ПРОГРАММА

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В основу новых Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) положен культурно-исторический системно-деятельностный подход (Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов и их ученики и последователи), согласно которому содержание образования проектирует определенный тип мышления. Ориентация на развитие теоретического типа мышления предполагает построение учебных предметов как систему научных понятий, усвоение которых напрямую зависит от формирования учебной деятельности и организации учебных действий ребенка.

В концепции образовательных стандартов подчеркивается, что обучение осуществляет свою ведущую роль в умственном развитии прежде всего через содержание, которое в свою очередь определяет методы, формы организации и общения детей, характер дидактических материалов и другие стороны учебного процесса.

Данная программа по математике и соответствующий ей УМК изначально были ориентированы на деятельностный подход в обучении (теоретические положения этой научной школы легли в основу ФГОС нового поколения). Это означает, что они позволят реализовать цели и задачи ФГОС, поскольку ориентированы как на достижение предметных, личностных и метапредметных результатов, так и (как следствие) на формирование разных компетенций младших школьников, опираясь при этом на исторический подход при изучении основного математического понятия — понятия числа.

Содержание курса математики представлено целостной системой специальных (ключевых) учебно-практических задач, с которых и начинается всякая новая тема, а не набором заданий развивающего характера. Итогом решения учебных задач являются прежде всего обобщенные способы действий, позволяющие формировать у ребенка универсальные учебные действия (УУД), а новые знания, задаваемые как основания детского умения, становятся качественно иными (формирование навыков при таком подходе становится не целью, а одним из средств для овладения УУД). Условия решения таких задач либо воссоздают ситуации, в которых зарождалось исторически то или иное понятие (к примеру, понятие числа), либо задают реальные жизненные ситуации (к примеру, введение смысла умножения). Такой подход, по замыслу разработчиков ФГОС, даст возможность получить метапредметные результаты. Более того, решение подобных задач с неизбежностью требует организации коллективно-распределенных форм деятельности, что создает оптимальные условия для получения предметных, метапредметных и, конечно, личностных результатов, а математическое содержание приобретает личностно значимый характер. Именно содержание учебного предмета должно создавать благоприятные условия для развертывания учебной деятельности детей и способствовать интенсивному развитию мышления и

мыслительных операций, связанных с ними: анализа, рефлексии и планирования.

Однако конструирование учебной программы не только предполагает отбор содержания, но и требует осознания связи содержания усваиваемых знаний и умений с психическим развитием ребенка.

Ориентация на развитие ребенка предполагает опору на активные методы обучения, формирующие у школьника универсальные учебные действия. Это означает, что знания не должны даваться ему в готовом виде. Они должны быть получены в совместной деятельности с другими детьми и учителем как организатором и соучастником процесса обучения.

Основным математическим понятием, определяющим главное содержание данной программы и всего курса школьной математики в целом, является «действительное число», представленное в начальной школе в виде целого неотрицательного числа.

Существуют разные точки зрения относительно изучения этого базового математического понятия в начальной школе. Однако речь идет о построении начального курса математики как части целостного учебного предмета, представленного системой понятий, которые рассматриваются через систему учебных задач. Поэтому становится ясно, что преемственность в обучении требует уже в начальной школе рассматривать основное математическое понятие — понятие числа через понятие величины как системообразующего понятия курса математики. Измерение величин, в отличие от счета предметов, требует организации практических действий, и не в одиночку, а совместно с другими детьми, т. е. в коллективно-распределенной, групповой форме деятельности, вынуждает ребенка общаться, действовать руками, что является основой для развития моторики, коммуникативных умений, расширения познавательных интересов, установления межпредметных связей.

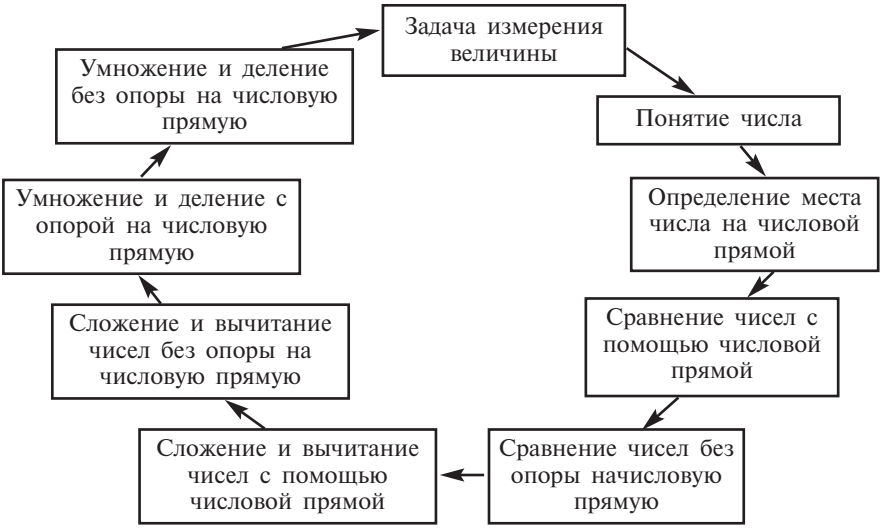
Операцией, специфической для способа измерения величин, является «откладывание» единицы измерения (мерки) на измеряемой величине и счет таких «откладываний». Число в этом случае является характеристикой величины и зависит не только от измеряемой величины, но и от выбранной мерки. Меняя условия, при которых с помощью практических действий решается задача измерения и обратная ей задача построения (воспроизведения) величины посредством «откладывания» мерок (единиц измерения), учащиеся будут «выращивать» различные виды чисел, знакомясь с общепринятыми способами их обозначения. Ориентация на обобщенные способы действий является одной из новых задач ФГОС.

Основным средством, фиксирующим результаты сравнения величин, их сумму и разность, служат различные графические модели: схема, числовая прямая, числовой луч, а начиная со 2 класса вводятся диаграммы, использование которых впервые рекомендовано в начальной школе. Опора на графическую модель, так же как и на знаковую (формулу), позволяет изучить отношения равенства-неравенства, частей и целого, которые служат основой при обучении решению текстовых задач и уравнений. Предлагая уже с первого класса задачи с буквенными данными, мы ставим ученика в ситуацию поиска необходимых сведений (информации), анализа сюжета задачи для подбора «подходящих» чисел, а к 4 классу ученик столкнется с задачами-ло-

вушками, к которым отнесем задачи с лишними данными, с недостающими данными и др. Именно они дают возможность ученику оценить потребность в дополнительной информации, определить ее возможные источники , проанализировать ее. Работа с информацией как раз и отличает новые подходы в обучении не только математике, но и другим предметам, что в итоге дает возможность формировать информационную, а значит, и компьютерную грамотность.

Все понятия, как уже было сказано выше, в том числе и базовые понятия величины и числа, вводятся через учебно-практические задачи. Так, в 1 классе это задачи, в которых необходимо подобрать предмет, обладающий изучаемым свойством, а затем, когда речь пойдет о величине, нужно непосредственно измерить ее соответствующей меркой. Результатом измерения всякий раз будет являться число. Процесс измерения и его результат описываются с помощью графических моделей (схем), в частности числового луча и числовой прямой.

Сравнение, сложение и вычитание величин и чисел, которые их характеризуют, с опорой на числовую прямую служат **общим основанием** к конструированию арифметических действий с любыми числами. Схематично логика изучения понятия числа и действий с ним может быть представлена так:



Изучение каждого вида чисел (а в начальной школе рассматриваются не только однозначные и многозначные числа, принадлежащие множеству целых неотрицательных чисел, но и десятичные дроби, позволяющие ученику осознать общий принцип образования позиционного числа и общий принцип выполнения арифметических действий с ними — принцип поразрядности) в строго определенной логике позволит ученику на более поздних этапах освоения математики самостоятельно проектировать свое продвижение в предмете при условии осознания этой ***общей*** для всех видов чисел логики,

существенно повышая мотивацию и интерес ребенка. Представляется, что именно в этом и есть смысл ***преемственности*** содержания и целостности школьного курса математики.

Использование числовой прямой (а не числового луча) в качестве основной графической модели дает возможность заложить общие подходы для изучения арифметических действий по отношению не только к целым неотрицательным числам, хотя именно они являются носителями этих общих способов действий с числами, но и к другим видам чисел.

Так, например, способы сравнения, сложения и вычитания чисел с помощью числовой прямой (точнее, двух числовых прямых) позволяют без проблем ввести аналогичные операции над положительными и отрицательными числами в основной школе (что было опробовано на протяжении ряда лет).

Для знакомства с десятичным принципом образования многозначных чисел дети, как и ранее, обращаются к задаче измерения: сначала они измеряют длину, теперь будут измерять площадь. Измерение и построение величин по частям с помощью системы мерок (длины, площади) дает возможность перейти к табличной форме записи чисел, позволяя сравнивать их между собой без построения самих величин. Замена системы мерок для измерения длины (площади) с произвольной основной (исходной) меркой и постоянным отношением между ними, в том числе с отношением кратным 10, позволяет «оторвать» число от числового значения величины (именованного числа) и рассмотреть многозначные числа как результат измерения величины любой системой мер (и десятичной в частности). Осознав основной принцип образования многозначного числа (в пределах 4 и более разрядов), можно перейти к изучению сложения и вычитания многозначных чисел «столбиком».

Методика обучения действиям с многозначными числами опирается на использование предметных моделей (плоских геометрических фигур) для обнаружения основного принципа выполнения любого арифметического действия — принципа поразрядности. Анализируя этот принцип, нетрудно прийти к выводу: при поразрядном сложении сумма однозначных чисел (табличные случаи) может быть меньше десяти, равна десяти или больше десяти. Оценив сумму, ученик может определить, какие разряды при сложении двух (и более) многозначных чисел «переполняются», а какие нет, может (ничего не вычисляя) узнать, сколько цифр (знаков) получится в сумме, и в завершение может вычислить цифру[37] в каждом разряде. Другими словами, прежде чем выполнить то или другое арифметическое действие, ему необходимо будет сделать оценку и прикидку, чему, как известно, в новых стандартах придается особое значение как важным учебным навыкам. Этому в полной мере отвечает, с нашей точки зрения, методика обучения выполнению арифметических действий.

Таким образом, определять количество цифр в результате действия дети будут не только при делении, как это принято традиционно, но и при вы-

[37] Для краткости будем употреблять термин *цифра* вместо *однозначное число, записанное с помощью цифры*.

полнении всех арифметических действий. Общий подход к выполнению любого арифметического действия позволит значительно облегчить формирование прочных вычислительных навыков, поскольку не требует от ребенка постоянной перестройки и запоминания способов, отличающих одни вычисления от других. Подчеркнем, что навыки выполнения письменных вычислений и на их основе приемов устного счета (а не наоборот!) формируются путем анализа операционной структуры каждого арифметического действия, анализа различных способов его выполнения, содержательного анализа ошибкоопасных мест (составление «справочника ошибок»), что делает формирование навыков вычислений не самоцелью, а средством для развития анализа, рефлексии и планирования (в том числе мысленного) как характеристик теоретического типа мышления. Формирование у учащихся нового типа мышления — одна из приоритетных задач, поставленных перед школой ФГОС.

В соответствии с описанным выше подходом к формированию обобщенных способов действий особое внимание уделено месту и последовательности изучения таблиц сложения всех однозначных чисел от 0 до 9 (а не от 1 до 9!), работе над приемами их составления и запоминания. Формирование навыков табличного сложения и вычитания (а потом и табличного умножения и деления) происходит на основе непроизвольного запоминания, которое является результатом (следствием) исследования зависимости между изменяющимся слагаемым и цифрой в разряде единиц у двузначной суммы, которая получается при «переполнении» разряда:

$$9 + 4 = 13; \quad 8 + 7 = 15 \quad \text{и т. п.}$$

Конструирование приемов устных вычислений и их обоснование опираются на свойства действия с использованием не только графических моделей, но и предметных.

Для того чтобы смысл одного из важнейших математических понятий — умножения не был подвергнут «ревизии» в основной школе, мы рассматриваем его как особое действие, связанное с переходом в процессе измерения величин к новым меркам (В.В. Давыдов). Становится очевидным, что при таком предметном смысле действия умножения произведение может быть найдено (вычислено) разными способами в зависимости от того, какие числа получились в результате измерений.

Как и при изучении сложения и вычитания, изучение умножения и деления (как обратного действия) строится с опорой на графическую модель (схему) и предметную (используются конструкторы «Лего»). Умение изображать отношения между компонентами действия с помощью схемы позволит ученику описать одно и то же отношение с помощью нескольких формул: $a \cdot b = c$, $c : a = b$, $c : b = a$.

Таким образом, при введении понятия умножения мы движемся не от суммы к произведению (произведение дробных чисел, которое рассматривается в 5—6 классах, в отличие от натуральных не может представлено суммой одинаковых слагаемых, как этому учат в начальной школе, что только усугубляет проблему преемственности с основной школой), а от произведе-

ния к сумме, что позволит задать ***общий*** (для всех видов чисел) ***смысл*** действия умножения.

Одной из важнейших учебных задач в данном варианте обучения математике является «конструирование» способа умножения многозначного числа на многозначное, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это традиционно принято.

Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддержания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что снимает необходимость в специальном предварительном заучивании таблиц, а в процессе формирования приемов будут закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Завершается изучение арифметических действий с многозначными числами «конструированием» деления многозначного числа на многозначное, которое требует предварительного освоения новых типов заданий, а затем уже последовательного выполнения следующих операций:

а) нахождения первого неполного делимого по известному делителю (и, наоборот, нахождения возможных делителей при неизвестном неполном делимом), что, как правило, требует «разбиения» разрядов;

б) определения количества цифр в частном по уже известному неполному делимому (и, наоборот, нахождения первого неполного делимого по известному количеству цифр в частном);

в) определения «подсказок»[38];

г) подбора цифр в частном с помощью умножения и опоры на «подсказки» (и, наоборот, восстановления «подсказок» по известной цифре частного), а не на округление делимого и делителя, как это принято. Такой подбор дети выполняют не делением, а умножением, что значительно облегчает задачу определения цифры в частном.

Овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для классификации устных и письменных вычислений.

Для проверки вычислений в тех случаях, когда ученик сомневается, ему предлагается в ряде заданий использовать калькулятор.

Итак, описанный подход к изучению умножения и деления, аналогич-

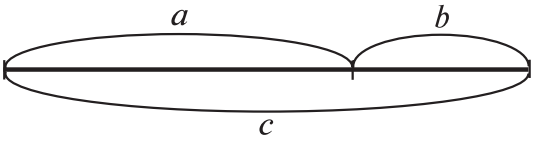
[38] Понятие «подсказка» введено в связи с принципиально новым подходом к обучению обобщенному способу деления любого многозначного числа на любое многозначное число (а не «дозами»: сначала на однозначное, затем на двузначное, трехзначное и т. д.), значительно облегчая подбор цифры и сокращая время такого подбора.

ный подходу к изучению сложения и вычитания, дает возможность значительно упростить методы обучения решению текстовых задач, задавая обобщенный способ работы над задачей (не от действий к выражению, а от выражения к действиям).

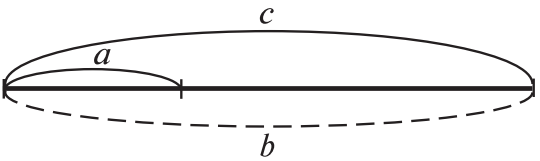
Достаточно научиться изображать отношение «целого и его частей» с помощью схемы в двух ситуациях:

1) если части, из которых составлено целое, неравные, то отношение между ними может быть описано тремя основными формулами: $a + b = c$, $c - a = b$ и $c - b = a$, где a и b — части, а c — целое.

Схема отношения выглядит так:



2) если же все части равные, то отношение между частями и целым может быть описано дополнительными формулами: $a + b = c$; $c : a = b$ и $c : b = a$, где a — часть, b — количество таких частей, c — целое, а схема такого отношения выглядит так:



При решении текстовых задач, уравнений и при нахождении значения выражения учащиеся опираются на изображение отношений с помощью этих двух схем, умения работать с которыми вполне достаточно для поиска неизвестной величины или числа.

Решение текстовых задач сопровождает изучение всех тем, однако углубление представления о задаче, принципов построения текста, способов ее моделирования не только с помощью схемы (или диаграммы), но и краткой записи (в том числе в табличной форме) происходит на заключительном этапе обучения в 4 классе.

Анализ способов моделирования текстовой задачи, преобразования краткой записи (одной из форм которой является таблица) и схемы создает необходимые предпосылки для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения задач путем составления и решения уравнений.

Новый раздел «Работа с информацией» изучается, как и рекомендовано, на основе содержания всех других разделов курса математики, однако наиболее ярко он представлен при обучении решению текстовых задач с буквенными данными, о чем было сказано выше. Это работа и с диаграммами, и с различными таблицами, что позволит использовать учебники не только для изучающих базовый вариант, но и для тех, кто выбрал другие два вари-

анта, в том числе с расширенным разделом, посвященным работе с информацией, поскольку в учебнике представлены задания на построение простейших линейных связок, высказываний.

Возврат в 4 классе к понятиям периметра (длины), площади и объема и способам их вычисления обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию готовых результатов измерения. Такой подход позволяет осмыслить основные принципы, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые. Именно в начальной школе создаются предпосылки для систематического изучения геометрии в средних классах как конкретизация тех основных понятий и принципов, с которыми дети уже работали, изучая свойства объектов трехмерного пространства, что и составляет предмет элементарной геометрии. Таким образом, геометрический материал в рассматриваемой программе не является инородным, он органически включен в общую логику построения курса начиная с 1 класса, что делает его более осмысленным и содержательным и дает возможность учителю использовать учебники при выборе любого из трех вариантов, представленных во ФГОС.

Итак, геометрическая линия рассматривается без отрыва от числовой, являясь основой символического описания **отношений между величинами** и **отношений между числами** как характеристиками величин. Это значит, что различные геометрические фигуры (отрезок, прямоугольник, круг и т. д.) нужно использовать в качестве графических моделей, что дает возможность осознать геометрические формы не только как ***образы предметов*** окружающего мира, но и как ***математические модели***. Происходит перенос свойств одного образа на другой, что является основой для понимания математики, основой метода познания реальной действительности, основой формирования универсальных учебных действий (в том числе формирования ***общего*** умения решать задачи). Именно такие цели сформулированы в концепции ФГОС нового поколения.

Предлагаемое математическое содержание позволяет организовать обучение в форме ***учебно-поисковой деятельности***, которая по своей сути является коллективно-распределенной. Наряду с общей грамотностью она дает возможность ученику приобрести умение разрабатывать и проверять гипотезы (как свои, так и чужие), работать в проектном режиме, проявлять инициативу в принятии решений, выстраивать отношения с одноклассниками, брать на себя те или иные функции и т. п. Это и становится одним из значимых ожидаемых результатов образования и предметом стандартизации, поскольку у детей появляется способность самостоятельно решать встающие перед ними новые задачи, усиливается познавательная активность, создавая предпосылки познавательного развития, формируется умение учиться как компетенция, обеспечивающая овладение новыми компетенциями. Необходимым условием такой деятельности является развертывание учебного диалога, который неизбежно приводит к интенсивному развитию речи, оказывая значимое влияние не только на коммуникативное и личностное развитие ребенка, но и на не менее важное социальное развитие. Решение одной

и той же задачи разными группами детей (особенно в первый год обучения) позволяет сопоставить и критически оценить особенности их подходов, что в свою очередь рождает у детей взаимный интерес к работе друг друга.

Общение детей между собой на материале математики обогащает каждого из них, дает возможность самому учителю четко представлять, какие дети в первую очередь нуждаются в коррекции, учит детей работать в едином коллективном ритме, принимать позицию равноправного партнера. Другими словами, необходимо организовать обучение, ориентированное на такое психическое развитие ребенка, которое способствует его психологической готовности к школьному обучению (совершенно очевидно, что среди детей, принятых в первый класс, не все будут психологически готовыми к школьному обучению) и развитие у него универсальных учебных действий.

С первых дней изучения математики от детей требуется работа руками. Так, говоря о длине или ширине полоски, важно, чтобы дети прошлись по ней пальчиком, все действия с предметами должны осуществляться каждым ребенком, а не только выходящим к доске или, что еще хуже, самим учителем. Вся учебно-поисковая деятельность на первом году обучения (как и на последнем) связана с овладением способами сравнения по разным признакам различных предметов, окружающих ребенка, и с измерением величин. Это требует прикладывания одного предмета к другому, перекраивания фигур, переливания, пересыпания, ощупывания, т. е. опоры на все органы чувств. Для этого ребенок использует бумагу, ножницы, пластилин, конструкторы (а затем геометрические инструменты, технические приборы) и т. д., что позволяет интенсивно развивать сенсомоторную координацию, что особенно важно для 6—7- летних учеников.

Материал в учебниках структурирован так, чтобы было удобно и учителю, и родителям тех детей, которые по ряду причин могут пропустить уроки. Каждая тема завершается разделом «Проверь себя», но не менее значимыми являются и разделы «Это интересно» и «Задания на смекалку». Характер заданий, включенных в учебник, их построение и подбор основаны на принципе составления обратной задачи по отношению к данной. Среди этих заданий есть и те, которые дадут возможность учителю диагностировать сформированность у учащихся метапредметных и предметных компетенций. Прежде всего это так называемые задания с ловушками, задания на доопределение условий, на поиск общего в различном, на выбор способов действий и др. Использование различных типов заданий позволяет не только учить ребенка думать, развивать интуицию, воображение, но и включать эмоции, ставить новые исследовательские задачи и создавать атмосферу сотворчества и соразмышления.

Представленный курс математики по своему содержанию построен так, чтобы научить ребенка строить рассуждения, выбирать аргументацию, различать обоснованные и необоснованные суждения, вести поиск информации, уметь решать учебные и практические задачи средствами математики. Все это и составляет умение учиться (учить самого себя). ФГОС определяют умение учиться как основу развития личности, познающей мир через его освоение и преобразование в конструктивном сотрудничестве с другими.

Факторами, определяющими эффективность предлагаемого подхода к

обучению математики для реализации целей ФГОС, являются:

1) особенности математического содержания (введение понятия числа как результат практического действия измерения), заданного в контексте решения значимых жизненных задач);

2) логика курса математики, заданная системой учебно-практических задач, выстроенная в соответствии со структурой учебной деятельности и основанная на мотивации, на понимании учеником (а не только учителем!), что и зачем ему нужно знать и уметь, способствует созданию индивидуальной образовательной траектории;

3) подбор специальных новых типов заданий, адекватных новому подходу и представленных в виде целостной системы, которая позволяет ученику освоить универсальные учебные действия, обеспечивающие ему в дальнейшем способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса;

4) использование квазиисследовательского метода в обучении дает возможность не задавать понятия в готовом виде, а создавать условия для самостоятельных открытий, что существенно повышает мотивацию и интерес к учению, имеет неоценимое значение для познавательного развития ученика;

5) организация коллективно-распределенных форм деятельности, являясь основой коммуникативного развития ребенка, придает результатам образования социальную и личностную значимость;

6) система отношений детей между собой и с взрослыми: учителями и родителями, которая не только обеспечивает социализацию ребенка, но и формирует образ мира.

Система учебно-практических (ключевых) задач в курсе математики

1 КЛАСС

1. **Задача на восстановление объекта, обладающего различными свойствами (признаками).**

Решение этой задачи методом подбора объекта позволяет:

а) выделить те признаки, по которым его можно сравнивать с другими объектами;

б) найти различные способы сравнения предметов. Например, при сравнении по длине дети сначала опираются на зрительное восприятие, т. е. сравнивают «на глаз», а затем, когда этот способ не срабатывает, находят другие способы сравнения (наложение или приложение).

Научившись сравнивать различные предметы и геометрические фигуры по длине (ширине и высоте), ребенок попадает в ситуацию, когда этого умения становится недостаточно для сравнения. Например, необходимо подобрать точно такой же круг или многоугольник, у которых ребенок не может обнаружить ставшие привычными длину и ширину. У него возникает необходимость сравнения по другому признаку — ***площади***.

Такой общий подход к появлению новых признаков сравнения предметов позволяет ребенку уже на первых этапах обучения использовать его при решении целого класса частных задач на сравнение, что, в свою оче-

редь, значительно расширяет набор признаков, по которым можно сравнивать предметы. Например, не только по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, форме, цвету, материалу, количеству, но и по углам, расположению на плоскости и в пространстве, по составу частей и даже «по красоте». Сравнение «по красоте» является ключом к формированию каллиграфического навыка. Так, сравнивая уже написанные кем-то цифры, буквы, дети самостоятельно выделяют их основные элементы, анализируют способы их написания и тем самым конструируют образец, что принципиально меняет методику обучения — не от образца к написанию, а от написания к образцу, а от него к написанию.

Действуя с реальными предметами, их признаками (свойствами) и результатами сравнения по заданному признаку, дети выделяют существенные связи и отношения между компонентами действия, выполняя три основных типа заданий:

а) есть предметы, известен признак — необходимо установить результат сравнения;

б) есть предметы, известен результат сравнения — нужно установить, какой признак был выбран;

в) известны признак и результат сравнения — необходимо подобрать соответствующие предметы.

Вариативность этих заданий очевидна, что позволяет учителю в полном объеме контролировать свои действия и по мере необходимости их перестраивать.

2. **Задача на восстановление величины в ситуации, когда подбор величины, равной данной, невозможен и для ее восстановления необходимо изготовить новую величину** (речь, конечно, идет о предмете как носителе величины).

3. **Задача на моделирование отношений равенства-неравенства**, которая решается сначала с помощью предметов, затем копирующего рисунка предметных моделей (полосок), а лишь потом трансформируется в графическое (сначала отрезками, а затем, начиная со 2 класса, линейными, столбчатыми и круговыми диаграммами) и знаковое моделирование (буквенными формулами).

4. **Задача на введение буквенно-знаковых символов.** Введение знаков и букв представляет собой одну из важнейших задач в «дочисловом» периоде. В букве, обозначающей то или иное свойство, но не предмет, обобщаются выделенные отношения равенства-неравенства.

При обозначении величин используются буквы латинского алфавита. Сначала вводятся те буквы, которые совпадают с русскими по написанию и произношению (*A, K, E* и др.), затем те, которые совпадают по написанию, но не совпадают по произношению (*B, P, C* и др.), и лишь затем буквы *R, Q* и др. Буквы *X, Y, Z* вводятся для обозначения неизвестной величины.

5. **Задача на введение операций сложения и вычитания величин.** Решение задачи уравнивания величин и изучение способов перехода от неравенства к равенству приводят к необходимости *введения операций сложения и вычитания* величин и изучения их свойств сначала на предметном уровне, затем с опорой на графическую и знаковую модели.

Раннее введение операций сложения и вычитания величин существенно расширяет возможности применения дошкольного опыта ребенка и позволяет на уровне сформированных ранее умений оперировать с числами, подбирая «подходящие» числа вместо букв в формулах, описывающих результаты сравнения и уравнивания величин.

Подбор «подходящих» чисел к формулам, а затем к текстам задач имеет особое значение. Во-первых, дает возможность всем без исключения детям использовать свой дошкольный запас независимо от его объема и сделать тем самым выполнимыми любые предлагаемые учителем задания. Во-вторых, закладывает основы для таких важнейших математических понятий, как область допустимых значений, решение уравнений или выражений с параметрами. В-третьих, помогает детям устанавливать связь, а следовательно, делать «прикидку» того, подходят ли выбранные учениками числа к сюжету задачи и соответствует ли полученный результат тексту решаемой задачи и реальным фактам. Подбор так называемых подходящих чисел к текстовым задачам с буквенными данными относится, как уже было сказано, к разделу «Работа с данными» (из Примерной программы по математике, рекомендуемой Федеральным государственным образовательным стандартом), который в настоящей программе не выделен в отдельную тему, а органично встроен в различные другие разделы, в том числе и в обучение решению текстовых задач. Чтобы заменить буквы числовыми данными, дети должны будут определить возможные источники информации и осуществить поиск соответствующих числовых данных, проанализировать полученные сведения, соотнеся их сначала с сюжетом задачи, а затем с выполнимостью арифметических действий.

Насколько важно сформировать у ребенка умение подставлять в любые буквенные математические выражения числа, настолько необходимо умение выполнять обратные переходы, решая задачу восстановления буквенных выражений по числовым. Это оказывается решающим фактором изучения математики в старших классах, при работе с взаимообратными функциями, со способом нахождения интеграла как задачей по восстановлению первообразной функции по ее производной и т. д.

Уравнивая величины, дети устанавливают разностное отношение между ними, фиксируемое с помощью выражений «больше на», «меньше на», что позволяет приступить к раннему решению текстовых задач, включающих эти отношения.

Схема к задаче появляется «синхронно» с чтением текста: текст читает учитель, структурируя его в соответствии с возможностью изображения заданных величин и отношений между ними. Решение записывается с помощью буквенного ***выражения, равенства*** или ***уравнения***. Числовые значения придумывают дети в соответствии с сюжетом задачи и выполнимостью арифметических действий на основе пока еще дошкольного опыта. Если же текст задачи содержит числовые данные, то дети сначала должны оценить правомерность таких данных, т. е. проверить, подходят ли они по смыслу задачи, затем «восстановить» ее с буквенными данными и составить математическое выражение (а затем уравнение) для ее решения, а потом подставить вместо букв те числовые значения, которые были даны автором.

В дальнейшем способ «синхронного» составления схемы к задаче перестанет срабатывать, что приведет к необходимости искать другие способы моделирования, в том числе в форме краткой записи.

6. **Задача на введение понятия части и целого.** Введение понятия части и целого при решении задачи на воспроизведение величины по ее известным частям позволяет освоить способы построения и решения уравнений и существенно расширить класс решаемых задач. Подбор же «подходящих» к данному отношению чисел даст возможность рассмотреть состав числа (преимущественно однозначного), опираясь опять-таки на дошкольные умения.

Выполняя задания с «ловушками», где часть может оказаться больше, чем целое, или целое составлено без учета частей, дети устанавливают отношения между данными понятиями. Установление связи между сложением и вычитанием величин на основе понятий части и целого позволяет соотнести целое с суммой и уменьшаемым, а части — со слагаемым или вычитаемым и разностью и увидеть, что разные действия: $A + B = C$, $C - A = B$ или $C - B = A$ — характеризуют одно и то же отношение между величинами. Нахождение неизвестного при решении уравнений опирается не на правила, а на отношение между частями и целым, которое представлено в виде графической модели (схемы).

Понятие части и целого позволяет ввести переместительное и сочетательное свойства сложения величин. Порядок выполнения действий над величинами определяется не с помощью правил, а с опорой на схему, что создает предпосылки для установления свойств сложения чисел и порядка выполнения действий при сложении и вычитании чисел.

Таким образом, к концу дочислового периода у учащихся складывается содержательное расчлененное представление о величинах, их свойствах, операциях над ними (сравнение, сложение, вычитание), свойствах этих операций, равенств, неравенств. Формируются умения решать уравнения и задачи в буквенно-знаковой форме, складываются благоприятные предпосылки для формирования у учащихся понятия об области допустимых значений переменных, входящих в математическое выражение, уравнение или текстовую задачу.

Ключевая учебная задача появляется в ситуации, когда освоенные способы непосредственного сравнения предметов по заданному свойству не подходят, что приводит к необходимости **опосредованного сравнения величин**, где в качестве посредника первоначально выступает мерка, равная одной из сравниваемых величин (отчасти этот способ сравнения уже применялся детьми раньше), а затем и число, которое вместе с меркой (сначала меньшей, чем заданная величина) служит средством для воспроизведения такой же величины в другом месте или в другое время.

Задача измерения-отмеривания ставит перед детьми новые вопросы: какие предметы можно использовать в качестве той или иной мерки, а какие нельзя или неудобно, какое из свойств предмета может участвовать при использовании его для измерения. Так, например, ребро кубика можно использовать как мерку длины, а грань — как мерку площади и т. д.

Эта исследовательская задача приводит к ***оценке соотношения между величиной и меркой***, когда мерка либо намного меньше измеряемой вели-

чины, что делает ее неудобной — появляются составные мерки, либо больше, а иногда мерка вообще непригодна для измерения (например, для измерения длины окружности мерка, изготовленная из твердого материала, не подходит, так как не может изменять свою форму). Необходимо заметить, что, как правило, для измерения длины используются линейки, изготовленные из дерева, пластмассы или металла, что не дает возможности, например, при введении понятия «радиана» в старших классах «положить» радиус окружности на ее дугу, чтобы получить центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу окружности.

2 КЛАСС

Исследование вопроса о том, ***какие бывают мерки***, завершает изучение понятия величины в 1 классе и приводит к исследованию во 2 классе вопроса о том, ***какие бывают числа***, т. е. как в разное время разные люди записывали и называли числа, которые появились в процессе измерения и служат для построения нужной величины. Таким образом, ***программа 2 класса*** начинается **с измерения-отмеривания** и позволяет рассмотреть ***исторический аспект числа***: от его меточной формы до арабских цифр. Рассматривается устная и письменная нумерация разных народов. Это позволяет развести в сознании ребенка смысл числа как отношения величин и цифры как знака для его обозначения (проводится аналогия между звуком и буквой в русском языке).

Измеряя, отмеривая различные величины, дети приходят к необходимости «изобретения» измерительных приборов со шкалами, а следовательно, и к «изобретению» числовой прямой, числового луча и других числовых линий, которые характеризуются началом отсчета, направлением и единичной (исходной, основной) меркой.

Учащиеся решают **учебно-практические задачи**:

1. **Конструирование числовой прямой.** Процесс построения числовой прямой дает представление об упорядоченном бесконечном ряде чисел, в котором каждое число имеет собственное место, и, таким образом, дает возможность ***использовать порядковый аспект числа*** с опорой на его основные свойства.

2. **Количественный аспект числа** выражается результатом измерения величины меркой того же рода. Исследуется зависимость между величиной, меркой и числом. Теперь число отвечает на вопрос «Сколько мерок E содержится в величине A?», т. е. является характеристикой величины A. Так у учащихся формируется понятие числа. Теперь можно сравнивать величины по их числовым характеристикам без построения самих величин. Это приводит к необходимости выполнения операции сравнения чисел.

3. При **сравнении чисел** с помощью числовой прямой (чем дальше число по направлению, тем оно больше) возникает новая учебная ситуация, при которой ответить на вопрос, какое из двух чисел больше или меньше, легко, а вот на сколько больше (меньше) — путем пересчитывания количества шагов (мерок) между ними — оказывается трудно. На помощь приходит «измерительный» прибор — вторая числовая прямая (линейка).

4. Конструирование **способа сложения и вычитания чисел** (как правило,

в пределах десятка) сначала с помощью двух линеек (принцип логарифмической линейки), затем с помощью двух числовых прямых и, наконец, с помощью одной числовой прямой.

Выбор двух одинаковых линеек для выполнения действий позволяет сформулировать ряд условий:

а) шаги (мерки) на линейках одинаковы;

б) значки (цифры) для обозначения чисел одинаковы;

в) последовательность этих значков одинакова.

Таким образом, при сложении (вычитании) двух чисел, заданных в любой нумерации, ребенок использует две одинаковые линейки с соответствующими цифрами; «манипулируя» ими, он находит (считывает) нужный результат.

5. Увеличение числа слагаемых или отсутствие линеек создает предпосылки **для «открытия» нового способа сложения (вычитания) путем присчитывания (отсчитывания) по единице**. Теперь ребенку понятно, почему, например, при сложении отсчет второго слагаемого начинается не от начала числовой прямой, а от точки, соответствующей первому слагаемому.

В дальнейшем этот способ тоже окажется неудобным, когда вместо суммы 3784 + 2 надо будет находить сумму 3784 + 2561. ***Это, в свою очередь, потребует поиска «нового» способа поразрядного сложения взамен «старого» способа — присчитывания.***

6. В следующей учебной задаче рассматривается ситуация, когда **величина оказывается намного больше мерки**, что приводит к необходимости использования для измерения набора мерок, который упорядочивается от большей (из мерок, меньших измеряемой величины, что легко проверить непосредственным сравнением) к исходной (основной).

В таком случае результат измерения выражается не одним числом, а некоторым набором чисел, где каждое соответствует определенной мерке. Появляется табличная форма записи числа, которая приобретает со временем форму «заготовки», т.е. места для каждой цифры.

7. Следующая учебная ситуация, приводящая к решению учебно-практической задачи, требует **определения отношений между мерками для их изготовления** в другом месте или в другое время. Появляется новая числовая характеристика отношения между последующей и предыдущей мерками. Это отношение фиксируется стрелочкой и числом над прообразом разряда. Отношения между соседними мерками оказываются двух видов, одно из них постоянно. Тогда мы уже имеем дело не с набором мерок, где отношения между соседними мерками различны, а с системой мерок с постоянным отношением между соседними мерками (основание системы), при этом система остается открытой, т. е. всегда (по необходимости) может быть построена следующая мерка.

Это позволяет заранее изготовить различные системы мерок для измерения разных величин, распределив между группами спланированный объем работы. ***Десятичная система счисления*** рассматривается как частный случай. Чтобы измерить величину с помощью системы изготовленных в заданном отношении мерок, сначала нужно выбрать мерку, с которой удобно начинать измерение, — самую большую из тех мерок, которые меньше изме-

ряемой величины. Свой выбор необходимо доказать, сравнив непосредственно следующую за выбранной мерку с измеряемой величиной, которая должна оказаться уже больше этой величины.

Из сказанного следует: если основание системы (а это и есть основание системы счисления) равно, например, 6, то цифры 6 и последующих в записи многозначного числа быть не может, так как дети уже сравнивали величину со следующей меркой, в которой было 6 предыдущих. Другими словами, вводится естественное и осмысленное (благодаря наличию контрольного действия) ограничение на каждую цифру в записи позиционного многозначного числа в заданной системе счисления.

Таким образом, представление о позиционном многозначном числе формируется в рамках ***задачи измерения величины системой мерок с заданным или выбранным отношением***, где сначала определяется количество необходимых для измерения мерок (это значит, становится известным, сколько цифр будет в записи числа), а лишь затем производится сама операция измерения (это значит, определяется цифра каждого разряда), что позволяет впоследствии задать операционный состав способа выполнения любого арифметического действия как последовательного выполнения двух основных операций: определение количества цифр (разрядов) в искомом результате выполняемого действия и нахождение цифры, соответствующей каждому из этих разрядов.

Всеобщность этого способа, его применимость для нахождения результатов всех четырех арифметических действий очевидны, в то время как традиционная программа предусматривает лишь частичное использование этого способа в одном случае — при делении многозначных чисел.

8. Появление **новой формы натуральных чисел** требует вновь способов их сравнения, сложения и вычитания взамен ранее известных: сравнения с помощью числовой прямой, сложения и вычитания соответственно с помощью присчитывания и отсчитывания. Таким новым способом становится **поразрядное выполнение** всех указанных действий, что позволяет ребенку выполнить ***следующую задачу:*** вначале научиться определять, сколько цифр будет в результате выполнения действия, для чего придется определять те разряды, которые будут «переполняться» (при сложении и умножении) или разбиваться (при вычитании и делении), а затем знать табличные случаи (для всех действий), что предполагает конструирование таблицы сложения (вычитания), а затем и умножения (деления). Из сказанного понятно, что нет необходимости рассматривать по отдельности во времени случаи сложения (вычитания) без перехода через разряд и с переходом. Речь идет как раз о числах, при сложении (вычитании) которых в одних разрядах должен быть переход, а в других нет.

Решение этой задачи, безусловно, приходится на 2 класс, тогда как традиционно дети, к примеру, в 1 классе учат таблицу сложения (вычитания), а лишь затем, условно говоря, «узнают», зачем она нужна (для действий с многозначными числами).

Характеризуя программу 2 класса, необходимо подчеркнуть, что она рассчитана прежде всего на углубление и конкретизацию ранее усвоенных теоретических знаний о величине и числе. Значительную роль в этом отноше-

нии призвана сыграть работа, направленная на овладение общими способами и опирающимися на них приемами выполнения любых арифметических действий на примере сложения и вычитания, которым во 2 классе отводится значительное время.

9. Опираясь на понятие позиционного числа, дети должны **выявить основной принцип сложения и вычитания многозначных чисел** — поразрядное выполнение соответствующих действий. Им предстоит, во-первых, проанализировать операционный состав соответствующего способа выполнения арифметических действий, во-вторых, осознать всеобщность этого способа, его применимость для нахождения и проверки результатов всех четырех арифметических действий. Кроме того, наряду с анализом ошибкоопасных мест и составлением так называемых справочников ошибок (о чем упоминалось выше), которые можно допустить при выполнении того или иного арифметического действия, рекомендовано для проверки использовать калькулятор, но только в тех случаях, когда ученик сомневается в правильности вычислений. Выявление допущенной ошибки и служит основой для развертывания совместных с другими детьми действий по рефлексии, анализу и предвосхищению возможных ошибок, устанавливая при этом не только причины их появления и способы обнаружения, но и поиск заданий, позволяющих избавиться от каждой из них.

Поскольку этот способ содержательно связан со сформированным у детей понятием числа, вводившимся на основе измерения величин, его усвоение должно не только способствовать овладению рациональными приемами вычислений (что само по себе составляет одну из важных задач начального обучения математике), но и обеспечивать более глубокое понимание содержания понятия числа и действий с числами.

Первая из указанных выше задач (анализ операционной структуры общего способа вычисления результата арифметического действия) может и должна быть решена в процессе изучения материала, связанного с действиями сложения и вычитания. Детям уже известна связь между количеством разных мерок, которые использовались для измерения (построения) величины, и количеством разрядов в числе, фиксирующем результаты измерения. Опираясь на эти знания, они могут установить обусловленность разрядной структуры результата сложения (вычитания) структурой известных его компонентов (слагаемых, уменьшаемого и вычитаемого). Анализ этой зависимости позволяет установить рациональные приемы **конструирования таблиц сложения и вычитания**, способствующие их эффективному непроизвольному запоминанию, что имеет немаловажное значение для формирования вычислительных навыков.

10. Овладев приемами **письменных вычислений**, дети конструируют и **приемы устных вычислений** внетабличных случаев, причем не только в пределах 100, но и во всех случаях, которые сводятся к действиям в пределах 100, что значительно ***расширяет круг устных вычислений***. Продолжение этой работы предусматривается в процессе изучения действий умножения и деления.

3 КЛАСС

Умножение является центральной темой **программы 3 класса и одной из основных учебных задач.** В отличие от традиционной программы оно рассматривается как особое действие, связанное **с переходом в процессе измерения величин к новым меркам** (В.В. Давыдов). Фактически с этим действием дети сталкивались уже во 2 классе при изучении позиционных чисел. Однако там оно не было зафиксировано как особое действие и не получило развития. Поэтому **первой и основной *учебной задачей*** становится воспроизведение величины в ситуации, когда измеряемая величина много больше заданной мерки, в связи с чем возникает необходимость использования вспомогательной, промежуточной мерки. Одно из чисел, описывающее эту ситуацию, фиксирует отношение вспомогательной мерки к исходной (или к стандартной мерке, являющейся основанием принятой системы счисления), второе — количество вспомогательных мерок в измеряемой величине («по... взять... раз»), третье — отношение измеряемой величины к исходной мерке. Логическим завершением анализа этой ситуации является **введение деления** как действия, направленного на определение промежуточной мерки («деление на части») или числа таких мерок («деление по содержанию»). Тем самым появляется возможность установить содержательные связи между умножением и делением, а также содержательно интерпретировать отношения «больше (меньше) в... раз», «больше (меньше) на...».

Как и при изучении действий сложения и вычитания, изучение умножения и деления предусматривается начать с рассмотрения этих действий в общей (абстрактной) форме с помощью моделей. Имеется в виду, что при изучении умножения в качестве средств моделирования должны быть использованы не только линейные, но и плоскостные схемы, а также обеспечен переход от графических к символическим (буквенным) моделям (формулам). Овладение умением строить графические модели умножения и деления, осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно является одной из **важнейших задач этого этапа обучения**.

Особое внимание в процессе этой работы предусматривается уделить изучению **свойств умножения** — переместительного, сочетательного и распределительного (относительно сложения и вычитания). Исследование этих свойств опирается прежде всего на предметные действия ребенка, фиксирующиеся с помощью графических и знаковых моделей. В связи с этим рассматриваются порядок действий, определяемый только с опорой на графическую модель, а не на правила, предполагающие деление действий над числами на действия двух ступеней (действия первой ступени — читание, второй — умножение и деление), и его изменение. В итоге ученики должны овладеть умением определять значения выражений типа $375 \cdot 294 - 375 \cdot 293$ или $3984 \cdot 975 - 974 \cdot 3984$ и т. д.

В**торой *учебной задачей*** является ***конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное***, в основе которого лежит умение умножать многозначное число на однозначное. Анализируя способ нахождения указанного произведения, дети приходят к необходимости знания

результатов умножения однозначного числа на однозначное, т. е. к составлению таблицы умножения на множестве целых неотрицательных чисел, а не натуральных, как это принято. Другими словами, любая таблица умножения начинается с умножения на нуль, например: $9 \cdot 0$, $9 \cdot 1$, $9 \cdot 2$, $9 \cdot 3$ и т. д.

Понимание предметного содержания умножения и его свойств позволяет существенно перестроить **работу с таблицами умножения (деления)**. В основу этой работы положена задача **на исследование связи между изменяющимся множителем и разрядной структурой результата**. В связи с этим изменяется «естественный» порядок изучения таблиц. Целесообразно начать их конструирование с тех, в которых указанная выше связь обнаруживается в наиболее явном виде (таблицы умножения 9, 2, 5 и 6). Таблицы умножения 4, 8, 3 и 7 следует сконструировать, опираясь на распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Поскольку поиск закономерности, связывающей результат с изменяющимся множителем, для каждой таблицы представляет особую задачу, появляется возможность поддерживания активного интереса к этой работе на всем ее протяжении. В то же время, поскольку результаты табличного умножения оказываются прямым продуктом действий учеников, создаются предпосылки для их продуктивного непроизвольного запоминания, что **снимает необходимость в специальном заучивании таблиц**.

Уяснение содержания умножения создает предпосылки для того, чтобы построить **сетку классов чисел** и на этой основе осмыслить многозначное число как число многоразрядное. Освоение многоразрядного числа обеспечивается выполнением действий сложения и вычитания (включая сложные случаи, когда один из разрядов в уменьшаемом равен нулю), а также конструированием способа умножения многоразрядного числа на многозначное, которое сводится к умению умножать многозначное число на однозначное.

Особого внимания требует отработка приемов умножения многозначного числа на многозначное. Их уяснение предполагает предельное развертывание упоминавшегося выше принципа разрядности действий. Дети должны хорошо понимать не только обусловленность количества цифр (разрядов) в произведении множителями, но и способ получения каждой из этих цифр (с этой целью возможна постановка вспомогательных задач, требующих определения значения одного из разрядов произведения независимо от других разрядов). В результате этой работы обычный прием умножения «в столбик» должен приобрести для детей совершенно иное психологическое содержание.

Значительное место в программе 3 класса, как и в предыдущие 2 года, **отводится решению текстовых задач**, работа над которыми должна осуществляться в процессе изучения всех тем. ***Освоение общих способов анализа задачи является одной из сквозных учебных целей курса математики.*** Основное внимание должно быть сосредоточено на формировании основных приемов работы над текстом задачи, на способах моделирования отношений, представленных в условии задачи, в виде различных схем (и диаграмм в том числе), отыскивании на схеме равных величин, что имеет особое значение, так как, с одной стороны, придает всей предшествующей работе вполне определенный смысл, а с другой — позволяет детям выбрать наибо-

лее рациональный способ решения задачи — алгебраический (посредством уравнения) или арифметический (посредством составления математического выражения).

В контексте работы над задачами осуществляется **обучение решению уравнений**. Как и в 1 классе, их решение осуществляется с опорой на схему, при этом никакие «правила» не заучиваются. Дети должны решать уравнения, объясняя и обосновывая каждое свое действие, а не реализовывать готовый алгоритм.

Таким образом, предлагаемая программа 3 класса, будучи по формальной структуре программой ***формирования арифметических действий*** с многозначными числами, по существу предполагает усвоение ***принципов построения этих действий***. Такое содержание программы является предпосылкой для организации деятельности детей, направленной на решение двух типов учебных задач. С одной стороны, это задачи, связанные с выявлением, анализом и содержательным обобщением свойств величин, чисел и математических действий. С другой — это задачи, направленные на поиск и обоснование рациональных приемов выполнения того или иного действия. А в процессе этой деятельности и должны быть реализованы цели развивающего обучения на данном этапе.

Заключительная тема программы 3 класса предусматривает прежде всего, формирование приемов деления многозначного числа на многозначное. Конструирование деления любого многозначного числа на любое многозначное число требует последовательного выполнения четырех операций, о которых сказано ранее.

Как уже говорилось выше, овладение обобщенным способом выполнения письменных вычислений дает возможность оценить границы применения этого способа, что является основой для ***классификации устных и письменных вычислений***. Рассматриваются приемы устного счета, в том числе умножения на 11, на 25 и др.

В процессе формирования этих приемов должны быть закреплены и в значительной степени автоматизированы случаи табличного умножения и деления.

Выполняя устные и письменные вычисления, учащиеся не только осмысливают известные и новые приемы, но и придумывают аналогичные задания друг для друга. Так, подбирая многозначное делимое и однозначный делитель, кратный делимому, они ищут среди прочих такой способ, который позволил бы, не выполняя деления, узнать, будет ли делимое кратно делителю. Это и приводит к ***постановке следующей учебной задачи на конструирование*** признаков делимости, которые рассматриваются следующими группами: делимость на 2, 5 и 10, на 4, 25 и 100, на 8, 125 и 1000, на 9 и 3.

Три первые группы обосновываются делимостью 10 на 2 и 5, 100 на 4 и 25, 1000 на 8 и 25. Делимость же на 9 и 3 устанавливается с опорой на соответствующие таблицы умножения. Работая над признаками делимости, учащиеся тем самым отрабатывают умножение и деление многозначных чисел. Рассматриваются «составные» признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 20 и т. д.

4 КЛАСС

В 4 классе продолжается знакомство с числами, а именно **с десятичными дробями** как частным случаем позиционных систематических дробей в различных системах счисления. Таким образом, ***первая учебная задача*** связана с измерением и восстановлением величины, значительно меньшей исходной (основной) мерки.

Введение **позиционных систематических дробей** обусловлено прежде всего тем, что, завершая изучение понятия многозначного числа и действий с числами, заданными изначально в различных системах счисления, учащиеся вновь возвращаются к задаче измерения и воспроизведения величины в ситуации, когда для измерения (а затем и для воспроизведения) данной величины потребовалась не только система мер, полученных путем укрупнения с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), но и система мер, полученная путем уменьшения исходной меры в одно и то же число раз, равное коэффициенту укрупнения.

Другими словами, для измерения величин, много больших исходной меры, используют систему укрупненных мер с постоянным отношением, а для измерения величин, много меньших той же исходной меры, — систему уменьшенных (дробленых) мер с тем же отношением. Таким образом, учащиеся получают новый вид чисел — дробные, имеющие целую и дробную (после запятой) части. Числа рассматриваются в различных системах счисления, в том числе десятичной. Строится разрядная сетка, и даются соответствующие названия разрядам, полученным в результате уменьшения исходной мерки в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Полученные новые виды чисел получают свое место на числовой прямой, с помощью которой они могут сравниваться друг с другом и с известными видами чисел: с нулем и с ближайшими натуральными числами.

Измерения с помощью системы уменьшенных мер могут быть конечными и бесконечными, что приводит к появлению не только конечных, но и бесконечных дробей, в том числе периодических, которые будут рассматриваться позже (в 6 классе).

Однако предметом исследования становятся конечные десятичные дроби. Вводится операция округления дробей.

Конструирование способов выполнения действий с позиционными систематическими дробями, в том числе и с десятичными, позволит фактически отрабатывать все действия с многозначными числами, не тратя на это дополнительное время перед введением дробей, что и придает осмысленный характер умениям и навыкам счета в связи с использованием его в качестве средства для выполнения более сложных действий.

Такая логика построения материала, когда после действий с многозначными числами появляются подобные им по способу их получения и способу действий с ними позиционные систематические дроби, позволяет гораздо глубже понять ***обобщенный принцип образования позиционных чисел***.

Появление новых видов чисел, в которые входят десятичные дроби, а также способ нахождения дроби от числа и числа по его дроби дают возможность ввести ***понятие процента*** (эти тема вынесена в рабочую тетрадь).

Вычисления с десятичными дробями и процентами включены в решение реальных задач. Ведь в условиях рыночной экономики человеку необходимы принципиально новые умения, неизбежно связанные с математикой: перевод денежных единиц, сравнение цен на товары и многое другое. Именно такие задачи и требуют действий с десятичными дробями, округления дробей, введения понятия процента и др.

Особое место в программе 4 класса, о чем мы уже писали ранее, принадлежит уже известным детям с 1 класса понятиям **периметра, площади, объема** и способам их нахождения. Возврат к этим понятиям обусловлен необходимостью перехода от непосредственного измерения величин с помощью заданных мерок, включая стандартные меры, к использованию ***готовых результатов измерения***. Такой подход позволяет осмыслить ***основные принципы***, лежащие в основе способов нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур, углубляя тем самым известные геометрические понятия и открывая новые.

Курс математики 4 класса заканчивается возвратом на новом уровне к **решению текстовых задач**. Создается такая учебная ситуация, при которой ребенок, уже умея решать задачи, задает себе вопросы: «А что же такое задача? Как она устроена? Из чего состоит? По каким признакам можно задачи сравнивать? Что необходимо записать, о чем сообщить другому человеку, чтобы он смог в точности восстановить текст задачи?», т.е. происходит углубление представления о задаче, принципах построения текста, способах ее моделирования с помощью не только схемы, но и краткой записи, преобразованиях, которые создают условия для введения в последующих классах тождественных преобразований, лежащих в основе алгебраического способа решения уравнений, а значит, и задач, решаемых с их помощью.

Как правило, детей учат решать задачи по действиям, с опорой на которые и составляется математическое выражение. Однако потребности в его составлении для ребенка нет, ведь задача уже решена. Такой способ обучения решению задач (как и другим, не менее значимым темам программы) есть не что иное, как обучение от частного к общему, в то время как обучение в рамках системы Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова должно строиться с точностью до наоборот: от общего к частному. Это значит, двигаться нужно не от действий к составлению выражения (или уравнения), значение которого и может быть найдено последовательным выполнением арифметических действий. Поэтому сначала дети учатся составлять различные математические выражения (или уравнения) с опорой на схему, которая строится по ходу осмысления задачи, а лишь затем для нахождения значения выражения выполняют действия.

Итак, основное содержание курса математики — формирование понятия рационального числа — представлено как последовательность стратегических (ключевых) учебных задач: формирование понятия величины, т. е. введение в область отношения величин, раскрытие отношения величин как всеобщей формы числа, последовательное введение различных частных видов чисел как конкретизация общего отношения величин в определенных условиях, построение обобщенных способов действий с числами.

Реализация описанного математического содержания возможна лишь при

условии готовности учителя организовать сотрудничество детей, требует от него особой организации учебной деятельности школьников в форме постановки и решения ими учебных задач посредством универсальных учебных действий (В.В. Давыдов). В ходе такого обучения и происходят открытие и усвоение понятий, когда дети при участии учителя должны ***сначала осознать потребность*** именно в самом понятии, способе действия, а затем ***сконструировать*** его, вступая в содержательный ***учебный диалог*** как со сверстниками, так и с учителем, что требует от последнего новой педагогической позиции, позволяющей реализовать цели и задачи, поставленные в Федеральном государственном образовательном стандарте.

ПРОГРАММА

1 КЛАСС *(4 ч × 33 нед. = 132 ч)*

Тема 1. Выделение свойств предметов. Величины и отношения между ними. Отношение равенства-неравенства при сравнении предметов по выбранному признаку *(68 ч)*

1. **Непосредственное сравнение предметов по разным признакам:** форме, цвету, материалу, длине (ширине, высоте), площади, объему, количеству (комплектности по составу частей), массе, расположению на плоскости и в пространстве. Сравнение предметов по этим признакам.

Периметр как длина «границы» любой плоской геометрической фигуры.

Понятие о равновеликости и равносоставленности фигур. Существенные различия межу прямой, лучом, отрезком. Представление о ломаной, угле. Сравнение углов. Подбор предметов или геометрических фигур по заданному признаку.

2. **Моделирование отношений равенства и неравенства между величинами:**

предметное: с помощью полосок;

графическое:

а) с помощью копирующего рисунка;

б) с помощью отрезков;

знаковое:

а) с помощью знаков «=», «≠»;

б) с помощью букв и знаков «=», «>», «<» (формулы $A = B$, $A > B$, $A < B$ и т. д.).

Класс величин. Сравнение величин с помощью посредника, равного одной из них. Транзитивность отношений «равно» (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$), «больше-меньше» (если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$; если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$).

Переход от действий с предметами к схеме и формуле. Восстановление схемы по формуле и наоборот. Преобразования схем и формул. Связь между ними.

Сравнение «по красоте» способов написания цифры 1. Классификация всех цифр на основании сравнения их по составу элементов и форме на три группы:

а) цифры 1, 4, 7;

б) цифры 3, 5, 2;

в) цифры 6, 9, 8 и 0 и их последующее написание.

Тема 2. Сложение и вычитание величин *(52 ч)*

1. **Сложение и вычитание величин как способ перехода от неравенства к равенству и наоборот.** Три способа уравнивания величин. Введение знаков «плюс» и «минус». Выбор способа уравнивания в зависимости от условий его выполнения. Описание операции уравнивания с помощью схем и формул. Связь между схемой и формулой. Изменение схемы при изменении формулы и наоборот. Тождественные преобразования формул.

Решение текстовых задач (с буквенными данными), связанных с увеличением или уменьшением величин (отношения «больше на...», «меньше на...»). Составление текстовых задач по схеме (формуле). Подбор «подходящих» чисел для решения задачи с точки зрения:

а) сюжета задачи;

б) выполнимости действия;

в) выполнения действия конкретным ребенком (опора на дошкольную подготовку).

2. **Сложение и вычитание величин как способ решения задачи на восстановление целого или части.** Понятие части и целого. Моделирование отношений между частями и целым в виде схемы, формулы и записи с помощью «лучиков» (знакографической записи).

Взаимопереходы от одних средств фиксации отношений к другим.

Введение специальных обозначений для части и целого: $A + A = ©$

Названия компонентов при сложении и вычитании и их связь с понятием части и целого.

Относительность понятия части и целого. Подбор «подходящих» чисел к формулам. Состав однозначных чисел. Разбиение на части и составление из частей величин, геометрических фигур на плоскости и геометрических тел в пространстве.

Увеличение и уменьшение величины. Понятие нулевой величины.

Скобки как знак, показывающий другую последовательность выполнения операций над величинами: $A - B - C = A - (B + C)$.

Свойства операции сложения величин: переместительное и сочетательное. Составление и решение текстовых задач с буквенными данными на нахождение части и целого. Связь задач на уравнивание величин с задачами на нахождение части и целого.

3. **Понятие уравнения.** Определение значения одного из компонентов с опорой на понятия «часть» — «целое». Подбор «подходящих» чисел к формулам (опора на дошкольную подготовку) и наоборот. Описание числовых выражений с помощью буквенных формул как задача на их восстановление. Решение примеров «с секретами»: сложение и вычитание в пределах десятка с опорой на дошкольную подготовку. «Круговые» примеры, «магические» треугольники и квадраты. Составление детьми примеров «с секретами». Сравнение выражений с числовыми и буквенными данными. Решение задач с помощью уравнений. Подбор вместо букв подходящих чисел к текстовым задачам, выражениям, уравнениям.

Тема 3. Введение понятия числа *(12 ч)*

Переход от непосредственного сравнения величин к опосредованному.

Сравнение:

а) с помощью посредника, равного одной из сравниваемых величин (на основе транзитивности отношений);

б) с помощью мерки для измерения сравниваемых величин, благодаря которой обнаруживается кратность отношений: A/E и B/E, где A и B — сравниваемые величины, а E — третья величина того же рода, т. е. мерка.

Подбор мерок, удобных для измерения данной величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой. Простые и составные мерки.

Подбор подходящих предметов, используемых в качестве мерки.

Инструменты: циркуль, линейка, угольник. Ознакомление со стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

Знакомство с другими видами величин: время, скорость, стоимость.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу первого класса дети научатся:

- выделять разные свойства в одном предмете и непосредственно сравнивать предметы по разным признакам: по длине (ширине, высоте), площади, объему, массе, количеству, форме, цвету, материалу, углам и др.;
- моделировать отношения равенства и неравенства величин с помощью отрезков (графическое моделирование) и с помощью буквенной формулы (знаковое моделирование);
- производить сложение и вычитание величин при переходе от неравенства к равенству и обратно; исследовать ситуации, требующие сравнения величин и чисел, им соответствующих;
- описывать явления и события с помощью величин;
- прогнозировать результат сравнения величин путем их оценки и прикидки будущего результата;
- строить графические модели отношений (схемы) при решении несложных текстовых задач (с буквенными или числовыми данными), связанных с уменьшением или с увеличением величин; составлять текстовые задачи по схеме и формуле; придумывать вместо букв «подходящие» числа и заменять числовые данные буквенными;
- владеть понятием части и целого, уметь описывать отношения между частями и целым с помощью схем и формул;
- разбивать фигуры на части и составлять целое из частей плоских и объемных фигур;
- решать уравнения типа $a + x = в$, $a - x = в$, $x - a = в$ с опорой на схему;
- выполнять сложение и вычитание в пределах 10;
- представлять состав чисел первого десятка с опорой на дошкольную подготовку на основе понятия части и целого;
- изготавливать и конструировать модели геометрических фигур, предложенные в рабочей тетради, перекраивать их при сравнении площадей.

2 КЛАСС *(4 ч × 34 нед. = 136 ч)*

Тема 1. Введение понятия числа (продолжение) *(35 ч)*

1. **Задача непосредственного и опосредованного сравнения величин:**

а) подбор мерки, равной данной величине (повторение);

б) подбор мерок, удобных для измерения величины, и подбор величин, удобных для измерения данной меркой.

Простые и составные мерки. Подбор предметов, удобных для их использования в качестве мерки. Знакомство с приборами и инструментами, используемыми для сравнения и воспроизведения величины стандартными мерами длины, площади, объема, массы, углов.

2. **Действие измерения.** Число как результат измерения величины и как средство для ее восстановления. Компоненты действия измерения: величина (A), мерка (E), число (n) и связь между ними. Запись числа как результата измерения и счета с помощью меток, считалок и с помощью цифр в различных нумерациях (арабская, римская, славянская и др.).

Построение величины по мерке и числу; подбор и изготовление мерки по заданной величине и числу. Зависимость одного из трех компонентов ($A/E = n$) от изменения другого при постоянном третьем (фактически речь идет о функциональной зависимости).

3. **Числовая прямая.** Сравнение величин с помощью числовых значений. Построение числовой прямой. Изображение чисел на числовой прямой (отрезком и точкой). Понятие шкалы. Знакомство с приборами и предметами, имеющими шкалы: линейкой, весами, часами, мерными емкостями, динамометром, спидометром, термометром, транспортиром и др.

Условия существования числовой прямой, числового луча, числового круга: наличие начала отсчета, направления, единичной мерки (шага). Число 0 как результат измерения нулевой величины единичной меркой и как начало отсчета на числовой прямой.

Сравнение чисел на числовой прямой. Последующее и предыдущее числа. Бесконечность числового ряда. Линейка как модель числовой прямой.

Решение текстовых задач. Использование диаграмм.

Тема 2. Сложение и вычитание чисел *(24 ч)*

1. **Разностное сравнение чисел и сложение и вычитание чисел с помощью:**

а) двух линеек (стандартных и изготовленных) как моделей двух числовых прямых;

б) двух числовых прямых;

в) одной числовой прямой.

2. **Присчитывание и отсчитывание как новый способ нахождения суммы и разности** в условиях отсутствия необходимого числа линеек при трех и более слагаемых.

Решение и составление математических выражений, уравнений и задач с заменой буквенных данных на числовые данные (в пределах десятка). Нахождение значения числовых выражений со скобками. Определение и изменение порядка действий с опорой на схему. Решение различных задач на

сложение и вычитание с подбором:

а) «подходящих» чисел к заданному сюжету;

б) сюжетов к схемам с заданными числами.

Тема 3. Многозначные числа *(35 ч)*

1. **Набор и система мерок.** Задачи на измерение-отмеривание с помощью набора мерок. Упорядочивание и обозначение мерок в наборе. Выбор из данных мерок первой «подходящей» мерки. Запись результата измерения величины набором упорядоченных мер (от большей к меньшей) в форме таблицы. Связь «номера» выбранной мерки с количеством цифр в записи числа. Понятие разряда. Задача на необходимость установления отношения между мерками. Отношение «в... раз больше», «в... раз меньше». Решение задач с заданным отношением. Замена таблицы для записи результатов измерения «заготовками».

Переход от ***набора мерок***, в котором отношение между мерками произвольное, к системе мерок с постоянным отношением между ними (основание системы счисления).

2. **Позиционные системы счисления.** Понятие многозначного позиционного числа как результата измерения величины системой мерок с заданным отношением (основание системы). Чтение и запись чисел в различных системах счисления. Место нуля в записи многозначных чисел. Понятие значащего нуля в записи многозначного числа (когда нуль в середине и на конце) и незначащего (перед старшим разрядом). Сравнение многозначных чисел с помощью числовой прямой и поразрядное сравнение чисел, взятых в одной системе счисления. Представление числа в виде суммы разрядных слагаемых, замена суммы разрядных слагаемых числом.

3. **Десятичная система счисления как частный случай позиционной системы счисления.** Чтение и запись любых многозначных чисел. Названия первых четырех разрядов. Сравнение многозначных чисел.

Решение текстовых задач.

Тема 4. Сложение и вычитание многозначных чисел в разных системах счисления *(42 ч)*

1. **Постановка задачи** на сложение и вычитание многозначных чисел как переход от способа присчитывания и отсчитывания к конструированию способа выполнения действий «в столбик».

2. **Конструирование способа сложения и вычитания многозначных чисел.** Поразрядность сложения и вычитания как основной принцип построения этих действий. Запись примеров «в столбик», в которых имеются числа с одинаковым и разным количеством разрядов.

Определение разрядов, которые «переполняются» при сложении, путем сравнения суммы однозначных чисел в разряде с основанием системы счисления. Опора на состав числа — основание системы счисления. «Разбиение» разрядов при вычитании. Определение сильных и слабых позиций чисел в разряде. Определение количества цифр (разрядов) в сумме и разности.

Задача на нахождение значения каждой разрядной единицы (цифры каждого разряда) искомой суммы или разности. Постановка задачи на на-

хождение суммы однозначных чисел (табличные случаи сложения) и обратной задачи на вычитание.

Составление и подбор подходящих математических выражений с многозначными числами для решения текстовых задач, в том числе задач на построение диаграмм.

3. **Табличное сложение и вычитание.** Построение таблиц сложения однозначных чисел на множестве целых неотрицательных чисел. Таблица Пифагора.

Исследование таблицы сложения. Использование таблицы Пифагора как справочника.

Постановка задачи запоминания табличных случаев и выделение «трудных» случаев сложения с переходом через десяток. Исследование зависимости цифры в разряде единиц суммы от изменяющегося слагаемого как основы непроизвольного запоминания суммы.

Нахождение суммы многозначных чисел. Решение текстовых задач, в которых буквенные данные могут быть заменены многозначными числами. Составление и решение уравнений, математических выражений с многозначными числами по схеме.

Выделение табличных случаев вычитания. Конструирование способа вычитания с переходом через десяток. Письменное сложение и вычитание многозначных чисел, заданных в задачах, уравнениях и выражениях. Использование калькулятора при проверке.

Конструирование приемов устного сложения и вычитания многозначных чисел, которые сводятся к внетабличным случаям в пределах 100.

Решение текстовых задач.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу второго класса дети научатся:

- пользоваться понятием натурального числа как универсальным средством сравнения величин при переходе от непосредственного сравнения к опосредованному;
- решать задачи на измерение, отмеривание и нахождение удобной мерки;
- чертить с помощью линейки отрезок данной длины и измерять длину отрезка;
- читать диаграммы, анализировать их и использовать при решении задач;
- записывать результат измерения системой мерок; называть первые четыре разряда в десятичной системе счисления;
- сравнивать числа, группировать их по заданному или самостоятельно установленному правилу;
- складывать и вычитать многозначные числа в различных системах счисления, в том числе в десятичной, опираясь на таблицу сложения однозначных чисел и соответствующие ему табличные случаи вычитания;
- прогнозировать результат вычисления, пошагово контролируя правильность и полноту выполнения с опорой на составленный совместно с другими детьми справочник ошибок;
- делать оценку и прикидку будущего результата;

• пользоваться калькулятором для проверки в том случае, если ученик сомневается в правильности вычислений;

• строить графические модели (схемы, диаграммы) отношений между величинами при решении текстовых задач с буквенными и числовыми данными с опорой на понятие целого и части и разностное сравнение величин;

• исследовать зависимость решения задачи от ее условия, зафиксированного в схеме;

• сравнивать разные способы вычислений и выбирать рациональные способы действий с опорой на графическую модель (схему);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению;

• использовать известные ученику математические термины и обозначения.

Понимать и применять:

• принцип образования последующего и предыдущего чисел на числовой прямой;

• принцип образования многозначных чисел в любой системе счисления;

• общий способ чтения любого многозначного числа в любой системе счисления с неограниченным числом разрядов;

• общий принцип выполнения любого арифметического действия на примере сложения и вычитания любых многозначных чисел в десятичной системе счисления.

3 КЛАСС *(4 ч × 34 нед. = 136 ч)*

Тема 1. Понятие умножения и деления *(24 ч)*

1. **Умножение как способ измерения величин**, связанный с переходом в процессе измерения к новым меркам.

Постановка и решение задач, приводящих к изменению единиц измерения. Графическое изображение умножения. Оценка различных отношений между величинами и исходной меркой:

а) когда измерение удобно производить исходной меркой;

б) когда для измерения нужна дополнительная (промежуточная) мерка.

Конструирование формулы вида «по *а* взять *в* раз»:

$A/E = a \cdot в$.

Введение термина «умножение». Переход от словесной формы к графической, знаковой и обратно. Конструирование способа замены любого произведения двух чисел одним числом в позиционной форме в десятичной системе счисления как универсального способа сравнения величин, описанных в виде произведения:

а) с помощью числовых прямых или двух линеек;

б) с опорой на отношение частей и целого, т. е. на связь умножения со сложением (в формуле $a \cdot в = c$, где a — часть, $в$ — количество частей, c — целое).

Решение текстовых задач, включающих отношение «больше в... раз», «меньше в... раз», как новый способ уравнивания величин. Кратное сравнение величин. Использование диаграмм при решении задач.

2. **Деление как действие по определению:**

а) промежуточной мерки — деление «на части»;

б) числа промежуточных мерок — деление «по содержанию».

Трехчленность операции умножения. Исследование зависимости между величиной, промежуточной меркой и их количеством. Связь деления с вычитанием. Введение названий компонентов при умножении и делении и их связь с понятием целого и части. Графическое моделирование деления. Зависимость результатов умножения и деления от изменения компонентов и наоборот. Решение и составление по схемам текстовых задач, уравнений, математических выражений.

Тема 2. Свойства умножения *(12 ч)*

Переместительное свойство умножения. Вычисления с опорой на переместительное свойство.

Сочетательное свойство и вычисления с опорой на него. Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания. Порядок выполнения действий, изменение порядка выполнения действий с опорой на схему. Приемы устных вычислений с опорой на свойства сложения и умножения. Рациональные способы вычислений.

Решение текстовых задач.

Тема 3. Умножение и деление многозначных чисел *(55 ч)*

1. **Постановка задачи нахождения произведения многозначных чисел.**

2. **Конструирование** способа умножения многозначного числа на однозначное как основы для умножения многозначного числа на многозначное. Выделение принципа поразрядности выполнения действия. Конструирование способа нахождения результата как последовательное нахождение:

а) разрядов, которые «переполняются»;

б) количества цифр в результате;

в) цифры каждого разряда.

3. **Постановка задачи составления таблицы** умножения однозначных чисел (таблицы Пифагора), включая случаи умножения на 0 и 1. Умножение на 10, 100, 1000 и т. д. Способы работы с таблицей как со справочником.

4. **Постановка задачи запоминания** таблицы умножения и рассмотрение каждой таблицы в отдельности.

Таблица умножения на 9 и соответствующая таблица деления; умножение любых многозначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1, 9, на любое однозначное число с опорой на переместительное свойство умножения; умножение «в столбик» на числа, оканчивающиеся нулями: 90, 900, 9000 и т. д.

Таблица умножения на 2 и таблица деления; умножение многозначных чисел, включающее умножение на 9 и 2. Умножение на 20, 200, 2000 и т. д.

5. **Деление с остатком** и его графическое представление. Деление с остатком в случае, когда делимое меньше делителя. Необходимые и достаточные условия нахождения результата деления с остатком.

Решение текстовых задач.

6. **Таблицы умножения и деления** на 5 и 6, 4 и на 8, 3 и 7. Умножение многозначных чисел на однозначные числа и разрядные единицы. Приемы устных и письменных вычислений при решении уравнений и текстовых за-

дач, в которых буквенные данные могут быть заменены такими числами, с которыми учащиеся могут выполнять действия. Умножение многозначных чисел на разрядные единицы.

Решение текстовых задач.

7. **Классы чисел. Сетка классов.** Чтение и запись многозначных чисел. Определение количества десятков, сотен, тысяч и т. д.

Определение количества цифр в записи многозначного числа по старшему разряду. Действия с многозначными числами. Текстовые задачи.

8. **Умножение многозначного числа на многозначное.** Конструирование способа умножения многозначного числа на многозначное и запись его в виде модели. Определение числа цифр в произведении. Решение и составление уравнений, математических выражений, текстовых задач по заданным схемам и наоборот.

9. **Деление многозначных чисел.** Конструирование способа деления многозначного числа на однозначное: принципы поразрядности при делении. Постановка задачи деления любого многозначного числа на любое многозначное:

а) определение первого неполного делимого (разбиение);

б) нахождение количества цифр в частном;

в) нахождение «подсказок» при делении многозначных чисел, с опорой на которые происходит подбор цифры в частном. Умножением, а не делением подбирается цифра в частном.

10. **Нахождение значения числового выражения**, содержащего деление многозначного числа на многозначное. Порядок действий в математических выражениях, составленных из многозначных чисел и включающих все арифметические действия. Использование калькулятора для проверки.

Решение задач и уравнений на все действия с многозначными числами. Отображение информации, содержащейся в текстовых задачах, в виде диаграммы.

Тема 4. Действия с многозначными числами *(45 ч)*

1. **Поразрядность выполнения всех действий с многозначными числами** как основной принцип построения этих действий. (Рефлексия.)

Запись и выполнение сложения, вычитания, умножения и деления «в столбик».

2. **Классификация устных и письменных вычислений.** Анализ известных детям способов устных и письменных вычислений, содержащих:

а) сложение и вычитание;

б) умножение и деление.

3. **Приемы устных вычислений:** умножение на 11, на 101, умножение и деление на 25 и другие числа.

4. **Признаки делимости:** на 2, 5 и 10; на 4, 25, 100; на 8, 125, 1000; на 9 и 3. Признаки делимости на 6, 15, 36 и другие как одновременная опора на известные признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 и т.д.

5. **Решение текстовых задач**, включающих необходимость использования признаков делимости.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу третьего класса дети научатся:

• находить способ измерения величин в ситуации, когда предложенная учителем величина значительно больше исходной мерки; создавать и оценивать ситуации, требующие перехода от одних мер измерения к другим;

• использовать схему умножения (она же и деления) при решении текстовых задач, составляя выражение или уравнение; по схеме придумывать или подбирать текстовые задачи; применять калькулятор при проверке вычислений;

• анализировать зависимости между величинами, с которыми ученик имеет дело при решении задач;

• строить графические модели арифметических действий и осуществлять переход от этих моделей к буквенным формулам и обратно; читать и строить диаграммы;

• решать уравнения типа $a \cdot x = в$, $x \cdot a = в$, $a : x = в$, $x : в = a$;

• умножать и делить многозначное число на многозначное с опорой на таблицу умножения (и только умножения!) однозначных чисел от 0 до 9;

• основным приемам устных вычислений при выполнении любого арифметического действия;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами.

понимать:

• смысл умножения как особого действия, связанного с переходом к новой мерке в процессе измерения величин;

• смысл деления как действия, направленного на определение промежуточной мерки или числа этих мерок;

• как устроена сетка классов чисел, включая класс миллиардов.

4 КЛАСС *(4 ч × 34 нед. = 736 ч)*

Тема 1. Многозначные числа и десятичные дроби как частный случай позиционных систематических дробей *(64 ч)*

1. **Действия с многозначными числами. Повторение** *(11 ч)*

2. **Измерение величин:**

а) анализ условий, при которых получается: однозначное число; многозначное число в различных системах счисления;

б) постановка ***задачи воспроизведения величины*** меньшей, чем заданная исходная мерка;

в) набор и система мерок меньших, чем исходная. Построение ***систе-***

мы мер с постоянным отношением между ними (основание системы счисления), в том числе и с отношением 10;

г) запись результата измерения величины с помощью системы укрупненных мерок и системы уменьшенных мерок. Табличная форма записи, введение запятой. Позиционные систематические дроби в разных системах счисления. Знакомство с записью результата измерения в форме обыкновенной дроби. (Например: 0,13 = 1/3 или 0,25 = 2/5.)

3. **Запись и чтение десятичных дробей.** Место десятичных дробей на числовой прямой. Сравнение десятичных дробей с помощью числовой прямой. Принцип поразрядности при сравнении систематических позиционных дробей. Построение величины по заданной позиционной или обыкновенной дроби и исходной мерке. Округление десятичных дробей с избытком и с недостатком.

4. **Действия с многозначными числами и десятичными дробями.** Сложение и вычитание десятичных дробей. Умножение и деление десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. Сохранение числа при последовательном умножении и делении его на 10, 100, 1000 и т. д.

Конструирование способа умножения десятичных дробей и деления, когда делитель — число натуральное. Сведение случая деления на десятичную дробь к делению на натуральное число.

Микрокалькулятор. Проверка действий с различными видами чисел с помощью микрокалькулятора.

Решение и составление текстовых задач, уравнений и математических выражений с десятичными дробями. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби.

5. **Стандартные системы мер.** Действия с числовыми значениями величин. Десятичные дроби и стандартные системы мер. Перевод одних мер в другие. Меры длины, площади, массы, объема.

Действия с числовыми значениями величин. Решение и составление текстовых задач, требующих подбора «подходящих» к данным числам сюжетов и «подходящих» к данному сюжету чисел.

Деньги как мера стоимости. Валюты в России, Америке, странах СНГ. Курс одних валют по отношению к другим. Стандартные меры измерения времени: век, год, месяц, неделя, сутки, час, минута, секунда. Стандартные меры измерения углов: градус, минута, секунда, радиан.

Число как результат кратного отношения длины окружности к диаметру, т. е. как число радиан в полуокружности.

Тема 2. Периметр, площадь, объем *(34 ч)*

1. **Периметры различных плоских фигур и способы их вычисления.** Сравнение периметров различных фигур с помощью посредника (например, проволоки и т. п.). Формулы периметра прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других геометрических фигур, включая правильные многоугольники. Вычисление периметров геометрических фигур и фигур произвольной формы (границы фигур — кривые линии). Использование гибких мерок.

2. **Площади геометрических фигур.** Непосредственное и опосредованное

сравнение площадей геометрических фигур. Измерение площади прямоугольника путем непосредственного наложения мерки, в том числе квадратного сантиметра, замена этого способа измерением длин сторон.

Формула площади прямоугольника: $S = a \cdot b$.

Измерение площади прямоугольного треугольника как нахождение половины площади соответствующего прямоугольника. Формула площади прямоугольного треугольника: $S = (a \cdot b) : 2$, где a и b — длины сторон прямоугольника, составленного из двух одинаковых треугольников.

Поиск двух из трех сторон прямоугольного треугольника, измерение которых позволяет вычислить его площадь. Выбор прямоугольных треугольников среди прочих.

Виды треугольников. Постановка и решение задачи нахождения площадей непрямоугольных треугольников путем разбиения их на прямоугольные. Формула площади произвольного треугольника: $S = (a \cdot h) : 2$, где h — высота треугольника.

Нахождение площадей геометрических фигур путем разбиения или перекраивания их различными способами на треугольники или прямоугольники. Поиск рациональных способов разбиения фигуры для вычисления ее площади. Площадь правильного n-угольника. Вычисление площадей различных геометрических фигур.

Палетка как прибор для измерения площадей фигур произвольной формы. Алгоритм измерения площади с помощью палетки. Решение текстовых задач, включающих понятия площади и периметра.

3. **Объемы геометрических тел.** Измерение объема прямоугольного параллелепипеда путем заполнения его кубическими мерками и замена способа непосредственного вложения и пересчета мерок вычислением произведения трех измерений: длины, ширины, высоты — и нахождением с их помощью объема $(V = a \cdot в \cdot c)$ или произведения площади основания на высоту $(V = S \cdot H)$.

Общий подход к вычислению объема любых «призмоподобных» и «пирамидоподобных» геометрических тел.

Тема 3. Анализ решения текстовых задач *(38 ч)*

1. **Строение задачи. Краткая запись задачи. Схемы. Уравнения.** Краткая запись условия задачи как новое средство моделирования, когда текст задан в косвенной форме или содержит большое количество данных.

Восстановление текста задачи по краткой записи и наоборот. Матричная форма краткой записи (таблица) для задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами.

Преобразование краткой записи к виду, удобному для графического моделирования (составление схемы).

Составление схемы по краткой записи и наоборот. Выделение равных величин и составление уравнений по схеме. Составление разных уравнений по одной и той же схеме на основе выбора обозначения неизвестной величины и выражение остальных неизвестных величин через первую.

Составление к задачам уравнений, удобных для решения. Преобразование уравнений на основе преобразования схем. Зависимость изменения

уравнения от изменения схемы и наоборот.

2. **Задачи на «процессы».** Время и его измерение. Понятие о скорости. Общий подход к решению текстовых задач, связанных с пропорциональной зависимостью между величинами:

а) на движение (выделение характеристик движения: времени, скорости, расстояния — и связи между ними);

б) на куплю-продажу;

в) на работу (производительность труда, время, объем работ);

г) на изготовление товара (расход ткани на одну вещь, количество вещей, общий расход) и т. п.

Составление краткой записи задачи в виде таблицы:

а) на встречное движение;

б) на движение в противоположных направлениях и в одном направлении. Понятие скорости удаления и скорости сближения.

Планируемые результаты освоения программы и характеристика деятельности учащихся

К концу четвертого класса дети научатся:

- читать и записывать многозначные числа и конечные десятичные дроби, сравнивать их и выполнять действия с ними; исследовать связь между десятичными дробями и натуральными числами;
- выполнять любые арифметические действия с многозначными числами (без ограничения числа разрядов); сравнивать разные способы вычислений; выбирать рациональный (удобный) способ действия;
- моделировать с помощью схемы отношения между компонентами арифметических действий в математических выражениях, определяя порядок действий на основе анализа этих отношений;
- прогнозировать результат вычислений, используя калькулятор при проверке;
- составлять формулы периметра и площади любого многоугольника (и прямоугольника в том числе) и использовать их при решении задач;
- вычислять периметры различных плоских фигур, описывать их свойства;
- использовать различные способы вычисления площади фигуры: прямоугольника, треугольника и других многоугольников;
- применять общий способ нахождения периметра, площади и объема любых геометрических фигур;
- изготавливать модели геометрических тел; использовать различные инструменты и технические средства (линейка, угольник, транспортир, циркуль, калькулятор и др.);
- конструировать геометрическую фигуру (отрезок, ломаную, многоугольник, в том числе прямоугольник) с заданной величиной (длиной, в том числе периметром, площадью);
- упорядочивать величины; моделировать и разрешать реальные ситуации, требующие умения находить геометрические величины (планировка, наклейка обоев и т. п.);
- анализировать строение задачи и схему как основание для классифи-

кации;

• выявлять связь между пропорциональными величинами: скоростью, временем, расстоянием; ценой, количеством, стоимостью и др. и использовать известную схему умножения (деления) для решения текстовых задач;

• использовать новое средство моделирования условия задачи — краткую запись; составлять текст задачи по краткой записи; преобразовывать краткую запись и соответствующий ей текст (и наоборот);

• находить нужную информацию для подбора «подходящих» чисел к условию задачи и ее решению; придумывать свои варианты замены букв числами и наоборот;

• представлять информацию в таблице и на диаграмме;

• искать ошибки как при выполнении вычислений, так и при решении текстовых задач и уравнений; анализировать их причины; обнаруживать и устранять ошибки путем подбора или придумывания своих заданий (с их последующим выполнением), помогающих избавиться от выявленной ошибки;

• выявлять задания с «ловушками», среди которых есть задания (и задачи) с недостающими данными, с лишними данными, софизмы и др.;

иметь представление:

• о признаках делимости;

• о многоугольниках и геометрических телах;

• о видах углов и треугольников.

Предлагаемая программа построена так, что позволяет реализовать каждый из трех вариантов программ, которые в настоящее время представлены в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования второго поколения на новом качественном уровне в форме теоретического знания.

Однако, учитывая то обстоятельство, что уровни развития детей, индивидуальные особенности учителей и региональные условия могут значительно различаться, можно предложить еще **три варианта** дифференциации данной программы обучения.

Все они предполагают введение факультативов, но один из вариантов связан с переносом части предложенной программы на факультативное изучение, другой — с дополнением данной программы факультативом, а третий — с усилением самой программы и дополнительным факультативом.

Рассмотрим каждый из этих вариантов.

При **первом варианте** (условно говоря, облегченном) можно предложить на выбор **вынести на факультатив** из программы 3 класса:

1) признаки делимости;

2) некоторые из предложенных приемов устных вычислений, которые традиционно рассматриваются на факультативах (умножение на 11, 101, умножение и деление на 25, умножение одинаковых чисел, оканчивающихся на 5, т. е. $25 \cdot 25$, $35 \cdot 35$ и т. п.).

Из программы 4 класса:

1) понятие процента и решение соответствующих текстовых задач, работу с рекламными материалами;

2) знакомство с валютами разных стран и курсами валют по отношению

друг к другу;

3) нахождение объемов геометрических тел;

4) кроме выноса части материала на факультатив можно сократить время (но не отказываться совсем!) на решение текстовых задач, приводящих к составлению сложных уравнений.

Особо хотим отметить, что самовольный отказ от изучения других тем программы, например от десятичных дробей и действий с ними, не только нарушит логику построения курса, что недопустимо, но и лишит учащихся возможности, во-первых, переосмыслить на новом уровне принципы устройства многозначных чисел в разных системах счисления, а во-вторых, завершить формирование навыков письменных и устных вычислений с многозначными натуральными числами, которые включены в действия с десятичными дробями в качестве средства. Другими словами, при выполнении действий с десятичными дробями дети фактически отрабатывают действия с натуральными многозначными числами (и это лишь один из примеров).

Второй вариант предусматривает выполнение основной программы и может быть дополнен **факультативом**, ориентированным на углубление изучаемого материала:

1) при изучении во 2 классе позиционных систем счисления можно предложить исследовать способы перевода чисел из одной системы счисления в другую, если величины, с которыми действует ребенок, измерялись разными системами мер, и составить сборник соответствующих заданий на их сравнение, сложение и вычитание. Причем перевод числа из одной системы счисления в другую осуществляется с помощью действия восстановления величины;

2) в развитие предыдущей темы после изучения всех действий с многозначными числами в десятичной системе счисления можно предложить конструирование умножения и деления в недесятичных системах счисления (3—4 класс).

Вообще хотелось бы отметить, что учителя иногда недооценивают ту роль, которая отведена в обязательной программе работе с числами, представленными в недесятичных системах счисления, особенно на первом этапе. Значение этой темы огромно как для осмысления принципа устройства десятичной системы счисления и организации совместной деятельности детей, так и для формирования качественных вычислительных навыков. Так, складывая или вычитая, например, числа в пятеричной системе счисления, дети осмысленно усваивают соответственно состав числа 5 и счет в пределах 5, поэтому, работая с натуральными числами, а затем и дробными в разных системах счисления, учитель предоставляет возможность слабым детям вновь и вновь возвращаться к тому материалу, которой ранее по каким-либо причинам был плохо усвоен ребенком, причем понятно, что это не просто повторение изученного, а возвращение на качественно новом уровне, причем возвращение, обеспечивающее продвижение ребенка вперед.

Третий вариант программы можно использовать в классах, где, во-первых, математику с 1 класса ведут либо учителя математики, либо учителя начальных классов, проявляющие особый интерес к преподаванию математики (и те и другие должны непременно пройти обучение в центре переподг-

готовки работников образования), а во-вторых, большинство поступивших детей оказались с высокой психологической готовностью к школе, хорошей дошкольной подготовкой и ярко выраженными интересом и способностями к изучению математики.

Эта **углубленная** программа обучения математике включает материал, рекомендованный в предыдущем варианте для факультативных занятий.

В качестве дополнительного материала, который учитель может использовать после уроков, можно предложить следующие тематические занятия:

1) задачи на разрезание и перекраивание фигур (1 класс);

2) задачи с переливаниями, дележами, переправами при затруднительных обстоятельствах (1—2 классы);

3) ознакомление учащихся с одним из аналитических методов решения задач, решаемых «от конца к началу» (2—3 классы);

4) задачи на проценты (включены в р/т № 1 для 4 класса);

5) различные занятия по истории математики (1—4 классы);

6) занятия, связанные с изучением вероятности случайных событий (4 класс).

Кроме тематических занятий можно предложить сконструировать способ умножения многозначных чисел (в отличие от умножения «в столбик»), основанный на правиле «ножниц» (автор Э.И. Александрова), позволяющий фактически устно, без записи промежуточных результатов получать произведение. Этот новый способ действия дает возможность значительно улучшить устный счет, делая его более мотивированным (подробно описан в методическом пособии для учителя, 3 класс).

Совершенно очевидно, что предлагаемые темы факультативных занятий могут быть продолжены. Учитель вправе самостоятельно выбрать темы из предложенных или внести собственные, а также использовать данные рекомендации при любом из трех вариантов программы. Однако при подборе собственных вариантов факультативов рекомендуем руководствоваться следующими соображениями: факультатив должен либо углубить понятия, изучаемые в обязательной программе, либо расширить представления детей о математике путем рассмотрения элементов математической логики, теории вероятности, теории графов, истории математики, аналитических методов и нестандартных приемов решения задач. Факультативные занятия не должны включать темы, которые будут предметом исследования в более поздние сроки обучения в школе.

* * *

Программа обеспечена учебно-методическими комплектами для каждого года обучения:

1) учебники для каждого года обучения:
2) методические пособия «Обучение математике» (для каждого класса);
3) рабочие тетради (для каждого класса);
4) контрольные работы (для каждого класса).