока не вычислишь произведение ($b \cdot c$), нельзя выполнять вычитание: $a \overset{2}{-} b \overset{1}{\cdot} c$ (цифры 1, 2 — порядок действий).

Схему к выражению ($a - b : c$) удобнее изобразить так:



«Провокационные» выражения, которые нужно предложить **перед заданием 11**, могут быть такого типа:

$$824 - 24 : 8 \text{ или } 185 - 85 \cdot 2$$

Значение каждого такого выражения лучше находить устно.

При составлении текстовых задач числовые данные лучше заменить на буквы, что дает возможность подобрать другие числа, которые должны соответствовать сюжетной линии и области допустимых значений.

Задание 12 дает возможность мысленно восстановить виды математических выражений, включающих разные арифметические действия (от одного до нескольких). Так, например, число 327 может быть значением суммы: тогда его (целое) надо разбивать на слагаемые (части). Вариантов представления числа 327 в виде суммы — множество. Наиболее интересными могут быть выражения, содержащие скобки. Например, $327 = 93 + (176 + 58)$ и т. д.

Ответ на вопрос: «Как научить других составлять выражение по его числовому значению?» — требует глубокого (совместного) анализа того, с чего необходимо начинать, как определять числа, составляющие выражение. Так, взяв в качестве одного из слагаемых число 93 (это число должно быть не больше данного), нужно из 327 вычесть 93, чтобы узнать второе слагаемое, которое тоже представлено в виде суммы. Значит, зная, что второе слагаемое в этом случае должно быть равно 234, необходимо опять взять число не больше 234, например 176, и тогда, чтобы узнать другую часть, нужно от 234 отнять 176, а 234 – 176 = 58. Теперь уже можно записать выражение. Понятно, что речь идет об обратных действиях

Аналогичные рассуждения могут быть проведены по отношению и к остальным арифметическим действиям.

На основе описанных выше рассуждений можно прийти к выводу, что лучше всего сначала с помощью букв составить выражение, определив для себя набор и количество арифметических действий, а затем, пользуясь обратными действиями, подобрать подходящие числа и найти значение выражения. Например, нужно составить выражение такого вида:

$$a - b \cdot c = 327$$

Первый вопрос, который возникает: «Какое из чисел a, b и c подобрать раньше, а какое позже?»

Дайте возможность детям без предварительных обсуждений осуществить такой подбор, а потом предложите научить этому других, что позволит одним детям осознать собственный способ действия, а другим — познакомиться со способом, отличным от их собственного.

Сопоставление разных способов рассуждений даст возможность выбрать рациональный.

В нашем примере есть 2 основных подхода: либо сначала подобрать число a, которое должно быть не больше числа 327, либо подобрать числа b и c и найти их произведение, которое также должно быть не больше 327. Подбор чисел b и c требует **умения** делать прикидку. Это умение, в свою очередь, опирается на владение приемами устных вычислений и знание табличных случаев.

Значит, если, например, взять $b = 16$, $c = 12$, то $b \cdot c = 16 \cdot 12$ $= = 192$.

Тогда $a = 327 — 192 = 135$.

Выражение, значение которого равно 327 при $a = 135$, $b = 16$, $c = 12$, выглядит так:

$$327 - 16 \cdot 12 = 135$$

Выполнение аналогичных заданий и анализ способов действий детей являются важной частью в обучении.

Обратным заданием по отношению к заданию 8 является ***задание 13***. Чтобы составить уравнение с заданным корнем, нужно записать сначала тип уравнения, используя буквы (параметры), а затем пошагово подбирать числа, отталкиваясь от данного (корня уравнения). Числовое равенство, которое предварительно нужно составить (как и при составлении выражений в предыдущем задании), должно быть верным. Однако описанный способ действия по составлению уравнений вырисовывается лишь после того, как ребенку предоставлена возможность сначала самому попробовать составить уравнение, понять, какие трудности могли возникнуть при составлении, а лишь потом обсуждать, с чего же лучше всего нужно было начать действовать.

Работу над задачами из ***задания 14*** лучше начать с того, чтобы предложить детям самостоятельно прочитать задачу и карандашом («палочкой» или «галочкой») разделить текст на части, прочитав которые можно построить элемент схемы. Так, в первой задаче первая «галочка» совпадает с концом предложения, а вот следующая часть («всего спортсменов было 1084») содержится внутри вопроса.

Такая работа с текстом может быть проведена как после построения схемы, так и до него.

Научить ученика читать текст «структурированно», изображая или мысленно представляя величины и их отношения, — одна из основных задач обучения.

Задание 15 может быть выполнено либо так же, как и остальные, с опорой на схему, либо без нее, лишь мысленно представляя отношения между величинами.

К уравнениям, которые отвечают условию, относятся:

1) $(x + a) \cdot b = c$
$x = c : b - a$

2) $c = b \cdot (a + x)$ — это то же уравнение, что и предыдущее, только поменяли местами части уравнения относительно знака «равно» и слагаемые в сумме $a + x$;

3) $b : (x + a) = c$
$x + a = b : \text{c}$
$x = b : c - a$

4) $x + a = b : c$
$x = b : c - a$

5) $(a - x) \cdot b = c$
$a - x = c : b$
$x = a - c : b$

6) $b : (a - x) = c$
$a - x = b : c$
$x = a - b : c$

Теперь, когда корень каждого из перечисленных выше уравнений можно найти, выполнив последовательно сначала деление, а затем вычитание, предложите каждому ученику или паре детей подобрать подходящие к их уравнению числа, записать полученное уравнение и вычислить значение корня.

Затем предложите обсудить способ подбора числовых значений.

Задание 16 аналогично предыдущему. Его можно использовать для проверочной работы с последующей проверкой в классе и обсуждением ответа на поставленный вопрос.

Задание 17 не нуждается в комментариях. Важно лишь помочь каждому ребенку (речь идет не столько о помощи учителя, сколько о помощи детей — лидеров в паре или группе) понять, над чем ему лично предстоит еще работать, чтобы делать вычисления быстро и без ошибок. Изменение порядка действий (о чем было не раз написано в предыдущих книгах для учителя) ребенок обосновывает либо законами соответствующих действий (переместительным, сочетательным, распределительным), либо с опорой на схему.

Задание 18 направлено на то, чтобы ученик не отказывался от решения уравнений, корни которых он **пока** найти не может: какую нужно выполнить операцию над числами, ребенок знает, а вот вычислить числовое значение корня не может.

К таким уравнениям относятся:

1) $10 - x = 20$
$x = 10 - 20$
2) $x \cdot 20 = 10$
$x = 10 : 20$
3) $x + 20 = 10$
$x = 10 - 20$
4) $10 : x = 20$
$x = 10 : 20$

Понятно, что числа 10 и 20 выбраны не случайно. С такими числами легко выполняются любые арифметические действия: $10 + 20$; $20 - 10$; $20 \cdot 10$ и $20 : 10$, однако каждое из перечисленных выше уравнений требует от ученика выполнения 2 из 4 перечисленных действий: вычитания и деления, с той разницей, что числа при этом поменялись местами. Такая «провокация» покажет, на что ориентируется ребенок, когда записывает действие для нахождения корня: на отношение между величинами или только на числа, действия с которыми он умеет выполнять.

Задания 19—24 позволят восстановить в памяти признаки делимости, о которых дети получили представление в 3 классе и к изучению которых они вернутся в 5 классе при рассмотрении темы «Сокращение обыкновенных дробей».

К заданиям 22 и 23 сделаем лишь несколько замечаний.

Так, в ***задании 22*** нужно составить многозначные числа только с помощью цифр 1 и 4.

Чтобы такое число делилось на 9, нужно, чтобы сумма цифр в записи числа тоже делилась на 9. Составить сумму цифр, равную 9, из 1 и 4 можно двумя способами: $9 = 4 + 4 + 1$, $9 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, отсюда ясно, что, переставляя цифры, можно составить множество чисел, сумма цифр которых равна 9. Дети же предлагают лишь некоторые из них. Например, 144, 414, 441, 141111 и т. п.

Сумму, равную 18, можно получить многими способами. Вот некоторые из них: $4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1$ — перестановки этого набора цифр дадут шестизначные числа, а замена любой четверки в виде суммы $1 + 1 + 1 + 1$ добавляет варианты перестановок и количества цифр в записи числа.

Аналогичны рассуждения относительно других сумм цифр, которые делятся на 9.

В ***задании 23*** для ответа на вопрос нет необходимости перемножать все числа из заданного интервала, так как первое произведение вообще равно 0, а все последующие будут оканчиваться нулем, так как среди множителей есть числа 2 и 5, а $2 \cdot 5 = 10$.

Произведение чисел от 1 до 99 содержит, кроме 2 и 5, еще и 4 и 25, числа 10, 20, 30 и т. д.

Перемножая эти числа, мы получим многозначные числа, имеющие не один, не два и даже не три нуля на конце, а значительно больше.

Сколько их — другой вопрос, ответ на который могут при желании поискать те дети, у которых уже определились как математические способности, так и круг интересов, в который входит и математика.

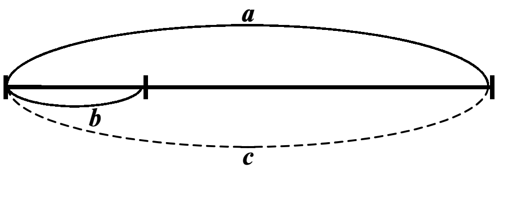
В отношении ***задания 25*** хочется напомнить, что предложение «составь такие же выражения» (равно как уравнения, задачи и т. д.) служит для диагностики. Важно проверить, что для каждого конкретного ученика означают слова «такое же», «такие же», «такой же», какие признаки выражения (уравнения, задачи) он выделяет как существенные, на что он ориентируется: на отношения между величинами или на что-либо другое.

Составить «такие же выражения» — это значит составить выражения типа $a \cdot 10^n : 10^n$, где $n \in N$ и $a \in N$, то есть вместо a можно взять любое натуральное число, которое умножается на число или произведение, записанное единицей с нулями, а затем это произведение нужно разделить на число, записанное единицей с тем же количеством нулей, сколько их в предыдущем множителе или множителях.

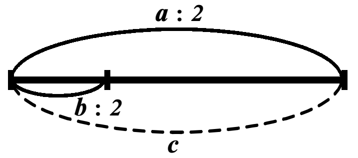
Другими словами, если ученик составляет, например, такое выражение: $2314 \cdot 100000 : 100000$ — или такое: $1000 \cdot 162 \cdot 1000 : 1000000$, то это значит, что он видит, в чем особенность данных выражений. А если он записывает 3 или 4 числа, над которыми производятся действия, аналогичные тем, которые даны, и в той же последовательности, или другие действия с тем же количеством компонентов действия, то это и означает, что он не смог выделить существенное отличие этих выражений, не увидел **закономерности**, которая должна была быть обнаружена. Ученик не разглядел **правила**, по которому составлялись выражения.

Такая форма постановки задания дает возможность увидеть учителю и самому ученику, умеет он выделить основные признаки или закономерности (правила) построения «рядов» заданий или нет.

Задание 26 задумано так, чтобы дать возможность ученикам сопоставить выражения и, воспользовавшись сочетательным и переместительным свойствами, заменить произведение $92 \cdot 44$ выражением $368 \cdot 11$, так как $92 \cdot (4 \cdot 11) = (92 \cdot 4) \cdot 11$, обнаружить во всех трех выражениях одинаковое слагаемое $368 \cdot 11$. Кроме этого, $4466 : 22 = 2233 : 11$, так как если в **одно и то же число** раз увеличить или уменьшить делимое и делитель, то частное не изменится. Конечно, такое преобразование вряд ли будет замечено массово, но такое «подозрение» может возникнуть после замены одного произведения на другое. Убедиться в правильности своей догадки ученик может (несмотря на запрет вычислений), выполнив деление, а утвердиться в том, что это не случайное равенство (имеется в виду то, что $4466 : 22 = 2233 : 11$), можно с помощью схемы:



Если a уменьшить в 2 раза и b уменьшить в 2 раза, то количество мерок (частей) не изменится:



Задания 27—29 как по содержанию, так и по формам организации их выполнения не нуждаются в комментариях.

Раздел «Проверь себя!» дублирует итоговую контрольную работу за 3 класс, инструкция к проведению которой опубликована как в предыдущей книге для учителя, так и в газете «Начальная школа» (приложение к газете «Первое сентября» в номере от 16 апреля 2001 года).

Способы проверки контрольных работ и их последующий анализ также описаны в предыдущих книгах.

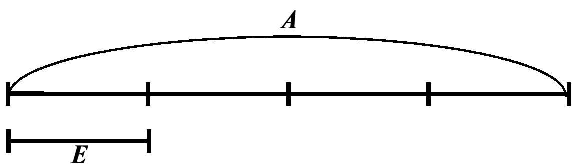
1.2. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН (6 ч)

Введение понятия десятичной дроби требует прежде всего анализа условий, при которых получаются однозначное и многозначное числа. Это, в свою очередь, означает, что возврат к ситуации опосредованного сравнения величин, которая приводит к измерению величин и их сравнению посредством чисел (мерка при измерении единая), дает возможность ученику вернуться к исходной ситуации. Такой возврат к старому для конструирования нового понятия позволяет одним ученикам переосмыслить (восстановить) принцип «устройства» числа, в частности многозначного, а другим — вновь построить для себя это понятие заново, как в «старых» условиях решения задачи измерения, так и в новых, изменившихся условиях.

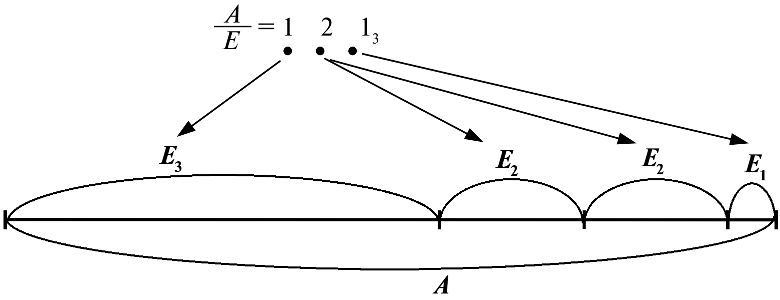
Таким образом, для постановки задачи на ***воспроизведение*** величины меньшей, чем заданная исходная (основная) мерка, необходимо восстановить две исходные ситуации.

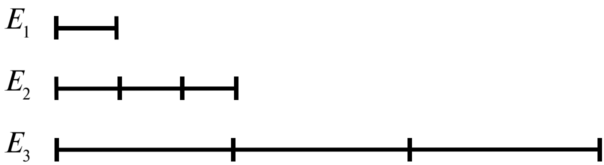
1) $A > E$

$\frac{A}{E} = 4$



2) $A >> E$ (A намного больше E)





$\frac{E_2}{E_1} = 3; \quad \frac{E_3}{E_2} = 3$

3 — основание системы счисления.

Для восстановления этих двух ситуаций, приводящих к понятию числа, предназначены задания 30—36.

В ***задании 30*** ученикам предлагается придумать способ организации совместной работы для того, чтобы быстро восстановить способы измерения различных величин.

Для этого дети, без сомнения, предложат разбиться на группы (если соответствующие формы работы регулярно использовались на уроках, а они подробно описаны в методических пособиях для учителя), распределив между ними виды величин: одни действуют с длиной, другие — с площадью, третьи — с объемом и т. д.

Учитель должен заранее подготовить предметы, обладающие нужным свойством, и мерки, соответствующие измеряемым величинам.

Результатом измерений должны быть однозначные и многозначные числа.

Прежде всего, важно вернуть учащихся к ситуации измерения, которая требует создания системы мерок в заданном отношении.

Задания 31 и ***35*** дают возможность измерить величину и записать число как результат измерения, а ***задания 32—34***, будучи обратными, позволяют по числу восстановить величину.

Задание 36 фактически подводит итог тех обсуждений, которые должны быть организованы в классе при выполнении предыдущих заданий.

Как только все три ситуации измерения, приводящие либо к записи числа как результата измерения (задание 36 (а, б)), либо к новому арифметическому действию (№ 36 (в)), будут рассмотрены и восстановлены, детям нужно предложить самостоятельно выполнить измерение данной величины с помощью заданной мерки и записать результат в двоичной системе мер.

Для этого сначала нужно построить саму систему мер, последней из изображенных должна быть мерка, которая больше, чем измеряемая величина, что дает возможность установить, сколько цифр должно быть в записи числа, и сделать заготовку.

Длина, которую нужно измерить, и основная мерка изображены в условии к ***заданию 37***, а под ключом, который нужен для восстановления в памяти того, что обсуждалось в классе, показан весь алгоритм измерения и способ измерения величины (здесь речь пойдет об остатке), которая оказалась меньше основной мерки. Показана и общепринятая форма записи позиционных дробей: с запятой у нас и точкой во всех других европейских странах. В США и других странах мира для отделения целой части от дробной используют точку, а запятой отделяют классы. Запись 13,246.3 означает, что речь идет о числе 13 тысяч 246 целых 3 десятых. В российском варианте все с точностью до наоборот (правда, как правило, в печатных изданиях, в том числе в учебниках, пользуются не точкой для отделения классов, а пробелом: 13 246,3).

Итак, в задании 37 под ключом прописаны все этапы рассуждений, приводящие к понятию позиционной дроби.

Задание 38 закрепляет сконструированный способ действия на примере измерения площади.

Это задание, так же как и предыдущее, сначала «проиграем» в классе.

Для этого нужно в масштабе вырезать фигуры площадью *А* («делить» на части, как в учебнике, не надо) и дать основную меру (квадратный сантиметр). Фигуры и мера должны отличаться друг от друга цветом.

Затем нужно вырезать (работа может быть парной) мерки для измерения в двоичной системе мер. Это значит, что сначала надо нарисовать укрупненные мерки (до мерки E_4, чтобы показать, что она больше A), а затем вырезать их и начать измерение, вписывая результаты в таблицу, которая должна быть перенесена на доску.

Так как должен быть остаток, то основную мерку нужно уменьшить в 2 раза (перегибанием) и приложить. Затем процедуру уменьшения повторить до тех пор, пока измерение не закончится (а в этом задании именно такой задана площадь A), и вписать каждый результат в таблицу.

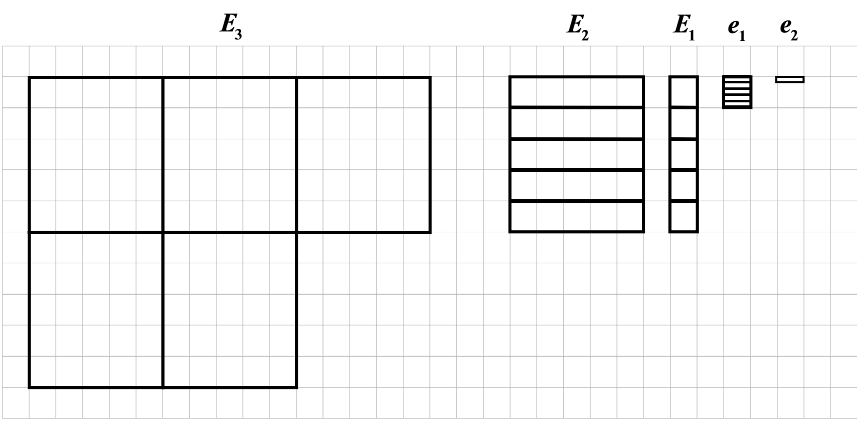
Задание 39 — обратное.

Можно вписать числа в таблицу, построить фигуру, площадь которой выражена, к примеру, числом $231{,}22_5$.

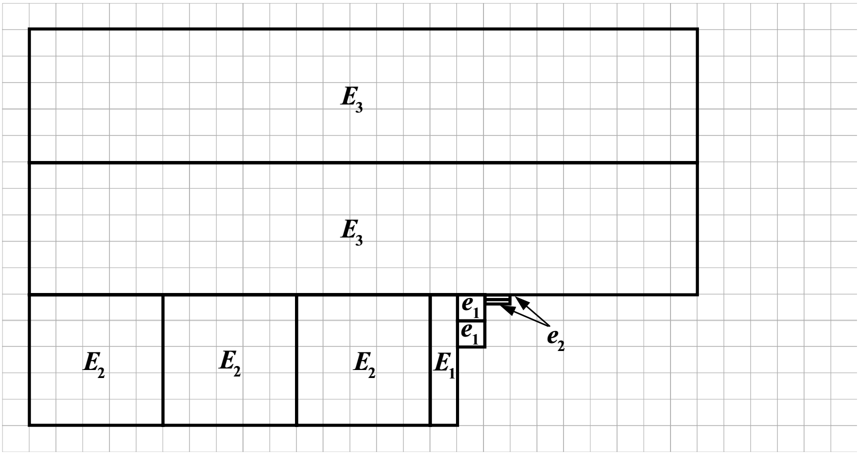
Основную мерку удобно выбрать площадью 5 клеток, поскольку уменьшать основную мерку придется дважды в 5 раз, так как основание системы счисления равно 5. При введении понятия многозначного числа, а теперь и позиционной дроби было установлено, что основание системы счисления показывает, во сколько раз нужно увеличивать или уменьшать основную мерку, которая может быть либо задана, либо выбрана произвольно.

В данной ситуации мерку удобно выбрать самим (форма мерки для исследований способов записи числа и восстановления по числу величины значения не имеет).

Итак, если мы предложим ученикам с помощью мерки в 5 клеток построить фигуру площадью $231{,}22_5$, то сначала нужно показать мерки, которые понадобятся:



Затем построить фигуру, площадь которой выражена числом $231{,}22_5$:



Вопрос, который подлежит обсуждению, связан с чтением позиционных дробей. Ответ на него дан под ключом.

Так же как и всегда, ключи в классе не читаются. Ими ученик может воспользоваться дома, а в классе сначала выслушиваются предложения детей, а лишь затем сообщаются общепринятые способы чтения позиционных дробей.

Перед тем как перейти к выполнению следующего задания, нужно предложить прочитать дроби:

$3{,}1_5$; $0{,}21_3$; $0{,}7_{10}$; $0{,}16$; $1325{,}183_{10}$.

На данном этапе десятичные дроби читаются так же, как и любые недесятичные: перечислением цифр в целой части, затем в дробной с указанием основания системы счисления. Кстати говоря, дети при конструировании записи позиционной дроби пытаются сначала записать основание системы счисления так: $111_2 11$, отделяя им целую часть от дробной. Однако на вопрос о том, относится число 2 только к способу образования мерок в целой части или к дробной тоже, дети, как правило, говорят, что число 2 сообщает и об увеличении мерки, и об уменьшении, поэтому его надо писать в конце числа. Значит, необходимо отделить одну часть числа от другой специальным значком, например «палочкой», «галочкой»:

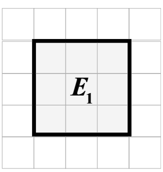
111 | 11 или 111✓11 и т. п.

Теперь, кроме той записи, в которой запятой мы отделяем целую часть от дробной (в калькуляторе используется точка), можно показать для некоторых дробей и другую форму записи (смотрите раздел «Это интересно!» в учебнике, книга 1): дробь $0{,}7_{10}$ записывают как $\frac{7}{10}$ и читают «семь десятых» (это 7 из 10 равных частей). Число 10 рассказывает о том, что **основную мерку** уменьшили в 10 раз, т. е. **разделили на 10 равных** частей, и получили **новую мерку**, **которая уместилась в измеряемой величине 7 раз**. Запись $\frac{A}{E} = \frac{7}{10}$ объясняет смысл такого размещения чисел: число 10 под чертой (знаменатель) сообщает о том, как получили новую **мерку**, а число 7 над чертой — о том, **сколько раз** новая мерка уместилась ***в величине А*** (числителе). Другими словами, число 10 рассказывает о том, что нужно сделать с меркой E, а число 7 — о том, чему равна величина A.

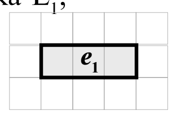
Аналогичным образом можно записать и числа $0{,}1_6 = \frac{1}{6}$; $3{,}1_5 = 3\frac{1}{5}$.

Для сведения: число $0{,}21_3$ записать обыкновенной дробью, у которой и числитель, и знаменатель записываются числами в десятичной системе счисления, можно только в виде суммы:

$0{,}21_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$, так как вторая после запятой мерка получена из предыдущей уменьшением в 3 раза, а по отношению к основной она уже в 9 раз меньше. Если основная мерка E_1,



то e_1 в 3 раза меньше, чем E_1,

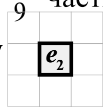


,

а e_2 в 3 раза меньше e_1

и составляет $\frac{1}{9}$ часть мерки E_1,

т. е. 1 клетку



.

Однако нет необходимости на данном этапе обучения показывать различные способы перевода из одной формы записи в другую. Вполне достаточно показать записи $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{9}$, которые соответствуют по смыслу такой форме записи: $0{,}3_7$; $0{,}2_5$; $0{,}1_9$.

Соотнесение разных видов дробей предлагается лишь для ознакомления и может быть рекомендовано только для классов, достаточно «продвинутых» в изучении математики. Перевод позиционных дробей в обыкновенные и наоборот станет предметом специального исследования в 5 классе в период обучения обыкновенным дробям и действиям с ними. Запись некоторых обыкновенных дробей (в том числе перечисленных выше) в форме позиционных поможет ученикам позже более глубоко осознать причины, по которым нельзя выполнять сложение и вычитание дробей с разными знаменателями (мерками).

Сложить (вычесть) два числа, записанные в разных системах счисления, $0{,}3_5 + 0{,}7_9$ все равно что сложить $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{9}$. Оба числа получены в результате измерения разными мерками. В одном случае меркой, которая в 5 раз меньше основной, а во втором — в 9 раз меньше.

Итак, прежде чем конструировать способы сравнения, сложения, вычитания, умножения и деления позиционных дробей, в том числе десятичных, необходимо дать возможность ученикам глубже осознать взаимосвязь:

$$\boxed{\text{дробное число}} \longleftrightarrow \boxed{\text{измеряемая величина}}$$

С этой целью предлагаются ***задания 40—43***.

1.3. ЗАПИСЬ И ЧТЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ И ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ (10 ч)

В ***задании 44*** показано, как образовывались названия разрядов **после запятой** по отношению к соответствующему разряду **до запятой**. К сожалению, учебник издан только в 2 цвета, поэтому в классе лучше использовать цветные мелки на доске и фломастеры на бумаге, для того чтобы показать одни пары соответствующих разрядов одним цветом, а другие пары — другим.

Итак, чтобы прочесть правильно дробную часть (целая часть дроби — число натуральное или 0, а такие числа дети читать умеют), можно:

1) прикрыть рукой, листом бумаги или пальцем целую часть дроби вместе с запятой;

2) прочитать число после запятой так, как бы ты прочитал любое натуральное число, не обращая внимания на нули перед числом, если они есть.

К примеру, если после запятой число записано так:

$\square$, 0037, то это число 37 (тридцать семь), на нули внимания не обращаем (этот способ детям знаком со 2 класса);

3) прочитав число 37, нужно далее указать название последнего разряда (если он отличен от нуля). Здесь мы имеем дело с 4-м разрядом — разрядом десятитысячных долей (этот разряд симметричен относительно разряда единиц разряду десятков тысяч, поэтому его и называют разрядом десятитысячных). Значит, после запятой написано число 37 десятитысячных.

Способ, которым обычно пользуются для прочтения десятичных дробей, которые изучают после обыкновенных, выглядит так. Мысленно представим запись десятичной дроби в форме обыкновенной. Для этого необходимо:

1) сначала посчитать, сколько цифр после запятой (в нашем примере их 4);

2) мысленно записать в знаменателе единицу с 4 нулями;

3) прочитать число, записанное единицей с 4 нулями, для чего нужно либо мысленно разбить это число на классы, а разбиение нужно сделать справа налево, удерживая в памяти то, что в нашем примере это единица с 4 нулями, либо знать «на зубок», как читается число, записанное единицей с 4 нулями, с 5, 6, 3 и т. д.

4) назвать дробную часть числа:

$$\square,0037 = \square\,\frac{37}{\underbrace{10}\,\underbrace{000}}$$

Способ прочтения, который задается в нашем случае, как показала многолетняя практика, для обычного школьника гораздо легче. Он не требует от него никаких мысленных усилий, кроме последовательного проговаривания названий разрядов после запятой: **десятые** (ему соответствует в целой части разряд **десятков**), сотые (сотни), тысячные (тысячи), десятитысячные (десятки тысяч), стотысячные (сотни тысяч) и т. д. Таким образом, вместе с детьми очень важно выяснить, **от чего** будет зависеть умение читать десятичные дроби, что нужно хорошо знать. Ответ прост: достаточно знать названия разрядов в целой части числа, т. е. при записи многозначных чисел. Именно это и нужно проверить в устной или письменной форме, предложив детям на скорость записать названия разрядов в порядке возрастания в целой части начиная от разряда единиц, а затем название разрядов в порядке убывания в дробной части. Заучивать заранее названия разрядов не нужно. Обсуждение необходимости этих знаний и тренировочные упражнения должны появиться тогда, когда эта проблема возникнет.

Можно организовать игру: один называет любой разряд в целой или дробной части, другой должен назвать его «соседей» слева и справа. Можно написать названия первых 5—6 разрядов в целой и соответствующих в дробной части на отдельных карточках, перемешать их, как в домино, а затем поочередно (игра в паре) выкладывать парами: десятки — десятые и т. д.

Далее ***задания 45—52*** дадут возможность детям потренироваться, в записи, чтении и наборе чисел на микрокалькуляторе.

Добавим лишь, что в ***задании 51*** под «ловушками» имеются в виду числа, которые заданы указанием количества уменьшенных мерок, притом что в числе может быть целая часть. Значит, чтобы сделать для них заготовки, а затем прочитать дроби, нужно правильно определить порядковый номер разряда после запятой.

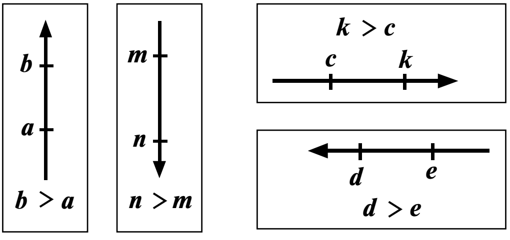
Лучше всего использовать разрядную таблицу, которая должна быть в любом классе (по типу кассы букв и цифр в 1 классе, с прозрачными рядами карманов, куда можно вставлять цифры).

Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы	,	Десятые	Сотые	Тысячные	Десятитысячные
				2	**,**	**3**	**7**		
				6	**,**	**3**			
				8	**,**	**2**	**0**	**7**	
			4	**2**	**,**	**1**	**3**		

Можно использовать и другое пособие, которое описано дальше.

При выполнении ***задания 53*** важно, чтобы дети установили: чтобы показать место любой десятичной дроби на числовой прямой, достаточно научиться находить место дробей, меньших 1, рассмотрев интервал от 0 до 1.

Умение показывать место числа на числовой прямой позволяет сравнивать числа по их расположению: из двух чисел всегда больше то, которое дальше по направлению:



Не все числа из задания 53 — дроби. Так, числа 2 и 3 не дроби, а число 5,0 показывает, что любое целое число может быть представлено в виде дроби. Как правило, если после запятой или в конце дроби стоит нуль (3,50), то это число получено в результате округления, это приближенное значение.

Задания 54—62 помогут детям понять, когда нули можно не писать, а когда нельзя: так, нули перед целой частью числа можно опустить, но можно и дописать, если необходимо.

Если же дробь заканчивается нулями, то их можно опустить, но если необходимо, то их можно дописывать столько, сколько нужно.

После этих операций получится дробь, равная данной. В этом нетрудно убедиться, изобразив числа на числовой прямой.

Например:

5,0 = 5; 0,30 = 0,300 = 0, 3000

0,8000 = 0,800 = 0, 80 = 0,8

Задания, аналогичные предыдущим, а также из раздела «Проверь себя!» можно использовать для проверочных работ, арифметических диктантов.

Ситуация успеха для ученика, которая создана учителем по отношению к способу определения места числа на числовой прямой, может и должна превратиться в ее противоположность, и вот почему.

Ребенок без труда мог показать на числовой прямой точку, соответствующую числам 0,7; 1,3; 8,2 и им подобным, а указать точное место числа с несколькими десятичными знаками после запятой практически невозможно. Это значит, возникает необходимость находить приближенное значение числа с тем, чтобы приблизительно показать место этого числа. Другими словами, речь идет об округлении десятичных дробей.

Задания 63—73 дают возможность как учителю, так и ученику получить подробное представление о способах округления с избытком (***задание 63***) и с недостатком (***задание 64***), как многозначных чисел, так и дробей.

Как было неоднократно замечено, введение нового понятия или способа действия не принято предлагать детям в готовом виде, в том числе и изучение способов округления, сравнения десятичных дробей и выполнения арифметических действий. Сначала создается ситуация успеха, когда ребенок, оценивая свои умения, готов показать решение того или иного задания и обосновать свой способ действия. Затем эта ситуация оборачивается по-иному, поскольку изменились исходные условия. Так, место числа 3,5 ребенок свободно мог показать на числовой прямой, а вот точное место числа 3,578 уже не может, а раз он не может показать место этого числа и многих других, то и сравнить с помощью числовой прямой он сможет не каждую пару чисел. Поэтому конструирование способов сравнения десятичных дробей производится, опираясь на сравнение величин.

Так, в ***задании 74*** ученикам предлагается соотнести площади фигур и соответствующих им чисел. Переход от сравнения площадей к сравнению чисел позволит сформировать способ сравнения (***задание 75***):

1) сначала сравнивают целые части: из двух дробей больше та, у которой больше целая часть.

Например: 9 ,875 < 10 ,2, так как 9 < 10. Поскольку дробная часть в этом случае значения не имеет, ее лучше прикрывать;

2) если целые части у дробей равные, то сравнивают дробные части поразрядно начиная со старшего разряда, т. е. с разряда десятых. Это значит, что теперь нужно прикрыть целую часть вместе с запятой и сравнить следующие после запятой цифры (и лучше выделить цветом).

Если же в разряде десятых тоже оказались одинаковые цифры, то переходят к сравнению чисел в следующих разрядах — разрядах сотых, не обращая внимания на остальные разряды.

Например: 5, 2 **7** 6 > 5, 2 **6**

5 = 5   2 = 2   **7 > 6**

Существует и другой способ сравнения десятичных дробей. Так, в учебнике 5 класса авторов Н. Я. Виленкина, В. И. Жохова, А. С. Чеснокова и др. предлагается следующее:

«Чтобы сравнить две десятичные дроби, надо сначала уравнять у них число десятичных знаков, приписав к одной из них справа нули, а потом, отбросив запятую, сравнить получившиеся натуральные числа».

Объяснение такого способа достаточно просто.

Если нужно сравнить дроби 5,832 и 5,86, то сначала уравняем число десятичных знаков, приписав к числу 5,86 справа нуль. Получаем дроби 5,832 и 5,860. Далее каждую из этих дробей записывают в виде обыкновенной неправильной дроби, поскольку по определению десятичная дробь — это обыкновенная дробь со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д., которую условились записывать без знаменателя. Поэтому:

$$5{,}832 = 5\frac{832}{1000} = \frac{5832}{1000}; \qquad 5{,}860 = 5\frac{860}{1000} = \frac{5860}{1000}$$

У этих дробей одинаковые знаменатели, значит, та из них больше, у которой больше числитель.

Так как 5860 > 5832, то $\frac{5860}{1000} > \frac{5832}{1000}$, а значит, 5,860 > 5,832, т. е. 5,86 > 5,832 или 5,832 < 5,86.

Такой способ сравнения **не может быть** использован в нашем случае для сравнения десятичных дробей, поскольку никакой потребности в преобразовании десятичной дроби не возникает. Сохраняется основной принцип сравнения многозначных чисел и действий с ними — **поразрядность**.

Обратим внимание лишь на то, как читаются десятичные дроби, если записан результат сравнения.

Например, неравенство 6,25 < 8,047 читают так: шесть целых двадцать пять сотых меньше восьми целых сорока семи тысячных.

Равенство 4,03 = 4,030 читают так: четыре целых три сотых равно четырем целым тридцати тысячным.

Другими словами, при чтении десятичных дробей все их части склоняются.

Если ученик сомневается в правильном чтении, то можно избежать склонения, прочитав то же неравенство таким образом: дробь (число) шесть целых двадцать пять сотых меньше, чем дробь (число) восемь целых сорок семь тысячных.

Задания 76—82 помогут ученикам овладеть способами сравнения позиционных дробей.

Задание 83 и ***задания из раздела «Проверь себя!»*** можно использовать целиком или частично для проверочных, тестовых или контрольных работ с последующим анализом ошибок, которые могут быть допущены при сравнении многозначных чисел и дробей. Лучше во избежание ошибок при сравнении дробей использовать цветные карандаши. Одинаковые цифры в соответствующих разрядах навести сверху одинаковым цветом, а цифры в разрядах, сравнение которых дает возможность сделать окончательный вывод, фиксировать разными цветами. Можно маркерами дать фон разного цвета.

1.4. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ЧИСЛАМИ И ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ (26 ч)

В ***задании 84*** детям предлагается разделить все выражения на две группы: в одну — те, значения которых ученик может найти, а во вторую — все остальные, куда должны попасть примеры на все действия с десятичными дробями.

Выполнять действия с натуральными числами не нужно. Это задание предназначено для оценки учеником своих знаний без выполнения каких-либо вычислений.

Задание 84, как и многие предыдущие, записывается на доске, а не читается по книге. Учитель ставит «галочки», а еще лучше — обводит цветным мелом те выражения, которые дети оценивают как незнакомые, т. е. такие, которые они не умеют выполнять. Например, в рамку попадут такие выражения из первого столбика:

$$\boxed{0{,}07 \cdot 0{,}007}$$

$$\boxed{6{,}3500 \cdot 6{,}35}$$

$$\boxed{20{,}3_4 - 1{,}1_4}$$

и т. д.

Такое предварительное действие оценки позволяет ученикам четко сформулировать те задачи, которые им предстоит решать в дальнейшем: научиться выполнять действия с позиционными дробями, в том числе с десятичными. А пока пусть они попробуют сформулировать основной принцип, лежащий в основе выполнения любого арифметического действия с многозначными числами.

Понятно, что речь опять идет о принципе поразрядности.

Вот теперь-то уместно предложить ученикам сделать предположение относительно того, как выполняются действия с десятичными дробями, и дать обоснование такого предположения: «Поскольку образование десятичных дробей базируется на измерении величин, то, вероятно, и действия с дробями выполняются на тех же основаниях, что и действия с многозначными числами».

В отличие от задания 84, в ***задании 85*** в рамку должны попасть те задания, которые ученик может выполнить. К ним будут отнесены задания на сравнение десятичных дробей. Пусть дети выполнят их.

Последовательность решения задач, связанных с изучением способов выполнения сложения и вычитания десятичных дробей на примере позиционных дробей, взятых в четвертичной системе счисления, подробно построена и прописана под ключами в ***заданиях 80—96***.

В **задании 92** необходимо обсудить вопрос о переместительном и сочетательном свойствах сложения, выполняемых с десятичными дробями. Десятичные дроби, как и натуральные числа, появились в результате измерения величин, сложение которых обладает указанными свойствами. Это значит, что сложение десятичных дробей, как и сложение натуральных чисел, подчиняется переместительному и сочетательному законам. Аналогичные рассуждения относятся и к свойствам умножения (**задания 110 и 118**).

В **задании 94** можно предложить детям вместо *а, в* и *с* подобрать дробные числа и вычислить значение корня, а в **задании 95** данные величины записать как 236,7 кг и т. п.

Поскольку изучение действий сложения и вычитания десятичных дробей и набор предлагаемых упражнений для осмысления способа выполнения этих действий полностью соответствуют методике изучения аналогичных действий с многозначными числами, то ее подробное описание опустим. Достаточно воспользоваться книгой для учителя «Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс» (М.: Вита-Пресс, 2001).

Для поиска и конструирования способа умножения и деления десятичных дробей понадобится умение умножать и делить десятичные дроби на 10, 100 и т. д.

Для сведения: эти числа называют степенью числа 10, так как $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$ и т. д.

Для введения операций умножения и деления десятичной дроби на степень числа 10, т. е. на 10, 100, 1000, 10000 и т. д., в ***задании 97*** ученикам предлагается сравнить десятичные дроби, записанные с помощью одних и тех же цифр, но с запятой в разных местах: 32,6 и 3,26. При работе с этими числами воспользуйтесь пособием, которое можно изготовить самим. Его описание дано ниже в разделе «Деление десятичных дробей».

Анализ отношений между этими числами и обсуждение того, какую информацию несет в себе одна и та же цифра, записанная в разных разрядах, дают возможность ввести умножение и обратное действие — деление — на 10, 100, 1000 и т. д.

В ***задании 98*** показаны дополнительные значки, которые дают ученикам зрительную опору при выполнении действий, а **задания 99 и 100** дают возможность ими воспользоваться.

Заметим, что использование цвета, различных значков, акцентирующих внимание ребенка на особенностях того или иного способа действия, особенно значимо для слабого ребенка.

Еще одно замечание. Начиная с 1 класса, многие задания сопровождаются вопросом: «Что интересного тебе удалось заметить?», но при этом не уточняется, на что нужно было бы обратить внимание. И вот почему.

Использование такого методического приема не случайно, поскольку, как и другие приемы (в частности, с придумыванием «таких же» заданий), он помогает учителю понять, на что обращает внимание ребенок: на математические связи и отношения или нет, какие признаки он выделяет: существенные или нет. Такой прием, как показывает практика, дает возможность на любое содержание посмотреть шире и глубже.

Например, в ***задании 101,*** кроме того, что дети наверняка обратят внимание на то, что при умножении и последующем делении каждого числа на 10, 100, 1000 они вновь получают исходное число (это свойство оформляется в следующем ***задании 102***), ученики могут заметить, что при умножении 6,8 на 100 или 1000 нужно дробь «удлинить», т. е. записать 1 или 2 нуля справа, а при делении — слева.

Текст, который дан после обсуждаемого вопроса, носит характер подсказки и, как уже было неоднократно замечено, по книге не читается, а воспроизводится учителем.

Обсуждение ***заданий 102 и 103*** дает возможность перейти к конструированию способа умножения десятичных дробей.

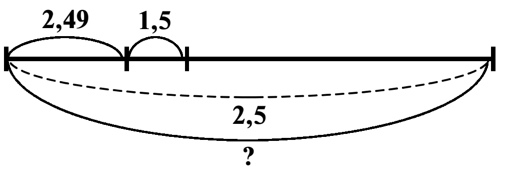
Основная идея и обоснование способа базируются на обнаруженном свойстве: если данное число (или выражение) увеличить в несколько раз, а затем уменьшить во столько же раз, то получим число, равное данному.

Поэтому, умея перемножать многозначные натуральные числа, мы можем «свести» к этому способу умножение десятичных дробей, превратив каждый множитель в натуральное число (***задание 103***). Эта идея, которую, как правило, предлагали школьники при обсуждении способа умножения десятичных дробей, прописана под ключом в ***задании 104***.

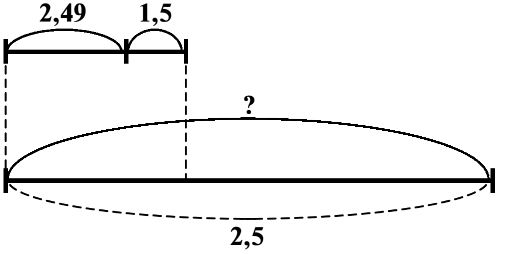
В одном из номеров журнала «Вестник» (Международной ассоциации «Развивающее обучение») в рубрике «Открытый урок» была опубликована статья учителя из г. Красноярска, описывающая серию уроков по теме «Умножение десятичных дробей». Вот фрагмент этой статьи для ее последующего обсуждения.

«Детям, — пишет учитель, — была предложена задача: «Объем кувшина 2,49 литра, объем вазы 1,5 литра. Найдите объем бидона для молока, если объем вазы и кувшина в 2,5 раза меньше объема бидона». Записав условия задачи, ребята начали делать схемы к ней. Наташа и Дима первые подняли руки и вышли к доске, где показали свои схемы.

Н



Д



С этими схемами ребята согласились, и других вариантов практически не было. У доски осталась Наташа и сказала: «Теперь нужно сложить 2,49 и 1,5, чтобы узнать ту величину, которую нужно взять 2,5 раза». Она выполнила это действие: 2,49 + 1,5 = 3,99.

Вслед за этим у ребят возникли вопросы: «Как можно 3,99 умножить на 2,5? Как выполнить это умножение?» Выслушав вопросы ребят, я предложила им поработать в группах и попытаться выполнить это действие. Через некоторое время ребята предложили первые варианты, которые были затем записаны на доске:

I. $3{,}99 \times 2{,}5 = ?$

1) $$\begin{array}{r} 3{,}99 \\ +3{,}99 \\ \hline 7{,}98 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r|l} 3{,}99 & 2 \\ \cline{2-2} -2 & 1{,}995 \\ \cline{1-1} 19 & \\ -18 & \\ \cline{1-1} 19 & \\ -18 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ -10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 7{,}980 \\ +1{,}995 \\ \hline 9{,}975 \end{array}$$

II. $$\begin{array}{r} 3{,}99 \\ \times 2{,}5 \\ \hline 1995 \\ +798 \\ \hline 99{,}750 \end{array}$$

III. $$\begin{array}{r} 3{,}99 \\ \times 2{,}5 \\ \hline 1995 \\ +798 \\ \hline 997{,}50 \end{array}$$

IV. $$\begin{array}{r} 3{,}99 \\ \times 2{,}5 \\ \hline 1995 \\ +798 \\ \hline 9{,}9750 \end{array}$$

Затем началось обсуждение этих вариантов. Главный вопрос, который возник, касался расстановки запятой. Обсуждение началось со II группы, ее представляла Оля. Ее объяснение было таким: «Мы решили записать целые части под целыми, а дробные под дробными, как при сложении десятичных дробей. А дальше стали умножать как обычные многозначные числа, только не знали, как поставить запятую. Потом посчитали, сколько цифр после запятой в первой дроби, а потом во второй, сложили, и получилось 3. Отсчитали с конца результата три цифры и поставили запятую. У нас получилось девяносто девять целых семьдесят пять сотых». Результат III группы представил Дима: «А мы запятую не так поставили. До запятой мы так же делали, как и II группа, но запятую — не так. Мы посчитали цифры после запятой в первой дроби и во второй. И там, и там по две, значит, и в результате будет две цифры после запятой. А потом отсчитали с конца две цифры и поставили запятую». IV группу защищал Денис, он сказал: «Мы тоже умножали как II группа, но количество цифр в первой и во второй дроби они посчитали неправильно. Они забыли поставить ноль во второй дроби и поэтому его не посчитали. II группа сосчитала три знака после запятой, а надо четыре, тогда получится девять целых девятьсот семьдесят пять тысячных». О результате I группы рассказал Паша: «А мы рассуждали не так, как все остальные. Мы сначала посмотрели на само число 2,5 и решили, что оно состоит из двойки и еще из половинки. Вначале мы умножили на два, но умножение заменили сложением, ведь мы уже умеем складывать. У нас получилось семь целых девяносто восемь сотых. Теперь нам надо к этому числу прибавить половину от 3,99. Для того чтобы найти половину, мы 3,99 разделили на 2, и у нас получилась одна целая девятьсот девяносто пять тысячных. Теперь сложим 7,98 и 1,995 — получилось девять целых девятьсот семьдесят пять тысячных».

После всех объяснений я задала вопрос: «Кто же из первых трех выступавших групп был прав при расстановке запятой?» Ребята сразу сказали, что IV группа. Я попросила объяснить. Встала Катя и сказала: «Раз I группа и IV группа делали разными способами, а результат один и тот же, значит, IV группа поставила запятую правильно». После Кати встал Паша и сказал: «Я понял, нам не надо так долго вычислять, можно проще. Записываем десятичные дроби в столбик и умножаем как обычные многозначные числа, записываем результат и считаем, сколько цифр после запятой в первой дроби и во второй вместе. Затем отсчитываем с конца такое же количество цифр и ставим запятую». Когда Паша закончил, я сказала: «Вы все молодцы, хорошо поработали. Паше особая благодарность за то, что он сделал такой хороший вывод. Действительно, в науке существует алгоритм умножения десятичных дробей. Две десятичные дроби умножаются так же, как целые многозначные числа, не обращая внимания на запятую. Затем ставят в результате запятую, пользуясь следующим правилом: в произведении число знаков после запятой равно сумме знаков после запятой в обеих дробях». На этом урок был закончен»[1].

Поскольку к этому и последующим фрагментам статьи в журнале нет комментария, то хотелось бы прежде всего обратить внимание на следующее. Возможно, автор статьи опустил в описании урока одно из важнейших звеньев в рассуждениях детей относительно **способа** определения места запятой в произведении и, что самое важное, — **обоснование способа**.

Логика рассуждений детей понятна: для умножения столбиком подписать дроби друг под другом поразрядно, т. е. так, как при сложении и вычитании десятичных дробей. Но тогда логично запятую в произведении писать под запятой, что практически и предложила III группа, правда, из текста и образца записи неясно, почему у второй дроби 2,5 две цифры после запятой. Видимо, дети дописали к числу 2,5 нуль, и тогда запись у детей должна была выглядеть так:

$$\begin{array}{r|c|l} 2 & , & 9\ 9 \\ \times\ 2 & , & 5\ 0 \\ \hline 199 & & 5 \\ 798 & & \\ \hline 997 & , & 5\ 0 \end{array}$$

Похоже, что в журнале допущены опечатки (сдвинуты цифры), и из представленных записей непонятно, откуда появились нули в произведениях у II, III и IV групп.

Кроме этого, совершенно непонятно, почему в тексте не рассказано о том, почему ученики второй и четвертой групп **вдруг** начали считать, сколько всего цифр после запятой в обеих дробях.

Такие рассуждения детей могут свидетельствовать лишь о том, что без всякого на то обоснования, без разумного объяснения ученики перебирали возможные варианты определения места запятой в произведении или кто-либо из детей знал способ умножения из других источников. Хотелось бы предостеречь от таких методов «бездумного» поиска не только правила умножения десятичных дробей, но и любого другого способа действия.

[1] Вестник МАРО. — Москва — Рига, окт., 1996. С. 85—87.

Любая высказанная ребенком или учителем мысль должна иметь какое-либо обоснование, быть как-то аргументирована.

Хочется думать, что на описанном уроке на самом деле так и было.

Основной подход к конструированию действий с десятичными дробями заключается в том, чтобы свести эти действия к действиям с многозначными числами, которые дети уже умеют выполнять.

Поэтому если мы увеличим один множитель в 100 раз, а другой в 10 раз, произведение $3{,}99 \cdot 2{,}5$ может быть найдено путем перемножения чисел 399 и 25 с последующим уменьшением результата теперь уже в 1000 раз ($10 \cdot 100 = 1000$).

$$\begin{array}{r} 399 \\ \times\ 25 \\ \hline +\,1995 \\ 7980\ \\ \hline 9975 \end{array}$$

Значит, $3,\underbrace{9\,9}_{2\text{ цифры}} \times 2,\underbrace{5}_{1\text{ цифра}} = 9,\underbrace{9\,7\,5}_{3\text{ цифры}}$

Чтобы дважды не переписывать произведение, договорились:

1) подписывать десятичные дроби столбиком так же, как если бы это были многозначные числа. Это значит, что не нужно обращать внимания на запятые. Для этого их можно прикрыть специально изготовленными «заглушками», поскольку для некоторых детей очень трудно смотреть на что-то и при этом это «что-то» не видеть, не замечать, не обращать внимания. В нашем случае дети должны при наличии запятых их не видеть, что очень непросто. Далее, в разделе «Деление десятичных дробей» описано пособие, которое можно изготовить перед введением умножения десятичных дробей.

$$\begin{array}{r} 3{,}9\,9 \\ \times\ 2{,}5 \\ \hline \end{array}$$

2) выполнить умножение, как умножение натуральных чисел, т. е. не обращая внимания на запятые:

$$\begin{array}{rl} 3{,}9\,9 & \\ \times\ 2{,}5 & \\ \hline +\,1\,9\,9\,5 & \\ 7\,9\,8\,0 & \longleftarrow \text{ этот нуль можно не писать} \\ \hline 9\,9\,7\,5 & \end{array}$$

3) в произведении справа налево отделить запятой 3 цифры — столько, сколько их было в обоих множителях:

$$\begin{array}{rl} 3{,}99 & \longleftarrow \text{2 цифры после запятой} \\ \times\quad 2{,}5 & \longleftarrow \text{1 цифра после запятой} \\ \hline +\,1995 & \\ 7980 & \\ \hline 9{,}975 & \longleftarrow \text{3 цифры после запятой} \end{array}$$

Задания 105—125 ориентированы на осмысление учениками каждого из трех перечисленных шагов (операций) при умножении десятичных дробей.

Эти задания дают возможность ученику, тренируясь в умножении десятичных дробей, тем самым **приобретать навык умножения многозначных чисел**. Продолжим и анализ того, какие ошибки могут быть допущены при умножении многозначных (натуральных) чисел и при умножении десятичных дробей.

По ходу изучения десятичных дробей могут быть проведены контрольные работы по проверке навыков действий с натуральными многозначными числами, выполнение которых приобрело для ребенка новый смысл и значимость.

Использование действий с многозначными числами для выполнения действий с десятичными дробями является мощным стимулом для повышения интереса к изучению математики.

Задание 126 вновь предлагает ученику оценить свои умения, выбрав лишь те выражения, значения которых он может найти.

Предполагается, что к заданиям, которые он может выполнить, он отнесет **все** случаи, кроме деления, когда один из компонентов действия или оба — десятичные дроби.

Поскольку ученику предлагается не просто отделить задания, которые он умеет выполнять, от заданий, над которыми нужно задуматься, а выполнить эти задания, то порядок работы может быть определен следующим образом: либо выполнять по порядку те вычисления, которыми он владеет, либо сначала выполнить поочередно сложение, вычитание и умножение, а эти действия он умеет выполнять как с натуральными числами, так и с десятичными дробями, а затем перейти к действию деления. Причем деление натурального числа на натуральное ребенок наверняка оценит как хорошо известное. Вот тут-то его и поджидает «ловушка», о которой он пока не догадывается: при делении окажется остаток, и необходимо разобраться, как с ним теперь нужно поступить. До знакомства с десятичными дробями форма записи была такова: 931 : 25 = 37 (ост. 6).

$$\begin{array}{r|l} -\,931 & 25 \\ \underline{75} & 37 \\ -\,181 & \\ \underline{175} & \\ 6 & \end{array}$$

Теперь, когда мы знакомы с десятичными дробями, становится очевидным, что в результате может быть дробное число (если вернуться к величинам, то ясно, что речь идет об измерении остатка, который выражается дробным числом, показывающим способ действия с основной меркой).

Поэтому, как только появился остаток, ясно, что целая часть числа закончена, а значит, нужно поставить запятую как в частном, так и в делимом:

$$\begin{array}{r|l} -\,931, & 25 \\ \underline{75,} & 37, \\ -\,181 & \\ \underline{175} & \\ 6 & \end{array}$$

Чтобы узнать первую цифру после запятой, припишем нуль в делимом, снесем этот нуль и продолжим деление.

Если опять останется остаток, припишем еще один нуль в делимом (отчего делимое не изменится) и продолжим деление.

$$\begin{array}{r|l} -\,931{,}00 & 25 \\ \underline{75\phantom{1{,}00}} & 37{,}24 \\ -\,181\phantom{{,}00} & \\ \underline{175\phantom{{,}00}} & \\ -\,60 & \\ \underline{50} & \\ -\,100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array}$$

Деление окончено. В частном получена **конечная** десятичная дробь.

К сведению: так оказывается не всегда. Результатом деления двух чисел, в том числе и натуральных, может оказаться как натуральное число, так и дробное, а дробное число может быть конечной десятичной дробью, но может быть и бесконечной. Если десятичная дробь бесконечная, то она обязательно окажется периодической и никакой другой. Это значит, что рано или поздно одна цифра или набор цифр начнут повторяться (повторяющийся набор цифр образует число, которое и есть **период** дроби, а его, как правило, записывают в скобках).

Например:

152 : 3 = 50,6666... = 50, (6)

1642 : 37 = 44,378378378... = 44, (378).

Изучение бесконечных периодических дробей, так же как и бесконечных непериодических десятичных дробей (а это новый вид чисел, их называют иррациональными числами), не является объектом рассмотрения в начальной школе. Чтобы деление одного числа на другое не «тянуть» до выявления периода, можно частное округлить.

Например:

```
_1 5 2, 0 0 0 0 |3
 1 5            |5, 0 6 6... ≈ 5,07
 ----
    _2
     0
  -----
    _2 0
     1 8
    ----
      _2 0
       1 8
    -------
         2 0 и т. д.
```

Задание 127 позволяет сконструировать, опираясь на деление натурального числа на натуральное, деление десятичной дроби на натуральное число. Числа при этом (делимое и делитель) подбирают такими, чтобы дробь в частном была конечной. Результатом деления может оказаться и бесконечная периодическая дробь (напоминаем: никакой другой десятичной дроби, кроме этих двух видов конечной дроби и бесконечной периодической, в частном быть не может!). Например, при делении 10 на 3. Однако пока делимое и делитель подобраны так, чтобы в частном получалась конечная десятичная дробь или натуральное число (***задание 129***).

Способ деления десятичной дроби на натуральное число показан под ключом **в *задании 127***, а в ***задании 128*** ученикам предлагается порассуждать о том, какие случаи деления десятичных дробей следует рассмотреть. Под ключом дан вывод, к которому должны после обсуждения прийти дети.

Для того чтобы ученики смогли сконструировать известный взрослым способ деления десятичной дроби на десятичную дробь с одновременным переносом запятых в делимом и делителе, рассматриваются ***задания 130*** и ***131***, где с опорой на схемы исследуется связь между делимым, делителем и частным, а именно: как изменения делимого и делителя (по отдельности и одновременно) влияют на частное.

Задание 132 предназначено для введения способа деления на десятичную дробь. Числа для деления подобраны так, чтобы «спровоцировать» ученика, не акцентируя при этом его внимание, на способ, рождением которого мы обязаны действиям сложения и вычитания. Бывали в практике случаи, когда дети предлагали такой способ деления[1]: разделить целую часть одного числа на целую часть другого, а затем дробную часть первого числа на дробную часть второго, записать два частных, разделив их запятой. Этот пример лишь подтверждает мысль о том, что при поиске нового способа действия всегда в классе есть дети, которые пытаются действовать известным способом или способом, близким к известному, не анализируя условий, в которых действует тот или иной способ.

Следующая мысль, которая неоднократно рождалась в умах детей, ищущих правило деления десятичных дробей, сводилась к тому же приему, который был использован при конструировании умножения десятичных: обе десятичные дроби — 12,48 и 6,4 — превратить в натуральные числа, увеличив делимое в 100 раз, а делитель в 10 раз. Затем разделить 1248 на 64, а затем, чтобы записать частное, перенести запятую (если она есть, или сначала ее поставить после целой части, а потом перенести, дописывая нули после запятой) влево, как при умножении, на столько цифр, сколько их было в делимом и делителе вместе, т. е. на 3 цифры.

12,48 : 6,4 = 0,0195

```
 1248,0 | 64
-64     |-----
 ---    | 19,5
  608
 -576
  ----
   320
  -320
  ----
     0
```

Проверить верность равенства нужно обратным действием — умножением.

Для проверки лучше использовать калькулятор, не боясь того, что дети с его помощью будут просто делить, а не умножать частное на делитель, чтобы получить делимое.

[1] Описанный ранее урок учителя из Красноярска по поиску способа умножения десятичной дроби на десятичную — яркое тому подтверждение.

Главное — это использование калькулятора для проверки, поскольку умножение столбиком достаточно громоздко, да и много в нем ошибкоопасных мест, в связи с чем цель урока может быть утеряна, так как многие дети, пока вычисляют, забывают, зачем они это делали.

Поэтому нельзя использовать проверку деления умножением в качестве тренировочных упражнений для формирования вычислительных навыков.

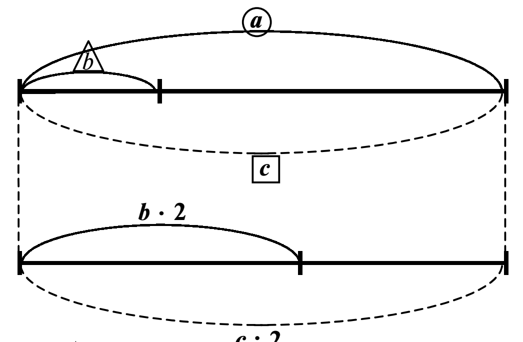
Итак, проверка с помощью калькулятора независимо от того, какое действие выполнял ребенок, покажет:

$12{,}48 : 6{,}4 \neq 0{,}0195$

Думаем, понятно, почему числа подобраны с разным числом знаков после запятой. В каждом классе находятся дети, которые предлагают не трогать делимое, превратив в натуральное число только делитель, а если не найдутся, то такую же идею учитель озвучивает от имени тех учеников из другого класса, которые ее могли высказать, — такой прием хорошо известен. Понятно, что, изменив делитель, мы получим другое частное. Поэтому, чтобы сохранить частное, его тоже нужно изменить.

Вот тут опять может сработать стереотип: во сколько раз увеличим делитель, во столько же раз нужно уменьшить частное, которое на самом деле нужно **не уменьшать**, а **увеличивать**. Увеличив делитель, мы уменьшаем частное, а значит, чтобы сохранить отношение, частное нужно тоже увеличить во столько раз, во сколько раз увеличивали делитель.

Можно начертить схему умножения — деления, чтобы проверить, что произойдет с частным, если изменить делитель.



$a : b = \boxed{c}$

Ясно, что, увеличив b (мерку), например, в 2 раза, частное (количество мерок) соответственно уменьшится в 2 раза.

Отсюда вывод: если для деления 12,48 на 6,4 нужно увеличить 6,4 в 10 раз, то и частное нужно увеличить тоже в 10 раз, чтобы отношение осталось прежним.

```
 12,480 | 64
   0    |------
 ----   |0,195
_124
  64
 ----
 _608
  576
 -----
  _320
   320
  -----
     0
```

Значит, 12,48 : 6,4 = 1,95.

Проверка и даже прикидка показывают, что ответ правильный.

Теперь можно анализировать и дальше.

Нельзя ли найти другой способ, при котором можно было бы сразу получить правильное (искомое) частное **данных чисел**, не переписывая выражение сначала в строчку, затем в столбик.

Если обратиться к схеме, то станет понятным, что для сохранения частного нужно поступить так: во сколько раз увеличим делитель, во столько же раз увеличим и делимое, тогда частное не изменится.

Это значит, что:

1 2, 4 8 : 6, 4 = 1 2 4, 8 : 6 4, а делить на натуральное число мы умеем.

Сопоставляя два способа деления: один с переносом запятой в делителе и частном, а второй — в делимом и делителе, дети, как правило, выбирают второй, который и является общепринятым.

Объясняют они так: «если действовать первым способом, то пока вычисляешь, забудешь о том, что нужно перенести в частном запятую и тогда только записать ответ, а при втором способе можно избежать такой ошибки».

В ***задании 133*** показаны оба способа действия (Сашин и Наташин) и та ошибка, о которой сказано выше. Ее допустила Оля, причем важно не только разобраться с детьми в том, что у Оли записан неверный ответ, но и обратить внимание на то, что использование знака «=» для демонстрации способа, которым она действовала, неверно:

5 3, 2 3 5 : 3, 9 ≠ 5 3,2 3 5 : 3 9

Равенство уже нарушено! Это типичная школьная ошибка.

Соответствующая этому приему деления форма записи приведена в учебнике от имени Наташи.

Заметим, что работу с этим заданием лучше начать не с анализа записей, предложенных от имени трех учеников — Саши, Оли и Наташи, а с обсуждения вопроса о том, как выполнить деление 53,235 на 3,9 (возможно, в вашем классе будут свои «Саши», «Оли» и «Наташи»), а уже затем изучить способы действия, описанные в задании для их сопоставления.

Задания 134—152 предназначены для усвоения способа деления многозначных чисел и десятичных дробей, когда это действие включено в задания на нахождение значения выражения, в уравнения, задачи.

Для того чтобы по возможности избежать ошибок, связанных с одновременным переносом двух запятых при делении одной десятичной дроби на другую: одной в делимом, а другой в делителе, можно предложить следующий методический прием.

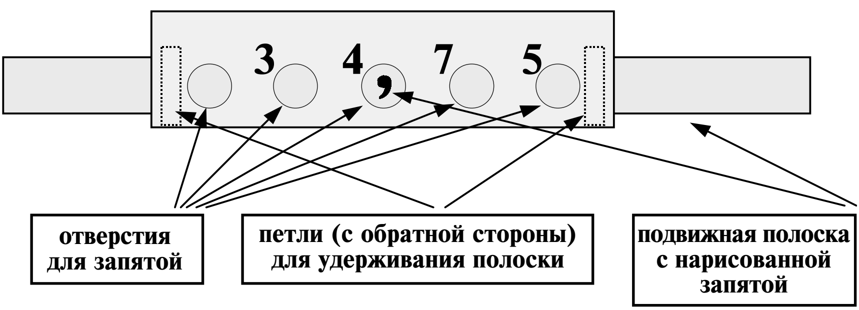
Прежде всего, запятые нужно «оживить». Это можно сделать двумя способами — изготовить специальные пособия:

1) нарисовать в цвете запятые на вырезанных из бумаги кругах: **,**

и прикреплять их к доске между записанными на ней цифрами:

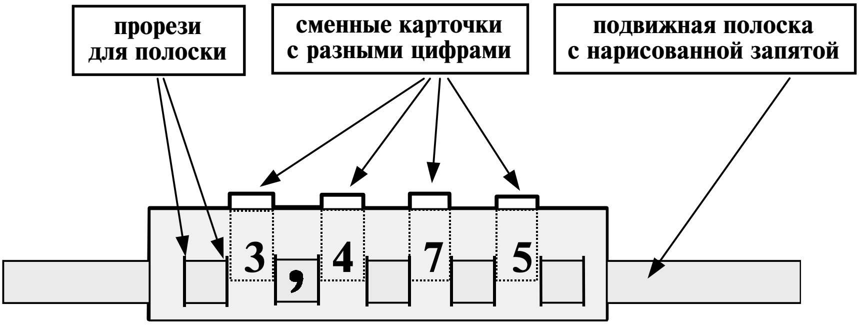
3 , 5 2 или **0 , 2 6 0 1**;

2) для конкретных дробей написать цифры на бумаге и вырезать отверстия между цифрами, из которых может «выглядывать» цветная запятая. Ее нарисовать на узкой полоске бумаги, которая продевается с обратной стороны листа как ремень в брюки, для чего с обратной стороны приклеены специальные петли:



Запятую можно установить между любыми двумя цифрами. Если добавить снаружи отверстия или прозрачные окна, куда вставлять карточки с цифрами, то пособие будет более универсальным.

Можно поступить и по-другому при изготовлении этого же пособия.



Двигая полоску, мы перемещаем запятую (нарисованную на ней) на нужное место.

Такое пособие очень полезно использовать не только для умножения и деления десятичных дробей, но и для умножения и деления на 10, 100, 1000.

Теперь, когда запятые «живут» сами по себе, организуется сначала работа парами по одновременному переносу запятых в делимом и делителе. Дети будут поставлены перед необходимостью договариваться друг с другом, чтобы действовать синхронно. Для начала лучше использовать переносные запятые.

Итак, сначала переносят запятые 2 ученика, обсудив, на сколько цифр нужно их перемещать.

Хорошо еще задействовать и третьего ребенка в качестве контролера, несмотря на то, что у вас все остальные тоже следят за происходящим. Затем эту функцию будет выполнять каждый по отношению к самому себе. Итак, на доске записаны делимое и делитель:

$$23{,}517 \,\big|\, \underline{0{,}09}$$

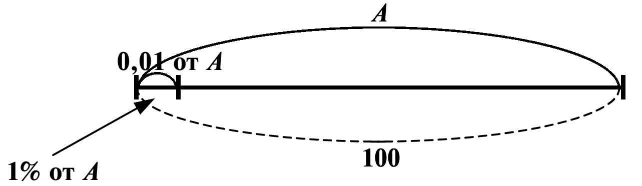
Один ученик приставляет нарисованную в кружке запятую на указанное место запятой в делимом, второй — в делителе, затем **одновременно** передвигают их.

Затем, «поиграв» запятыми в парах, то же самое действие выполняет уже не пара детей, а один ребенок, но **двумя** руками, и лишь затем каждый действует так, как это делает любой взрослый.

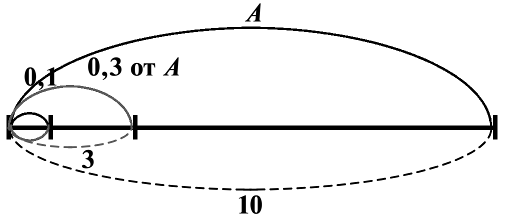
Возможно, такая тщательная работа, связанная с усвоением способа действия, нужна не всем детям, а только тем, кто допускает ошибки, однако все дети с удовольствием «оживляют» запятые.

Завершается такая работа, как всегда, анализом ошибок, которые могут быть допущены при делении, сравнением этих ошибок с теми, которые могут быть при выполнении других арифметических действий.

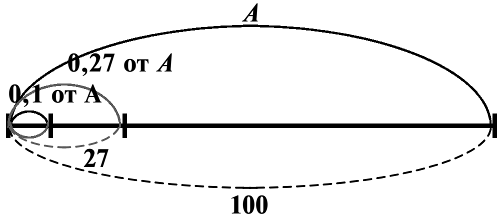
Введение понятия десятичной дроби и действий с ней значительно расширяет круг решаемых задач, особенно тех, которые связаны с нахождением дроби от числа и числа по его дроби. Умение находить дробь от числа и решать задачи, обратные данной, является той основой, на которую опираются все типы задач на проценты. Несмотря на то что в этот последний вариант учебника проценты не вошли, само понятие и задачи, с ним связанные, включены в рабочую тетрадь и позволят тем классам, которые по своим темпам и глубине усвоения основного материала опережают усредненные нормы, не исключать из программы эту тему. Она на протяжении многих лет успешно изучалась в 3 классе трехлетней начальной школы. Схема — это ключ к решению любых, как прямых, так и обратных, задач на нахождение дроби от числа и числа по дроби, включая задачи на проценты, поскольку 1% — это 0,01 от величины или числа. А чтобы на схеме показать 0,01 часть от величины, нужно величину разделить на 100 равных частей и взять 1 часть. Это и будет 1 %.



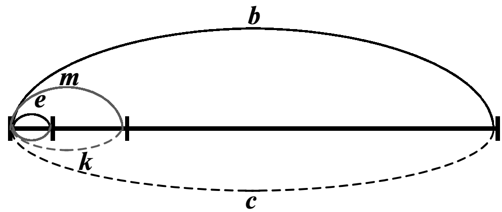
Если же нужно взять несколько частей от величины (A), например 0,3, то сначала показывают 0,1 часть, а затем ее берут 3 раза:



Значит, 0,27 от величины *A* или 27%, выглядят на схеме так:



В общем виде на схеме связь между компонентами при нахождении дроби от числа выглядит так:

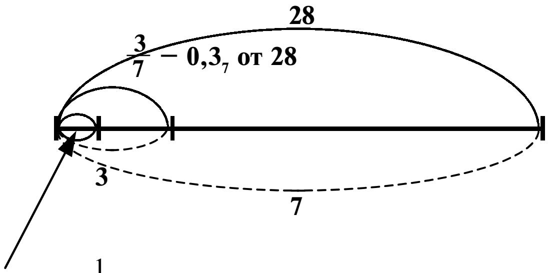


где *b* — величина или число;
c — на столько равных частей нужно делить величину;
e — одна из *c* равных частей;
k — столько равных частей *e* взяли;
m — часть от *b*.

Составим по схеме равенства:
$b : c = \boldsymbol{e}$ (обратные $e \cdot c = \boldsymbol{b}$ и $b : e = \boldsymbol{c}$)
$e \cdot k = \boldsymbol{m}$ (обратные $m : k = \boldsymbol{e}$ и $m : e = \boldsymbol{k}$)
Из этих двух составляются новые равенства:
$\underbrace{b : c}_{e} \cdot k = \boldsymbol{m}$, $m : (b : c) = \boldsymbol{k}$; $m : k = b : c$

$\underbrace{m : k}_{e} \cdot c = \boldsymbol{b}$, $b : (m : k) = \boldsymbol{c}$.

Если один из компонентов каждого равенства неизвестен, то его всегда можно найти. В формулах, помогающих найти неизвестные компоненты (они даны на цветном фоне), необычной для учителя в таком поиске дроби от числа и наоборот может быть только форма записи дроби. Более привычна для учителя (но не для ученика) такая запись: «найти $\frac{3}{7}$ от числа 28» вместо «найти $0{,}3_7$ от числа 28», что одно и то же, поскольку в обоих случаях величину нужно делить на 7 равных частей и взять 3 таких части:



$0{,}1_7$, или $\frac{1}{7}$ от 28, или $28 : 7 = 4$

$0{,}3_7$, или $\frac{3}{7}$ от 28, или $28 : 7 \cdot 3 = 12$

В заданиях для детей дроби берутся исключительно позиционные, в том числе десятичные. Схемы, которые используются, детям давно знакомы, они с ними работали больше года. С отношением целого и частей дети также знакомы не один год, поэтому ***задания 153—167*** вряд ли вызовут затруднения.

К поиску дроби от числа и числа по его дроби дети вновь вернутся в 5 классе при изучении обыкновенных дробей.

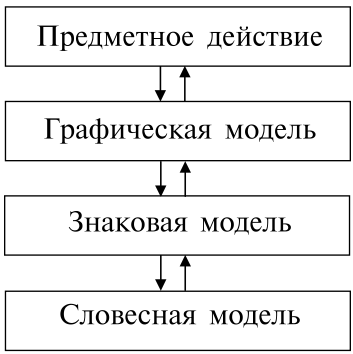
Это значит, что изучение этой темы не является обязательным, тем более что ее нет в перечне минимума содержания на выходе из начальной школы. Однако рассмотрение отношений, связанных с нахождением дроби от числа (и наоборот), позволяет заложить тот фундамент, на котором и будут строиться в дальнейшем не только эти понятия, понятие процента, но и понятие пропорции и др.

1.5. СТАНДАРТНЫЕ СИСТЕМЫ МЕР. ДЕЙСТВИЯ С ЧИСЛОВЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ВЕЛИЧИН (11 ч)

Логическим завершением темы «Десятичные дроби и действия с ними» является обсуждение вопроса: «Какими мерами измеряют величины?» (так озаглавлен в учебнике тот раздел, который посвящен отношениям между стандартными мерами для измерения разных величин и выполнению действий с ними).

Появление десятичных дробей было связано с естественной потребностью более точного измерения величин. Если до этого мы старались подбирать для измерения такие величины, в которых основная мерка умещалась целое число раз, а появляющимся (как правило, случайно) остатком пренебрегали, то теперь мы можем более точно производить измерения величин и описывать результат не только с помощью составных мер. Вместо 3 м 2 дм 5 см можно записать десятичную дробь 3,25 м, где цифра 3 сообщает о количестве метров, 2 — о десятых частях метра — дециметрах, а цифра 5 — о ***десятых*** частях дециметра или, что все равно, о ***сотых*** частях метра — сантиметрах.

Для перевода из одних единиц измерения в другие, мелких в крупные меры и обратно предназначены ***задания 168—192***. Методика изучения этой темы и ее содержание учителю хорошо знакомы. Важно лишь напомнить коррекционную модель, опираясь на которую вновь могут быть развернуты те или иные действия детей:



Если ребенок переводит одни единицы измерения в другие с трудом или с ошибками, то учитель должен обратиться к этой модели.

Что это значит? Это означает лишь следующее: нужно вернуться к предыдущим этапам, которые фактически были «свернуты» преждевременно. То есть вместо того чтобы дети под руководством учителя практически изготовили меры для измерения длин, площадей, объемов, а затем осуществили с ними **практические** действия, учащиеся лишь **говорили** о них и мало действовали.

Именно поэтому и необходимо вернуться к практическим измерениям, описанию способов и результатов измерений графической схемой (отрезками, фигурами или с помощью числовой прямой) и, наконец, к записям отношений в знаковой форме с помощью равенства, например: A = 3,7 см или B = 2,3 л.

Начиная с ***задания 184*** конструируются действия с однородными величинами (слово «однородные» можно употреблять только в контексте, без каких-либо заучиваний или повторений).

Так, под «ловушками» в этом задании подразумеваются те случаи сложения, которые до выполнения действия требуют преобразования одного из двух слагаемых в величину, измеренную той же мерой, что и вторая.

Числа 1253 и 164 можно сложить, получив число 1417, только там, где рядом с ними одинаковые названия единиц величин (мер):

1253 м + 154 м = 1417 м

1253 км + 164 км = 1417 км

1253 кг + 164 кг = 1417 кг

Все остальные суммы классифицируются как «ловушки».

Чтобы найти такую сумму, нужно одну из двух величин записать в тех же единицах, что и вторая величина. Следовательно, таких преобразований два.

Например, ищем сумму:

1253 г + 164 кг

Наименования у чисел разные. Важно их показать маркерами разных цветов. Для вычислений необходимо сначала привести величины к одному наименованию.

1-й способ:

1253 г = 1,253 кг, значит,

1,253 кг + 164 кг = 165, 253 кг

Вместо 165,253 кг можно записать 165 кг 253 г:

165, 253 кг = 165 кг 253 г

2-й способ:

164 кг = 164000 г, значит,

1253 г + 164000 г = 165253 г

Если есть необходимость, то можно записать: 165 253 г = = 165 кг 253 г

Следующие «ловушки» можно ликвидировать так:

1) 1253 м + 164 см = 125300 см + 164 см = 125 464 см ,
где 1253 м = 125 300 см
125 464 см = 1254 м 64 см, или 1254 м 64 см = 1 км 254 м 64 см, или 1 км 254 м 64 см = 1 км 254 м 6 дм 4 см

2) 164 см = 1,64 м
1253 м + 1,64 м = 1254,64 м и т. д.

Исходя из вышесказанного понятна методика работы с величинами, представленными их числовыми значениями.

Прежде чем выполнять те или иные арифметические действия с величинами, нужно сравнить наименования каждого компонента в выражении с величинами. Их 3 основных типа:

I тип: компоненты действий имеют ***одинаковые наименования***.
Их закрасить в **один цвет**.
1) 153 кг + 26 кг
2) 836 г + 419 г
3) 836 м + 154 м и т. п.

II тип: компоненты действий имеют ***разные наименования.***

Их закрасить в **разные цвета.**
1) 123 кг + 274 г
2) 15 м + 37 дм
3) 164 см + 32 дм

II тип: компоненты действий величины **с несколькими наименованиями**. Закрашивают наименования указанным ранее способом.

12 кг 354 г + 16 кг 152 г
134 м 26 см + 14 м 5 дм

В заданиях **первого типа** над числами (без наименований) сразу выполняются указанные действия:

4035 кг + 129 кг = 4164 кг

$$\begin{array}{r} 4035 \\ +\ \ 129 \\ \hline 4164 \end{array}$$

В заданиях **второго типа** нужно сначала выразить и записать значения величин в одних и тех же единицах измерения, а затем выполнить указанные действия с числами.

6 м + 25 дм = 6 м + 2,5 м = 8,5 м или 60 дм + 25 дм = 85 дм = = 8,5 м

С заданиями **третьего типа** можно поступить двояко: либо поступить так же, как с выражениями II типа: выразить все значения величин в одних и тех же единицах измерения, либо выполнить действия над числами с одинаковыми наименованиями:

8 км 28 м + 16 км 152 м

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 8\text{ км } 0\,2\,8\text{ м} \\ 1\,6\text{ км } 1\,5\,2\text{ м} \end{array} \\ \hline 2\,4\text{ км } 1\,8\,0\text{ м} \end{array}$$

этот 0 необходимо дописать, поскольку в 1 км = 1000 м, значит, число метров должно быть записано тремя цифрами, а у нас их 2 (число 28).

или $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 8\,1\,6\text{ кг } 3\,7\,6\text{ г} \\ 2\,9\text{ кг } 9\,3\,7\text{ г} \end{array} \\ \hline 8\,4\,6\text{ кг } 3\,1\,3\text{ г} \end{array}$ или $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 3\text{ м } 4\text{ дм } 6\text{ см} \\ 2\text{ м } 8\text{ дм } 5\text{ см} \end{array} \\ \hline 6\text{ м } 3\text{ дм } 1\text{ см} \end{array}$

Задания 168—192 помогают ребенку научиться выполнять действия с величинами.

Итак, величина как результат измерения определяется числом, выраженным в определенных единицах (мерах). Для обозначения величины пишут это число, а рядом наименование.

Одна и та же величина в разных единицах (имеется в виду измеренная разными мерами) выражается разными числами.

Например:
6 см = 60 мм 1 ч = 60 мин 3 кг = 3000 г

Как известно, типичными являются ошибки, которые допускают ученики при решении текстовых задач, когда величины выражены разными единицами измерения. В этом случае ученики выполняют действия над числовыми значениями величин, не обращая внимания на наименования. Во избежание подобных ошибок важно, прежде чем приступить к вычислениям, выделить цветом наименования величин. Цвет, как уже неоднократно писалось, имеет огромное значение для понимания и запуска механизма зрительной памяти. Потом цвет уйдет, а привычка останется: сначала смотреть на то, в каких единицах измерения (мерах) выражена та или иная величина, а затем приступать к вычислениям.

В связи с вышесказанным напомним основные положения, связанные с однородными величинами[1] (величины одного рода, или однородные величины, — это величины, которые выражают одно и то же свойство объектов: длина бассейна, высота комнаты и ширина стола — величины одного рода).

1. Любые две величины одного рода **сравнимы**. Это значит, что для любых однородных величин A и B справедливо одно и только одно из отношений:

$A < B$, $A = B$, $A > B$.

[1] Стойлова Л.П. Математика. — М., 1997. С. 304—305.

2. Отношение «меньше» для однородных величин **транзитивно**: если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$.

3. Величины одного рода можно **складывать**, в результате получают величину того же рода. Сложение величин коммутативно (обладает переместительным свойством) и ассоциативно (обладает сочетательным свойством):

$A + B = C$

$A + B = B + A$

$(A + B) + C = A + (B + C)$

4. Величины одного рода можно **вычитать**, получая в результате величину того же рода.

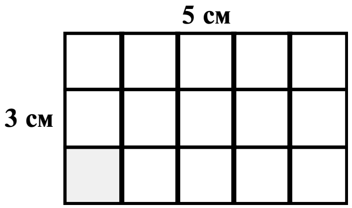
Если $A - B = C$, значит, $B + C = A$.

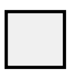
5. Величину можно **умножать на положительное действительное число**, в результате получают величину того же рода: $B = A \cdot X$, где X — любое положительное действительное число.

6. Величины одного рода можно **делить**, получая в результате число: $X = B : A$.

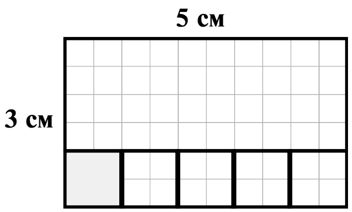
Перечисляя основные положения, связанные с однородными величинами, важно обратить внимание на то, что не существует операции умножения величины на величину. Существует условная запись произведения, например: 5 см × 3 см = 15 см². Ее широко используют в физике.

Используется в математике подобная запись, как правило, при нахождении площади прямоугольника. Например:

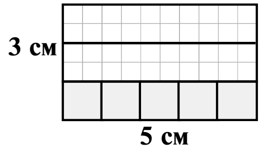




— 1 см².
Число 5 сообщает о том, сколько квадратных сантиметров умещается вдоль длины — в одном ряду (ряд — вспомогательная мерка для измерения площади).



Длина прямоугольника 5 см, значит, в ряду уместится 5 см², а таких рядов — 3.



Значит, площадь данного прямоугольника можно вычислить так:
$S = 5\ см^2 \cdot 3 = 15\ см^2$

Это свойство под номером 5: умножение величины на действительное число, здесь на натуральное.

Подробнее об измерении и вычислении площадей, а также периметров и объемов — в следующей теме.

Дополнительным материалом, позволяющим ученику конкретизировать изученные способы выполнения действий с величинами, является предварительное знакомство с такими величинами, как стоимость (деньги рассматриваются как мера стоимости), время и его измерение, и угол с измерением его величины.

Для обучения решению задач, связанных с тройкой величин — цена, количество, стоимость (***задания 193—196***), можно порекомендовать использовать рекламные объявления о продаже или приобретении товаров, цены которых указаны в условных единицах (у.е.), 1 у.е. = $1 США, а $1 ≈ 31,2 р. (в марте 2002 года).

Используя рекламы и опираясь при этом на курс доллара, объявленный на день, когда решается та или иная задача или обсуждается перспектива реальной покупки какого-либо товара, мы даем возможность ребенку ориентироваться в условиях рыночной экономики.

Изучая такую величину, как время (***задания 197—211***), важно разделить два понятия, когда говорят о времени. Можно иметь в виду момент времени, а можно — интервал (промежуток) времени. Момент времени определяют с помощью специального прибора, который называется часами. Часы бывают двух типов: одни со стрелками, по положению которых нужно научиться определять момент времени или просто время, другие — с электронным табло, которое само показывает время в данный момент.

Второй смысл, который вкладывается в понятие времени, — это когда речь идет не о моменте времени, а о его интервале, который нужно уметь вычислять, зная момент времени, относящийся к началу и концу события. И это очень непросто. От 3 до 5 часов может проходить и меньше, и больше времени, чем от 5 до 3. Поэтому умение определять промежутки времени очень значимо при решении текстовых задач, о чем речь пойдет в **задании 211** и при изучении темы 3.

Разделы «Это интересно!», как и прежде даны для ознакомления и могут вообще не рассматриваться.

ТЕМА 2. ПЕРИМЕТР, ПЛОЩАДЬ, ОБЪЕМ (34 ч)

2.1. ПЕРИМЕТРЫ РАЗЛИЧНЫХ ПЛОСКИХ ФИГУР И СПОСОБЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ (12 ч)

Эта тема, как и все последующие, служит, с одной стороны, для осознания ребенком изученного ранее (эти понятия рассматривались в 1 классе), а с другой — основой для расширения знаний.

Такой подход, как показала многолетняя практика, оказывается эффективным как для детей, которые не успевают с большей частью класса продвигаться в определенном темпе, так и для детей, опережающих (часто значительно) своих сверстников по способностям к освоению знаний, по их глубине и познавательным интересам.

Так, например, в 1 классе периметр рассматривался как длина границы любой плоской фигуры, в том числе и многоугольника.

Если учитель обнаруживает, что значительная часть детей не может показать периметр той или иной вырезанной из бумаги (или другого материала) фигуры, пройдя по границе пальчиком, то нужно непременно вернуться к совместному решению той задачи, которая приводила к этому понятию. Этот прием универсален по отношению к любому понятию: его смысл **не в разговорах** о понятии, а **в практическом действии**, приводящем к понятию.

Итак, если это необходимо для всего класса или отдельных детей, сделайте заготовки плоских фигур, которые понадобятся для восстановления в памяти детей понятия периметра.

Возможно, что для одних детей такой экскурс действительно служит основанием для восстановления, а для других — это может быть **рождением** нового для них понятия, если в свое время оно «прошло мимо» них.

Задания 1—3 из второй части учебника помогут ученику дома восстановить все то, что, согласно описанному, учитель проигрывает с детьми в классе, не прибегая к помощи учебника.

Задания 4—8 предназначены для практических действий по измерению периметра фигуры.

Основным способом, которым, как правило, пользуются дети при сравнении периметров, является использование проволоки или нитки (лучше проволоки, она «форму держит», как говорят дети). Этим же приемом они пользуются и для измерения. Распрямляя проволоку, они прикладывают ее к линейке.

Хочется заострить внимание на этом способе измерения (и сравнения), позволяющем изменить форму при сохранении длины. И вот почему. Значительно позже, при изучении геометрии и тригонометрии, ученик, который **собственными руками** осуществлял такое практическое действие, сможет осуществить его ***мысленно***. Именно в начальной школе важно заложить основы практических действий, на мысленное представление которых придется опираться при изучении математики в старших классах. Например, измеряя ту или иную величину меркой (или системой мер) ребенок записывает $\frac{A}{E} = a$, где A — измеряемая величина, E — исходная (основная) мерка, a — число, полученное в результате измерения. Исследуя эти отношения между величиной и числом и обратные отношения, мы тем самым закладываем основы исследования функциональной зависимости между величинами.

Задание 9 позволяет упорядочить представление детей о геометрических фигурах, сделать экскурс в историю зарождения геометрии. Книг об этом написано много. Лучше всего инициировать детей, которые любят математику, проявляют к ней недюжинный интерес, на поиск сведений о геометрии из истории математики и проведение занятия с одноклассниками.

Воспользуемся учебным пособием для студентов средних педагогических учебных заведений и дадим из него лишь небольшие выдержки, которые помогут учителю восстановить в памяти основные вехи в развитии геометрии[1].

«Геометрия зародилась в Древнем Египте как набор правил решения практических задач, возникавших в строительстве, при распределении земельных участков, измерении площадей, объемов и других величин. Свидетельством этому являются египетские пирамиды, построенные около 4800 лет назад, их строительство требовало достаточно сложных и точных геометрических расчетов. Но особенно важной была задача распределения земельных наделов. Этим занимались специальные люди — землемеры, которых греки называли гарпедонаптами, т.е. натягивателями веревок, так как при распределении земли использовались веревки. Но чтобы знать, где и как их натягивать, надо было иметь план полей. Так практическая задача распределения участков земли привела к возникновению науки о землемерии.

---

[1] Стойлова Л. П. «Математика». — М., 1997. С. 391–401.

Обширные сведения о свойствах фигур, накопленные египтянами, были заимствованы греками. Произошло это в VII—V вв. до н. э. А поскольку особенно важной задачей было землемерие, то греки назвали науку о фигурах геометрией, так как с греческого «геос» — «земля», а «метрио» — «измеряю».

К сказанному можно добавить, что многие геометрические понятия возникли в результате многократных наблюдений реальных предметов той или иной формы, т. е. познавая окружающий мир, люди знакомились и с простейшими геометрическими формами. Овладению этим знанием способствовали изготовление орудий, имеющих сравнительно правильную геометрическую форму, строительство жилья, шитье одежды, изготовление посуды, украшений.

Огромное влияние на развитие геометрических представлений оказали систематические астрономические наблюдения. Они способствовали возникновению понятий шара, окружности, угла, угловой меры.

Развитие землемерия, обобщение накопленного опыта наблюдений привело к созданию практических правил измерения земельных участков, нахождения площадей и объемов простейших фигур, правил, необходимых для строительства, и др. Так, формулы для вычисления площадей земельных участков, имеющих форму треугольника, трапеции, встречаются у древних египтян, вавилонян. К XVII—XVI вв. до н. э. были установлены такие ее факты, как теорема Пифагора, найдено выражение для подсчета объема шара и многое другое. Но выступали они не как логически доказанные утверждения, а как выводы из опыта.

Таким образом, геометрия возникла как прикладная наука, как собрание правил, необходимых для решения практических задач: сравнения фигур, нахождения геометрических величин, простейших геометрических построений».

«Основные достижения в области математики были систематизированы около 300 лет до н. э. греческим ученым Евклидом и изложены в его знаменитом труде «Начала», состоящем из тринадцати книг. Это сочинение является первым дошедшим до нас строгим логическим построением геометрии.

<...> Определения, постулаты, аксиомы и дальнейшие выводы в геометрии Евклида имели наглядный, опирающийся на практику смысл, хотя выражали его в идеализированном, абстрактном виде.

Таким образом, **геометрия сложилась как наука о пространственных формах и отношениях**, рассматриваемых отвлеченно от их математического содержания.

<...> Геометрическую фигуру определяют как любое множество точек. Отрезок, прямая, кривая, круг, шар, пирамида —

это все геометрические фигуры. Одни из них имеют длину, но не имеют площади, другие имеют площадь, но не имеют объема, третьи могут обладать свойством иметь объем».

Изучению общих способов вычисления длин, площадей, объемов и посвящена вторая тема (**Учебник, книга 2**).

Итак, если ***задания 1—9*** и ***раздел «Проверь себя!»*** включены для повторения изученного в предыдущие годы обучения, то ***задания 10—40*** вместе с завершающим этот этап обучения ***разделом «Проверь себя!»*** служат для ознакомления детей с разными видами многоугольников и способами вычисления их периметров.

Так, сравнивая одни и те же треугольники (сначала нужно поработать с треугольниками, вырезанными из бумаги, а лишь затем с рисованными), дети классифицируют их по двум признакам: сначала сравнивают их стороны, а затем (у этих же треугольников) — углы или наоборот. При сравнении длин сторон в треугольнике сначала рассмотрите треугольники, у которых все стороны разные по длине. Дети называют их, как правило, **разносторонними**. Затем предложите треугольники, у которых все стороны равны (по длине). Такие треугольники они, конечно же, назовут **равносторонними** (в математике их еще называют правильными). И наконец дайте им в руки треугольники, у которых две стороны равны по длине. Их называют **равнобедренными**. Это значит, что любой равносторонний треугольник является равнобедренным, однако на этом этапе обучения данные выше определения предлагаются для ознакомления. Названия треугольников дают возможность ребенку «удерживать» образ треугольника, с которым он производил практические действия.

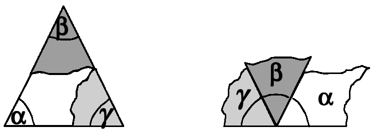
Если исследовать вопрос о том, какими могут быть углы в треугольнике, то детям нужно предложить отрезать углы и сравнить их между собой: если в треугольнике они обнаружат одинаковые углы, то пусть раскрасят их в один цвет, а разные — в разный.

Для этого предложите детям 3 вида треугольников: 1) все углы разные; 2) все углы равные по величине и 3) только два угла равные по величине (других вариантов быть не может). Пусть они сначала отрежут от **каждого** треугольника углы (обратите внимание на то, что если отрезать 2 угла, то третий сам отпадет), затем раскрасят их и вновь сложат треугольники. Тогда они и обнаружат, что треугольник можно восстановить только по «родным» углам. Если их «перемешать», то треугольник можно и не собрать. Тому, кто знает, что сумма внутренних углов треугольника должна быть 180°, понятно, что не существует треугольника, у которого величина одного из трех углов равна 60°, другого — 45°, а третьего — не 75°, так как 60° + 45° + 75° = 180°.

Если отрезать углы у треугольника и сложить их, то должен получиться развернутый угол, стороны которого лежат на одной прямой.

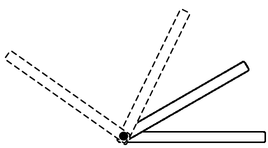
Отрезать углы у треугольника можно по-разному, но если отрезанные от трех треугольников углы перепутались, то чтобы узнать, какие углы принадлежали одному из треугольников, их нужно сложить. Для этого совсем не нужно знать величину угла, измеренную меркой.

Достаточно их сложить непосредственно: например:



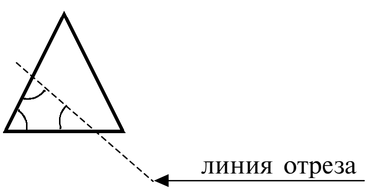
Сумма ($\alpha + \beta + \gamma$) должна составить развернутый угол.

Чтобы показать детям происхождение названия «развернутый угол», можно изготовить предметную модель угла, которая выглядит так:

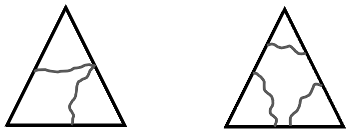


Соедините две палочки на винте (можно использовать детский конструктор) или возьмите в руки 2 ручки (карандаша и т. п.) и покажите, как угол может **развернуться**.

Примечание: отрезать углы лучше по кривой линии (здесь волнистая), так как если вы отрежете углы по прямой, то образуются новые углы:



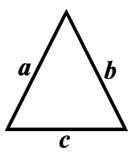
Пусть дети сами в этом убедятся. Отсюда способ действия: «Сначала проведи кривую, по которой собираешься отрезать угол, а затем только отрезай». Напомним, что достаточно провести всего 2 линии. Третий угол отпадет сам, если 2 угла отрезать.



Если же треугольник распадается на 4 части: 3 плоских угла и криволинейная плоская фигура, то из этих углов все равно можно составить развернутый угол.

Эту особенность суммы внутренних углов треугольника можно соотнести с отношением сторон треугольников:

если взять палочки (или куски проволоки), заменяющие стороны разных треугольников, то не из любых трех палочек можно выложить треугольник. Необходимо, чтобы сумма длин **двух** любых сторон треугольника всегда была **больше** (и только больше!) длины третьей стороны:



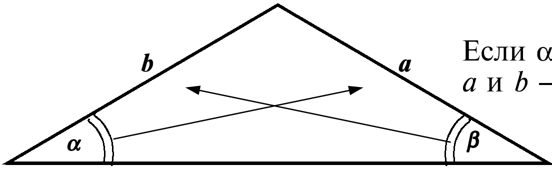
$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

Речь в этом случае идет о так называемом **неравенстве треугольника**.

Интересным для детей оказывается и сравнение сторон друг с другом.

Так, если все 3 угла в треугольнике были равны друг другу, то и длины сторон тоже одинаковые. Поскольку длину стороны у треугольника не вырежешь, то, опираясь на свойство транзитивности равенства (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$), можно для сравнения сторон использовать любые подручные средства или специальный инструмент, похожий на циркуль, но с иголками на обеих ножках — измеритель, замечательное свойство которого — удерживать, т. е. сохранять, расстояние между точками — концами отрезка. У треугольника это его вершины. Можно сравнить стороны и непосредственно. Перегните треугольник, если он вырезан из бумаги.

Если в треугольнике есть 2 равных угла, то и стороны, лежащие против этих углов, равны.



Если $\alpha = \beta$, то $a = b$, где a и b — длины сторон.

Конечно, здесь речь еще не идет, да и не должна идти о каких-либо доказательствах подобных утверждений, но развертывание практических действий с **непосредственным сравнением** углов, сторон и высказывание предположений, которые можно проверить для данной конкретной фигуры здесь и сейчас, создают те необходимые предпосылки, на которых в дальнейшем можно строить обучение геометрии. Не так важно, будет или нет учитель математики воспроизводить описанные практические действия (хотя хотелось бы!), позволяющие высказывать предположения о связях между углами и сторонами треугольника, которые нужно будет либо доказать, либо опровергнуть, либо определить условия, область действия тех или иных утверждений.

Обсуждая с детьми вопрос о том, как узнать периметр треугольника, мы тем самым отвечаем и на вопрос о том, **что** нужно измерить (или длины каких сторон необходимо знать) и **какие** арифметические действия нужно выполнить с числами, полученными в результате измерения.

Так, если мы имеем дело с равносторонним треугольником, то **достаточно** измерить длину одной из 3 равных сторон и полученное число умножить на 3: $P = a \cdot 3$ или $P = 3a$ (***задания 10—11***).

Составляя формулы для вычисления периметров различных фигур, важно предложить ученикам и обратные задачи: по формуле для вычисления периметра фигуры определить, какой была фигура.

Сформулировать такие задания можно и в более «детской» форме: «Дети, для вычисления периметра фигуры сделали необходимые измерения и записали формулу, по которой будут вычислять периметр, но саму фигуру случайно стерли. Какой могла быть эта фигура?» (***задание 30***). Понятно, что вопрос связан с формой фигуры, ее видом, а не размерами. Анализ таких обратных заданий интересен тем, что только формула для нахождения периметра треугольника дает возможность однозначно восстановить фигуру, все остальные — нет.

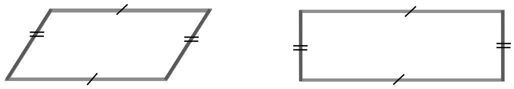
Формула $P = 3a$ сообщает о том, что речь шла о равностороннем треугольнике,

$P = a \cdot 2 + b$ — о равнобедренном,

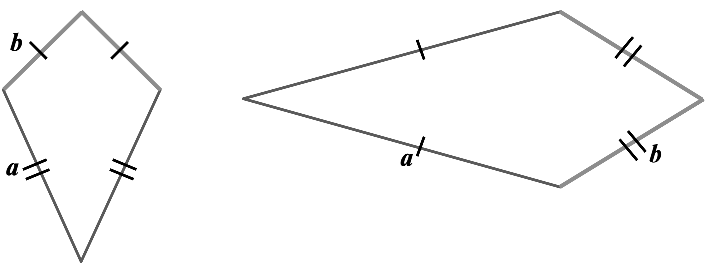
$P = a + b + c$ — обо всех остальных (разносторонних) треугольниках.

Если же для вычисления периметра фигуры была составлена такая формула:

$P = a \cdot 2 + b \cdot 2$ или $P = (a + b) \cdot 2$, то сомнений нет, что это был четырехугольник, у которого стороны попарно равны. Как правило, ученики (да и учителя и студенты) изображают параллелограмм или прямоугольник:



А вот начертить дельтоид, у которого равны соседние стороны, далеко не каждый сообразит:



2.2. ПЛОЩАДИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР (16 ч)

Для непосредственного сравнения площадей разных фигур нет необходимости знать, какими именованными числами они характеризуются. Достаточно одну фигуру наложить на другую и, если нужно, перекроить одну из них или обе, и тогда можно установить, в каком из 3 отношений могут быть сравниваемые величины: $S_1 = S_2$, $S_1 > S_2$ или $S_1 < S_2$.

Способ **непосредственного сравнения** величин, и площадей в том числе, знаком детям с 1 класса. Неплохо бы его повторить, но не разговорами о способе действия, а практическими действиями с вырезанными из бумаги фигурами.

Если же нужно сравнить площади фигур, которые невозможно вырезать (или неудобно), то тогда можно сначала измерить площадь каждой фигуры, а затем сравнить числа, полученные в результате измерения.

Этот **способ опосредованного сравнения** также хорошо знаком детям.

Остается выяснить, как измеряют площади фигур.

Первое, что при этом нужно обсудить, — какие меры (стандартные) для измерения площадей используют. Понятно, что фигуры, которые умещаются на тетрадном листке, как правило, измеряют квадратными сантиметрами, поскольку чаще всего мера — квадратный дециметр — оказывается больше, чем площадь данной фигуры. Если после непосредственного измерения квадратными сантиметрами остается остаток, а речь идет о практическом действии, при котором ученик либо нарезает столько квадратных сантиметров, чтобы ими покрыть всю площадь (в данном случае речь идет о прямоугольнике), либо перемещает одну меру и ведет счет, то остаток измеряют мерой 1 мм^2, которая составляет сотую часть квадратного сантиметра (0,01 см^2 = 1 мм^2).

Другими словами, площадь фигуры может быть выражена десятичной дробью, если описывать результат измерения в одном наименовании.

Поэтому для поиска удобного способа действия и способа вычисления площади неважно, в каких конкретно мерах производится измерение.

Главное, дети должны понять, что **мерой площади является площадь** квадрата со стороной 1 см, 1 мм, 1 дм, 1 м и т. д.

Не сам квадрат, а его **площадь**!

Пусть, взяв квадрат в руки, ребенок сначала покажет то, что у квадрата он будет использовать как меру площади: ребенок гладит пальчиком поверхность квадрата и говорит о площади. Этот же квадрат можно использовать и как меру длины. Тогда погладить, а точнее, пройтись пальчиком ребенок должен по его стороне. Хотя мы все эти «поглаживания» выполняли и раньше, думаю, что восстановить это для некоторых детей не будет лишним.

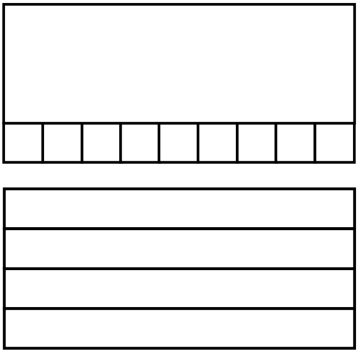
Итак, ***задания 41 и 42*** помогут детям не только восстановить известные им способы сравнения и измерения площадей, но и вывести формулу для нахождения площади прямоугольника.

На каждую пару (парная работа) выдается прямоугольник 10 × 14 см и мерка 1 см^2, и предлагается посчитать, сколько квадратных сантиметров умещается в прямоугольнике. Задание, как и прежде, не читается по учебнику, учитель создает необходимую учебную ситуацию, описанную в задании.

Как правило, дети сначала начинают прикладывать мерку и обводить ее карандашом (прямоугольник должен быть вырезан из цветной нелинованной бумаги, как и мера). Затем, обнаружив, что слишком долго придется считать, сколько квадратных сантиметров умещается на всей площади, дети отказываются от такого способа (кстати, с такой ситуацией они уже сталкивались при введении понятия умножения в начале 3 класса).

Обычно первая мысль, которую высказывают дети, — это посчитать, сколько мер уместится в ряду и сколько таких рядов образуется. Однако ответ на такой вопрос пытаются найти прикладыванием меры вдоль длины и ширины, но чаще и этот упрощенный вариант сразу заменяется измерением длины, а затем ширины прямоугольника с помощью измерительной линейки.

Вот тут-то, для того чтобы дети осознали, о чем сообщает число, которое получилось при измерении длины, и о чем сообщает второе число, нужно немного «поиграть» с ними:



— Как! — восклицаете вы. — Как это может быть?! Я же просила вас узнать площадь (делаете интонационное ударение на этом слове), а вы предлагаете воспользоваться линейкой?! Я всегда знала, что линейкой измеряют длину, а нужно — площадь. — Вашему изумлению не должно быть предела. Охайте, ахайте, восклицайте: «Ничего себе! Вот это да! Вот уж не ожидала!» — все это необходимо для того, чтобы потянуть время, дать возможность подумать тем детям, которые в этом нуждаются в силу разных причин. Такой методический прием хорошо известен учителю, и им, конечно же, нужно воспользоваться. Что же мы хотим услышать в ответ?

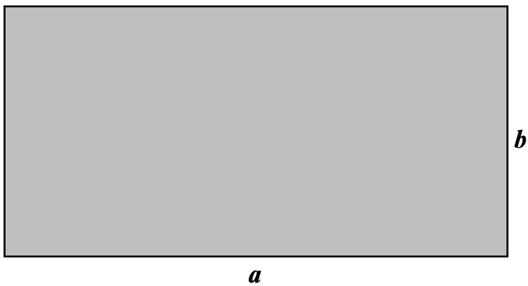
— Когда мы измерим длину прямоугольника, мы узнаем, сколько квадратных сантиметров укладывается в одном ряду, а измерив ширину — узнаем, сколько таких рядов помещается в измеряемой величине. (Смотрите ключ к заданию 42.)

Узнав, что длина прямоугольника 14 см, мы узнаем, что площадь ряда (новая укрупненная мерка) 14 см^2, а таких рядов 10, так как ширина прямоугольника равна 10 см (числа эти подобраны не случайно, с ними удобно создать необходимую учебную ситуацию).

Далее, нужно выяснить у учащихся следующее: «Так можно было поступить только с ***этим*** прямоугольником?» — и, получив ответ, продолжить: «Какую запись вы предлагаете сделать, чтобы было понятно, что таким способом можно воспользоваться для вычисления площади любого прямоугольника?»

Тут-то, как обычно, дети и записывают формулу $S = a \cdot b$ (кв. ед.).

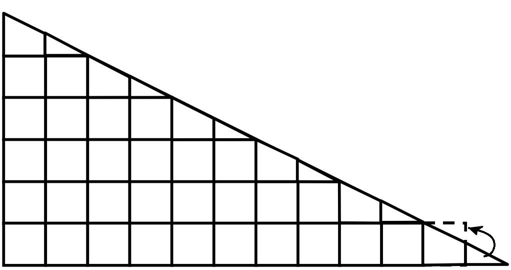
Как только формула площади прямоугольника записана на доске рядом с вырезанным и прикрепленным ярким прямоугольником,



$S = a \cdot b$ (кв. ед.)

выдайте каждому ученику по треугольнику (тоже цветному), который составляет половину прямоугольника (***задание 43***). Сообщать об этом детям не нужно. Предложите той же меркой (она есть на каждой парте) измерить площадь данного треугольника, что означает посчитать, сколько раз эта мерка уместится в треугольнике.

Интересны попытки некоторых детей перекраивать треугольник или мерку:



После совместных обсуждений в паре или четверке (с детьми, сидящими на последующей или предыдущей парте в ряду) дети обнаруживают, что из 2 треугольников можно сложить такой же прямоугольник, какой у них есть на парте. Площадь прямоугольника они уже знают, значит, площадь треугольника в 2 раза меньше. Тут же записывается формула:

$$S = (a \cdot b) : 2$$

где a — длина одной стороны, а b — длина другой. Заострять внимание детей на том, что речь идет о прямоугольном треугольнике, не надо, так же как и на том, что a и b — это длины двух сторон, которые образуют прямой угол.

Психологически очень важно, чтобы оба этих «ограничения» для вычисления площади треугольника сами бросились в глаза детям и были обнаружены ими, а не показаны в готовом виде учителем. Именно поэтому нужно «уцепиться» сначала за стороны. Что это значит?

Вы опять «разыгрываете сцену».

Показываете вырезанные прямоугольные треугольники (покрупнее) и указываете длины сторон (они могут быть крупно написаны прямо рядом со стороной, наименование писать не нужно), которые уже кем-то измерены (одной и той же мерой). Числа должны быть такими, чтобы не переключать внимание отдельных детей на вычисления, с которыми у них могут быть проблемы.

Важно не отвлекать их от основной цели: дать возможность самим осознать, какие две из 3 сторон прямоугольного (это уточнение тоже пока опускаем) треугольника нужно измерить, чтобы вычислить его площадь. Обычно, когда показывается треугольник, у которого измерены катет и гипотенуза, дети, не зная этих названий, говорят, что это **не те стороны**, а потом уточняют, что одна сторона «**та**», а другая **«не та»**. Предложите или показать, или навести цветом те стороны, которые нужно измерить. Для этого заранее приготовьте большое количество разных прямоугольных треугольников и раздайте каждому. Пусть пройдутся по нужным сторонам ярким фломастером, а затем предложите придумать название для этих сторон треугольника. Вот тут-то по тому, какие названия предложат дети, вы и поймете, видят они **существенную** особенность сторон, подлежащих измерению, или нет: стороны, которые нужно измерить, образуют **прямой** угол. Пусть положат угольник на треугольник или треугольник положат на угол парты, тетради, книги, у которых есть прямой угол, и убедятся в том, что **угол** в выданном треугольнике (размеры сторон здесь не имеют никакого значения) **прямой**.

После того как дети придумают свои названия, можно сообщить общепринятые: в треугольнике стороны, которые образуют прямой угол, называют **катетами**. Дать название третьей стороны тоже можно, но не нужно делать это немедленно.

Предложите детям задать вам вопрос. Возможно кто-нибудь из них как раз и спросит о том, есть ли название у третьей стороны и какое оно. Тогда назовите ее — **гипотенуза**. Кстати, слово «катет» происходит от греческого слова «катетос», означающего «отвес», а слово «гипотенуза» — от слова «гюпотейнуса», означающего «стягивающая», ее Евклид так и называл: «сторона, которая стягивает прямой угол». Добавим, что требовать от детей заучивания названий не нужно. Главное — они должны научиться видеть прямой угол, находить стороны, которые его образуют (катеты), уметь вычислять площадь прямоугольного треугольника.

Задания 44—46 позволяют ученикам применить описанные выше способы нахождения площадей к конкретным фигурам.

Следующая учебная ситуация направлена на осмысление учащимися того факта, что вычислять площади они умеют лишь у прямоугольников и прямоугольных треугольников, которые всегда можно достроить до прямоугольника и показать, что площадь такого треугольника в 2 раза меньше площади соответствующего прямоугольника.

Итак, было установлено, что площадь прямоугольного (это слово **пока** специально не выделено) треугольника равна половине произведения его катетов.

Для того чтобы дети осознали, что, зная длину **двух** сторон (катетов), можно найти площадь только **прямоугольного** треугольника и никакого другого, им предлагается ***задание 47***. Путем практических действий, о которых уже было написано раньше, дети учатся из данных треугольников выбирать прямоугольные, т. е. те, площади которых они умеют вычислять. Анализируя соотношение углов, рассматриваются другие виды треугольников: **остроугольные** и **тупоугольные**.

Для подведения итогов по анализу соотношений между углами и сторонами треугольников служат ***задания 48 и 49***, а для закрепления — ***задания 50—52***.

В ***задании 53*** детям предстоит (не по учебнику, а путем организации практических действий на уроке) вывести формулу площади любого непрямоугольного треугольника. Подробное описание содержания и способов действий детей представлено в ***заданиях 54—57***.

Начиная с ***задания 58*** и до ***задания 74*** конструируется **общий способ** нахождения площади любого многоугольника, смысл которого в том, что, если нужно вычислить площадь любой фигуры, ее нужно разбить на фигуры или дополнить до фигур, площади которых мы умеем находить.

Треугольник в этом случае это та «клеточка», та простейшая геометрическая фигура, которая является основной фигурой разбиения (или дополнения) многоугольников (***задания 59—61***). Отсюда становится понятным особое внимание к треугольнику и его элементам. Изучение треугольников, как известно, породило целую науку — **тригонометрию**. Кстати, слово «тригонометрия» произведено из греческих слов «тригонон», означающего «треугольник», и «метрео», означающего «измеряю».

Вопросу о том, **что** конкретно нужно измерить у многоугольника и треугольника, в частности для вычисления периметра, и что для вычисления площади, посвящено ***задание 62***. Сопоставительный анализ элементов фигуры, числовые значения которых необходимы для вычислений ее периметра и площади, приводит к следующему выводу: единственная фигура, которой для вычисления периметра и площади нужны одни и те же измерения, является прямоугольник. Поэтому становится очевидным, что с точки зрения методики обучения нельзя вводить понятие периметра многоугольника на примере прямоугольника. Путаница при вычислении периметра и площади прямоугольника неизбежна для определенной группы детей. Она есть практически в каждом классе.

Для вычисления площадей фигур дети могут составлять формулы, которые запоминать совершенно ни к чему. Главное — уметь выбрать удобный (рациональный) способ разбиения или дополнения. Удобный способ — это способ, при котором нужно произвести меньшее число измерений. Примеры удобных и неудобных разбиений фигур, которые находят дети, приведены в ***задании 60***. Все остальные задания, включая ***задание 72***, где под ключом показаны возможный способ разбиения круга на равные треугольники и выводы формулы для вычисления площади круга, направлены на конкретизацию рассматриваемого способа.

Задания 75—86 используют изученный геометрический материал при решении различных текстовых задач.

Задания 87—92 дают возможность «изобрести» палетку, изготовить ее и научиться пользоваться.

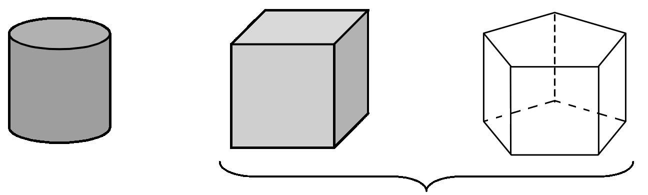
Задания 93—98, а также задания из ***раздела «Проверь себя!»*** могут быть использованы в качестве проверочных и контрольных. Они позволят детям оценить свое владение способами вычисления периметров и площадей различных геометрических фигур.

2.3. ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ (6 ч)

Изучение способов вычисления объемов геометрических тел, по сути, полностью должно повторять логику развертывания содержания на материале вычисления периметров (длин) фигур и их площадей.

Для сведения. Все геометрические тела можно было бы разбить на 3 основные группы, для которых в математике нет специальных терминов, поэтому **условно** назовем их так:

1) «призмоподобные» — к этой группе принадлежат **все призмы**, включая прямоугольный параллелепипед, объем которого будем находить и выводить формулу для его вычисления, и все цилиндры:

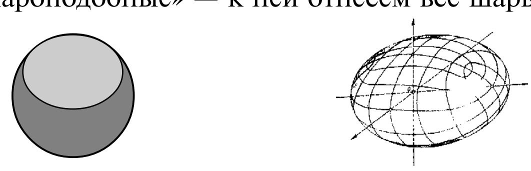


Цилиндр Призмы

2) «пирамидоподобные» — к этой группе отнесем все пирамиды и конусы.

Конус Пирамида

3) «шароподобные» — к ней отнесем все шары и эллипсоиды.



Шар Эллипсоид

В начальной школе достаточно было бы рассмотреть только 2 первые группы, поскольку объем любого тела из первой группы вычисляется по формуле:

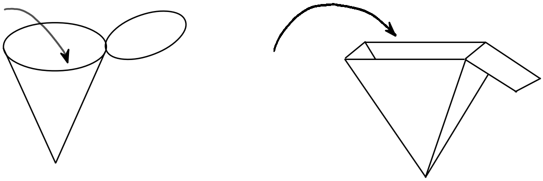
$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, H — высота.

Объем любого геометрического тела из второй группы имеет объем в 3 раза меньший, чем объем соответствующего тела из первой группы.

Соответствующими друг другу телами будем считать тела, имеющие равные основания (имеющие одинаковую форму и размеры, а значит, и площадь) и равные высоты, т. е. $V_{\text{пирам.}} = (S_{\text{осн.}} \cdot H) : 3$.

Проверить отношение объемов соответствующих тел нетрудно.

Достаточно изготовить прямоугольный параллелепипед и соответствующую пирамиду (***задание 99***) так, чтобы основание у каждого тела можно было бы открывать, как крышку.



Затем измерим объем прямоугольного параллелепипеда меркой, равной объему пирамиды.

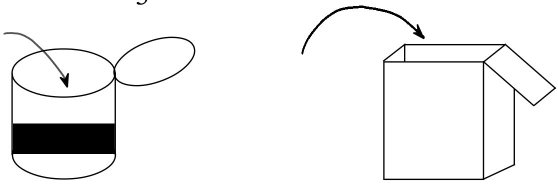
$V_{\text{призмы}} = 3V_{\text{пирамиды}}$, значит,

$$\boxed{V_{\text{пирамиды}} = V_{\text{призмы}} : 3} \quad \text{и} \quad \boxed{V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}\, V_{\text{призмы}}}$$

Аналогичным образом проверяется формула:

$V_{\text{цилиндра}} = 3V_{\text{конуса}}$,

значит, $V_{\text{конуса}} = \dfrac{1}{3}\, V_{\text{цилиндра}}$.



Описанные способы вычисления объемов «призмоподобных», кроме формулы для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, и всех остальных геометрических тел, в учебнике не рассматриваются, но могут быть использованы как для углубления знаний на уроке или во время факультативных занятий, так и во внеклассной работе. Содержание изучаемого материала, которое, как и всегда, сначала «проигрывается» в классе, подробно изложено в ***заданиях 99—105***.

Кроме рассматриваемых мер для измерения объемов — кубических сантиметров, кубических дециметров и им подобных, начиная с ***задания 106*** рассматривается известная детям из реальной жизни мера — литр.

Далее следуют ***задания 107—127***, использующие полученные знания при решении текстовых задач. Раздел «Это интересно!», как и раньше, расширяет представления детей об изучаемых понятиях, а его содержание может быть использовано при решении и составлении текстовых задач.

3.1. СТРОЕНИЕ ЗАДАЧИ. КРАТКАЯ ЗАПИСЬ ЗАДАЧИ. СХЕМЫ. УРАВНЕНИЯ (16 ч)

В течение предыдущих 3,5 лет учащиеся решали текстовые задачи, общий подход к изучению которых был прописан в первой книге для учителя[1].

Решая те или иные задачи, мы умышленно не создавали такую учебную ситуацию, которая была бы направлена на то, чтобы у учеников появилась мысль: «Вот интересно! Решали, решали задачи, а никогда не задумывались о том, а что такое задача, как она устроена, по каким признакам задачи можно сравнивать (по типу сравнения предметов по разным признакам), какие задачи с точки зрения математики можно считать одинаковыми и как это определять».

Этот подход к обучению решению задач полностью соответствует **общему** подходу к обучению: от **умений**, которые так или иначе были сформированы у ребенка, к **знаниям**, как основаниям этих умений и лишь от них к **навыку.** Навык в этом случае не есть результат многократного применения умения, а осмысленное свернутое и автоматизированное действие, опосредованное знанием оснований:

У $\to$ З $\to$ Н, так называемые УЗНы взамен ЗУНов.

К четвертому классу круг решаемых задач достаточно велик. Практически дети могут решать все те задачи, в которых отношения между величинами могут моделироваться в основном схемами одного вида: с помощью отрезков.

Переход же к новым видам моделей (кругам Эйлера — они же диаграммы Венна, графам, графикам) будет происходить начиная с 5 класса. Их появление опирается (как и все новое) на создание учебной ситуации, при которой старый способ моделирования не подходит (он перестает срабатывать) и нужно конструировать новый тип модели.

Если предложить детям нарисовать схему и решить две специально подобранные задачи в заданном порядке, то для решения первой из них достаточно изобразить отношения отрезками,

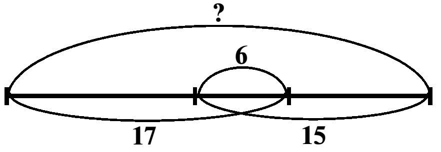
[1] Александрова Э.И. Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс. — М.: Вита-Пресс, 1999. С. 167—182.

а вот для решения второй нужно «выбраться» из одномерного пространства и «изобрести» новый вид схем: плоскостные, когда изображать величины нужно не отрезками, а плоскими фигурами удобной (для отображения отношений) формы.

Например:

Задача 1. В одном классе каждый ученик изучает либо английский язык, либо французский, либо оба языка. Известно, что 17 человек изучают английский, 15 — французский, 6 человек изучают оба языка. Сколько всего человек в классе? Сколько человек в классе изучают только английский язык и сколько — только французский?

Решение задачи очевидно, если начертить схему:

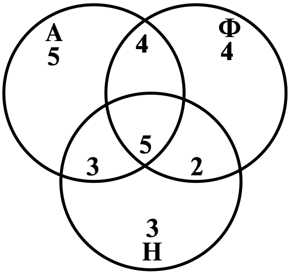


В классе 26 человек: 17 + (15 – 6) или (17 – 6) + 15, где 15 – 6 = 9 — столько человек изучают только французский язык, а 17 – 6 = 11 — столько человек изучают только английский.

Задача 2. В одном классе каждый ученик изучает либо английский язык, либо французский, либо немецкий, либо любые 2 языка, либо все 3 языка.

Сколько всего человек в классе, если известно, что все 3 языка изучают 5 человек, английский и французский — 9, английский и немецкий — 8, немецкий и французский — 7, четверо учат только французский, 5 — только английский, 3 — только немецкий?

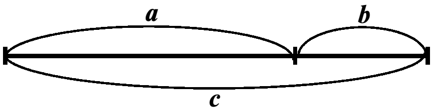
Понятно, что на одном отрезке (так называемой «линейной» схеме) всех отношений не отобразить, поэтому можно изобразить 3 пересекающиеся плоские фигуры любой формы, в том числе кругами (круги Эйлера), которые удобнее всего рисовать.



Думаем, что разобраться в самих кругах и соотнести их с данными учителю будет нетрудно, однако решение таких задач, как задача № 2, рассматривается в 5 классе, а здесь приводится для демонстрации подхода к использованию различных графических моделей, которые и есть «сердце» задачи.

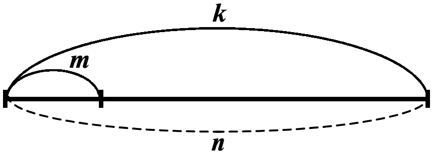
Итак, схемы, с которыми имели дело дети в 1—3 классах и с которыми они продолжают работать, — это 2 базовые схемы:

1) схема сложения — вычитания:



$a + b = c$
$c - a = b$
$c - b = a$

2) схема умножения — деления:



$m \cdot n = k$
$k : m = n$
$k : n = m$

Сочетания этих двух типов схем дают возможность решать большой класс задач, в том числе и задачи «на движение» (где $m = v$, $n = t$, $k = s$), задачи «на куплю-продажу», «на работу», «на бассейны» и другие, т. е. задачи на «процессы».

В предложенной методике обучения решению задач мы опирались прежде всего на работы В. В. Давыдова, Ф. Г. Боданского (моего первого учителя, увлекшего меня идеями развивающего обучения), Г. И. Минской, Г. Г. Микулиной, П. Я. Гальперина, Н. Ф. Талызиной, Н. Г. Салминой, Н. Б. Истоминой, Л. М. Фридмана и др.

Таким образом, элементами новизны при работе над задачей становятся:

1) осмысление того, что же такое текстовая задача;

2) введение новой формулы моделирования — краткой записи;

3) установление связи между задачами «на процессы» и известными схемами к арифметическим действиям.

Рассмотрим эти элементы подробнее.

В осмыслении того, что такое текстовая задача, чем она характеризуется, как она устроена, помогут ***задания 128—139***. Как известно, «текстовая задача представляет собой описание какого-либо явления (ситуации, процесса)»[1]. В каждой задаче можно выделить объекты, которые мы будем называть «действующие лица», есть условие — это та часть задачи, где содержатся сведения об известных и неизвестных значениях величин, об отношениях между ними, есть требование, т. е. указание на то, что нужно найти[2]. Другими словами, задача — цель, данная в определенных условиях, что означает, что условия и требования взаимосвязаны.

Смысл понятия «текстовая задача», так же как и понятие величины, как свойства объекта, проявляется при сравнении текстов между собой, подчеркнем, что речь идет не о решении той или иной задачи, а о ее тексте.

Так, сопоставляя тексты (***задание 128***), ученик выделяет структуру задачи: условие и вопрос (пока не требование, не цель, а вопрос), которые должны быть связаны между собой.

Примером отсутствия такой связи является задача № 8, которую дети расценят как задачу с «ловушкой». К («ловушкам») же могут быть отнесены детьми тексты под № 1, 2, 3, 5, 6 (с лишними данными) и № 7. Предложите детям избавиться от «ловушек».

Для этого им придется дополнить текст числовыми или буквенными данными, т. е. доопределить задачу, поскольку она была с недостающими данными (например, текст № 7). В других случаях нужно либо дополнить текст вопросом (задания № 3, № 5), либо заменить в нем вопрос (№ 8), либо убрать лишние данные (№ 6).

Все эти задачи мы и назвали задачами с «ловушками».

Сравнение задач из ***заданий 129 и 130*** поможет детям обнаружить в них сюжет, выделить числовые данные и представить отношения между ними.

Задание 131 выполняет роль диагностического задания и дает возможность задуматься над тем, что отличает с точки зрения математики одну задачу от другой. Ведь придумать задачу — это прежде всего задать отношения между величинами, которые

---

[1] Стойлова Л.П. Математика. — М., 1997. С. 117.

[2] Истомина Н. Б. Методика обучения математике в начальных классах. — М., 1998. С. 197.

можно зафиксировать схемой, и лишь затем выбрать конкретные величины и объекты, которые ими обладают, а затем включить их в сюжет.

Обнаружить связь между сюжетом задачи и ее числовыми данными поможет ***задание 132***.

С помощью ***заданий 133—136*** можно проверить, насколько ученик осознал, что такое задача. Для этого ему нужно либо самому ее придумать (***задания 133—135***), либо решить кем-то придуманные задачи (***задание 136***).

Задание 137 поможет глубже осознать связь между числовыми и буквенными данными. Фактически, как об этом уже писалось ранее, речь идет об области допустимых значений букв (параметров) с точки зрения сюжета и выполнимости арифметического действия.

Задания 138 и 139 позволяют сформулировать **существенный признак**, отличающий одну задачу от другой: **отношения между величинами**. Именно они наглядно представлены схемой (графической моделью) и могут быть описаны с помощью формулы (буквенно-знаковая модель), т. е. уравнения.

Если ребенок может составить уравнение к задаче независимо от того, умеет он решать такие уравнения или еще нет, то будем считать, что он задачу решил. Тем не менее ответить на вопрос задачи он сможет лишь тогда, когда научится решать те уравнения, которые еще не умеет решать, и научится выполнять действия с теми числами, о которых пока ничего не знает. Главное — установить отношения между известными и неизвестными величинами и зафиксировать их либо в графической модели, либо в знаковой, либо в обеих.

Задание 140 позволит ввести краткую запись задачи как дополнительную модель (ее можно назвать графико-знаковой или смешанной), и вот почему.

Предлагая детям придумать по схеме задачу про яблоки и груши, которые дети собирали в саду, вы тем самым однозначно задаете сюжетную линию (сюжет задачи). Буквенные данные на «ступенчатой» схеме помогут установить число «действующих лиц» (их 2: яблоки и груши) и указать значения величин (здесь речь идет о количествах, обозначенных буквами a и b).

Задача, которую придумают дети, может звучать так: «Дети в саду собрали a яблок, а груш на b больше. Сколько всего яблок и груш они собрали?» (***задание 141***). Если они будут находить какие-либо другие слова, то обсудите их. Главное — какими словами они сообщат об отношении между величинами: количеством яблок и количеством груш. Условно говоря, «у одного *a* чего-то, а у другого — на *b* больше. Сколько вместе?»

Эту задачу со слов детей запишите на доске. Заранее же напишите другой текст (главное, чтобы дети не видели его **до** того, как они озвучат свой текст): «Дети в саду собрали *a* яблок. Их оказалось на *b* меньше, чем груш. Сколько всего яблок и груш они собрали?»

Из сопоставления этих текстов (даже если оба текста будут исходить от детей) нужно сделать вывод о том, что по схеме мы не можем однозначно установить, какими словами описаны отношения между величинами: в прямой форме или косвенной.

Эта ситуация, как нам кажется, и должна подтолкнуть детей к мысли о дополнительном (вспомогательном) средстве моделирования текстовой задачи.

Новая модель должна обеспечить переход от текста задачи к графической модели, а не к знаковой (собственно **математической модели**), и в ней должны быть представлены все ее объекты («действующие лица»), отношения между величинами, характеризующими объекты, и указаны требования (цель) с помощью знака вопроса. Такой **вспомогательной моделью** задачи и является **краткая запись**. Конечно, есть ряд задач, для которых трудно составить краткую запись или она вовсе не нужна. Но то же самое можно сказать и о схеме: когда дети научатся составлять краткую запись (а это более высокая ступень на пути к составлению уравнения или выражения), то схема во многих случаях им просто не понадобится. Это произойдет лишь тогда, когда ученик сможет свободно переходить от одного вида модели к другому. Вершиной освоения можно считать непосредственный переход от текста к уравнению (выражению), минуя этапы составления краткой записи, схемы и их преобразования. А пока будем учиться составлять краткие записи (***задания 141—163***).

Прежде всего, нужно снова учиться читать задачу. Если для построения схемы мы структурировали текст исходя из ее элементов, то теперь первое, что нужно «вычитать» из текста, — сколько «действующих лиц» (объектов) в задаче. Например, в задаче из ***заданий 140—141*** их два: яблоки и груши, поэтому римскими цифрами для величин, их характеризующих, подготовим место. Вертикальная черта сообщает о том, что мы дали часть информации. Перейдем к следующему этапу.

I |
II |

Теперь впишем буквенные данные, сообщающие о количестве яблок (I) и количестве груш (II), отделяя вертикальной чертой эту информацию от следующей.

$$\begin{array}{l|l|}\text{I} & a \\ \text{II} & a+b\end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l|c|c|}\text{I} & a & \text{II}-b \\ \text{II} & & \end{array}$$

Первая краткая запись относится к «прямой» задаче, а вторая — к «косвенной».

Еще первая краткая запись могла быть составлена так:

$$\begin{array}{l|l|}\text{I} & a \\ \text{II} & \text{I}+b\end{array}$$

эта запись означает: у второго было на b больше, чем у первого (т.е. груш — на b больше, чем яблок).

Далее, в краткой записи нужно отразить знаком вопроса то, что требуется узнать в этой задаче:

$$\left.\begin{array}{l|l|}\text{I} & a \\ \text{II} & a+b\end{array}\right\}? \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l|l|}\text{I} & a \\ \text{II} & \text{I}+b\end{array}\right\}? \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l|c|c|}\text{I} & a & \text{II}-b \\ \text{II} & & \end{array}\right\}?$$

В ***задании 141*** представлены две из трех кратких записей.

Как нетрудно заметить, отличительной особенностью при составлении краткой записи задачи является то, что дети **сразу** указывают действие, соответствующее выявленным с помощью текста отношениям между величинами.

Нет необходимости указывать с помощью стрелок, слов указанные отношения, а также приписывать наименования рядом с числами или буквами. Зафиксировав, о какой величине идет речь, мы тем самым сужаем область использования данной краткой записи для решения других задач, которые с точки зрения математики будут точно такими же, поскольку для их решения может быть составлено такое же уравнение (выражение), а значит, и такая же схема, а следовательно, и такая же краткая запись. Но речь может идти о величинах другого рода с другими числовыми или буквенными данными и с другими объектами.

Составив одну краткую запись, мы тем самым составили ее не только к одной задаче, но и к целому классу частных задач:

$$\left.\begin{array}{l|l|}\text{I} & a \\ \text{II} & a+b\end{array}\right\}?$$

Такую «универсальную» краткую запись мы составляли взамен краткой записи к конкретной текстовой задаче о яблоках и грушах и их количестве:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Я. — } a \text{ шт.}\\ \text{Г. — на } b \text{ шт. больше, чем}\end{array}\right\}?$$

Новый подход к составлению краткой записи задачи стал возможным вследствие длительной и кропотливой работы над составлением схемы, на которой, как и в уравнении (выражении), мы не писали наименований, указывающих на род величины.

Кроме умения составлять краткую запись, детям понадобится и умение ее преобразовывать.

Причина, по которой нужно преобразовать краткую запись, — это построение схемы.

К примеру, по тексту была составлена такая краткая запись (***задание 149***):

$$\begin{array}{l|c|c|c|l|c}
\mathrm{I} & \mathrm{II} : 5 & \mathrm{III} - 15 & \mathrm{IV} + 5 & \multirow{4}{*}{$\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} 60$} & ?\\
\mathrm{II} & & & & & ?\\
\mathrm{III} & & & & & ?\\
\mathrm{IV} & & & & & ?
\end{array}$$

Обратите внимание на то, что при такой исходной краткой записи задачи в ее **тексте** было сказано, что первое в 5 раз **меньше** второго (I = II : 5), оно же на 15 **меньше** третьего (I = III – 15) и оно же на 5 **больше** четвертого (I = IV + 5).

Это значит, что отношение «в ... раз меньше» соотнесено в краткой записи с делением (в полном соответствии тексту задачи), «на ... меньше» — с вычитанием, а «на ... больше» — со сложением. И это правильно, при условии, что значение первой величины вы будете находить, опираясь на значение второй, третьей или четвертой, хотя для ее вычисления достаточно одной из трех. Тем не менее, забегая вперед, мы обнаружим, что удобнее всего найти значение первой величины, а II, III и IV находить уже по ней. Значит, несмотря на то что в тексте задачи было сказано «в 5 раз меньше», вычислять значение нужно будет **не** действием деления, а умножением: если первая величина в 5 раз меньше второй величины (I = II : 5), то это значит, что вторая величина в 5 раз больше первой (II = I · 5).

Это, в свою очередь, означает, что арифметическое действие, «обслуживающее» отношение «в ... раз меньше», может быть как делением, так и умножением, и для того, чтобы его правильно выбрать, необходимо сначала разобраться. Для этого и используется схема, которую очень трудно начертить к этой задаче по данной краткой записи, поскольку одна и та же величина (первая) соотносится со всеми остальными. Это значит, что если ее нарисовать раньше, чем остальные, то так или иначе придется при словесном описании отношений заменять отношение «в 5 раз меньше» на «в 5 раз больше». Сразу начертить первый отрезок таким, чтобы он удовлетворял одновременно трем условиям, невозможно.

Поэтому удобнее, **прежде чем чертить схему**, преобразовывать краткие записи, которые составлены к косвенным задачам. К ним мы будем относить те задачи, в которых об одной и той же величине дается несколько сообщений. Определить характер такой или иной задачи можно, составив краткую запись.

Учитывая то, что каждый раз мы одну информацию от другой отделяем вертикальной чертой, обнаружить косвенную задачу не составит труда (примеры косвенных задач — в ***заданиях 149 и 162***).

Итак, приступим к преобразованию краткой записи, используемой в качестве примера.

I	II : 5	III — 15	IV + 5	60	?
II					?
III					?
IV					?

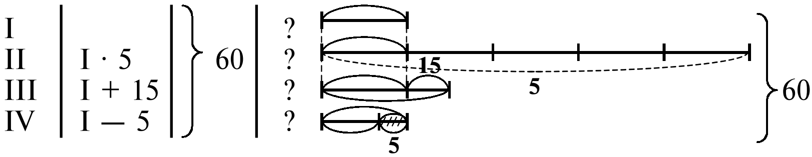
Итак, если первая величина **меньше** второй в 5 раз, значит вторая в 5 раз **больше**, чем первая. Запишем это:

I	
II	I · 5
III	
IV	

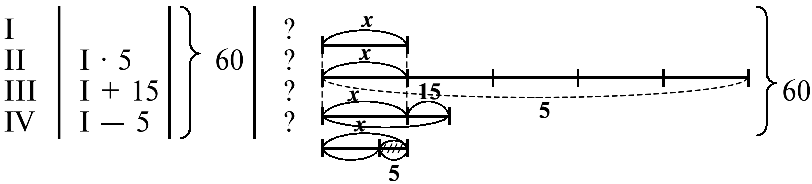
Продолжим рассуждения: если первая величина на 15 меньше, чем третья, значит, третья на 15 больше, чем первая. Аналогичные рассуждения проведем относительно IV величины и дополним краткую запись:

I		60	?
II	I · 5		?
III	I + 15		?
IV	I — 5		?

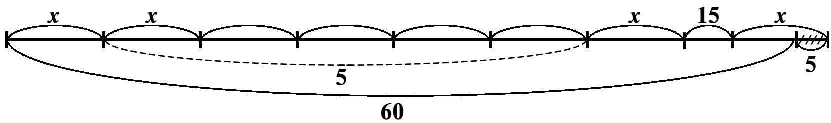
Напротив каждой величины начертим соответствующие отрезки:



Здесь отчетливо видно, что буквой *x* удобнее обозначить первую величину, которая, что тоже хорошо видно на схеме, повторяется 8 раз:



Теперь «ступенчатую» схему преобразуем в «линейную»:



Составим по этой схеме «удобное» для решения уравнение и, опираясь на нее же, решим его:

$x \cdot 8 + 15 - 5 = 60$
или
$8x + 15 = 60 + 5$
или $8x + (15 - 5) = 60$
$8x = 60 + 5 - 15$
$x \cdot 8 = 50$
$x = 50 : 8$
$x = 6{,}25$

Зная значение первой величины, определим значения остальных.

Для выбора арифметического действия при нахождении каждой из оставшихся величин, о которых спрашивается в задаче, можно опираться на схему и на преобразованную краткую запись (к. з.).

Подробно описывая способ работы над задачей, отметим, что на уроках необходима **пооперационная** отработка способа решения задачи: сначала отрабатывается связка (обратите внимание на двойную стрелку):

$$\boxed{\text{текст}} \rightleftarrows \boxed{\text{к. з.}},$$

затем рассматривается преобразование краткой записи:

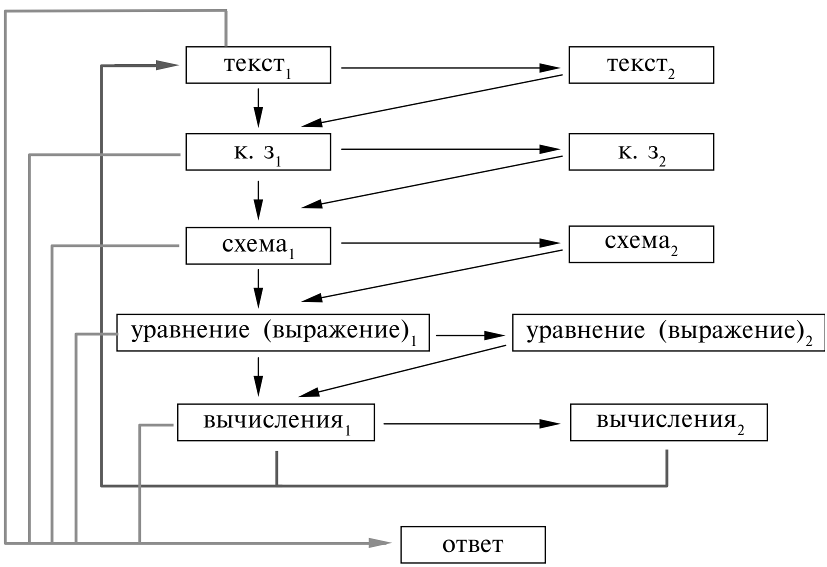
$$\boxed{\text{к. з}_1} \rightleftarrows \boxed{\text{к. з}_2},$$

и, наконец, переход от краткой записи к схеме:

$$\boxed{\text{к. з.}} \rightleftarrows \boxed{\text{схема}}.$$

Остальные операции, как-то: преобразование схемы, переход от схемы к уравнению, преобразование (решение) уравнения, вычисление результата с последующим ответом на вопросы (требования) задачи, детям хорошо знакомы. Теперь они включены в более сложное действие.

Общая схема работы над текстовой задачей (а она должна быть составлена сразу же после появления нового вида модели, а не по завершении изучения подходов к решению задач) выглядит так (формулировки этапов упрощены):



Из этой модели, отражающей способ работы над задачей, видно, что не только краткая запись, схема и уравнение могут по необходимости преобразовываться, такому преобразованию могут быть подвержены текст задачи и вычисления. Что имеется в виду?

Есть ряд задач, когда условие задачи «вписано» в требование. Например:

«Найди периметр фигуры, если известно ...» или

«Сколько всего учеников в классе, если в нем учатся *a* мальчиков и *b* девочек?» и т. п.

Есть задачи, в которых для ответа на вопрос нужно при вычислениях изменить порядок действий или даже порядок множителей (т. е. преобразовать исходное выражение). Например:

«Для школы купили 1325 тетрадей по 12 р. каждая и 8 столов по 1325 р. Сколько стоит вся покупка?»

Для решения **этой** задачи составленное уравнение или выражение должно выглядеть так и никак иначе:

$$x = 12 \cdot 1325 + 1325 \cdot 8$$

Но вычислять удобнее так: $1325 \cdot (12 + 8) = 1325 \cdot 20 = 26500$, абстрагируясь от конкретного смысла, после чего вернуться к тексту задачи и соотнести с ним полученное число. Запишем ответ.

Вряд ли стоит подробно описывать составление таблиц при решении задач, требующих перехода от одной меры к другой, более крупной, например от отдельных деревьев к рядам и от них к общей величине (целому). Это относится к задачам как из ***задания 150***, так и из ***заданий 151***, ***154—156***.

Составление таблиц, или, как дети их назвали, краткой записи «с шапкой», дает возможность подготовиться к аналогичной форме краткой записи задач «на процессы».

Задания 164—187 так или иначе связаны с обучением решению задач.

При выполнении каждого из этих заданий важно соотносить место задания в общей схеме решения задачи. Так, например, решая уравнения из ***задания 174***, ученики должны объяснить следующее: чем лучше они научатся решать разнообразные уравнения, тем шире их возможности при решении задач. Умение решать новые типы уравнений расширяет круг решаемых задач. Место уравнений при решении задач указано на общей схеме, которая должна быть сконструирована детьми, обсуждена и вынесена на специальный плакат — он должен висеть в классе и быть всегда под рукой.

3.2. ЗАДАЧИ «НА ПРОЦЕССЫ» (22 ч)

Для усвоения общего приема решения данных задач необходимо, прежде всего, сформировать у детей представление о процессе движения, который характеризуется тремя величинами разного рода. Это скорость, время и пройденный путь (расстояние). Когда говорят о задачах «на процессы», в том числе о задачах «на движение», то, как правило, имеют в виду задачи, в которых скорость процесса (v) задает отношение (зависимость, связь) между величинами s и t, где t — время, а s может быть длиной (расстоянием), массой, объемом, количеством (кстати, количество выполненной работы называют объемом работы).

Отношение между s, v и t задается формулой $s : t = v$ или $s = v \cdot t$.

Итак, общим для всех задач, где характеристиками процесса являются 3 разнородные величины — скорость, время и одна из хорошо известных детям величин — длина (ширина, высота, глубина, расстояние), площадь, масса, объем, количество, величина угла, будет новое отношение, связывающее величины разного рода.

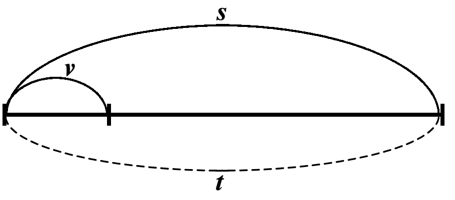
Несмотря на то что в задачах «на куплю-продажу» не участвует такая величина, как время (ее заменит количество купленного товара), **цену** можно рассматривать как «скорость» траты денег, а стоимость — как «продукт, конечный результат траты». Система отношений между этими величинами, по выражению Н. В. Талызиной, **идентична** системе отношений величин в задачах «на процессы».

Из трех взаимосвязанных величин предметом специального изучения становится **время**. Понятие скорости равномерного процесса как производной величины, которая является величиной постоянной и равной коэффициенту пропорциональности: $\frac{s}{t} = v$, изучается значительно позже и не только в школьном курсе математики, но и физики.

Следовательно, главная задача обучения на данном этапе перемещается с понятия скорости того или иного процесса или явления, ему подобного, на установление связи между тремя величинами и отображение этой связи в различных моделях: графической (схемой), буквенно-знаковой (уравнением) и смешанной знаковой моделью — в форме краткой записи.

Другими словами, основными задачами обучения являются понимание детьми заданной системы отношений между величинами и ее перевод в различные виды моделей. Основной среди них является (должна стать) знакомая детям графическая модель (схема), опираясь на которую они могут записать 3 основные формулы:

$v \cdot t = s$; $s : t = v$ и $s : v = t$.



А знакомство со скоростью как характеристикой изменения во времени того или иного процесса (а сначала речь идет о движении) произойдет после того, как будет рассмотрена такая величина, как **время**, без представления о которой нет смысла говорить о скорости.

Одной из основных проблем, с которыми сталкиваются учащиеся при решении задач данного класса, является перевод задачи с естественного языка на математический. Поскольку носителями общего способа решения всех задач данного класса являются задачи «на движение», то важно понять, какие естественные слова, описывающие процесс перемещения (движения), требуют перевода на язык математики.

Так, слова «раньше — позже», «ближе — дальше», «быстрее — медленнее» относятся к разным величинам: «раньше — позже» — ко времени, «ближе — дальше» — к расстоянию, «быстрее — медленнее» — к скорости.

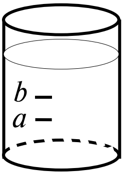
Когда говорят «один бежал быстрее другого», то, как правило, эти слова соотносят со скоростью изменения расстояния в зависимости от времени. Что же это значит для решения задач? Если смысл слова **«быстрее»** ассоциируется со скоростью, то в этом случае она (скорость) соотносится с **бóльшим** числом, а **«медленнее»** — с **меньшим**. Но если слова «быстрее — медленнее» ученик соотносит со временем, тогда **«быстрее»** означает, что потрачено меньше времени, а **«медленнее» — больше**, т. е. все наоборот. И в этом нужно разобраться.

Далее, смысл слов «раньше — позже» также нуждается в специальном обсуждении (кстати, это одно из самых ошибкоопасных мест при решении задач этого класса). К примеру: если один движущийся пешеход вышел на 2 часа **раньше**, чем второй, а пришел одновременно с ним, то время, потраченное на дорогу первым пешеходом, на 2 часа больше, чем время в пути второго. А если они вышли одновременно, но первый пришел **раньше** второго на 2 часа, то время первого на 2 часа меньше времени второго. Это значит, что в первом случае эти 2 часа нужно **прибавить** ко времени второго, а во втором случае — **отнять**. При этом слова, характеризующие эти отношения, были одинаковы: и в одном случае сказали «раньше на 2 часа», и в другом. Но и это еще не все относительно смысла слов «раньше — позже». Ребенок пришел в школу с уже сложившимся представлением о смысле слов «раньше — позже». Для него слово **«раньше»** ассоциируется с **меньшим** числом, а **«позже»** — с **бóльшим**. И вот почему. Когда ребенка (и школьника в том числе) отправляют вечером спать, он, как правило, «канючит», утверждая, что еще рано, и при этом непременно смотрит на часы: ложиться спать в 8 или в 9 часов вечера еще **рано**, считает ребенок, а в 10 часов вечера мама утверждает, что уже **поздно**, а $8 < 10$ и $9 < 10$.

В описанном примере речь идет о моменте времени, т. е. времени, которое показывают часы. В задачах «на процессы» понятие времени относится не к моменту времени, а к его интервалу (промежутку, отрезку).

Это значит, что для решения задач данного класса ученику нужно научиться определять интервал времени, если известно время начала и конца движения.

До сих пор ребенок уже имел дело с различными «интервалами», например, расстояние от одной точки до другой соответствовало длине отрезка с началом и концом в этих точках, причем совершенно не имело значения, какую из этих точек считать началом, а какую — концом. Аналогично обстояло дело и с объемом: если налить воды в банку и сделать 2 метки, то от одной до другой, независимо от их порядка (от *a* до *b* или от *b* до *a*), объем (или количество воды) один и тот же.



Но с такой величиной, как время, все обстоит по-другому: от 3 ч до 5 ч — не то же самое, что от 5 ч до 3 ч. Речь идет о **разных** интервалах времени, хотя в обоих случаях часы показывают 3 ч и 5 ч.

Поэтому рассмотрение задач «на движение» и всех остальных задач данного класса начнем с величины под названием время.

Задания в разделе «Проверь себя!» (учебник, часть 2, глава 3) упорядочивают представление о времени, позволяют изучить отношения между единицами времени.

Учитывая то, что дети знакомы с различными системами счисления, им нетрудно обнаружить «остатки» шестидесятиричной системы счисления.

Начиная с ***задания 188 и по 191*** нужно обсудить с детьми ситуацию двух «действующих лиц» (двух пешеходов, например) и перейти к рассмотрению того, что значит скорость.

Задания 192—200 предназначены для решения задач, позволяющих рассмотреть связь между s, v и t, отображенную формулами: $s = v \cdot t$, $s : t = v$, $s : v = t$.

Начиная с ***задания 200*** вводится **краткая запись** в форме таблицы.

В ***задании 208*** рассматривается скорость сближения, а в ***задании 211*** — скорость удаления. За каждым из этих заданий следуют упражнения, позволяющие усвоить эти понятия. Основной прием, используемый при решении как прямых, так и обратных задач (***задание 212***), состоит в использовании разных видов **моделей** и прежде всего графических, которые дают ученику наглядное представление о характере отношений между величинами.

Под ключами ко многим заданиям показаны краткие записи, которые могут как сопровождать схемы, так и со временем заменять их (***задания 212—253***).

Задачи 254—260 названы задачами для тех, кто любит посложнее, и знакомят детей с задачами на движение транспортного средства (лодок, теплоходов) по реке, имеющей течение, когда появляются 4 взаимосвязанные скорости: собственная — это скорость в стоячей воде, скорость течения реки, скорость по течению и скорость против течения:

$$v_{\text{по течению}} = v_{\text{собств}}. + v_{\text{течения реки}};$$

$$v_{\text{против течения}} = v_{\text{собств}}. - v_{\text{течения реки}}$$

Отсюда следует, что

$$v_{\text{по течению}} + v_{\text{против течения}} = 2v_{\text{собств.}} \text{ или}$$

$$v_{\text{собств.}} = (v_{\text{по течению}} + v_{\text{против течения}}) : 2$$

Обучение решению таких задач, как и всех других сложных задач, связанных с движением тел, будет предметом изучения в основной и средней школе.

В начальных классах мы лишь закладываем основы **общего** подхода к их решению: моделированию отношений.

Завершают эту главу, посвященную решению задач, как обычно, ***разделы «Проверь себя!» и «Это интересно!»***, назначение которых учителю хорошо знакомо.

Задачи на смекалку, которыми заканчивается учебник, дети решают по желанию.

ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа 1

Набор 1

1) Выбери только те задания, которые сможешь выполнить. Реши их.

2) Из оставшихся заданий выбери и отметь буквой «Т» те, которые кажутся тебе трудными, а буквой «Н» те, которые, по-твоему, вообще невозможно выполнить.

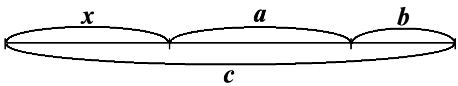
Задание 1. Реши уравнения.

1) $b + a \cdot x = c$
2) $407 + x \cdot 3 = 1080$
3) $560 : y = 14$
4) $x \cdot 30 = 330$
5) $2y + 50 = y \cdot 3 + 30$
6) $x : 74 = 8$
7) $x \cdot 4 - 5 = x \cdot 3$
8) $20 \cdot x = 10$
9) $5 - x = 7$
10) $461 - x = 102$
11) $m - x : a = c$
12) $y - 30 = 330$

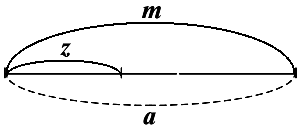
Нет ли среди данных уравнений одинаковых?
Если есть, запиши их номера.

Задание 2. По схеме составь уравнения:

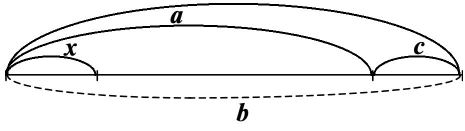
1)



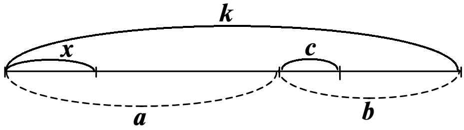
2)



3)



4)



Вместо букв подбери подходящие числа и запиши, чему равна неизвестная величина.

Набор 2

Задание 1.

1) Отметь значком «—» примеры, которые ты не умеешь решать самостоятельно, и поставь букву «Т» рядом с примерами, которые считаешь трудными (решать их не надо).

2) Выбери и реши на отдельном листе два таких примера из каждой группы, с помощью которых ты сможешь показать, что умеешь выполнять действия с многозначными числами и с дробями.

Если хочешь, придумай и реши свои два примера к каждой группе.

3) Запиши ответы в тех примерах, которые можешь решить устно.

1)	$6 + 8$	$307 + 251$
	$3 + 9$	$791 + 197$
	$5 + 7$	$59637 + 1265$
	$9 + 6$	$437956 + 923062$
	$211_4 + 113_4$	$83512 + 47108$
	$231_4 + 13_4$	$42381276 + 5210432$
	$64 + 25$	$21012_3 + 11_3$
	$72 + 19$	$23013_5 + 4232_5$
	$54 + 28$	

2)	$10 - 2$	$893 - 239$
	$11 - 5$	$4230_5 - 1214_5$
	$13 - 8$	$6287 - 458$
	$14 - 9$	$53008 - 49325$
	$43 - 34$	$42834 - 7569$
	$92 - 79$	$200000 - 199999$
	$15 - 20$	$7654321 - 123456$
	$400 - 32$	$32102_3 - 121_3$
	$739 - 126$	$6000 - 600$

3)	$32 \cdot 2$	$624 \cdot 52732$
	$54 \cdot 6$	$503 \cdot 8009$
	$7 \cdot 54$	$21_3 \cdot 2$
	$83 \cdot 36$	$102_4 \cdot 13_4$
	$473 \cdot 39$	$45203_7 \cdot 0$
	$6913 \cdot 532$	$1 \cdot 4705_8$
4)	$64 : 2$	$203\,148 : 324$
	$51 : 17$	$37351944 : 4006$
	$15 : 34$	$1725 : 25$
	$6 : 10$	$42_5 : 2$
	$639 : 3$	$1212_3 : 12_3$
	$60\,126 : 6$	$327327 : 327$
	$587300 : 1000$	$238148 : 324$
5)	$5{,}3 + 2{,}6$	$3{,}6 \cdot 2{,}7$
	$26{,}12 - 3{,}372$	$8{,}13 \cdot 0{,}3$
	$821{,}002 - 17{,}2$	$0{,}039 \cdot 0{,}002$
	$54{,}236 + 0{,}54813$	$276{,}35 \cdot 0{,}00001$
	$2{,}25 + 75$	$2{,}7108 : 0{,}9$
	$48 - 11{,}3241$	$310{,}3 - 63$
	$12{,}103_4 - 1{,}2_4$	$4{,}8 \cdot 25$
	$6{,}478 \cdot 42$	$213{,}01_4 + 3{,}03_4$
	$32{,}8 : 164$	$0{,}38048 : 0{,}0164$
	$2{,}3 \cdot 0{,}45$	$13910 : 21{,}4$

Задание 2.

1) Поставь букву «У» возле тех выражений, значение которых ты можешь найти устно, и запиши ответ.

2) Выбери такое выражение, для нахождения значения которого тебе придется выполнить все четыре арифметических действия. Выполни их.

$40 + 50 : (85 - 80) =$

$180 - 80 : 8 + 12 =$

$6400 : (28 + 12 \cdot 6) =$

$360 : 6 \cdot 4 : 4 =$

$(2713 \cdot 65 + 2713 \cdot 35) - 2713 \cdot 100 =$

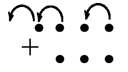
$864375 - 321 \cdot 67 - 42054 : 326 =$

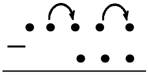
$(1923 - 671) \cdot 6 + 11984 : 214 =$

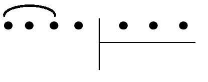
$1429 - (429 \cdot 328 - 429 \cdot 327) =$

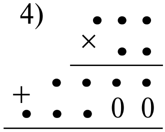
Задание 3.

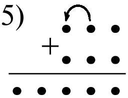
Подбери подходящие числа и выполни действия:

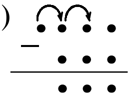
1) 

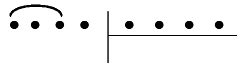
2) 

3) 

4) 

5) 

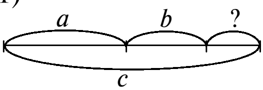
6) 

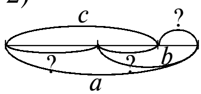
7) 

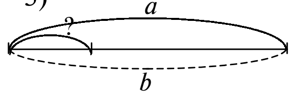
Контрольная работа № 2

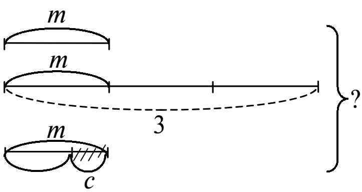
Набор 1

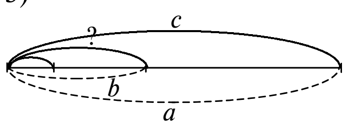
Задание 1. Отметь только те схемы, к которым ты **не можешь** придумать или подобрать текст задачи.

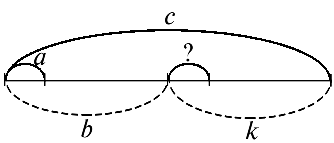
1) 

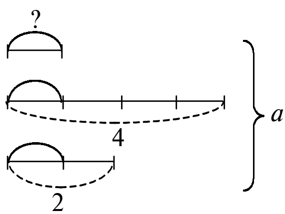
2) 

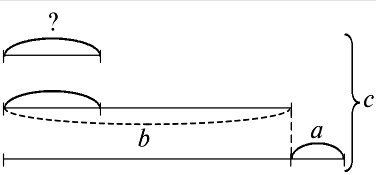
3) 

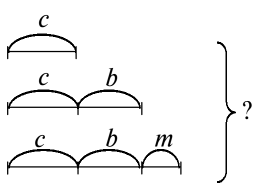
4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

9) 

Задание 2. Вернись к схемам в ***задании 1***.

1) Выпиши только номера схем к задачам, которые ты сможешь решить.

2) Запиши номера схем:

а) к самым трудным для тебя задачам;

б) к легким для тебя задачам;

в) к самой интересной для тебя задаче (объясни, чем она интересна).

3) Реши по данным схемам любые две задачи.

4) Прочти из учебника задачи под № 1 и найди такой текст, который подходит к решенной тобой задаче.

Выпиши значения букв ($a = ...$, $b = ...$ и т. д.). Подставь их в выражение и вычисли результат. Запиши ответ к задаче.

Набор 2

Выбери и реши такие две задачи из каждого задания, в которых ты не ошибешься.

Задание 1. Задача 1. Мама летом варила варенье. Клубничного варенья она сварила a кг, яблочного в 2 раза больше, чем клубничного, а вишневого — на b кг больше, чем яблочного.

Сколько всего килограммов варенья заготовила мама?

1) $a = 8$; $b = 4$; 2) $a = 3864$; $b = 2317$; 3) $a = 12{,}3$; $b = 4{,}8$; 4) $a = 1000$; $b = 100$.

Задача 2. Молоко разливали в бидоны. До обеда разлили a литров, а после обеда — b литров. Сколько бидонов понадобилось, если в каждый бидон вмещается c литров молока?

Задача 3. Овощной магазин продал b коробок с клубникой по c килограммов в каждой и столько же килограммов слив в a коробках. Сколько килограммов слив входило в каждую коробку?

Задача 4. Из двух городов навстречу друг другу вышли два поезда. Один из них шел со скоростью 90 км/ч, а другой — на 20 км/ч быстрее. Через 5 часов они встретились. Найди расстояние между городами.

[1] Учитель самостоятельно подбирает номера задач из любых действующих учебников.

Задание 2. Задача 1. Начерти прямоугольник площадью 12 $см^2$ и найди его периметр.

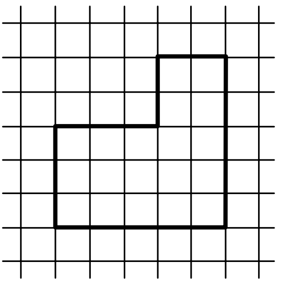
Задача 2. Начерти прямоугольник, ширина которого 3 см, а длина — в 2 раза больше. Вычисли его периметр и площадь.

Задача 3. Начерти прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см. Вычисли его периметр и площадь.

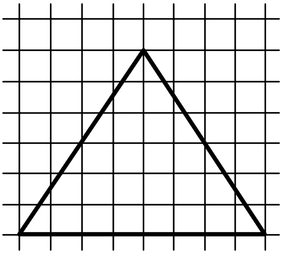
Задача 4. Начерти квадрат такой же площади, как прямоугольник со сторонами 2 см и 8 см. Найди периметр квадрата.

Задача 5. Периметр квадрата 20 см. Найди площадь прямоугольника, у которого ширина такая же, как сторона квадрата, а длина на 3 см больше.

Задача 6. Построй одну или несколько фигур с таким же периметром, как у данной фигуры, но другой формы.



Задача 7. Построй фигуру другой формы, но такой же площади.



Задача 8. Начерти две фигуры с одинаковыми периметрами, но разной площади.

ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ И АНАЛИЗУ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа 1

Проводится в 2 этапа (в разные дни) и дает возможность ученику в удобном для него темпе выполнить те задания, которые он может выполнить.

Набор 1.

В ***задании 1*** детям предлагаются уравнения разного уровня сложности. Уравнения под номерами 3, 4, 6, 8, 9, 10 и 12 относятся к простым уравнениям, причем уравнения 8 и 9 позволяют проверить, на что ориентируется ребенок: на связь между данными величинами или на их числовые значения. Так, уравнение $50 \cdot x = 10$ может быть ошибочно решено так: $x = 50 : 10$, вместо $x = 10 : 50$ или $x = 0{,}2$, а уравнение $3 - x = 4$ — как $x = 4 - 3$, т. е. $x = 1$, вместо $x = 3 - 4$ с последующим указанием на «ловушку».

Особое место занимают уравнения 5 и 7, которые содержат x в обеих частях. Такие уравнения детям незнакомы. Значит, ребенок должен отказаться от их решения. Это будет означать, что он умеет самостоятельно определить границу между собственными знанием и незнанием. Возможно, он предпримет попытку нарисовать схему, с помощью которой можно найти значение неизвестной величины. Это должно быть оценено как высокий уровень выполнения.

Например, схема к уравнению 5:

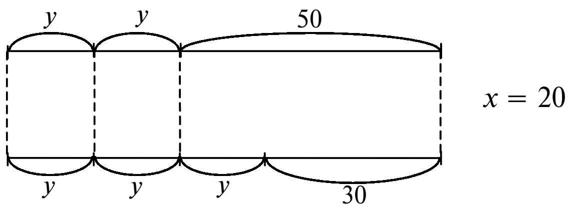
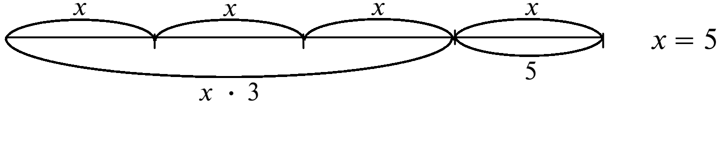


Схема к уравнению 7:



Ответ на вопрос: «Нет ли среди данных уравнений одинаковых?» — даст возможность учителю проверить, выделяет ли ребенок существенный признак при сравнении уравнений, которым является отношение между величинами, или он ориентируется на несущественный — числовые или буквенные данные.

К одинаковым уравнениям могут быть отнесены № 1 и № 2; № 3 и № 6, № 4 и № 8, № 9 и № 10.

Возможна и другая классификация, по которой все уравнения могут быть разбиты на 2 группы: в одну все, у которых неизвестная величина является целой (№ 6, № 12), во вторую группу относятся все остальные, в которых неизвестная величина является частью.

Задание 2 проверяет уровень сформированности понятия отношения частей и целого: для низкого уровня выполнения задания достаточно составить по одному уравнению к каждой схеме или по 2–3 уравнения к первой и второй схемам.

К высокому уровню можно отнести составление 4–5 уравнений к четвертой схеме, включая подбор подходящих чисел.

Набор 2

Формулировки заданий 1 и 2 исчерпывающе описывают назначение этих заданий.

По тому, что выберет ребенок и как выполнит выбранные задания, учитель сможет оценить уровень сформированности вычислительного навыка.

В ***задание 3*** включены две «ловушки» (№ 5 и № 7).

Дети должны это отметить и либо отказаться от выполнения этих заданий, поставив знак «Н» — знак невозможности выполнения, либо преобразовать условия так, чтобы задание стало выполнимым.

Для традиционной отметки в 5 баллов за выполнение данной контрольной работы достаточно: из ***первого набора*** заданий правильно решить 2 уравнения, составить по 1 уравнению к двум первым схемам задания 2; из ***второго набора*** выполнить по 1 примеру на действия в пределах 10000 и найти числовое значение **одного** из данных выражений в ***задании 2***. ***Задание 3*** можно в сочетании с другими выполненными заданиями оценить отдельно. Не допускать отрицательного оценивания тех заданий, от которых ребенок отказался, считая их невыполнимыми или трудными. Нужно по ходу выполнения контрольной работы напоминать детям, что они должен выполнить из каждого задания только те, в правильности выполнения которых **не сомневаются**. Оценивается не объем выполненной работы, а ее качество — вот что должны понять дети перед выполнением каждой контрольной работы, каждого набора заданий и каждого задания.

Контрольная работа 2

Контрольная работа 2 дает возможность проверить не только умение решать текстовые задачи, уровень сформированности действия графического моделирования, но и возможности ученика оценить свои умения.

Проведение этой контрольной работы не нуждается в дополнительной инструкции. Она аналогична инструкции к контрольной работе 1.

Эта работа, как и первая, проводится в 2 этапа (в разные дни).

Для традиционной отметки в 5 баллов достаточно правильно выполнить любые две задачи из первого набора заданий или одну из первого набора и одну из второго набора ***задания 1***, а также одну любую задачу из ***задания 2***.

Выполнение нескольких заданий из каждого набора может оцениваться отдельно. Напоминаем, что задания выполняются на отдельных листах в рабочей тетради, из которых выбираются те, которые смог выполнить ребенок. Оценить уровень выполнения заданий не составит для учителя труда.

НАВИГАТОР ПО ЗАДАНИЯМ УЧЕБНИКА ДЛЯ 4 КЛАССА

Информация для учителя

Все задания, содержащиеся в учебнике, обеспечивают достижение учащимися образовательных результатов, предусмотренных ФГОС НОО. Конкретизировать использование заданий помогут приведенные далее сводные таблицы.

При работе с навигатором надо иметь в виду, что достижение образовательных результатов не ограничивается выполнением отдельных заданий учебника. Такие результаты можно получить только на основе системной работы со всеми учебными и методическими пособиями данного УМК в комплексе.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА «МАТЕМАТИКА» В 4 КЛАССЕ

Наиболее значимые задания на обеспечение личностных, метапредметных и предметных образовательных результатов

Задания на обеспечение личностных результатов	Задания на обеспечение метапредметных результатов	Задания на обеспечение предметных результатов
Книга 1: стр. 5 (постановка учебно-практической задачи); №№: 2–10, 12, 13, 16, 21, 22, 26–29, 30, 34, 36–52, 55, 57–59, 62, 1 (стр. 37), 4 (стр. 39), 9 (стр. 40), 16–18 (стр. 42), 63, 68–72, 3 (стр. 51), 6 (стр. 52), 74–83, 84–89, 91–92, 96, 1–2(стр.68),97–99, 101–102, 104–116, 118–121, 126–134, 138–139,141–143, 146–150, 153–155, 159, 163, 168–169, 171, 173–174, 182–185, 187, 193, 197, 202, 3 (стр. 128), 6 (стр. 129), 7 (стр. 130). Рубрика «Это интересно»: стр. 35, 114, 120, 139	*Книга 1*: №№: 2–10, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 26–29, 30, 35–46, 51–53, 58–59, 1–5 (стр. 36), 9 (стр. 40), 16–19 (стр. 42), 63, 68–73, 1–3 (стр. 51), 6–8 (стр. 52), 74–76, 78–83, 84–92, 96, 1 (стр. 68), 97–99, 102–105, 109–110, 113–116, 118–119, 121, 126–129, 132–139, 143, 147–148, 163–166, 168–169, 173–174, 184–185, 192. Рубрика «Проверь себя»: стр. 17, 46, 55, 59, 67, 85, 99, 117, 138 *Книга 2*: №№: 1–8, 10–13, 17–19, 23, 26, 30, 32, 37–39, 41–51, 53, 55–60, 62–65, 68–74, 80–	*Книга 1*: №№: 1–29, 30–56, 1–9 (стр. 36), 63–73, 1–14 (стр. 51), 74–82, 86–89, 91, 96, 1–7 (стр. 68), 97–106, 110–121, 126–129, 132–141, 147–150, 153–157, 162–167, 168–174, 183–185, 188, 202, 209–211, 1–26 (стр. 128). *Книга 2*: №№: 1–19, 23–27, 30–31, 38–40, 41–60, 62–65, 68–75, 83–85, 86–92, 96, 99–113, 120, 121, 128–145, 147–155, 162–165, 169, 172–175, 6 (стр. 114), 188–194, 197–203, 205–206, 208, 211, 212–215, 217–230, 234–253.

Книга 2: №№: 1–27, 30–32, 36–40, 41–48, 50–51, 53–60, 62–65, 70–74, 80, 83, 86–89, 99–103, 109–112, 120, 121, 128–135, 137–143, 147–148, 155–156, 159, 165, 168–174, 176, 186–187, 188–191, 197, 199, 201, 206, 208, 209, 211–213, 221, 224, 234, 246, 248, 253, 254–260. Рубрика «Это интересно»: стр. 53, 80, 116, 141	83, 87–94, 99–102, 110–112, 115, 120, 121, 126, 128–143, 147, 148, 153, 153, 159, 161, 165, 168–169, 171–174, 176, 186–187, 188–191, 194, 197, 199, 203, 206, 211–215, 218, 221, 226, 230, 234, 246, 248, 253, 255, 256. Рубрика «Проверь себя»: стр. 11, 26, 59, 66, 79, 83, 102, 112, 143	

1. Задания на достижение личностных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Развитие самостоятельности и личной ответственности: • готовность и способность к саморазвитию; • умение понимать и принимать точку зрения другого человека и аргументировать собственную; • способность к критическому мышлению; • способность слушать и слышать собеседника, готовность	*Книга 1:* стр. 5 (постановка учебно-практической задачи); №№:3–9, 11–29, 1–2 (стр. 17), 30, 34–43, 45–55, 57–60, 62, 1 (стр. 36), 4 (стр. 38), 9 (стр. 40), 16 (стр. 42), 17–19 (стр. 42), 63, 65–66, 68–73, 1 (стр. 51), 3 (стр. 51), 6–9 (стр. 52), 74–83, 84–89, 91–92, 96, 1 (стр. 69), 97–99, 101–110, 112–119, 121–125, 126–134, 136, 138–139, 143,

прийти на помощь в совместной деятельности. Овладение начальными навыками адаптации в динамично изменяющемся и развивающемся мире: • адекватно оценивать свои возможности при решении поставленных учебно-практических задач; • умение в коммуникации осуществлять постановку новых целей и задач (в пределах своих возможностей); • умение принимать на себя ответственность за организацию совместной деятельности; • развитие навыков сотрудничества со взрослыми и сверстниками.	144, 147–150, 153–155, 157–160, 163, 166, 167, 168–169, 171, 173–175, 182–185, 189, 193, 197–202, 7–8 (стр. 130), 13–15 (стр. 133). *Книга 2:* стр. 112 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–19, 26, 27, 30–32, 36–40, 6–9 (стр. 27), 41–65, 68–70, 72–73, 76–77, 80–83, 86–90, 92–95, 98, 99–102, 105–107, 110–112, 115, 120–121, 126, 1–2 (стр. 83), 7 (стр. 85), 128–135, 137–141, 143–145, 147–153, 155–157, 159, 161, 165, 168, 169–174, 176, 187, 188–200, 208–209, 211–219, 221–224, 226, 230, 234, 246, 248, 251, 253, 255–256, 260. Рубрика «Проверь себя»: стр. 102, 112
Принятие и освоение социальной роли ученика: • формирование мотивации к обучению и познанию; • готовность учиться на базовом и высоком уровне на основе учебно-познавательных мотивов (в пределах своих возможностей); • готовность активно осваивать новое содержание, открывать новые способы решения учебно-практических задач (в пределах своих возможностей);	*Книга 1*: №№: 1–2, 6, 9, 12–13, 16, 19, 21–29, 30, 33–53, 55–62, 1–5 (стр. 39), 16–19 (стр. 42), 26–29 (стр. 45), 63–73, 1 (стр. 51), 3–8 (стр. 51), 10, 11 (стр. 54), 74–83, 84–92, 96, 2 (стр. 68), 3–6 (стр. 69), 97–119, 121, 125–129, 132–134, 136, 138–141, 143, 144, 146–150, 153–155, 157, 159–160, 162–163, 166–169, 171, 174–177, 183–185, 187, 190–192, 197, 202, 206–207, 1–16 (стр. 128). Рубрика «Проверь себя»: стр. 55, 59, 67, 85, 99, 117, 138.

• готовность к саморефлексии причин успешности / неуспешности в своей учебной деятельности. Формирование эстетических потребностей, ценностей и чувств: • готовность к самореализации (выражения себя) в различных видах творческой и проектной деятельности.	Рубрика «Это интересно»: стр. 35, 114, 120, 139 *Книга 2*: №№: 1–40, 41–76, 78–86, 87–98, 99–112, 121, 128–135, 138, 141, 143, 145, 148, 149, 155–157, 159, 161, 165, 168–169, 171–174, 176, 186–187, 188–191, 194, 199–203, 205, 208–209, 211–215, 218–219, 221–224, 234, 246, 248, 251, 254–260. Рубрика «Проверь себя»: стр. 26, 59, 66, 79, 83, 112, 143 Рубрика «Это интересно»: стр. 53, 81, 116, 141

2. Задания на достижение метапредметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Основные группы познавательных результатов	
Учебно-логические универсальные действия: • овладение логическими действиями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, классификации по родовидовым признакам, установления аналогий и причинно-следственных связей, построения рассуждений, отнесения к известным понятиям; • овладение базовыми предметными и межпредметными понятиями, отражающими существенные	*Книга 1:* №№: 1–29, 30–62, 1–29 (стр. 36), 63–73, 1–14 (стр. 54), 74–96, 1–7 (стр. 68), 97–125, 127–144, 147–152, 153–157, 159–167, 168–173, 182–185, 187–189, 192, 193, 196, 202, 212, 1–17 (стр. 128). Рубрика «Это интересно»: стр. 35, 114, 120, 139

связи и отношения между объектами и процессами; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности проводить сравнение и классификацию способов решения задач по самостоятельно выбранным основаниям и критериям; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности схематизации и моделирования; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности выделять в процессе анализа задачи требование и условие. Учебно-информационные универсальные действия: • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотеки и Интернета; • формирование компетентности решения учебно-практических задач на основе способности записывать, фиксировать полученную из разных источников существенную и несущественную информацию, в том числе с помощью инструментов ИКТ.	*Книга 2:* стр. 112 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–9, 10–20, 23–28, 30–32, 36–40, 1–8 (стр. 27), 41–65, 68–77, 80–84, 86–98, 99–113, 115–116, 120–121, 126, 128–187, 188–260. Рубрика «Проверь себя»: стр. 11, 26, 59, 66, 79, 83, 102, 112, 143 Рубрика «Это интересно»: стр. 53, 80, 116, 141
Универсальные учебные действия решения задач:	*Книга 1:* №№: 1–29, 30–53, 55–62, 1 (стр. 37), 4

• формирование умения решать учебно-практические задачи по освоенному способу; • формирование умения понимать, что причина неудач при решении учебно-практических задач может находиться в неправильно осуществленных учебных действиях; • формирование умения произвольно и осознанно владеть общими способами решения учебно-практических задач; • формирование умения выбирать наиболее эффективные способы решения учебно-практических задач; • формирование умения понимать причины успеха/неуспеха учебной деятельности и способности конструктивно действовать даже в ситуациях неуспеха; • формирование умения определять и формулировать проблему в своей учебной деятельности при решении учебно-практической задачи и построении нового способа решения задачи; • формирование умения переводить проблему в задачу и находить наиболее эффективные способы ее решения.	(стр. 38), 16 (стр. 4), 18 (стр. 43), 3 (стр. 51), 6–8 (стр. 52), 74–96, 1–2 (стр. 68), 97–99, 101–125, 126–152, 153–167, 168–189, 197–203, 206–211, 1–26 (стр. 128). Рубрика «Проверь себя»: стр. 17, 46, 55, 59, 67, 85, 99, 117, 138 *Книга 2:* №№: 1–9, 10–98, 99–127, 128–260, 261–278 Рубрика «Проверь себя»: стр. 11, 26, 59, 66, 79, 83, 102, 112, 143, Рубрика «Это интересно»: стр. 53, 80, 116, 141
Основные группы коммуникативных результатов	
Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на передачу информации другим людям:	*Книга 1:* стр. 5 (постановка учебно-практической задачи); №№: 2–9, 12, 16–17, 21–29,

• формирование умения строить понятное для партнера по диалогу простое монологическое высказывание; • формирование умения слушать собеседника, задавать простые вопросы в процессе диалога; • формирование умения задавать вопросы в процессе диалога, необходимые для организации совместной деятельности и сотрудничества с партнерами при решении учебно-практических задач; • овладение навыками смыслового чтения текстов задач. Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на учет позиции собеседника, партнера по деятельности: • формирование умения допускать возможность различных точек зрения, в том числе не совпадающих с его собственной, и ориентироваться на позицию партнера в общении и взаимодействии; • формирование умения формулировать собственное мнение и позицию; • формирование умения понимать относительность мнений и подходов к решению проблемы, договариваться и приходить к общему решению в совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов при решении учебно-практических задач. Коммуникативные универсальные учебные действия, направленные на кооперацию и сотрудничество:	30–31, 34–43, 46–53, 57–59, 1 (стр. 37), 4 (стр. 38), 9 (стр. 40), 16–19 (стр. 42), 29 (стр. 45), 63, 65, 68–73, 1 (стр. 51), 6–8 (стр. 52), 74–83, 84–92, 96–99, 101–102, 104–119, 121, 125, 127–134, 136, 138, 139, 141, 143–144, 148–150, 153–155, 159–160, 163, 166–167, 168–169, 171, 174, 182–185, 187, 192, 200–202, 7 (стр. 130), 10 (стр. 132), 11–15 (стр. 132). *Книга 2:* №№: 1–15, 17–19, 26, 30–32, 36–40, 6–8 (стр. 27), 41–51, 53–65, 68–74, 76–77, 80–86, 1 (стр. 59), 87–90, 92–94, 98, 1–5 (стр. 66), 99–103, 105–107, 109–112, 120–121, 128–145, 148–151, 155–157, 159, 161–163, 164–165, 168–176, 186–203, 208–209, 212–215, 218–219, 222, 224, 226, 230, 234, 246, 248, 253, 255–256, 260. Рубрика «Проверь себя»: стр. 83, 102 Рубрика «Это интересно»: стр. 53, 80

• умение определять общую цель и путь ее достижения; умение договариваться о распределении функций и ролей в совместной деятельности; • формирование умения осуществлять взаимный контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь; • формирование умения различать цель, способ и результат действия и передавать эти различения в диалоге с партнерами при решении учебно-практических задач; • формирование умения кооперировать деятельность других людей, т.е. согласовывать усилия по достижению общей цели при решении учебно-практических задач.	
Основные группы регулятивных результатов	
Регулятивные универсальные учебные действия целеполагания: • формирование умения принимать цель учебно-практической задачи и сохранять ее при выполнении учебных действий. Регулятивные универсальные учебные действия планирования: • формирование умения планировать собственные действия при решении учебно-практической задачи; • формирование умения следовать установленному плану нахождения способа решения задачи.	*Книга 1:* стр. 5 (постановка учебно-практической задачи); №№: 1–29, 30–60, 1–29 (стр. 36), 63, 66–73, 9–14 (стр. 54), 74–83, 84–86, 88, 91, 96, 97–102, 104–123, 125, 126–134, 138–144, 146–150, 153–155, 157, 159, 160, 162–163, 166, 168–171, 173–174, 182–185, 187, 189, 193, 197, 202, 1–16 (стр. 128).

	Книга 2: №№: 1–19, 23–27, 30–32, 36–40, 41–65, 68–73, 76–77, 78, 80, 83–84, 86–94, 98–107, 115, 120, 121, 128–144, 147–150, 153–157, 159, 165, 168, 169, 173, 176, 187, 6 (стр. 114), 188–191, 194, 201, 206, 208–209, 211–215, 217–219, 221–224, 230, 234, 246, 248, 253, 255, 256, 260.
Регулятивные универсальные учебные действия контроля и коррекции: • формирование умения следовать установленным правилам контроля и успешно использовать их в процессе решения задач, не допуская ошибок; • формирование умения осуществлять пошаговый и итоговый контроль по результату решения задачи, самостоятельно обнаруживать ошибки и вносить коррективы при решении учебно-практической задачи. Регулятивные универсальные учебные действия оценки: • формирование умения адекватно воспринимать предложения и оценку учителей, товарищей, родителей и других людей; • формирование умения, используя результаты контроля и оценки, вносить необходимые коррективы	*Книга 1:* №№: 1–29, 38–42, 48–53, 58–59, 62, 4 (стр. 38), 7 (стр. 40), 69–72, 6 (стр. 52), 7–9 (стр. 53), 76–92, 96, 1 (стр. 68), 98–103, 109–119, 121–123, 125, 129, 133–134, 136, 138–144, 147–152, 163, 171, 173–174, 183–185, 187–188, 192, 202 Рубрика «Проверь себя»: стр. 17, 46, 55, 59, 67, 85, 99, 117, 138. *Книга 2:* №№: 11–13, 17–19, 23–27, 30, 44–48, 50, 55, 59–64, 80, 83, 87–89, 92–94, 100–102, 110–112, 120, 126, 128–141, 143, 145, 147, 161, 165, 169, 172–174, 176, 186–187, 191, 197, 211, 214, 215, 218, 219, 221, 234, 246, 253, 260,

в решение учебно-практической задачи.	Рубрика «Проверь себя»: стр. 11, 26, 59, 66, 79, 83, 102, 112, 143

3. Задания на достижение предметных результатов

Перечень основных результатов	Задания
Многозначные числа и десятичные дроби как частный случай позиционных систематических дробей: • уметь читать и записывать многозначные числа и конечные десятичные дроби, сравнивать их и выполнять действия с ними; исследовать связь между десятичными дробями и натуральными числами; • уметь выполнять любые арифметические действия с многозначными числами (без ограничения числа разрядов); сравнивать разные способы вычислений; выбирать рациональный (удобный) способ действия; • уметь моделировать с помощью схемы отношения между компонентами арифметических действий в математических выражениях, определяя порядок действий на основе анализа этих отношений; • уметь прогнозировать результат вычислений, используя калькулятор при проверке.	*Книга 1:* №№: 1–29, 31–56, 58–62, 1 (стр. 36), 74–76, 87–96, 1 (стр. 68), 8–11 (стр. 71), 99–125, 126–127, 129–131, 133–146, 148–152, 153–167, 184–185, 187–189, 19–26 (стр. 135). Рубрика «Проверь себя»: стр. 17, 46, 59, 67, 85, 99, 138 *Книга 2:* №№: 11, 12, 17–26, 29, 31–35, 37, 39–40, 7 (стр. 28), 45, 51, 52, 57, 61, 65, 66–69, 75, 78–86, 95–98, 103–105, 110–127, 148, 152–153, 157, 160–163, 164–166, 169–181, 185, 6 (стр. 114), 192, 193, 197–199, 202–214, 216–254, 257–259. Рубрика «Проверь себя»: стр. 83.

Периметр, площадь, объем: • уметь составлять формулы периметра и площади любого многоугольника (и прямоугольника в том числе) и использовать их при решении задач; • уметь вычислять периметры различных плоских фигур, описывать их свойства; • уметь использовать различные способы вычисления площади фигуры: прямоугольника, треугольника и других многоугольников; • уметь применять общий способ нахождения периметра, площади и объема любых геометрических фигур; • уметь изготавливать модели геометрических тел, использовать различные инструменты и технические средства (линейка, угольник, транспортир, циркуль, калькулятор и др.); • уметь конструировать геометрическую фигуру (отрезок, ломаную, многоугольник, в том числе прямоугольник) с заданной величиной (длиной, в том числе периметром, площадью); • уметь упорядочивать величины: моделировать и разрешать реальные ситуации, требующие умения находить геометрические величины (планировка, наклейка обоев и др.).	*Книга 1:* №№: 3–5 (стр. 38), 7 (стр. 40), 19 (стр. 43), 4 (стр. 51), 13 (стр. 54), 3–7 (стр. 69), 97, 145 (3), 154, 159, 175, 177–181, 186 (2), 188 (1–3), 191, 1–16 (стр. 128). Рубрика «Это интересно»: стр. 114, 139 Рубрика «Проверь себя»: стр. 117 *Книга 2:* №№: 1–127. Рубрика «Проверь себя»: стр. 11, 26, 59, 66, 79
Анализ решения текстовых задач: • уметь анализировать строение задачи и схему как основание для классификации;	*Книга 1:* №№: 1–29, 16–28 (стр. 42), 1–3 (стр. 51), 4 (стр. 52), 7–14 (стр. 53), 95–99, 1–2

• уметь выявлять связь между пропорциональными величинами: скоростью, временем, расстоянием; ценой, количеством, стоимостью и др. и использовать известную схему умножения (деления) для решения текстовых задач; • уметь использовать новое средство моделирования условия задачи – краткую запись; составлять текст задачи по краткой записи; преобразовывать краткую запись и соответствующий ей текст (и наоборот); • уметь находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; • уметь представлять информацию в таблице и на диаграмме; • уметь искать ошибки, как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавляться от выявленной ошибки; • уметь выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания (и задачи) с недостающими данными, с лишними данными, софизмами и др.	(стр. 68), 120–123, 137–143, 145–152, 186–189. Рубрика «Проверь себя»: стр. 17, 67, 85, 99, 117, 138 *Книга 2:* №№: 33–37, 39–40, 64–69, 75–76, 78–83, 85–87, 94–98, 103–105, 107–122, 117, 127, 1–4 (стр. 79), 7 (стр. 85), 128–260. Рубрика «Проверь себя»: стр. 102, 112, 143

ПРОГРАММА

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В основу новых Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) положен культурно-исторический системно-деятельностный подход (Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов и их ученики и последователи), согласно которому содержание образования проектирует определенный тип мышления. Ориентация на развитие теоретического типа мышления предполагает построение учебных предметов как систему научных понятий, усвоение которых напрямую зависит от формирования учебной деятельности и организации учебных действий ребенка.

В концепции образовательных стандартов подчеркивается, что обучение осуществляет свою ведущую роль в умственном развитии прежде всего через содержание, которое в свою очередь определяет методы, формы организации и общения детей, характер дидактических материалов и другие стороны учебного процесса.

Данная программа по математике и соответствующий ей УМК изначально были ориентированы на деятельностный подход в обучении (теоретические положения этой научной школы легли в основу ФГОС нового поколения). Это означает, что они позволят реализовать цели и задачи ФГОС, поскольку ориентированы как на достижение предметных, личностных и метапредметных результатов, так и (как следствие) на формирование разных компетенций младших школьников, опираясь при этом на исторический подход при изучении основного математического понятия — понятия числа.

Содержание курса математики представлено целостной системой специальных (ключевых) учебно-практических задач, с которых и начинается всякая новая тема, а не набором заданий развивающего характера. Итогом решения учебных задач являются прежде всего обобщенные способы действий, позволяющие формировать у ребенка универсальные учебные действия (УУД), а новые знания, задаваемые как основания детского умения, становятся качественно иными (формирование навыков при таком подходе становится не целью, а одним из средств для овладения УУД). Условия решения таких задач либо воссоздают ситуации, в которых зарождалось исторически то или иное понятие (к примеру, понятие числа), либо задают реальные жизненные ситуации (к примеру, введение смысла умножения). Такой подход, по замыслу разработчиков ФГОС, даст возможность получить метапредметные результаты. Более того, решение подобных задач с неизбежностью требует организации коллективно-распределенных форм деятельности, что создает оптимальные условия для получения предметных, метапредметных и, конечно, личностных результатов, а математическое содержание приобретает личностно значимый характер. Именно содержание учебного предмета должно создавать благоприятные условия для развертывания учебной деятельности детей и способствовать интенсивному развитию мышления и мыслительных операций, связанных с ними: анализа, рефлексии и планирования.

Однако конструирование учебной программы не только предполагает отбор содержания, но и требует осознания связи содержания усваиваемых знаний и умений с психическим развитием ребенка.

Ориентация на развитие ребенка предполагает опору на активные методы обучения, формирующие у школьника универсальные учебные действия. Это означает, что знания не должны даваться ему в готовом виде. Они должны быть получены в совместной деятельности с другими детьми и учителем как организатором и соучастником процесса обучения.

Основным математическим понятием, определяющим главное содержание данной программы и всего курса школьной математики в целом, является «действительное число», представленное в начальной школе в виде целого неотрицательного числа.

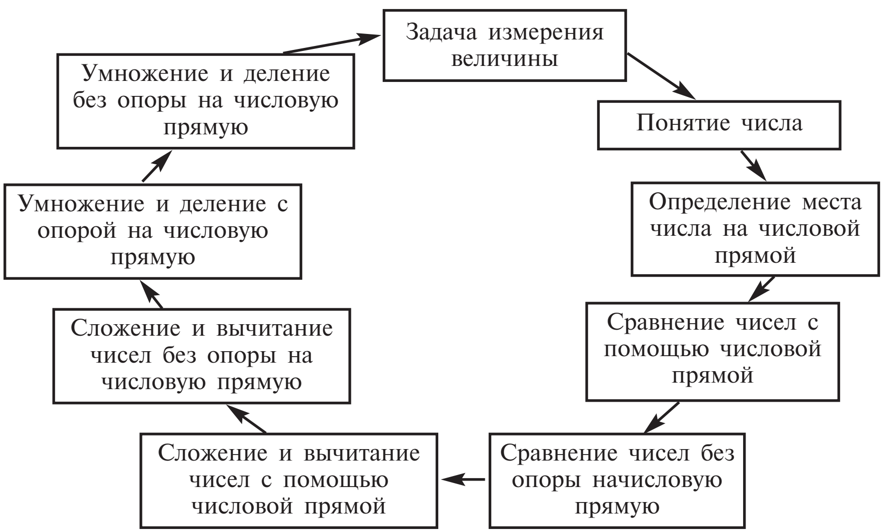
Существуют разные точки зрения относительно изучения этого базового математического понятия в начальной школе. Однако речь идет о построении начального курса математики как части целостного учебного предмета, представленного системой понятий, которые рассматриваются через систему учебных задач. Поэтому становится ясно, что преемственность в обучении требует уже в начальной школе рассматривать основное математическое понятие — понятие числа через понятие величины как системообразующего понятия курса математики. Измерение величин, в отличие от счета предметов, требует организации практических действий, и не в одиночку, а совместно с другими детьми, т. е. в коллективно-распределенной, групповой форме деятельности, вынуждает ребенка общаться, действовать руками, что является основой для развития моторики, коммуникативных умений, расширения познавательных интересов, установления межпредметных связей.

Операцией, специфической для способа измерения величин, является «откладывание» единицы измерения (мерки) на измеряемой величине и счет таких «откладываний». Число в этом случае является характеристикой величины и зависит не только от измеряемой величины, но и от выбранной мерки. Меняя условия, при которых с помощью практических действий решается задача измерения и обратная ей задача построения (воспроизведения) величины посредством «откладывания» мерок (единиц измерения), учащиеся будут «выращивать» различные виды чисел, знакомясь с общепринятыми способами их обозначения. Ориентация на обобщенные способы действий является одной из новых задач ФГОС.

Основным средством, фиксирующим результаты сравнения величин, их сумму и разность, служат различные графические модели: схема, числовая прямая, числовой луч, а начиная со 2 класса вводятся диаграммы, использование которых впервые рекомендовано в начальной школе. Опора на графическую модель, так же как и на знаковую (формулу), позволяет изучить отношения равенства-неравенства, частей и целого, которые служат основой при обучении решению текстовых задач и уравнений. Предлагая уже с первого класса задачи с буквенными данными, мы ставим ученика в ситуацию поиска необходимых сведений (информации), анализа сюжета задачи для подбора «подходящих» чисел, а к 4 классу ученик столкнется с задачами-ловушками, к которым отнесем задачи с лишними данными, с недостающими данными и др. Именно они дают возможность ученику оценить потребность в дополнительной информации, определить ее возможные источники , проанализировать ее. Работа с информацией как раз и отличает новые подходы в обучении не только математике, но и другим предметам, что в итоге дает возможность формировать информационную, а значит, и компьютерную грамотность.

Все понятия, как уже было сказано выше, в том числе и базовые понятия величины и числа, вводятся через учебно-практические задачи. Так, в 1 классе это задачи, в которых необходимо подобрать предмет, обладающий изучаемым свойством, а затем, когда речь пойдет о величине, нужно непосредственно измерить ее соответствующей меркой. Результатом измерения всякий раз будет являться число. Процесс измерения и его результат описываются с помощью графических моделей (схем), в частности числового луча и числовой прямой.

Сравнение, сложение и вычитание величин и чисел, которые их характеризуют, с опорой на числовую прямую служат **общим основанием** к конструированию арифметических действий с любыми числами. Схематично логика изучения понятия числа и действий с ним может быть представлена так:



Изучение каждого вида чисел (а в начальной школе рассматриваются не только однозначные и многозначные числа, принадлежащие множеству целых неотрицательных чисел, но и десятичные дроби, позволяющие ученику осознать общий принцип образования позиционного числа и общий принцип выполнения арифметических действий с ними — принцип поразрядности) в строго определенной логике позволит ученику на более поздних этапах освоения математики самостоятельно проектировать свое продвижение в предмете при условии осознания этой ***общей*** для всех видов чисел логики, существенно повышая мотивацию и интерес ребенка. Представляется, что именно в этом и есть смысл ***преемственности*** содержания и целостности школьного курса математики.

Использование числовой прямой (а не числового луча) в качестве основной графической модели дает возможность заложить общие подходы для изучения арифметических действий по отношению не только к целым неотрицательным числам, хотя именно они являются носителями этих общих способов действий с числами, но и к другим видам чисел.

Так, например, способы сравнения, сложения и вычитания чисел с помощью числовой прямой (точнее, двух числовых прямых) позволяют без проблем ввести аналогичные операции над положительными и отрицательными числами в основной школе (что было опробовано на протяжении ряда лет).

Для знакомства с десятичным принципом образования многозначных чисел дети, как и ранее, обращаются к задаче измерения: сначала они измеряют длину, теперь будут измерять площадь. Измерение и построение величин по частям с помощью системы мерок (длины, площади) дает возможность перейти к табличной форме записи чисел, позволяя сравнивать их между собой без построения самих величин. Замена системы мерок для измерения длины (площади) с произвольной основной (исходной) меркой и постоянным отношением между ними, в том числе с отношением кратным 10, позволяет «оторвать» число от числового значения величины (именованного числа) и рассмотреть многозначные числа как результат измерения величины любой системой мер (и десятичной в частности). Осознав основной принцип образования многозначного числа (в пределах 4 и более разрядов), можно перейти к изучению сложения и вычитания многозначных чисел «столбиком».

Методика обучения действиям с многозначными числами опирается на использование предметных моделей (плоских геометрических фигур) для обнаружения основного принципа выполнения любого арифметического действия — принципа поразрядности. Анализируя этот принцип, нетрудно прийти к выводу: при поразрядном сложении сумма однозначных чисел (табличные случаи) может быть меньше десяти, равна десяти или больше десяти. Оценив сумму, ученик может определить, какие разряды при сложении двух (и более) многозначных чисел «переполняются», а какие нет, может (ничего не вычисляя) узнать, сколько цифр (знаков) получится в сумме, и в завершение может вычислить цифру[37] в каждом разряде. Другими словами, прежде чем выполнить то или другое арифметическое действие, ему необходимо будет сделать оценку и прикидку, чему, как известно, в новых стандартах придается особое значение как важным учебным навыкам. Этому в полной мере отвечает, с нашей точки зрения, методика обучения выполнению арифметических действий.

Таким образом, определять количество цифр в результате действия дети будут не только при делении, как это принято традиционно, но и при вы-

---

[37] Для краткости будем употреблять термин *цифра* вместо *однозначное число, записанное с помощью цифры.*

полнении всех арифметических действий. Общий подход к выполнению любого арифметического действия позволит значительно облегчить формирование прочных вычислительных навыков, поскольку не требует от ребенка постоянной перестройки и запоминания способов, отличающих одни вычисления от других. Подчеркнем, что навыки выполнения письменных вычислений и на их основе приемов устного счета (а не наоборот!) формируются путем анализа операционной структуры каждого арифметического действия, анализа различных способов его выполнения, содержательного анализа ошибкоопасных мест (составление «справочника ошибок»), что делает формирование навыков вычислений не самоцелью, а средством для развития анализа, рефлексии и планирования (в том числе мысленного) как характеристик теоретического типа мышления. Формирование у учащихся нового типа мышления — одна из приоритетных задач, поставленных перед школой ФГОС.

В соответствии с описанным выше подходом к формированию обобщенных способов действий особое внимание уделено месту и последовательности изучения таблиц сложения всех однозначных чисел от 0 до 9 (а не от 1 до 9!), работе над приемами их составления и запоминания. Формирование навыков табличного сложения и вычитания (а потом и табличного умножения и деления) происходит на основе непроизвольного запоминания, которое является результатом (следствием) исследования зависимости между изменяющимся слагаемым и цифрой в разряде единиц у двузначной суммы, которая получается при «переполнении» разряда:

$$\mathbf{9 + \overset{-1}{4} = 13;\quad 8 + \overset{-2}{7} = 15} \quad \text{и т. п.}$$

Конструирование приемов устных вычислений и их обоснование опираются на свойства действия с использованием не только графических моделей, но и предметных.

Для того чтобы смысл одного из важнейших математических понятий — умножения не был подвергнут «ревизии» в основной школе, мы рассматриваем его как особое действие, связанное с переходом в процессе измерения величин к новым меркам (В.В. Давыдов). Становится очевидным, что при таком предметном смысле действия умножения произведение может быть найдено (вычислено) разными способами в зависимости от того, какие числа получились в результате измерений.

Как и при изучении сложения и вычитания, изучение умножения и деления (как обратного действия) строится с опорой на графическую модель (схему) и предметную (используются конструкторы «Лего»). Умение изображать отношения между компонентами действия с помощью схемы позволит ученику описать одно и то же отношение с помощью нескольких формул: $a \cdot b = c$, $c : a = b$, $c : b = a$.

Таким образом, при введении понятия умножения мы движемся не от суммы к произведению (произведение дробных чисел, которое рассматривается в 5—6 классах, в отличие от натуральных не может представлено суммой одинаковых слагаемых, как этому учат в начальной школе, что только усугубляет проблему преемственности с основной школой), а от произведения к сумме, что позволит задать ***общий*** (для всех видов чисел) ***смысл*** действия умножения.

Одной из важнейших учебных задач в данном варианте обучения математике является «конструирование» способа умножения многозначного числа на многозначное, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это традиционно принято.

Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддержания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что снимает необходимость в специальном предварительном заучивании таблиц, а в процессе формирования приемов будут закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Завершается изучение арифметических действий с многозначными числами «конструированием» деления многозначного числа на многозначное, которое требует предварительного освоения новых типов заданий, а затем уже последовательного выполнения следующих операций:

а) нахождения первого неполного делимого по известному делителю (и, наоборот, нахождения возможных делителей при неизвестном неполном делимом), что, как правило, требует «разбиения» разрядов;

б) определения количества цифр в частном по уже известному неполному делимому (и, наоборот, нахождения первого неполного делимого по известному количеству цифр в частном);

в) определения «подсказок»[38];

г) подбора цифр в частном с помощью умножения и опоры на «подсказки» (и, наоборот, восстановления «подсказок» по известной цифре частного), а не на округление делимого и делителя, как это принято. Такой подбор дети выполняют не делением, а умножением, что значительно облегчает задачу определения цифры в частном.

Овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для классификации устных и письменных вычислений.

Для проверки вычислений в тех случаях, когда ученик сомневается, ему предлагается в ряде заданий использовать калькулятор.

Итак, описанный подход к изучению умножения и деления, аналогич-

---

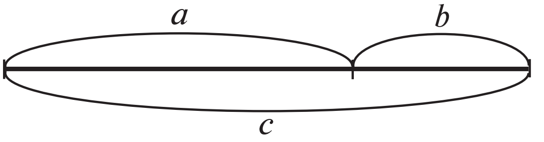
[38] Понятие «подсказка» введено в связи с принципиально новым подходом к обучению обобщенному способу деления любого многозначного числа на любое многозначное число (а не «дозами»: сначала на однозначное, затем на двузначное, трехзначное и т. д.), значительно облегчая подбор цифры и сокращая время такого подбора.

ный подходу к изучению сложения и вычитания, дает возможность значительно упростить методы обучения решению текстовых задач, задавая обобщенный способ работы над задачей (не от действий к выражению, а от выражения к действиям).

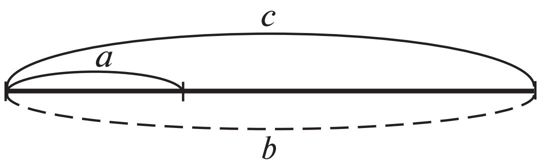
Достаточно научиться изображать отношение «целого и его частей» с помощью схемы в двух ситуациях:

1) если части, из которых составлено целое, неравные, то отношение между ними может быть описано тремя основными формулами: $a + b = c$, $c - a = b$ и $c - b = a$, где a и b — части, а c — целое.

Схема отношения выглядит так:



2) если же все части равные, то отношение между частями и целым может быть описано дополнительными формулами: $a + b = c$; $c : a = b$ и $c : b = a$, где a — часть, b — количество таких частей, c — целое, а схема такого отношения выглядит так:



При решении текстовых задач, уравнений и при нахождении значения выражения учащиеся опираются на изображение отношений с помощью этих двух схем, умения работать с которыми вполне достаточно для поиска неизвестной величины или числа.

Решение текстовых задач сопровождает изучение всех тем, однако углубление представления о задаче, принципов построения текста, способов ее моделирования не только с помощью схемы (или диаграммы), но и краткой записи (в том числе в табличной форме) происходит на заключительном этапе обучения в 4 классе.

Анализ способов моделирования текстовой задачи, преобразования краткой записи (одной из форм которой является таблица) и схемы создает необходимые предпосылки для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения задач путем составления и решения уравнений.

Новый раздел «Работа с информацией» изучается, как и рекомендовано, на основе содержания всех других разделов курса математики, однако наиболее ярко он представлен при обучении решению текстовых задач с буквенными данными, о чем было сказано выше. Это работа и с диаграммами, и с различными таблицами, что позволит использовать учебники не только для изучающих базовый вариант, но и для тех, кто выбрал другие два варианта, в том числе с расширенным разделом, посвященным работе с информацией, поскольку в учебнике представлены задания на построение простейших линейных связок, высказываний.

Возврат в 4 классе к понятиям периметра (длины), площади и объема и способам их вычисления обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию готовых результатов измерения. Такой подход позволяет осмыслить основные принципы, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые. Именно в начальной школе создаются предпосылки для систематического изучения геометрии в средних классах как конкретизация тех основных понятий и принципов, с которыми дети уже работали, изучая свойства объектов трехмерного пространства, что и составляет предмет элементарной геометрии. Таким образом, геометрический материал в рассматриваемой программе не является инородным, он органически включен в общую логику построения курса начиная с 1 класса, что делает его более осмысленным и содержательным и дает возможность учителю использовать учебники при выборе любого из трех вариантов, представленных во ФГОС.

Итак, геометрическая линия рассматривается без отрыва от числовой, являясь основой символического описания **отношений между величинами** и **отношений между числами** как характеристиками величин. Это значит, что различные геометрические фигуры (отрезок, прямоугольник, круг и т. д.) нужно использовать в качестве графических моделей, что дает возможность осознать геометрические формы не только как ***образы предметов*** окружающего мира, но и как ***математические модели***. Происходит перенос свойств одного образа на другой, что является основой для понимания математики, основой метода познания реальной действительности, основой формирования универсальных учебных действий (в том числе формирования ***общего*** умения решать задачи). Именно такие цели сформулированы в концепции ФГОС нового поколения.

Предлагаемое математическое содержание позволяет организовать обучение в форме ***учебно-поисковой деятельности***, которая по своей сути является коллективно-распределенной. Наряду с общей грамотностью она дает возможность ученику приобрести умение разрабатывать и проверять гипотезы (как свои, так и чужие), работать в проектном режиме, проявлять инициативу в принятии решений, выстраивать отношения с одноклассниками, брать на себя те или иные функции и т. п. Это и становится одним из значимых ожидаемых результатов образования и предметом стандартизации, поскольку у детей появляется способность самостоятельно решать встающие перед ними новые задачи, усиливается познавательная активность, создавая предпосылки познавательного развития, формируется умение учиться как компетенция, обеспечивающая овладение новыми компетенциями. Необходимым условием такой деятельности является развертывание учебного диалога, который неизбежно приводит к интенсивному развитию речи, оказывая значимое влияние не только на коммуникативное и личностное развитие ребенка, но и на не менее важное социальное развитие. Решение одной и той же задачи разными группами детей (особенно в первый год обучения) позволяет сопоставить и критически оценить особенности их подходов, что в свою очередь рождает у детей взаимный интерес к работе друг друга.

Общение детей между собой на материале математики обогащает каждого из них, дает возможность самому учителю четко представлять, какие дети в первую очередь нуждаются в коррекции, учит детей работать в едином коллективном ритме, принимать позицию равноправного партнера. Другими словами, необходимо организовать обучение, ориентированное на такое психическое развитие ребенка, которое способствует его психологической готовности к школьному обучению (совершенно очевидно, что среди детей, принятых в первый класс, не все будут психологически готовыми к школьному обучению) и развитие у него универсальных учебных действий.

С первых дней изучения математики от детей требуется работа руками. Так, говоря о длине или ширине полоски, важно, чтобы дети прошлись по ней пальчиком, все действия с предметами должны осуществляться каждым ребенком, а не только выходящим к доске или, что еще хуже, самим учителем. Вся учебно-поисковая деятельность на первом году обучения (как и на последнем) связана с овладением способами сравнения по разным признакам различных предметов, окружающих ребенка, и с измерением величин. Это требует прикладывания одного предмета к другому, перекраивания фигур, переливания, пересыпания, ощупывания, т. е. опоры на все органы чувств. Для этого ребенок использует бумагу, ножницы, пластилин, конструкторы (а затем геометрические инструменты, технические приборы) и т. д., что позволяет интенсивно развивать сенсомоторную координацию, что особенно важно для 6—7- летних учеников.

Материал в учебниках структурирован так, чтобы было удобно и учителю, и родителям тех детей, которые по ряду причин могут пропустить уроки. Каждая тема завершается разделом «Проверь себя», но не менее значимыми являются и разделы «Это интересно» и «Задания на смекалку». Характер заданий, включенных в учебник, их построение и подбор основаны на принципе составления обратной задачи по отношению к данной. Среди этих заданий есть и те, которые дадут возможность учителю диагностировать сформированность у учащихся метапредметных и предметных компетенций. Прежде всего это так называемые задания с ловушками, задания на доопределение условий, на поиск общего в различном, на выбор способов действий и др. Использование различных типов заданий позволяет не только учить ребенка думать, развивать интуицию, воображение, но и включать эмоции, ставить новые исследовательские задачи и создавать атмосферу сотворчества и соразмышления.

Представленный курс математики по своему содержанию построен так, чтобы научить ребенка строить рассуждения, выбирать аргументацию, различать обоснованные и необоснованные суждения, вести поиск информации, уметь решать учебные и практические задачи средствами математики. Все это и составляет умение учиться (учить самого себя). ФГОС определяют умение учиться как основу развития личности, познающей мир через его освоение и преобразование в конструктивном сотрудничестве с другими.

Факторами, определяющими эффективность предлагаемого подхода к обучению математики для реализации целей ФГОС, являются:

1) особенности математического содержания (введение понятия числа как результат практического действия измерения), заданного в контексте решения значимых жизненных задач);

2) логика курса математики, заданная системой учебно-практических задач, выстроенная в соответствии со структурой учебной деятельности и основанная на мотивации, на понимании учеником (а не только учителем!), что и зачем ему нужно знать и уметь, способствует созданию индивидуальной образовательной траектории;

3) подбор специальных новых типов заданий, адекватных новому подходу и представленных в виде целостной системы, которая позволяет ученику освоить универсальные учебные действия, обеспечивающие ему в дальнейшем способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса;

4) использование квазиисследовательского метода в обучении дает возможность не задавать понятия в готовом виде, а создавать условия для самостоятельных открытий, что существенно повышает мотивацию и интерес к учению, имеет неоценимое значение для познавательного развития ученика;

5) организация коллективно-распределенных форм деятельности, являясь основой коммуникативного развития ребенка, придает результатам образования социальную и личностную значимость;

6) система отношений детей между собой и с взрослыми: учителями и родителями, которая не только обеспечивает социализацию ребенка, но и формирует образ мира.

Система учебно-практических (ключевых) задач в курсе математики

1 КЛАСС

1. **Задача на восстановление объекта, обладающего различными свойствами (признаками).**

Решение этой задачи методом подбора объекта позволяет:

а) выделить те признаки, по которым его можно сравнивать с другими объектами;

б) найти различные способы сравнения предметов. Например, при сравнении по длине дети сначала опираются на зрительное восприятие, т. е. сравнивают «на глаз», а затем, когда этот способ не срабатывает, находят другие способы сравнения (наложение или приложение).

Научившись сравнивать различные предметы и геометрические фигуры по длине (ширине и высоте), ребенок попадает в ситуацию, когда этого умения становится недостаточно для сравнения. Например, необходимо подобрать точно такой же круг или многоугольник, у которых ребенок не может обнаружить ставшие привычными длину и ширину. У него возникает необходимость сравнения по другому признаку — ***площади***.

Такой общий подход к появлению новых признаков сравнения предметов позволяет ребенку уже на первых этапах обучения использовать его при решении целого класса частных задач на сравнение, что, в свою очередь, значительно расширяет набор признаков, по которым можно сравнивать предметы. Например, не только по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, форме, цвету, материалу, количеству, но и по углам, расположению на плоскости и в пространстве, по составу частей и даже «по красоте». Сравнение «по красоте» является ключом к формированию каллиграфического навыка. Так, сравнивая уже написанные кем-то цифры, буквы, дети самостоятельно выделяют их основные элементы, анализируют способы их написания и тем самым конструируют образец, что принципиально меняет методику обучения — не от образца к написанию, а от написания к образцу, а от него к написанию.

Действуя с реальными предметами, их признаками (свойствами) и результатами сравнения по заданному признаку, дети выделяют существенные связи и отношения между компонентами действия, выполняя три основных типа заданий:

а) есть предметы, известен признак — необходимо установить результат сравнения;

б) есть предметы, известен результат сравнения — нужно установить, какой признак был выбран;

в) известны признак и результат сравнения — необходимо подобрать соответствующие предметы.

Вариативность этих заданий очевидна, что позволяет учителю в полном объеме контролировать свои действия и по мере необходимости их перестраивать.

2. **Задача на восстановление величины в ситуации, когда подбор величины, равной данной, невозможен и для ее восстановления необходимо изготовить новую величину** (речь, конечно, идет о предмете как носителе величины).

3. **Задача на моделирование отношений равенства-неравенства**, которая решается сначала с помощью предметов, затем копирующего рисунка предметных моделей (полосок), а лишь потом трансформируется в графическое (сначала отрезками, а затем, начиная со 2 класса, линейными, столбчатыми и круговыми диаграммами) и знаковое моделирование (буквенными формулами).

4. **Задача на введение буквенно-знаковых символов.** Введение знаков и букв представляет собой одну из важнейших задач в «дочисловом» периоде. В букве, обозначающей то или иное свойство, но не предмет, обобщаются выделенные отношения равенства-неравенства.

При обозначении величин используются буквы латинского алфавита. Сначала вводятся те буквы, которые совпадают с русскими по написанию и произношению (*A, K, E* и др.), затем те, которые совпадают по написанию, но не совпадают по произношению (*B, P, C* и др.), и лишь затем буквы *R, Q* и др. Буквы *X, У, Z* вводятся для обозначения неизвестной величины.

5. **Задача на введение операций сложения и вычитания величин.** Решение задачи уравнивания величин и изучение способов перехода от неравенства к равенству приводят к необходимости *введения операций сложения и вычитания* величин и изучения их свойств сначала на предметном уровне, затем с опорой на графическую и знаковую модели.

Раннее введение операций сложения и вычитания величин существенно расширяет возможности применения дошкольного опыта ребенка и позволяет на уровне сформированных ранее умений оперировать с числами, подбирая «подходящие» числа вместо букв в формулах, описывающих результаты сравнения и уравнивания величин.

Подбор «подходящих» чисел к формулам, а затем к текстам задач имеет особое значение. Во-первых, дает возможность всем без исключения детям использовать свой дошкольный запас независимо от его объема и сделать тем самым выполнимыми любые предлагаемые учителем задания. Во-вторых, закладывает основы для таких важнейших математических понятий, как область допустимых значений, решение уравнений или выражений с параметрами. В-третьих, помогает детям устанавливать связь, а следовательно, делать «прикидку» того, подходят ли выбранные учениками числа к сюжету задачи и соответствует ли полученный результат тексту решаемой задачи и реальным фактам. Подбор так называемых подходящих чисел к текстовым задачам с буквенными данными относится, как уже было сказано, к разделу «Работа с данными» (из Примерной программы по математике, рекомендуемой Федеральным государственным образовательным стандартом), который в настоящей программе не выделен в отдельную тему, а органично встроен в различные другие разделы, в том числе и в обучение решению текстовых задач. Чтобы заменить буквы числовыми данными, дети должны будут определить возможные источники информации и осуществить поиск соответствующих числовых данных, проанализировать полученные сведения, соотнеся их сначала с сюжетом задачи, а затем с выполнимостью арифметических действий.

Насколько важно сформировать у ребенка умение подставлять в любые буквенные математические выражения числа, настолько необходимо умение выполнять обратные переходы, решая задачу восстановления буквенных выражений по числовым. Это оказывается решающим фактором изучения математики в старших классах, при работе с взаимообратными функциями, со способом нахождения интеграла как задачей по восстановлению первообразной функции по ее производной и т. д.

Уравнивая величины, дети устанавливают разностное отношение между ними, фиксируемое с помощью выражений «больше на», «меньше на», что позволяет приступить к раннему решению текстовых задач, включающих эти отношения.

Схема к задаче появляется «синхронно» с чтением текста: текст читает учитель, структурируя его в соответствии с возможностью изображения заданных величин и отношений между ними. Решение записывается с помощью буквенного ***выражения, равенства*** или ***уравнения***. Числовые значения придумывают дети в соответствии с сюжетом задачи и выполнимостью арифметических действий на основе пока еще дошкольного опыта. Если же текст задачи содержит числовые данные, то дети сначала должны оценить правомерность таких данных, т. е. проверить, подходят ли они по смыслу задачи, затем «восстановить» ее с буквенными данными и составить математическое выражение (а затем уравнение) для ее решения, а потом подставить вместо букв те числовые значения, которые были даны автором.

В дальнейшем способ «синхронного» составления схемы к задаче перестанет срабатывать, что приведет к необходимости искать другие способы моделирования, в том числе в форме краткой записи.

6. **Задача на введение понятия части и целого.** Введение понятия части и целого при решении задачи на воспроизведение величины по ее известным частям позволяет освоить способы построения и решения уравнений и существенно расширить класс решаемых задач. Подбор же «подходящих» к данному отношению чисел даст возможность рассмотреть состав числа (преимущественно однозначного), опираясь опять-таки на дошкольные умения.

Выполняя задания с «ловушками», где часть может оказаться больше, чем целое, или целое составлено без учета частей, дети устанавливают отношения между данными понятиями. Установление связи между сложением и вычитанием величин на основе понятий части и целого позволяет соотнести целое с суммой и уменьшаемым, а части — со слагаемым или вычитаемым и разностью и увидеть, что разные действия: $A + B = C$, $C - A = B$ или $C - B = A$ — характеризуют одно и то же отношение между величинами. Нахождение неизвестного при решении уравнений опирается не на правила, а на отношение между частями и целым, которое представлено в виде графической модели (схемы).

Понятие части и целого позволяет ввести переместительное и сочетательное свойства сложения величин. Порядок выполнения действий над величинами определяется не с помощью правил, а с опорой на схему, что создает предпосылки для установления свойств сложения чисел и порядка выполнения действий при сложении и вычитании чисел.

Таким образом, к концу дочислового периода у учащихся складывается содержательное расчлененное представление о величинах, их свойствах, операциях над ними (сравнение, сложение, вычитание), свойствах этих операций, равенств, неравенств. Формируются умения решать уравнения и задачи в буквенно-знаковой форме, складываются благоприятные предпосылки для формирования у учащихся понятия об области допустимых значений переменных, входящих в математическое выражение, уравнение или текстовую задачу.

Ключевая учебная задача появляется в ситуации, когда освоенные способы непосредственного сравнения предметов по заданному свойству не подходят, что приводит к необходимости **опосредованного сравнения величин**, где в качестве посредника первоначально выступает мерка, равная одной из сравниваемых величин (отчасти этот способ сравнения уже применялся детьми раньше), а затем и число, которое вместе с меркой (сначала меньшей, чем заданная величина) служит средством для воспроизведения такой же величины в другом месте или в другое время.

Задача измерения-отмеривания ставит перед детьми новые вопросы: какие предметы можно использовать в качестве той или иной мерки, а какие нельзя или неудобно, какое из свойств предмета может участвовать при использовании его для измерения. Так, например, ребро кубика можно использовать как мерку длины, а грань — как мерку площади и т. д.

Эта исследовательская задача приводит к ***оценке соотношения между величиной и меркой***, когда мерка либо намного меньше измеряемой величины, что делает ее неудобной — появляются составные мерки, либо больше, а иногда мерка вообще непригодна для измерения (например, для измерения длины окружности мерка, изготовленная из твердого материала, не подходит, так как не может изменять свою форму). Необходимо заметить, что, как правило, для измерения длины используются линейки, изготовленные из дерева, пластмассы или металла, что не дает возможности, например, при введении понятия «радиана» в старших классах «положить» радиус окружности на ее дугу, чтобы получить центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу окружности.

2 КЛАСС

Исследование вопроса о том, ***какие бывают мерки***, завершает изучение понятия величины в 1 классе и приводит к исследованию во 2 классе вопроса о том, ***какие бывают числа***, т. е. как в разное время разные люди записывали и называли числа, которые появились в процессе измерения и служат для построения нужной величины. Таким образом, ***программа 2 класса*** начинается **с измерения-отмеривания** и позволяет рассмотреть ***исторический аспект числа***: от его меточной формы до арабских цифр. Рассматривается устная и письменная нумерация разных народов. Это позволяет развести в сознании ребенка смысл числа как отношения величин и цифры как знака для его обозначения (проводится аналогия между звуком и буквой в русском языке).

Измеряя, отмеривая различные величины, дети приходят к необходимости «изобретения» измерительных приборов со шкалами, а следовательно, и к «изобретению» числовой прямой, числового луча и других числовых линий, которые характеризуются началом отсчета, направлением и единичной (исходной, основной) меркой.

Учащиеся решают **учебно-практические задачи**:

1. **Конструирование числовой прямой.** Процесс построения числовой прямой дает представление об упорядоченном бесконечном ряде чисел, в котором каждое число имеет собственное место, и, таким образом, дает возможность ***использовать порядковый аспект числа*** с опорой на его основные свойства.

2. **Количественный аспект числа** выражается результатом измерения величины меркой того же рода. Исследуется зависимость между величиной, меркой и числом. Теперь число отвечает на вопрос «Сколько мерок E содержится в величине A?», т. е. является характеристикой величины A. Так у учащихся формируется понятие числа. Теперь можно сравнивать величины по их числовым характеристикам без построения самих величин. Это приводит к необходимости выполнения операции сравнения чисел.

3. При **сравнении чисел** с помощью числовой прямой (чем дальше число по направлению, тем оно больше) возникает новая учебная ситуация, при которой ответить на вопрос, какое из двух чисел больше или меньше, легко, а вот на сколько больше (меньше) — путем пересчитывания количества шагов (мерок) между ними — оказывается трудно. На помощь приходит «измерительный» прибор — вторая числовая прямая (линейка).

4. Конструирование **способа сложения и вычитания чисел** (как правило,

в пределах десятка) сначала с помощью двух линеек (принцип логарифмической линейки), затем с помощью двух числовых прямых и, наконец, с помощью одной числовой прямой.

Выбор двух одинаковых линеек для выполнения действий позволяет сформулировать ряд условий:

а) шаги (мерки) на линейках одинаковы;

б) значки (цифры) для обозначения чисел одинаковы;

в) последовательность этих значков одинакова.

Таким образом, при сложении (вычитании) двух чисел, заданных в любой нумерации, ребенок использует две одинаковые линейки с соответствующими цифрами; «манипулируя» ими, он находит (считывает) нужный результат.

5. Увеличение числа слагаемых или отсутствие линеек создает предпосылки **для «открытия» нового способа сложения (вычитания) путем присчитывания (отсчитывания) по единице**. Теперь ребенку понятно, почему, например, при сложении отсчет второго слагаемого начинается не от начала числовой прямой, а от точки, соответствующей первому слагаемому.

В дальнейшем этот способ тоже окажется неудобным, когда вместо суммы 3784 + 2 надо будет находить сумму 3784 + 2561. ***Это, в свою очередь, потребует поиска «нового» способа поразрядного сложения взамен «старого» способа — присчитывания.***

6. В следующей учебной задаче рассматривается ситуация, когда **величина оказывается намного больше мерки**, что приводит к необходимости использования для измерения набора мерок, который упорядочивается от большей (из мерок, меньших измеряемой величины, что легко проверить непосредственным сравнением) к исходной (основной).

В таком случае результат измерения выражается не одним числом, а некоторым набором чисел, где каждое соответствует определенной мерке. Появляется табличная форма записи числа, которая приобретает со временем форму «заготовки», т.е. места для каждой цифры.

7. Следующая учебная ситуация, приводящая к решению учебно-практической задачи, требует **определения отношений между мерками для их изготовления** в другом месте или в другое время. Появляется новая числовая характеристика отношения между последующей и предыдущей мерками. Это отношение фиксируется стрелочкой и числом над прообразом разряда. Отношения между соседними мерками оказываются двух видов, одно из них постоянно. Тогда мы уже имеем дело не с набором мерок, где отношения между соседними мерками различны, а с системой мерок с постоянным отношением между соседними мерками (основание системы), при этом система остается открытой, т. е. всегда (по необходимости) может быть построена следующая мерка.

Это позволяет заранее изготовить различные системы мерок для измерения разных величин, распределив между группами спланированный объем работы. ***Десятичная система счисления*** рассматривается как частный случай. Чтобы измерить величину с помощью системы изготовленных в заданном отношении мерок, сначала нужно выбрать мерку, с которой удобно начинать измерение, — самую большую из тех мерок, которые меньше измеряемой величины. Свой выбор необходимо доказать, сравнив непосредственно следующую за выбранной мерку с измеряемой величиной, которая должна оказаться уже больше этой величины.

Из сказанного следует: если основание системы (а это и есть основание системы счисления) равно, например, 6, то цифры 6 и последующих в записи многозначного числа быть не может, так как дети уже сравнивали величину со следующей меркой, в которой было 6 предыдущих. Другими словами, вводится естественное и осмысленное (благодаря наличию контрольного действия) ограничение на каждую цифру в записи позиционного многозначного числа в заданной системе счисления.

Таким образом, представление о позиционном многозначном числе формируется в рамках ***задачи измерения величины системой мерок с заданным или выбранным отношением***, где сначала определяется количество необходимых для измерения мерок (это значит, становится известным, сколько цифр будет в записи числа), а лишь затем производится сама операция измерения (это значит, определяется цифра каждого разряда), что позволяет впоследствии задать операционный состав способа выполнения любого арифметического действия как последовательного выполнения двух основных операций: определение количества цифр (разрядов) в искомом результате выполняемого действия и нахождение цифры, соответствующей каждому из этих разрядов.

Всеобщность этого способа, его применимость для нахождения результатов всех четырех арифметических действий очевидны, в то время как традиционная программа предусматривает лишь частичное использование этого способа в одном случае — при делении многозначных чисел.

8. Появление **новой формы натуральных чисел** требует вновь способов их сравнения, сложения и вычитания взамен ранее известных: сравнения с помощью числовой прямой, сложения и вычитания соответственно с помощью присчитывания и отсчитывания. Таким новым способом становится **поразрядное выполнение** всех указанных действий, что позволяет ребенку выполнить ***следующую задачу:*** вначале научиться определять, сколько цифр будет в результате выполнения действия, для чего придется определять те разряды, которые будут «переполняться» (при сложении и умножении) или разбиваться (при вычитании и делении), а затем знать табличные случаи (для всех действий), что предполагает конструирование таблицы сложения (вычитания), а затем и умножения (деления). Из сказанного понятно, что нет необходимости рассматривать по отдельности во времени случаи сложения (вычитания) без перехода через разряд и с переходом. Речь идет как раз о числах, при сложении (вычитании) которых в одних разрядах должен быть переход, а в других нет.

Решение этой задачи, безусловно, приходится на 2 класс, тогда как традиционно дети, к примеру, в 1 классе учат таблицу сложения (вычитания), а лишь затем, условно говоря, «узнают», зачем она нужна (для действий с многозначными числами).

Характеризуя программу 2 класса, необходимо подчеркнуть, что она рассчитана прежде всего на углубление и конкретизацию ранее усвоенных теоретических знаний о величине и числе. Значительную роль в этом отношении призвана сыграть работа, направленная на овладение общими способами и опирающимися на них приемами выполнения любых арифметических действий на примере сложения и вычитания, которым во 2 классе отводится значительное время.

9. Опираясь на понятие позиционного числа, дети должны **выявить основной принцип сложения и вычитания многозначных чисел** — поразрядное выполнение соответствующих действий. Им предстоит, во-первых, проанализировать операционный состав соответствующего способа выполнения арифметических действий, во-вторых, осознать всеобщность этого способа, его применимость для нахождения и проверки результатов всех четырех арифметических действий. Кроме того, наряду с анализом ошибкоопасных мест и составлением так называемых справочников ошибок (о чем упоминалось выше), которые можно допустить при выполнении того или иного арифметического действия, рекомендовано для проверки использовать калькулятор, но только в тех случаях, когда ученик сомневается в правильности вычислений. Выявление допущенной ошибки и служит основой для развертывания совместных с другими детьми действий по рефлексии, анализу и предвосхищению возможных ошибок, устанавливая при этом не только причины их появления и способы обнаружения, но и поиск заданий, позволяющих избавиться от каждой из них.

Поскольку этот способ содержательно связан со сформированным у детей понятием числа, вводившимся на основе измерения величин, его усвоение должно не только способствовать овладению рациональными приемами вычислений (что само по себе составляет одну из важных задач начального обучения математике), но и обеспечивать более глубокое понимание содержания понятия числа и действий с числами.

Первая из указанных выше задач (анализ операционной структуры общего способа вычисления результата арифметического действия) может и должна быть решена в процессе изучения материала, связанного с действиями сложения и вычитания. Детям уже известна связь между количеством разных мерок, которые использовались для измерения (построения) величины, и количеством разрядов в числе, фиксирующем результаты измерения. Опираясь на эти знания, они могут установить обусловленность разрядной структуры результата сложения (вычитания) структурой известных его компонентов (слагаемых, уменьшаемого и вычитаемого). Анализ этой зависимости позволяет установить рациональные приемы **конструирования таблиц сложения и вычитания**, способствующие их эффективному непроизвольному запоминанию, что имеет немаловажное значение для формирования вычислительных навыков.

10. Овладев приемами **письменных вычислений**, дети конструируют и **приемы устных вычислений** внетабличных случаев, причем не только в пределах 100, но и во всех случаях, которые сводятся к действиям в пределах 100, что значительно ***расширяет круг устных вычислений***. Продолжение этой работы предусматривается в процессе изучения действий умножения и деления.

3 КЛАСС

Умножение является центральной темой **программы 3 класса и одной из основных учебных задач.** В отличие от традиционной программы оно рассматривается как особое действие, связанное **с переходом в процессе измерения величин к новым меркам** (В.В. Давыдов). Фактически с этим действием дети сталкивались уже во 2 классе при изучении позиционных чисел. Однако там оно не было зафиксировано как особое действие и не получило развития. Поэтому **первой и основной *учебной задачей*** становится воспроизведение величины в ситуации, когда измеряемая величина много больше заданной мерки, в связи с чем возникает необходимость использования вспомогательной, промежуточной мерки. Одно из чисел, описывающее эту ситуацию, фиксирует отношение вспомогательной мерки к исходной (или к стандартной мерке, являющейся основанием принятой системы счисления), второе — количество вспомогательных мерок в измеряемой величине («по... взять... раз»), третье — отношение измеряемой величины к исходной мерке. Логическим завершением анализа этой ситуации является **введение деления** как действия, направленного на определение промежуточной мерки («деление на части») или числа таких мерок («деление по содержанию»). Тем самым появляется возможность установить содержательные связи между умножением и делением, а также содержательно интерпретировать отношения «больше (меньше) в... раз», «больше (меньше) на...».

Как и при изучении действий сложения и вычитания, изучение умножения и деления предусматривается начать с рассмотрения этих действий в общей (абстрактной) форме с помощью моделей. Имеется в виду, что при изучении умножения в качестве средств моделирования должны быть использованы не только линейные, но и плоскостные схемы, а также обеспечен переход от графических к символическим (буквенным) моделям (формулам). Овладение умением строить графические модели умножения и деления, осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно является одной из **важнейших задач этого этапа обучения**.

Особое внимание в процессе этой работы предусматривается уделить изучению **свойств умножения** — переместительного, сочетательного и распределительного (относительно сложения и вычитания). Исследование этих свойств опирается прежде всего на предметные действия ребенка, фиксирующиеся с помощью графических и знаковых моделей. В связи с этим рассматриваются порядок действий, определяемый только с опорой на графическую модель, а не на правила, предполагающие деление действий над числами на действия двух ступеней (действия первой ступени — читание, второй — умножение и деление), и его изменение. В итоге ученики должны овладеть умением определять значения выражений типа $375 \cdot 294 - 375 \cdot 293$ или $3984 \cdot 975 - 974 \cdot 3984$ и т. д.

Второй *учебной задачей* является ***конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное***, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это принято. Другими словами, любая таблица умножения начинается с умножения на нуль, например: $9 \cdot 0$, $9 \cdot 1$, $9 \cdot 2$, $9 \cdot 3$ и т. д.

Понимание предметного содержания умножения и его свойств позволяет существенно перестроить **работу с таблицами умножения (деления)**. В основу этой работы положена задача **на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата**. В связи с этим изменяется «естественный» порядок изучения таблиц. Целесообразно начать их конструирование с тех, в которых указанная выше связь обнаруживается в наиболее явном виде (таблицы умножения 9, 2, 5 и 6). Таблицы умножения 4, 8, 3 и 7 следует сконструировать, опираясь на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддерживания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что **снимает необходимость в специальном заучивании таблиц**.

Уяснение содержания умножения создает предпосылки для того, чтобы построить **сетку классов чисел** и на этой основе осмыслить многозначное число как число многоразрядное. Освоение многоразрядного числа обеспечивается выполнением действий сложения и вычитания (включая сложные случаи, когда один из разрядов в уменьшаемом равен нулю), а также конструированием способа умножения многоразрядного числа на многозначное, которое сводится к умению умножать многозначное число на однозначное.

Особого внимания требует отработка приемов умножения многозначного числа на многозначное. Их уяснение предполагает предельное развертывание упоминавшегося выше принципа разрядности действий. Дети должны хорошо понимать не только обусловленность количества цифр (разрядов) в произведении множителями, но и способ получения каждой из этих цифр (с этой целью возможна постановка вспомогательных задач, требующих определения значения одного из разрядов произведения независимо от других разрядов). В результате этой работы обычный прием умножения «в столбик» должен приобрести для детей совершенно иное психологическое содержание.

Значительное место в программе 3 класса, как и в предыдущие 2 года, **отводится решению текстовых задач**, работа над которыми должна осуществляться в процессе изучения всех тем. ***Освоение общих способов анализа задачи является одной из сквозных учебных целей курса математики.*** Основное внимание должно быть сосредоточено на формировании основных приемов работы над текстом задачи, на способах моделирования отношений, представленных в условии задачи, в виде различных схем (и диаграмм в том числе), отыскивании на схеме равных величин, что имеет особое значение, так как, с одной стороны, придает всей предшествующей работе вполне определенный смысл, а с другой — позволяет детям выбрать наиболее рациональный способ решения задачи — алгебраический (посредством уравнения) или арифметический (посредством составления математического выражения).

В контексте работы над задачами осуществляется **обучение решению уравнений**. Как и в 1 классе, их решение осуществляется с опорой на схему, при этом никакие «правила» не заучиваются. Дети должны решать уравнения, объясняя и обосновывая каждое свое действие, а не реализовывать готовый алгоритм.

Таким образом, предлагаемая программа 3 класса, будучи по формальной структуре программой ***формирования арифметических действий*** с многозначными числами, по существу предполагает усвоение ***принципов построения этих действий***. Такое содержание программы является предпосылкой для организации деятельности детей, направленной на решение двух типов учебных задач. С одной стороны, это задачи, связанные с выявлением, анализом и содержательным обобщением свойств величин, чисел и математических действий. С другой — это задачи, направленные на поиск и обоснование рациональных приемов выполнения того или иного действия. А в процессе этой деятельности и должны быть реализованы цели развивающего обучения на данном этапе.

Заключительная тема программы 3 класса предусматривает прежде всего, формирование приемов деления многозначного числа на многозначное. Конструирование деления любого многозначного числа на любое многозначное число требует последовательного выполнения четырех операций, о которых сказано ранее.

Как уже говорилось выше, овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для ***классификации устных и письменных вычислений***. Рассматриваются приемы устного счета, в том числе умножения на 11, на 25 и др.

В процессе формирования этих приемов должны быть закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Выполняя устные и письменные вычисления, учащиеся не только осмысливают известные и новые приемы, но и придумывают аналогичные задания друг для друга. Так, подбирая многозначное делимое и однозначный делитель, кратный делимому, они ищут среди прочих такой способ, который позволил бы, не выполняя деления, узнать, будет ли делимое кратно делителю. Это и приводит к ***постановке следующей учебной задачи на конструирование*** признаков делимости, которые рассматриваются следующими группами: делимость на 2, 5 и 10, на 4, 25 и 100, на 8, 125 и 1000, на 9 и 3.

Три первые группы обосновываются делимостью 10 на 2 и 5, 100 на 4 и 25, 1000 на 8 и 25. Делимость же на 9 и 3 устанавливается с опорой на соответствующие таблицы умножения. Работая над признаками делимости, учащиеся тем самым отрабатывают умножение и деление многозначных чисел. Рассматриваются «составные» признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 20 и т. д.

4 КЛАСС

В 4 классе продолжается знакомство с числами, а именно **с десятичными дробями** как частным случаем позиционных систематических дробей в различных системах счисления. Таким образом, ***первая учебная задача*** связана с измерением и восстановлением величины, значительно меньшей исходной (основной) мерки.

Введение **позиционных систематических дробей** обусловлено прежде всего тем, что, завершая изучение понятия многозначного числа и действий с числами, заданными изначально в различных системах счисления, учащиеся вновь возвращаются к задаче измерения и воспроизведения величины в ситуации, когда для измерения (а затем и для воспроизведения) данной величины потребовалась не только система мер, полученных путем укрупнения с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), но и система мер, полученная путем уменьшения исходной меры в одно и то же число раз, равное коэффициенту укрупнения.

Другими словами, для измерения величин, много больших исходной меры, используют систему укрупненных мер с постоянным отношением, а для измерения величин, много меньших той же исходной меры, — систему уменьшенных (дробленых) мер с тем же отношением. Таким образом, учащиеся получают новый вид чисел — дробные, имеющие целую и дробную (после запятой) части. Числа рассматриваются в различных системах счисления, в том числе десятичной. Строится разрядная сетка, и даются соответствующие названия разрядам, полученным в результате уменьшения исходной мерки в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Полученные новые виды чисел получают свое место на числовой прямой, с помощью которой они могут сравниваться друг с другом и с известными видами чисел: с нулем и с ближайшими натуральными числами.

Измерения с помощью системы уменьшенных мер могут быть конечными и бесконечными, что приводит к появлению не только конечных, но и бесконечных дробей, в том числе периодических, которые будут рассматриваться позже (в 6 классе).

Однако предметом исследования становятся конечные десятичные дроби. Вводится операция округления дробей.

Конструирование способов выполнения действий с позиционными систематическими дробями, в том числе и с десятичными, позволит фактически отрабатывать все действия с многозначными числами, не тратя на это дополнительное время перед введением дробей, что и придает осмысленный характер умениям и навыкам счета в связи с использованием его в качестве средства для выполнения более сложных действий.

Такая логика построения материала, когда после действий с многозначными числами появляются подобные им по способу их получения и способу действий с ними позиционные систематические дроби, позволяет гораздо глубже понять ***обобщенный принцип образования позиционных чисел***.

Появление новых видов чисел, в которые входят десятичные дроби, а также способ нахождения дроби от числа и числа по его дроби дают возможность ввести ***понятие процента*** (эти тема вынесена в рабочую тетрадь).

Вычисления с десятичными дробями и процентами включены в решение реальных задач. Ведь в условиях рыночной экономики человеку необходимы принципиально новые умения, неизбежно связанные с математикой: перевод денежных единиц, сравнение цен на товары и многое другое. Именно такие задачи и требуют действий с десятичными дробями, округления дробей, введения понятия процента и др.

Особое место в программе 4 класса, о чем мы уже писали ранее, принадлежит уже известным детям с 1 класса понятиям **периметра, площади, объема** и способам их нахождения. Возврат к этим понятиям обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию ***готовых результатов измерения***. Такой подход позволяет осмыслить ***основные принципы***, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые.

Курс математики 4 класса заканчивается возвратом на новом уровне к **решению текстовых задач**. Создается такая учебная ситуация, при которой ребенок, уже умея решать задачи, задает себе вопросы: «А что же такое задача? Как она устроена? Из чего состоит? По каким признакам можно задачи сравнивать? Что необходимо записать, о чем сообщить другому человеку, чтобы он смог в точности восстановить текст задачи?», т.е. происходит углубление представления о задаче, принципах построения текста, способах ее моделирования с помощью не только схемы, но и краткой записи, преобразованиях, которые создают условия для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения уравнений, а значит, и задач, решаемых с их помощью.

Как правило, детей учат решать задачи по действиям, с опорой на которые и составляется математическое выражение. Однако потребности в его составлении для ребенка нет, ведь задача уже решена. Такой способ обучения решению задач (как и другим, не менее значимым темам программы) есть не что иное, как обучение от частного к общему, в то время как обучение в рамках системы Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова должно строиться с точностью до наоборот: от общего к частному. Это значит, двигаться нужно не от действий к составлению выражения (или уравнения), значение которого и может быть найдено последовательным выполнением арифметических действий. Поэтому сначала дети учатся составлять различные математические выражения (или уравнения) с опорой на схему, которая строится по ходу осмысления задачи, а лишь затем для нахождения значения выражения выполняют действия.

Итак, основное содержание курса математики — формирование понятия рационального числа — представлено как последовательность стратегических (ключевых) учебных задач: формирование понятия величины, т. е. введение в область отношения величин, раскрытие отношения величин как всеобщей формы числа, последовательное введение различных частных видов чисел как конкретизация общего отношения величин в определенных условиях, построение обобщенных способов действий с числами.

Реализация описанного математического содержания возможна лишь при условии готовности учителя организовать сотрудничество детей, требует от него особой организации учебной деятельности школьников в форме постановки и решения ими учебных задач посредством универсальных учебных действий (В.В. Давыдов). В ходе такого обучения и происходят открытие и усвоение понятий, когда дети при участии учителя должны ***сначала осознать потребность*** именно в самом понятии, способе действия, а затем ***сконструировать*** его, вступая в содержательный ***учебный диалог*** как со сверстниками, так и с учителем, что требует от последнего новой педагогической позиции, позволяющей реализовать цели и задачи, поставленные в Федеральном государственном образовательном стандарте.

ПРОГРАММА

1 КЛАСС (4 ч × 33 нед. = 132 ч)

Тема 1. Выделение свойств предметов. Величины и отношения между ними. Отношение равенства-неравенства при сравнении предметов по выбранному признаку (68 ч)

1. **Непосредственное сравнение предметов по разным признакам:** форме, цвету, материалу, длине (ширине, высоте), площади, объему, количеству (комплектности по составу частей), массе, расположению на плоскости и в пространстве. Сравнение предметов по этим признакам.

Периметр как длина «границы» любой плоской геометрической фигуры.

Понятие о равновеликости и равносоставленности фигур. Существенные различия межу прямой, лучом, отрезком. Представление о ломаной, угле. Сравнение углов. Подбор предметов или геометрических фигур по заданному признаку.

2. **Моделирование отношений равенства и неравенства между величинами:**

предметное: с помощью полосок;

графическое:

а) с помощью копирующего рисунка;

б) с помощью отрезков;

знаковое:

а) с помощью знаков «=», «≠»;

б) с помощью букв и знаков «=», «>», «<» (формулы $A = B$, $A > B$, $A < B$ и т. д.).

Класс величин. Сравнение величин с помощью посредника, равного одной из них. Транзитивность отношений «равно» (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$), «больше-меньше» (если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$; если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$).

Переход от действий с предметами к схеме и формуле. Восстановление схемы по формуле и наоборот. Преобразования схем и формул. Связь между ними.

Сравнение «по красоте» способов написания цифры 1. Классификация всех цифр на основании сравнения их по составу элементов и форме на три группы:

а) цифры 1, 4, 7;

б) цифры 3, 5, 2;

в) цифры 6, 9, 8 и 0 и их последующее написание.

Тема 2. Сложение и вычитание величин (52 ч)

1. **Сложение и вычитание величин как способ перехода от неравенства к равенству и наоборот.** Три способа уравнивания величин. Введение знаков «плюс» и «минус». Выбор способа уравнивания в зависимости от условий его выполнения. Описание операции уравнивания с помощью схем и формул. Связь между схемой и формулой. Изменение схемы при изменении формулы и наоборот. Тождественные преобразования формул.

Решение текстовых задач (с буквенными данными), связанных с увеличением или уменьшением величин (отношения «больше на...», «меньше на...»). Составление текстовых задач по схеме (формуле). Подбор «подходящих» чисел для решения задачи с точки зрения:

а) сюжета задачи;

б) выполнимости действия;

в) выполнения действия конкретным ребенком (опора на дошкольную подготовку).

2. **Сложение и вычитание величин как способ решения задачи на восстановление целого или части.** Понятие части и целого. Моделирование отношений между частями и целым в виде схемы, формулы и записи с помощью «лучиков» (знакографической записи).

Взаимопереходы от одних средств фиксации отношений к другим.

Введение специальных обозначений для части и целого: $A + A =$ ©

Названия компонентов при сложении и вычитании и их связь с понятием части и целого.

Относительность понятия части и целого. Подбор «подходящих» чисел к формулам. Состав однозначных чисел. Разбиение на части и составление из частей величин, геометрических фигур на плоскости и геометрических тел в пространстве.

Увеличение и уменьшение величины. Понятие нулевой величины.

Скобки как знак, показывающий другую последовательность выполнения операций над величинами: $A - B - C = A - (B + C)$.

Свойства операции сложения величин: переместительное и сочетательное. Составление и решение текстовых задач с буквенными данными на нахождение части и целого. Связь задач на уравнивание величин с задачами на нахождение части и целого.

3. **Понятие уравнения.** Определение значения одного из компонентов с опорой на понятия «часть» — «целое». Подбор «подходящих» чисел к формулам (опора на дошкольную подготовку) и наоборот. Описание числовых выражений с помощью буквенных формул как задача на их восстановление. Решение примеров «с секретами»: сложение и вычитание в пределах десятка с опорой на дошкольную подготовку. «Круговые» примеры, «магические» треугольники и квадраты. Составление детьми примеров «с секретами». Сравнение выражений с числовыми и буквенными данными. Решение задач с помощью уравнений. Подбор вместо букв подходящих чисел к текстовым задачам, выражениям, уравнениям.

Тема 3. Введение понятия числа (12 ч)

Переход от непосредственного сравнения величин к опосредованному.

Сравнение:

а) с помощью посредника, равного одной из сравниваемых величин (на основе транзитивности отношений);

б) с помощью мерки для измерения сравниваемых величин, благодаря которой обнаруживается кратность отношений: A/E и B/E, где A и B — сравниваемые величины, а E — третья величина того же рода, т. е. мерка.

Подбор мерок, удобных для измерения данной величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой. Простые и составные мерки.

Подбор подходящих предметов, используемых в качестве мерки.

Инструменты: циркуль, линейка, угольник. Ознакомление со стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

Знакомство с другими видами величин: время, скорость, стоимость.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу первого класса дети научатся:

- выделять разные свойства в одном предмете и непосредственно сравнивать предметы по разным признакам: по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, количеству, форме, цвету, материалу, углам и др.;
- моделировать отношения равенства и неравенства величин с помощью отрезков (графическое моделирование) и с помощью буквенной формулы (знаковое моделирование);
- производить сложение и вычитание величин при переходе от неравенства к равенству и обратно; исследовать ситуации, требующие сравнения величин и чисел, им соответствующих;
- описывать явления и события с помощью величин;
- прогнозировать результат сравнения величин путем их оценки и прикидки будущего результата;
- строить графические модели отношений (схемы) при решении несложных текстовых задач (с буквенными или числовыми данными), связанных с уменьшением или с увеличением величин; составлять текстовые задачи по схеме и формуле; придумывать вместо букв «подходящие» числа и заменять числовые данные буквенными;
- владеть понятием части и целого, уметь описывать отношения между частями и целым с помощью схем и формул;
- разбивать фигуры на части и составлять целое из частей плоских и объемных фигур;
- решать уравнения типа $a + x = в,\ a - x = в,\ x - a = в$ с опорой на схему;
- выполнять сложение и вычитание в пределах 10;
- представлять состав чисел первого десятка с опорой на дошкольную подготовку на основе понятия части и целого;
- изготавливать и конструировать модели геометрических фигур, предложенные в рабочей тетради, перекраивать их при сравнении площадей.

2 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 136 ч)

Тема 1. Введение понятия числа (продолжение) (35 ч)

1. **Задача непосредственного и опосредованного сравнения величин:**

а) подбор мерки, равной данной величине (повторение);

б) подбор мерок, удобных для измерения величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой.

Простые и составные мерки. Подбор предметов, удобных для их использования в качестве мерки. Знакомство с приборами и инструментами, используемыми для сравнения и воспроизведения величины стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

2. **Действие измерения.** Число как результат измерения величины и как средство для ее восстановления. Компоненты действия измерения: величина (A), мерка (E), число (n) и связь между ними. Запись числа как результата измерения и счета с помощью меток, считалок и с помощью цифр в различных нумерациях (арабская, римская, славянская и др.).

Построение величины по мерке и числу; подбор и изготовление мерки по заданной величине и числу. Зависимость одного из трех компонентов ($A/E = n$) от изменения другого при постоянном третьем (фактически речь идет о функциональной зависимости).

3. **Числовая прямая.** Сравнение величин с помощью числовых значений. Построение числовой прямой. Изображение чисел на числовой прямой (отрезком и точкой). Понятие шкалы. Знакомство с приборами и предметами, имеющими шкалы: линейкой, весами, часами, мерными емкостями, динамометром, спидометром, термометром, транспортиром и др.

Условия существования числовой прямой, числового луча, числового круга: наличие начала отсчета, направления, единичной мерки (шага). Число 0 как результат измерения нулевой величины единичной меркой и как начало отсчета на числовой прямой.

Сравнение чисел на числовой прямой. Последующее и предыдущее числа. Бесконечность числового ряда. Линейка как модель числовой прямой.

Решение текстовых задач. Использование диаграмм.

Тема 2. Сложение и вычитание чисел (24 ч)

1. **Разностное сравнение чисел и сложение и вычитание чисел с помощью:**

а) двух линеек (стандартных и изготовленных) как моделей двух числовых прямых;

б) двух числовых прямых;

в) одной числовой прямой.

2. **Присчитывание и отсчитывание как новый способ нахождения суммы и разности** в условиях отсутствия необходимого числа линеек при трех и более слагаемых.

Решение и составление математических выражений, уравнений и задач с заменой буквенных данных на числовые данные (в пределах десятка). Нахождение значения числовых выражений со скобками. Определение и изменение порядка действий с опорой на схему. Решение различных задач на сложение и вычитание с подбором:

а) «подходящих» чисел к заданному сюжету;

б) сюжетов к схемам с заданными числами.

Тема 3. Многозначные числа (35 ч)

1. **Набор и система мерок.** Задачи на измерение-отмеривание с помощью набора мерок. Упорядочивание и обозначение мерок в наборе. Выбор из данных мерок первой «подходящей» мерки. Запись результата измерения величины набором упорядоченных мер (от большей к меньшей) в форме таблицы. Связь «номера» выбранной мерки с количеством цифр в записи числа. Понятие разряда. Задача на необходимость установления отношения между мерками. Отношение «в... раз больше», «в... раз меньше». Решение задач с заданным отношением. Замена таблицы для записи результатов измерения «заготовками».

Переход от ***набора мерок***, в котором отношение между мерками произвольное, к системе мерок с постоянным отношением между ними (основание системы счисления).

2. **Позиционные системы счисления.** Понятие многозначного позиционного числа как результата измерения величины системой мерок с заданным отношением (основание системы). Чтение и запись чисел в различных системах счисления. Место нуля в записи многозначных чисел. Понятие значащего нуля в записи многозначного числа (когда нуль в середине и на конце) и незначащего (перед старшим разрядом). Сравнение многозначных чисел с помощью числовой прямой и поразрядное сравнение чисел, взятых в одной системе счисления. Представление числа в виде суммы разрядных слагаемых, замена суммы разрядных слагаемых числом.

3. **Десятичная система счисления как частный случай позиционной системы счисления.** Чтение и запись любых многозначных чисел. Названия первых четырех разрядов. Сравнение многозначных чисел.

Решение текстовых задач.

Тема 4. Сложение и вычитание многозначных чисел в разных системах счисления (42 ч)

1. **Постановка задачи** на сложение и вычитание многозначных чисел как переход от способа присчитывания и отсчитывания к конструированию способа выполнения действий «в столбик».

2. **Конструирование способа сложения и вычитания многозначных чисел.** Поразрядность сложения и вычитания как основной принцип построения этих действий. Запись примеров «в столбик», в которых имеются числа с одинаковым и разным количеством разрядов.

Определение разрядов, которые «переполняются» при сложении, путем сравнения суммы однозначных чисел в разряде с основанием системы счисления. Опора на состав числа — основание системы счисления. «Разбиение» разрядов при вычитании. Определение сильных и слабых позиций чисел в разряде. Определение количества цифр (разрядов) в сумме и разности.

Задача на нахождение значения каждой разрядной единицы (цифры каждого разряда) искомой суммы или разности. Постановка задачи на нахождение суммы однозначных чисел (табличные случаи сложения) и обратной задачи на вычитание.

Составление и подбор подходящих математических выражений с многозначными числами для решения текстовых задач, в том числе задач на построение диаграмм.

3. **Табличное сложение и вычитание.** Построение таблиц сложения однозначных чисел на множестве целых неотрицательных чисел. Таблица Пифагора.

Исследование таблицы сложения. Использование таблицы Пифагора как справочника.

Постановка задачи запоминания табличных случаев и выделение «трудных» случаев сложения с переходом через десяток. Исследование зависимости цифры в разряде единиц суммы от изменяющегося слагаемого как основы непроизвольного запоминания суммы.

Нахождение суммы многозначных чисел. Решение текстовых задач, в которых буквенные данные могут быть заменены многозначными числами. Составление и решение уравнений, математических выражений с многозначными числами по схеме.

Выделение табличных случаев вычитания. Конструирование способа вычитания с переходом через десяток. Письменное сложение и вычитание многозначных чисел, заданных в задачах, уравнениях и выражениях. Использование калькулятора при проверке.

Конструирование приемов устного сложения и вычитания многозначных чисел, которые сводятся к внетабличным случаям в пределах 100.

Решение текстовых задач.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу второго класса дети научатся:

- пользоваться понятием натурального числа как универсальным средством сравнения величин при переходе от непосредственного сравнения к опосредованному;
- решать задачи на измерение, отмеривание и нахождение удобной мерки;
- чертить с помощью линейки отрезок данной длины и измерять длину отрезка;
- читать диаграммы, анализировать их и использовать при решении задач;
- записывать результат измерения системой мерок; называть первые четыре разряда в десятичной системе счисления;
- сравнивать числа, группировать их по заданному или самостоятельно установленному правилу;
- складывать и вычитать многозначные числа в различных системах счисления, в том числе в десятичной, опираясь на таблицу сложения однозначных чисел и соответствующие ему табличные случаи вычитания;
- прогнозировать результат вычисления, пошагово контролируя правильность и полноту выполнения с опорой на составленный совместно с другими детьми справочник ошибок;
- делать оценку и прикидку будущего результата;

• пользоваться калькулятором для проверки в том случае, если ученик сомневается в правильности вычислений;

• строить графические модели (схемы, диаграммы) отношений между величинами при решении текстовых задач с буквенными и числовыми данными с опорой на понятие целого и части и разностное сравнение величин;

• исследовать зависимость решения задачи от ее условия, зафиксированного в схеме;

• сравнивать разные способы вычислений и выбирать рациональные способы действий с опорой на графическую модель (схему);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению;

• использовать известные ученику математические термины и обозначения.

Понимать и применять:

• принцип образования последующего и предыдущего чисел на числовой прямой;

• принцип образования многозначных чисел в любой системе счисления;

• общий способ чтения любого многозначного числа в любой системе счисления с неограниченным числом разрядов;

• общий принцип выполнения любого арифметического действия на примере сложения и вычитания любых многозначных чисел в десятичной системе счисления.

3 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 136 ч)

Тема 1. Понятие умножения и деления (24 ч)

1. **Умножение как способ измерения величин**, связанный с переходом в процессе измерения к новым меркам.

Постановка и решение задач, приводящих к изменению единиц измерения. Графическое изображение умножения. Оценка различных отношений между величинами и исходной меркой:

а) когда измерение удобно производить исходной меркой;

б) когда для измерения нужна дополнительная (промежуточная) мерка.

Конструирование формулы вида «по a взять $в$ раз»:

$A/E = a \cdot в$.

Введение термина «умножение». Переход от словесной формы к графической, знаковой и обратно. Конструирование способа замены любого произведения двух чисел одним числом в позиционной форме в десятичной системе счисления как универсального способа сравнения величин, описанных в виде произведения:

а) с помощью числовых прямых или двух линеек;

б) с опорой на отношение частей и целого, т. е. на связь умножения со сложением (в формуле $a \cdot в = c$, где a — часть, $в$ — количество частей, c — целое).

Решение текстовых задач, включающих отношение «больше в... раз», «меньше в... раз», как новый способ уравнивания величин. Кратное сравнение величин. Использование диаграмм при решении задач.

2. **Деление как действие по определению:**

а) промежуточной мерки — деление «на части»;

б) числа промежуточных мерок — деление «по содержанию».

Трехчленность операции умножения. Исследование зависимости между величиной, промежуточной меркой и их количеством. Связь деления с вычитанием. Введение названий компонентов при умножении и делении и их связь с понятием целого и части. Графическое моделирование деления. Зависимость результатов умножения и деления от изменения компонентов и наоборот. Решение и составление по схемам текстовых задач, уравнений, математических выражений.

Тема 2. Свойства умножения (12 ч)

Переместительное свойство умножения. Вычисления с опорой на переместительное свойство.

Сочетательное свойство и вычисления с опорой на него. Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Порядок выполнения действий, изменение порядка выполнения действий с опорой на схему. Приемы устных вычислений с опорой на свойства сложения и умножения. Рациональные способы вычислений.

Решение текстовых задач.

Тема 3. Умножение и деление многозначных чисел (55 ч)

1. **Постановка задачи нахождения произведения многозначных чисел.**

2. **Конструирование** способа умножения многозначного числа на однозначное как основы для умножения многозначного числа на многозначное. Выделение принципа поразрядности выполнения действия. Конструирование способа нахождения результата как последовательное нахождение:

а) разрядов, которые «переполняются»;

б) количества цифр в результате;

в) цифры каждого разряда.

3. **Постановка задачи составления таблицы** умножения однозначных чисел (таблицы Пифагора), включая случаи умножения на 0 и 1. Умножение на 10, 100, 1000 и т. д. Способы работы с таблицей как со справочником.

4. **Постановка задачи запоминания** таблицы умножения и рассмотрение каждой таблицы в отдельности.

Таблица умножения на 9 и соответствующая таблица деления; умножение любых многозначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1, 9, на любое однозначное число с опорой на переместительное свойство умножения; умножение «в столбик» на числа, оканчивающиеся нулями: 90, 900, 9000 и т. д.

Таблица умножения на 2 и таблица деления; умножение многозначных чисел, включающее умножение на 9 и 2. Умножение на 20, 200, 2000 и т. д.

5. **Деление с остатком** и его графическое представление. Деление с остатком в случае, когда делимое меньше делителя. Необходимые и достаточные условия нахождения результата деления с остатком.

Решение текстовых задач.

6. **Таблицы умножения и деления** на 5 и 6, 4 и на 8, 3 и 7. Умножение многозначных чисел на однозначные числа и разрядные единицы. Приемы устных и письменных вычислений при решении уравнений и текстовых за-

дач, в которых буквенные данные могут быть заменены такими числами, с которыми учащиеся могут выполнять действия. Умножение многозначных чисел на разрядные единицы.

Решение текстовых задач.

7. **Классы чисел. Сетка классов.** Чтение и запись многозначных чисел. Определение количества десятков, сотен, тысяч и т. д.

Определение количества цифр в записи многозначного числа по старшему разряду. Действия с многозначными числами. Текстовые задачи.

8. **Умножение многозначного числа на многозначное.** Конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное и запись его в виде модели. Определение числа цифр в произведении. Решение и составление уравнений, математических выражений, текстовых задач по заданным схемам и наоборот.

9. **Деление многозначных чисел.** Конструирование способа деления многозначного числа на однозначное: принципы поразрядности при делении. Постановка задачи деления любого многозначного числа на любое многозначное:

а) определение первого неполного делимого (разбиение);

б) нахождение количества цифр в частном;

в) нахождение «подсказок» при делении многозначных чисел, с опорой на которые происходит подбор цифры в частном. Умножением, а не делением подбирается цифра в частном.

10. **Нахождение значения числового выражения**, содержащего деление многозначного числа на многозначное. Порядок действий в математических выражениях, составленных из многозначных чисел и включающих все арифметические действия. Использование калькулятора для проверки.

Решение задач и уравнений на все действия с многозначными числами. Отображение информации, содержащейся в текстовых задачах, в виде диаграммы.

Тема 4. Действия с многозначными числами (45 ч)

1. **Поразрядность выполнения всех действий с многозначными числами** как основной принцип построения этих действий. (Рефлексия.)

Запись и выполнение сложения, вычитания, умножения и деления «в столбик».

2. **Классификация устных и письменных вычислений.** Анализ известных детям способов устных и письменных вычислений, содержащих:

а) сложение и вычитание;

б) умножение и деление.

3. **Приемы устных вычислений:** умножение на 11, на 101, умножение и деление на 25 и другие числа.

4. **Признаки делимости:** на 2, 5 и 10; на 4, 25, 100; на 8, 125, 1000; на 9 и 3. Признаки делимости на 6, 15, 36 и другие как одновременная опора на известные признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 и т.д.

5. **Решение текстовых задач**, включающих необходимость использования признаков делимости.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу третьего класса дети научатся:

• находить способ измерения величин в ситуации, когда предложенная учителем величина значительно больше исходной мерки; создавать и оценивать ситуации, требующие перехода от одних мер измерения к другим;

• использовать схему умножения (она же и деления) при решении текстовых задач, составляя выражение или уравнение; по схеме придумывать или подбирать текстовые задачи; применять калькулятор при проверке вычислений;

• анализировать зависимости между величинами, с которыми ученик имеет дело при решении задач;

• строить графические модели арифметических действий и осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно; читать и строить диаграммы;

• решать уравнения типа $a \cdot x = в$, $x \cdot a = в$, $a : x = в$, $x : в = a$;

• умножать и делить многозначное число на многозначное с опорой на таблицу умножения (и только умножения!) однозначных чисел от 0 до 9;

• основным приемам устных вычислений при выполнении любого арифметического действия;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами.

понимать:

• смысл умножения как особого действия, связанного с переходом к новой мерке в процессе измерения величин;

• смысл деления как действия, направленного на определение промежуточной мерки или числа этих мерок;

• как устроена сетка классов чисел, включая класс миллиардов.

4 КЛАСС (4 ч × 34 нед. = 736 ч)

Тема 1. Многозначные числа и десятичные дроби как частный случай позиционных систематических дробей (64 ч)

1. **Действия с многозначными числами. Повторение** (11 ч)

2. **Измерение величин:**

а) анализ условий, при которых получается: однозначное число; многозначное число в различных системах счисления;

б) постановка ***задачи воспроизведения величины*** меньшей, чем заданная исходная мерка;

в) набор и система мерок меньших, чем исходная. Построение ***систе-***

мы мер с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), в том числе и с отношением 10;

г) запись результата измерения величины с помощью системы укрупненных мерок и системы уменьшенных мерок. Табличная форма записи, введение запятой. Позиционные систематические дроби в разных системах счисления. Знакомство с записью результата измерения в форме обыкновенной дроби. (Например: 0,13 = 1/3 или 0,25 = 2/5.)

3. **Запись и чтение десятичных дробей.** Место десятичных дробей на числовой прямой. Сравнение десятичных дробей с помощью числовой прямой. Принцип поразрядности при сравнении систематических позиционных дробей. Построение величины по заданной позиционной или обыкновенной дроби и исходной мерке. Округление десятичных дробей с избытком и с недостатком.

4. **Действия с многозначными числами и десятичными дробями.** Сложение и вычитание десятичных дробей. Умножение и деление десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. Сохранение числа при последовательном умножении и делении его на 10, 100, 1000 и т. д.

Конструирование способа умножения десятичных дробей и деления, когда делитель — число натуральное. Сведение случая деления на десятичную дробь к делению на натуральное число.

Микрокалькулятор. Проверка действий с различными видами чисел с помощью микрокалькулятора.

Решение и составление текстовых задач, уравнений и математических выражений с десятичными дробями. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби.

5. **Стандартные системы мер.** Действия с числовыми значениями величин. Десятичные дроби и стандартные системы мер. Перевод одних мер в другие. Меры длины, площади, массы, объема.

Действия с числовыми значениями величин. Решение и составление текстовых задач, требующих подбора «подходящих» к данным числам сюжетов и «подходящих» к данному сюжету чисел.

Деньги как мера стоимости. Валюты в России, Америке, странах СНГ. Курс одних валют по отношению к другим. Стандартные меры измерения времени: век, год, месяц, неделя, сутки, час, минута, секунда. Стандартные меры измерения углов: градус, минута, секунда, радиан.

Число как результат кратного отношения длины окружности к диаметру, т. е. как число радиан в полуокружности.

Тема 2. Периметр, площадь, объем (34 ч)

1. **Периметры различных плоских фигур и способы их вычисления.** Сравнение периметров различных фигур с помощью посредника (например, проволоки и т. п.). Формулы периметра прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других геометрических фигур, включая правильные многоугольники. Вычисление периметров геометрических фигур и фигур произвольной формы (границы фигур — кривые линии). Использование гибких мерок.

2. **Площади геометрических фигур.** Непосредственное и опосредованное

сравнение площадей геометрических фигур. Измерение площади прямоугольника путем непосредственного наложения мерки, в том числе квадратного сантиметра, замена этого способа измерением длин сторон.

Формула площади прямоугольника: $S = a \cdot b$.

Измерение площади прямоугольного треугольника как нахождение половины площади соответствующего прямоугольника. Формула площади прямоугольного треугольника: $S = (a \cdot b) : 2$, где a и b — длины сторон прямоугольника, составленного из двух одинаковых треугольников.

Поиск двух из трех сторон прямоугольного треугольника, измерение которых позволяет вычислить его площадь. Выбор прямоугольных треугольников среди прочих.

Виды треугольников. Постановка и решение задачи нахождения площадей непрямоугольных треугольников путем разбиения их на прямоугольные. Формула площади произвольного треугольника: $S = (a \cdot h) : 2$, где h — высота треугольника.

Нахождение площадей геометрических фигур путем разбиения или перекраивания их различными способами на треугольники или прямоугольники. Поиск рациональных способов разбиения фигуры для вычисления ее площади. Площадь правильного n-угольника. Вычисление площадей различных геометрических фигур.

Палетка как прибор для измерения площадей фигур произвольной формы. Алгоритм измерения площади с помощью палетки. Решение текстовых задач, включающих понятия площади и периметра.

3. **Объемы геометрических тел.** Измерение объема прямоугольного параллелепипеда путем заполнения его кубическими мерками и замена способа непосредственного вложения и пересчета мерок вычислением произведения трех измерений: длины, ширины, высоты — и нахождением с их помощью объема $(V = a \cdot в \cdot c)$ или произведения площади основания на высоту $(V = S \cdot H)$.

Общий подход к вычислению объема любых «призмоподобных» и «пирамидоподобных» геометрических тел.

Тема 3. Анализ решения текстовых задач (38 ч)

1. **Строение задачи. Краткая запись задачи. Схемы. Уравнения.** Краткая запись условия задачи как новое средство моделирования, когда текст задан в косвенной форме или содержит большое количество данных.

Восстановление текста задачи по краткой записи и наоборот. Матричная форма краткой записи (таблица) для задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами.

Преобразование краткой записи к виду, удобному для графического моделирования (составление схемы).

Составление схемы по краткой записи и наоборот. Выделение равных величин и составление уравнений по схеме. Составление разных уравнений по одной и той же схеме на основе выбора обозначения неизвестной величины и выражение остальных неизвестных величин через первую.

Составление к задачам уравнений, удобных для решения. Преобразование уравнений на основе преобразования схем. Зависимость изменения уравнения от изменения схемы и наоборот.

2. **Задачи на «процессы».** Время и его измерение. Понятие о скорости. Общий подход к решению текстовых задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами:

а) на движение (выделение характеристик движения: времени, скорости, расстояния — и связи между ними);

б) на куплю-продажу;

в) на работу (производительность труда, время, объем работ);

г) на изготовление товара (расход ткани на одну вещь, количество вещей, общий расход) и т. п.

Составление краткой записи задачи в виде таблицы:

а) на встречное движение;

б) на движение в противоположных направлениях и в одном направлении.

Понятие скорости удаления и скорости сближения.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу четвертого класса дети научатся:

• читать и записывать многозначные числа и конечные десятичные дроби, сравнивать их и выполнять действия с ними; исследовать связь между десятичными дробями и натуральными числами;

• выполнять любые арифметические действия с многозначными числами (без ограничения числа разрядов); сравнивать разные способы вычислений; выбирать рациональный (удобный) способ действия;

• моделировать с помощью схемы отношения между компонентами арифметических действий в математических выражениях, определяя порядок действий на основе анализа этих отношений;

• прогнозировать результат вычислений, используя калькулятор при проверке;

• составлять формулы периметра и площади любого многоугольника (и прямоугольника в том числе) и использовать их при решении задач;

• вычислять периметры различных плоских фигур, описывать их свойства;

• использовать различные способы вычисления площади фигуры: прямоугольника, треугольника и других многоугольников;

• применять общий способ нахождения периметра, площади и объема любых геометрических фигур;

• изготавливать модели геометрических тел; использовать различные инструменты и технические средства (линейка, угольник, транспортир, циркуль, калькулятор и др.);

• конструировать геометрическую фигуру (отрезок, ломаную, многоугольник, в том числе прямоугольник) с заданной величиной (длиной, в том числе периметром, площадью);

• упорядочивать величины; моделировать и разрешать реальные ситуации, требующие умения находить геометрические величины (планировка, наклейка обоев и т. п.);

• анализировать строение задачи и схему как основание для классификации;

- выявлять связь между пропорциональными величинами: скоростью, временем, расстоянием; ценой, количеством, стоимостью и др. и использовать известную схему умножения (деления) для решения текстовых задач;
- использовать новое средство моделирования условия задачи — краткую запись; составлять текст задачи по краткой записи; преобразовывать краткую запись и соответствующий ей текст (и наоборот);
- находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами и наоборот;
- представлять информацию в таблице и на диаграмме;
- искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;
- выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания (и задачи) с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

иметь представление:

- о признаках делимости;
- о многоугольниках и геометрических телах;
- о видах углов и треугольников.

Предлагаемая программа построена так, что позволяет реализовать каждый из трех вариантов программ, которые в настоящее время представлены в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования второго поколения на новом качественном уровне в форме теоретического знания.

Однако, учитывая то обстоятельство, что уровни развития детей, индивидуальные особенности учителей и региональные условия могут значительно различаться, можно предложить еще **три варианта** дифференциации данной программы обучения.

Все они предполагают введение факультативов, но один из вариантов связан с переносом части предложенной программы на факультативное изучение, другой — с дополнением данной программы факультативом, а третий — с усилением самой программы и дополнительным факультативом.

Рассмотрим каждый из этих вариантов.

При **первом варианте** (условно говоря, облегченном) можно предложить на выбор **вынести на факультатив** из программы 3 класса:

1) признаки делимости;

2) некоторые из предложенных приемов устных вычислений, которые традиционно рассматриваются на факультативах (умножение на 11, 101, умножение и деление на 25, умножение одинаковых чисел, оканчивающихся на 5, т. е. 25 · 25, 35 · 35 и т. п.).

Из программы 4 класса:

1) понятие процента и решение соответствующих текстовых задач, работу с рекламными материалами;

2) знакомство с валютами разных стран и курсами валют по отношению

друг к другу;

3) нахождение объемов геометрических тел;

4) кроме выноса части материала на факультатив можно сократить время (но не отказываться совсем!) на решение текстовых задач, приводящих к составлению сложных уравнений.

Особо хотим отметить, что самовольный отказ от изучения других тем программы, например от десятичных дробей и действий с ними, не только нарушит логику построения курса, что недопустимо, но и лишит учащихся возможности, во-первых, переосмыслить на новом уровне принципы устройства многозначных чисел в разных системах счисления, а во-вторых, завершить формирование навыков письменных и устных вычислений с многозначными натуральными числами, которые включены в действия с десятичными дробями в качестве средства. Другими словами, при выполнении действий с десятичными дробями дети фактически отрабатывают действия с натуральными многозначными числами (и это лишь один из примеров).

Второй вариант предусматривает выполнение основной программы и может быть дополнен **факультативом**, ориентированным на углубление изучаемого материала:

1) при изучении во 2 классе позиционных систем счисления можно предложить исследовать способы перевода чисел из одной системы счисления в другую, если величины, с которыми действует ребенок, измерялись разными системами мер, и составить сборник соответствующих заданий на их сравнение, сложение и вычитание. Причем перевод числа из одной системы счисления в другую осуществляется с помощью действия восстановления величины;

2) в развитие предыдущей темы после изучения всех действий с многозначными числами в десятичной системе счисления можно предложить конструирование умножения и деления в недесятичных системах счисления (3—4 класс).

Вообще хотелось бы отметить, что учителя иногда недооценивают ту роль, которая отведена в обязательной программе работе с числами, представленными в недесятичных системах счисления, особенно на первом этапе. Значение этой темы огромно как для осмысления принципа устройства десятичной системы счисления и организации совместной деятельности детей, так и для формирования качественных вычислительных навыков. Так, складывая или вычитая, например, числа в пятеричной системе счисления, дети осмысленно усваивают соответственно состав числа 5 и счет в пределах 5, поэтому, работая с натуральными числами, а затем и дробными в разных системах счисления, учитель предоставляет возможность слабым детям вновь и вновь возвращаться к тому материалу, которой ранее по каким-либо причинам был плохо усвоен ребенком, причем понятно, что это не просто повторение изученного, а возвращение на качественно новом уровне, причем возвращение, обеспечивающее продвижение ребенка вперед.

Третий вариант программы можно использовать в классах, где, во-первых, математику с 1 класса ведут либо учителя математики, либо учителя начальных классов, проявляющие особый интерес к преподаванию математики (и те и другие должны непременно пройти обучение в центре переподготовки работников образования), а во-вторых, большинство поступивших детей оказались с высокой психологической готовностью к школе, хорошей дошкольной подготовкой и ярко выраженными интересом и способностями к изучению математики.

Эта **углубленная** программа обучения математике включает материал, рекомендованный в предыдущем варианте для факультативных занятий.

В качестве дополнительного материала, который учитель может использовать после уроков, можно предложить следующие тематические занятия:

1) задачи на разрезание и перекраивание фигур (1 класс);

2) задачи с переливаниями, дележами, переправами при затруднительных обстоятельствах (1—2 классы);

3) ознакомление учащихся с одним из аналитических методов решения задач, решаемых «от конца к началу» (2—3 классы);

4) задачи на проценты (включены в р/т № 1 для 4 класса);

5) различные занятия по истории математики (1—4 классы);

6) занятия, связанные с изучением вероятности случайных событий (4 класс).

Кроме тематических занятий можно предложить сконструировать способ умножения многозначных чисел (в отличие от умножения «в столбик»), основанный на правиле «ножниц» (автор Э.И. Александрова), позволяющий фактически устно, без записи промежуточных результатов получать произведение. Этот новый способ действия дает возможность значительно улучшить устный счет, делая его более мотивированным (подробно описан в методическом пособии для учителя, 3 класс).

Совершенно очевидно, что предлагаемые темы факультативных занятий могут быть продолжены. Учитель вправе самостоятельно выбрать темы из предложенных или внести собственные, а также использовать данные рекомендации при любом из трех вариантов программы. Однако при подборе собственных вариантов факультативов рекомендуем руководствоваться следующими соображениями: факультатив должен либо углубить понятия, изучаемые в обязательной программе, либо расширить представления детей о математике путем рассмотрения элементов математической логики, теории вероятности, теории графов, истории математики, аналитических методов и нестандартных приемов решения задач. Факультативные занятия не должны включать темы, которые будут предметом исследования в более поздние сроки обучения в школе.

* * *

Программа обеспечена учебно-методическими комплектами для каждого года обучения:

1) учебники для каждого года обучения:
2) методические пособия «Обучение математике» (для каждого класса);
3) рабочие тетради (для каждого класса);
4) контрольные работы (для каждого класса).

СОДЕРЖАНИЕ